



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Esercizi 4 — Metodi matriciali, sensitività e geometria

Esercizi svolti sui capitoli 11–15: simplesso rivisto primale e duale, metodo primale-duale, analisi di sensitività, geometria della programmazione lineare.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

11	Algoritmo del simplesso rivisto	2
11.1	Problemi con due variabili	2
11.2	Problemi con tre variabili	70
12	Algoritmo del simplesso duale rivisto	112
13	Il metodo primale-duale	159
14	Analisi di sensitività	166
15	La geometria della programmazione lineare	172



Algoritmo del simplesso rivisto

11.1 Problemi con due variabili

Esercizio 11.1 — Algoritmo del simplesso rivisto ($P0$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 3$ variabili e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (4) \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$(x_3) = (4) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_3) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = (1) \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (0) \quad \bar{\mathbf{b}} = (4)$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_3 = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0) (4) = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} - (0) \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_1 \quad \mathbf{c}'_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_1 \quad \bar{\mathbf{c}}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = (2)$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_3 = 2 \end{array} \right. \quad \mathbf{d} = (2)$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \underbrace{4 - t \cdot 2}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \right\} \quad \left\{ t \leq 2 \right\} \quad \text{quindi} \quad t_m = 2$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 2$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot.

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = (2) \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (2) \quad \bar{\mathbf{b}} = (2)$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \pi_1 = 2 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (1)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (1) (2) = 2$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = (3)$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 d_1 = 3 \end{array} \right. \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \underbrace{2 - t \cdot \frac{3}{2}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \right\} \quad \left\{ t \leq \frac{4}{3} \right\} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{4}{3}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{4}{3}$. Il valore di x_1 diventa zero e x_1 è la riga pivot.

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{2\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_2) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = (3) \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (4) \quad \bar{\mathbf{b}} = \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \pi_2 = 4 \\ \pi = \left(\frac{4}{3}\right) \end{array} \right.$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \left(\frac{4}{3}\right) (4) = \frac{16}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\left(\frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

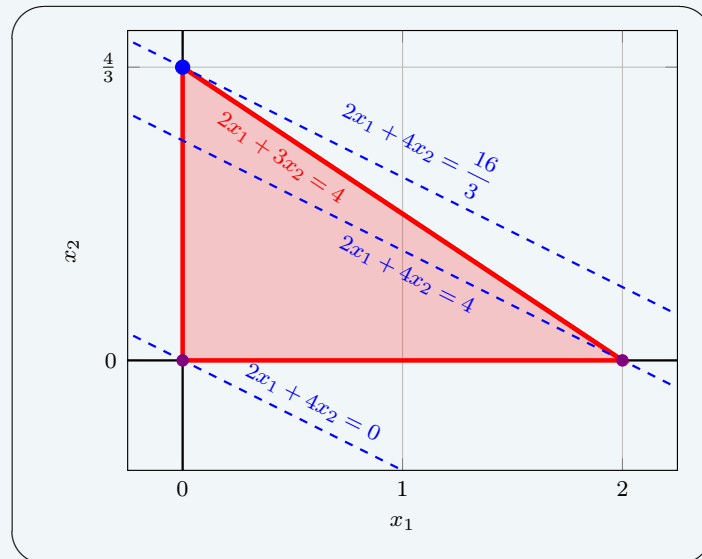
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_2) = \left(\frac{4}{3}\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{16}{3}$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{16}{3}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.2 — Algoritmo del simplesso rivisto (P1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 6x_2 \leq 16 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 3$ variabili e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 8x_2 & & \\ \text{soggetto a} & 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 = 16 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (16) \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$(x_3) = (16) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_3) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = (1) \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (0) \quad \bar{\mathbf{b}} = (16)$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

RisolviAMO $\pi \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 = 0 & \pi = (0) \end{cases}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = (0) (16) = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (1 \quad 8) - (0) (3 \quad 6) = \underbrace{(1 \quad 8)}_{\mathbf{c}'_1 \quad \mathbf{c}'_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_2} = \underbrace{(1 \quad 8)}_{\bar{\mathbf{c}}'_1 \quad \bar{\mathbf{c}}'_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = (3)$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_3 = 3 \end{array} \right. \quad \mathbf{d} = (3)$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \underbrace{16 - t \cdot 3}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \right. \quad \left\{ t \leq \frac{16}{3} \right. \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{16}{3}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{16}{3}$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot.

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = (3) \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (1) \quad \bar{\mathbf{b}} = \left(\frac{16}{3} \right)$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = (6 \quad 1) \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \pi_1 = 1 \end{array} \right. \quad \pi = \left(\frac{1}{3} \right)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \left(\frac{1}{3} \right) (16) = \frac{16}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{c}' = (8 \ 0) - \left(\frac{1}{3}\right) (6 \ 1) = \underbrace{(8 \ 0)}_{c_2 \ c_3} - \underbrace{\left(2 \ \frac{1}{3}\right)}_{\pi \ A_2 \ \pi \ A_3} = \underbrace{\left(6 \ -\frac{1}{3}\right)}_{\bar{c}_2 \ \bar{c}_3}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \pi \ A_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $A_2 = (6)$

Risolviamo $A_B \ d = A_2$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3 d_1 = 6 & d = (2) \end{cases}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{b} - t \ d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{16}{3} - t \cdot 2}_{x_1 \geq 0} \geq 0 & \begin{cases} t \leq \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{8}{3}$. Il valore di x_1 diventa zero e x_1 è la riga pivot.

• Iterazione 3

Con $B = \{2\}$ e $N = \{1, 3\}$, abbiamo:

$$x_B = (x_2) \quad A_B = (6) \quad c_B = (8) \quad \bar{b} = \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A_N = (3 \ 1) \quad c_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi \ A_B = c'_B$ per calcolare $\pi = c'_B \ A_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 6 \pi_2 = 8 & \pi = \left(\frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \ b = \left(\frac{4}{3}\right) (16) = \frac{64}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{c}' = c'_N - \pi \ A_N$:

$$\bar{c}' = (1 \ 0) - \left(\frac{4}{3}\right) (3 \ 1) = \underbrace{(1 \ 0)}_{c_1 \ c_3} - \underbrace{\left(4 \ \frac{4}{3}\right)}_{\pi \ A_1 \ \pi \ A_3} = \underbrace{\left(-3 \ -\frac{4}{3}\right)}_{\bar{c}_1 \ \bar{c}_3}$$

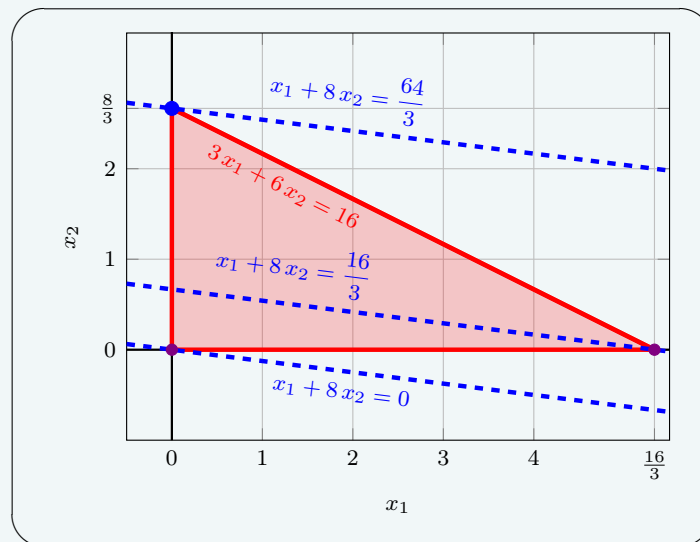
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_B = (x_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{64}{3}$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{64}{3}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.3 — Algoritmo del simplesso rivisto (P2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -4x_1 & + & 10x_2 & \leq & 35 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & -4x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 35 \\ & 3x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = 12 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $b \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (1 \quad 3) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(1 \quad 3)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{(1 \quad 3)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & -4 \\ & d_4 & = & 3 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{35 - t \cdot (-4)}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{12 - t \cdot 3}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -\frac{35}{4} \\ t \leq 4 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 4$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 4$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_3 = 35 - 4 \cdot (-4) = 51$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

RisolviAMO $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -4\pi_1 + 3\pi_3 = 1 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix} = 4$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

RisolviAMO $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -4d_1 + d_3 = 10 \\ 3d_1 = 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{34}{3} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{4 - t \cdot \frac{1}{3}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{51 - t \cdot \frac{34}{3}}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 12 \\ t \leq \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{9}{2}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{9}{2}$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = 4 - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolvi $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -4\pi_1 + 3\pi_2 = 1 \\ 10\pi_1 + \pi_2 = 3 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{11}{17} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{11}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 12 \end{pmatrix} = 16$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{11}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{11}{17} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{4}{17} & -\frac{11}{17} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

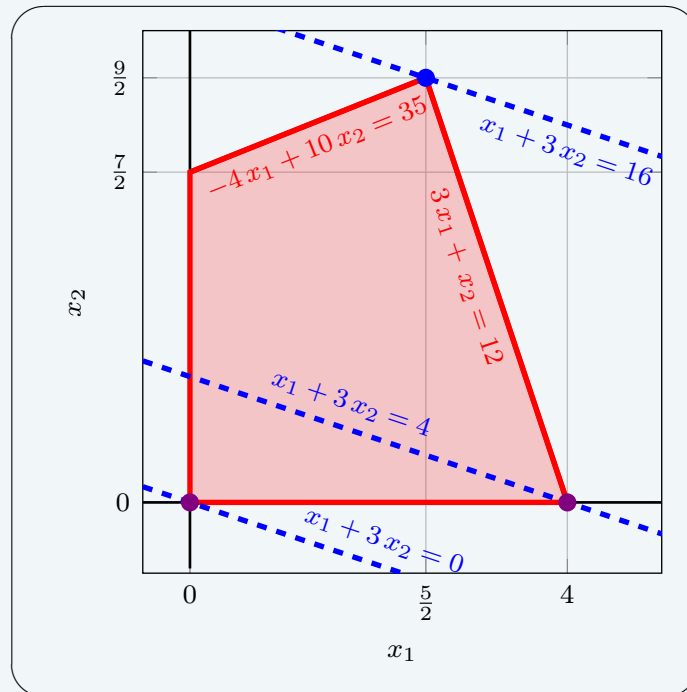
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 16$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 16.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.4 — Algoritmo del simplesso rivisto ($P3$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 8x_1 & + & 2x_2 & \leq & 19 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = & 2 \\ & 8x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 19 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_N$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (2 \quad 4) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{(2 \quad 4)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{(2 \quad 4)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > 0$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & -1 \\ & d_4 & = & 8 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot (-1) \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{19 - t \cdot 8 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -2 \\ t \leq \frac{19}{8} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{19}{8}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{19}{8}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_3 = 2 - \frac{19}{8} \cdot (-1) = \frac{35}{8}$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{35}{8} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + 8\pi_3 = 2 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} = \frac{19}{4}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_1 + d_3 = 1 \\ 8d_1 = 2 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{19}{8} - t \cdot \frac{1}{4}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{35}{8} - t \cdot \frac{5}{4}}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{19}{2} \\ t \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{7}{2}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{7}{2}$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + 8\pi_2 = 2 \\ \pi_1 + 2\pi_2 = 4 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} = 17$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{14}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

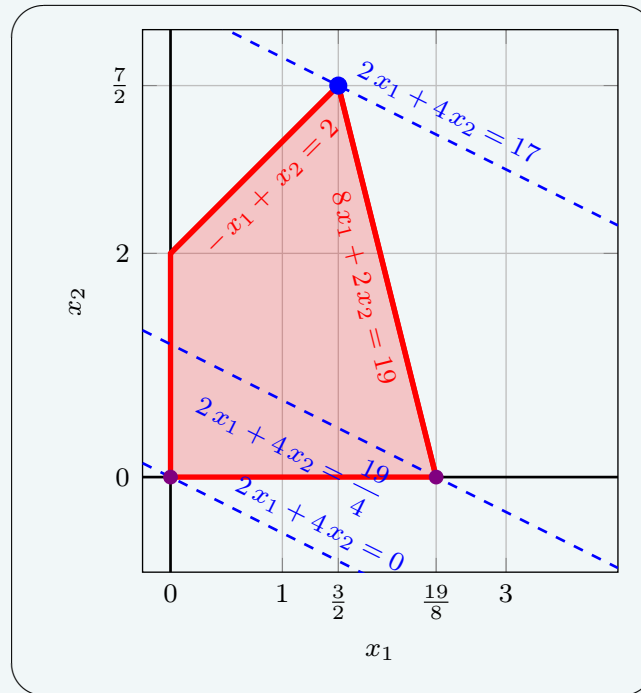
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 17$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 17.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.5 — Algoritmo del simplesso rivisto (P4)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 5x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{soggetto a} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ & x_1 & + & 8x_2 & \leq & 32 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 5x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 14 \\ & x_1 & + & 8x_2 & & & + & x_4 = 32 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $b \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (5 \quad 3) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{(5 \quad 3)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{(5 \quad 3)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & 2 \\ & d_4 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{14 - t \cdot 2}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{32 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 7 \\ t \leq 32 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 7$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 7$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_4 = 32 - 7 \cdot 1 = 25$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2\pi_1 + \pi_4 = 5 \\ \pi_4 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix} = 35$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}'_3} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_2 \quad \bar{\mathbf{c}}_3}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2d_1 = 1 \\ d_1 + d_4 = 8 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{7 - t \cdot \frac{1}{2} \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{25 - t \cdot \frac{15}{2} \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 14 \\ t \leq \frac{10}{3} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{10}{3}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{10}{3}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{b} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = 7 - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{3}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2\pi_1 + \pi_2 = 5 \\ \pi_1 + 8\pi_2 = 3 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix} = \frac{110}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{37}{15} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

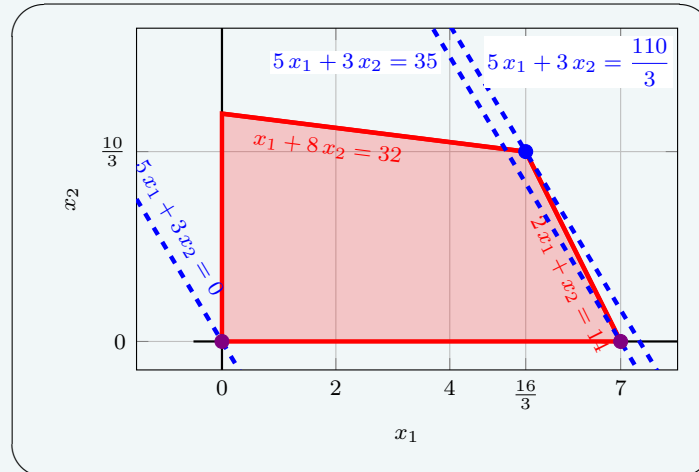
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{110}{3}$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{110}{3}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.6 — Algoritmo del simplesso rivisto (P5)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & 6x_1 & + & 21x_2 & + & x_3 & & = 77 \\ & 8x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 = 36 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 77 \\ 36 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $b \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, si ha:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 77 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \pi = (0 \ 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 77 \\ 36 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \pi \mathbf{A}_N$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (2 \ 3) - (0 \ 0) \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{(2 \ 3)}_{c_1 \ c_2} - \underbrace{(0 \ 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \ \pi \mathbf{A}_2} = \underbrace{(2 \ 3)}_{\bar{c}_1 \ \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & 6 \\ & d_4 & = & 8 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{77 - t \cdot 6 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{36 - t \cdot 8 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{77}{6} \\ t \leq \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{9}{2}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{9}{2}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_3 = 77 - \frac{9}{2} \cdot 6 = 50$$

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 6\pi_1 + 8\pi_3 = 2 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 36 \end{pmatrix} = 9$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_N$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}'_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_2 \quad \bar{\mathbf{c}}_4}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 21 \\ 3 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 6d_1 + d_3 = 21 \\ 8d_1 = 3 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{75}{4} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{9}{2} - t \cdot \frac{3}{8}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{50 - t \cdot \frac{75}{4}}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 12 \\ t \leq \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{8}{3}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{8}{3}$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{2}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 6\pi_1 + 8\pi_2 = 2 \\ 21\pi_1 + 3\pi_2 = 3 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 36 \end{pmatrix} = 15$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{c_3 \\ c_4}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \\ \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{25} & -\frac{4}{25} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_3 \\ \bar{c}_4}}$$

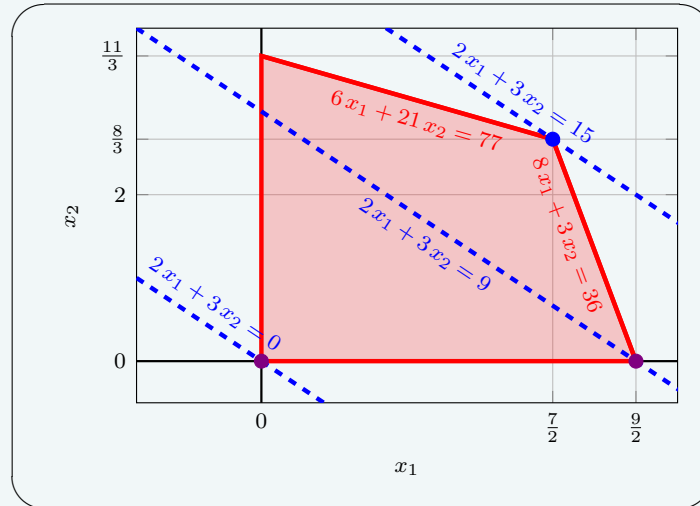
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 15$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 15.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.7 — Algoritmo del simplesso rivisto (P6)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & 4x_1 & + & 15x_2 & \leq & 70 \\ & 12x_1 & + & 3x_2 & \leq & 52 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard

di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & & x_1 & + & x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & 4x_1 & + & 15x_2 & + & x_3 & & = & 70 \\ & 12x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = 52 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 1 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 52 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 52 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 70 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \ 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 70 \\ 52 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (1 \ 1) - (0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{(1 \ 1)}_{c_1 \ c_2} - \underbrace{(0 \ 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \ \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{(1 \ 1)}_{\bar{c}_1 \ \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & 4 \\ d_4 & = & 12 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{70 - t \cdot 4 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{52 - t \cdot 12 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{35}{2} \\ t \leq \frac{13}{3} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{13}{3}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{13}{3}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_3 = 70 - \frac{13}{3} \cdot 4 = \frac{158}{3}$$

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, \ 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, \ 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{158}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 4\pi_1 + 12\pi_3 = 1 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 52 \end{pmatrix} = \frac{13}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_N$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}'_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_2 \quad \bar{\mathbf{c}}_4}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 4d_1 + d_3 = 15 \\ 12d_1 = 3 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 14 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{13}{3} - t \cdot \frac{1}{4}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{158}{3} - t \cdot 14}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{52}{3} \\ t \leq \frac{79}{21} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{79}{21}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{79}{21}$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = \frac{13}{3} - \frac{79}{21} \cdot \frac{1}{4} = \frac{95}{28}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{95}{28} \\ \frac{79}{21} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 4\pi_1 + 12\pi_2 = 1 \\ 15\pi_1 + 3\pi_2 = 1 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{3}{56} & \frac{11}{168} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{56} & \frac{11}{168} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 52 \end{pmatrix} = \frac{601}{84}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{56} & \frac{11}{168} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{56} & \frac{11}{168} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{56} & -\frac{11}{168} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4}$$

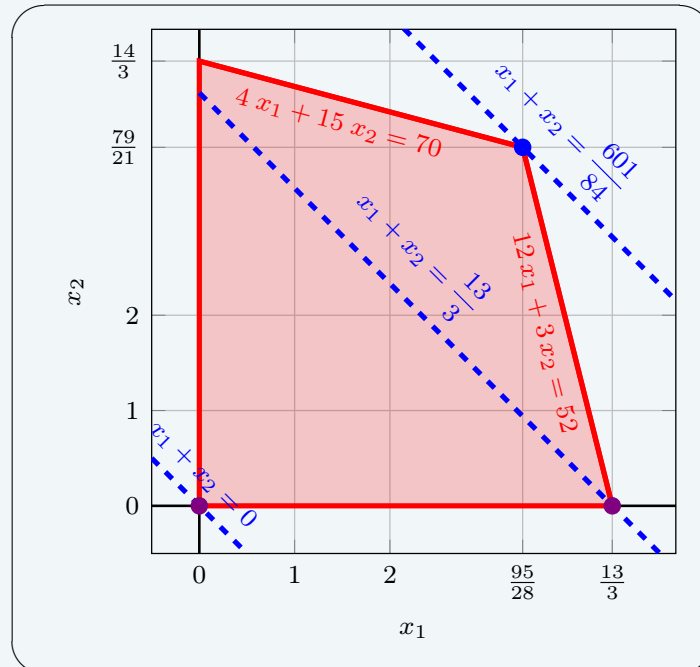
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{95}{28} \\ \frac{79}{21} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{601}{84}$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{79}{21}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{601}{84}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.8 — Algoritmo del simplesso rivisto (P7)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 3x_1 & + & x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 = 5 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (3 \quad 1) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(3 \quad 1)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{(3 \quad 1)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & 1 \\ d_4 & = & 2 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{12 - t \cdot 1}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{5 - t \cdot 2}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 12 \\ t \leq \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{5}{2}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{5}{2}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{b} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_3 = 12 - \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{19}{2}$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 + 2\pi_3 = 3 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{15}{2}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}'_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_2 \quad \bar{\mathbf{c}}_4}$$

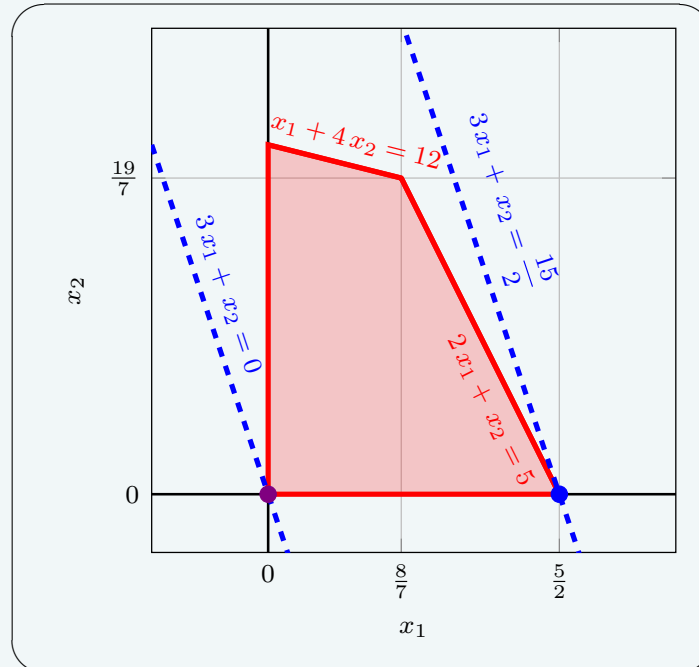
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{15}{2}$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{15}{2}$.

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei due vertici.

Esercizio 11.9 — Algoritmo del simplesso rivisto (P8)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 = 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (1 \quad 2) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(1 \quad 2)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2} = \underbrace{(1 \quad 2)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & -1 \\ & d_4 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot (-1)}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{3 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -2 \\ t \leq 3 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 3$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 3$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_3 = 2 - 3 \cdot (-1) = 5$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_3 = 1 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 1)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (2 \quad 0) - (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(2 \quad 0)}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{(1 \quad 1)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{(1 \quad -1)}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_1 + d_3 = 2 \\ d_1 = 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{3 - t \cdot 1}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{5 - t \cdot 3}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 3 \\ t \leq \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{5}{3}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{5}{3}$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{b} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = 3 - \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolvi $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 = 1 \\ 2\pi_1 + \pi_2 = 2 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{14}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

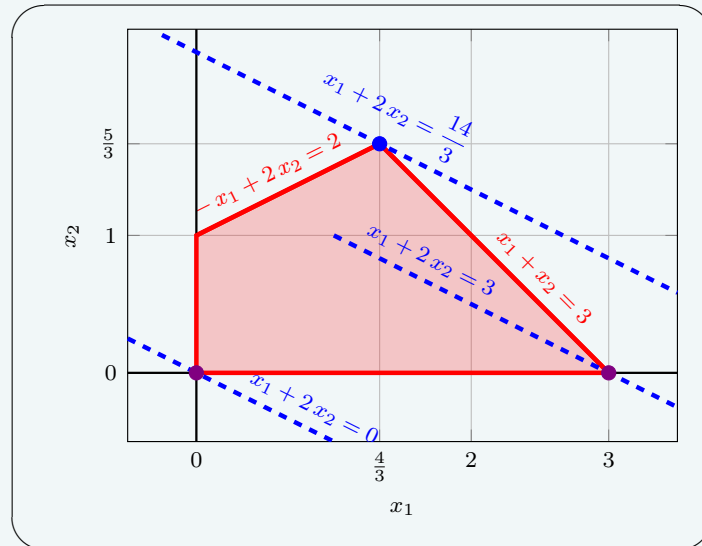
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{14}{3}$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{14}{3}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.10 — Algoritmo del simplesso rivisto (P9)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 39 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & + & x_2 & & & & \\ \text{sogetto a} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = 1 \\ & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 = 39 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eeguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 39 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $b \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 39 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, si ha:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \pi = (0 \ 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 39 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \pi \mathbf{A}_N$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (2 \ 1) - (0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{(2 \ 1)}_{c_1 \ c_2} - \underbrace{(0 \ 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \ \pi \mathbf{A}_2} = \underbrace{(2 \ 1)}_{\bar{c}_1 \ \bar{c}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & -1 \\ & d_4 & = & 6 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{1 - t \cdot (-1) \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{39 - t \cdot 6 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -1 \\ t \leq \frac{13}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{13}{2}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{13}{2}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_3 = 1 - \frac{13}{2} \cdot (-1) = \frac{15}{2}$$

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, \ 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, \ 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + 6\pi_3 = 2 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 39 \end{pmatrix} = 13$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_N$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}'_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_2 \quad \bar{\mathbf{c}}_4}$$

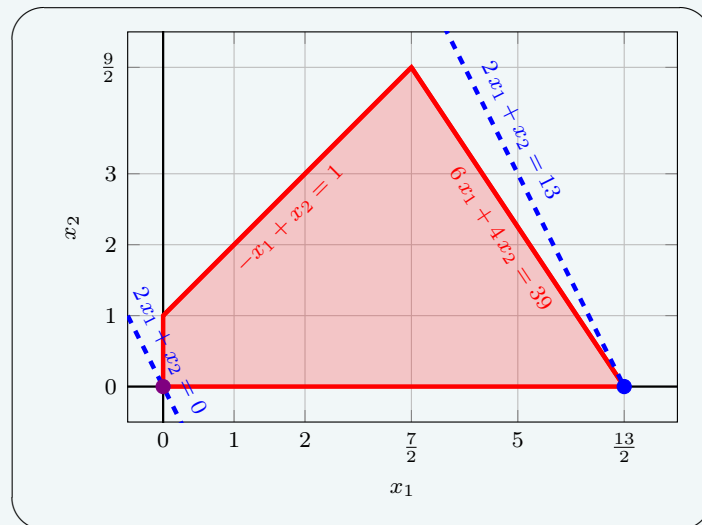
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 13$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 13.

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei due vertici.

Esercizio 11.11 — Algoritmo del simplesso rivisto (P10)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 5x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllllll} \max & 5x_1 & + & 2x_2 & & & & & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = & 12 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & = & 12 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 8 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

RisolviAMO $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_3 & & = 0 \\ & \pi_4 & = 0 \\ & & \pi_5 = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (5 \quad 2) - (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(5 \quad 2)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_2} = \underbrace{(5 \quad 2)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}\end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 & = & -1 \\ & d_4 & = & 1 \\ & & d_5 & = & 3 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{12 - t \cdot (-1) \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{12 - t \cdot 1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{8 - t \cdot 3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -12 \\ t \leq 12 \\ t \leq \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{8}{3}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{8}{3}$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_3 = 12 - \frac{8}{3} \cdot (-1) = \frac{44}{3}$$

$$x_4 = 12 - \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{28}{3}$$

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{44}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

RisolviAMO $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_3 + 3\pi_4 = 5 \\ \pi_1 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{40}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}}_{c_2 \quad c_5} - \underbrace{\begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_5} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}_{c_2 \quad c_5} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

RisolviAMO $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_1 + d_3 = 3 \\ d_1 + d_4 = 2 \\ 3d_1 = -2 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{8}{3} - t \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{44}{3} - t \cdot \frac{7}{3}}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{28}{3} - t \cdot \frac{8}{3}}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -4 \\ t \leq \frac{44}{7} \\ t \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{7}{2}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{7}{2}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 5$$

$$x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{13}{2}$$

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 + 3\pi_3 = 5 \\ 3\pi_1 + 2\pi_2 - 2\pi_3 = 2 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \ 2 \ 1)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 32$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (0 \ 0) - (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(0 \ 0)}_{c_4 \ c_5} - \underbrace{(2 \ 1)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4 \ \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_5} = \underbrace{(-2 \ -1)}_{\bar{c}_4 \ \bar{c}_5} \end{aligned}$$

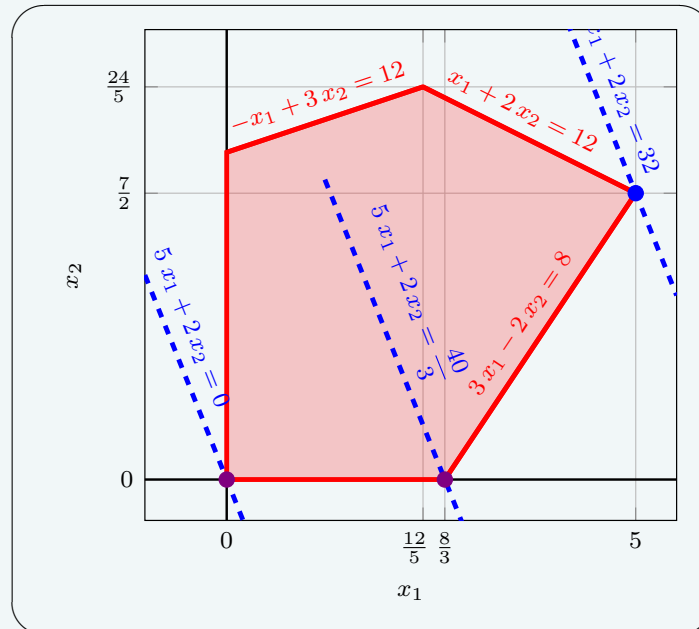
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 32$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 32.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 11.12 — Prima fase dell'algoritmo del simplesso rivisto (P21)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & + & 2 & x_2 & \\
 \text{soggetto a} & -x_1 & - & & x_2 & \leq -2 \\
 & 4 & x_1 & - & 2 & x_2 \leq 7 \\
 & & x_1 & + & 5 & x_2 \leq 21 \\
 & x_1, & & & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Domande

1. Risolvere la prima fase dell'algoritmo del simplesso usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.
2. A partire dalla soluzione di base ammissibile ottenuta nella domanda precedente, risolvere questo problema LP usando l'algoritmo del simplesso rivisto e la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

1. Scriviamo il problema ausiliario:

$$\begin{array}{llllllllll}
 \max & - & x_0 & & & & & & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_0 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = -2 \\
 & - & x_0 & + & 4 & x_1 & - & 2 & x_2 & + & x_4 = 7 \\
 & - & x_0 & + & x_1 & + & 5 & x_2 & & + & x_5 = 21 \\
 & x_0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Ora ci sono $n + m + 1 = 6$ variabili e $m = 3$ vincoli. Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Consideriamo $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prima operazione di pivot

La variabile x_0 entra in base e x_3 esce dalla base, poiché x_3 è la variabile di scarto associata al termine noto più negativo (che è anche l'unico negativo). Abbiamo $x_0 = -b_1 = 2$.

Le altre variabili in base x_j con $j \in \mathcal{B}$ assumono i valori $x_j = b_j - b_1$, quindi abbiamo:

$$x_4 = 7 - (-2) = 9$$

$$x_5 = 21 - (-2) = 23$$

Le nuove variabili in base sono $\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$. La soluzione di base ammissibile è

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$

• Iterazione 1

Con $\mathcal{B} = \{0, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\pi_0 - \pi_4 - \pi_5 & = & -1 \\ & \pi_4 & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (1 \ 0 \ 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} = -2$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{c}' = c'_N - \pi A_N$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (0 \ 0 \ 0) - (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(0 \ 0 \ 0)}_{c_1 \ c_2 \ c_3} - \underbrace{(-1 \ -1 \ 1)}_{\pi A_1 \ \pi A_2 \ \pi A_3} = \underbrace{(1 \ 1 \ -1)}_{\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \bar{c}_3}\end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi A_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $A_B d = A_1$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_0 & = -1 \\ -d_0 + d_4 & = 4 \\ -d_0 + d_5 & = 1 \end{cases} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{b} - t d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot (1)}_{x_0 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{9 - t \cdot (5)}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{23 - t \cdot (2)}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 2 \\ t \leq \frac{9}{5} \\ t \leq \frac{23}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{9}{5}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{9}{5}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m d$, quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}x_0 &= 2 - \frac{9}{5} \cdot (1) = \frac{1}{5} \\ x_5 &= 23 - \frac{9}{5} \cdot (2) = \frac{97}{5}\end{aligned}$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{0, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{97}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$,
primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_0 - \pi_1 - \pi_5 = -1 \\ -\pi_0 + 4\pi_1 = 0 \\ \pi_5 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \left(\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \right)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \left(\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{c_2 \quad c_3 \quad c_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3 \quad \bar{c}_4} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_0 - d_1 = -1 \\ -d_0 + 4d_1 = -2 \\ -d_0 + d_1 + d_5 = 5 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{32}{5} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{1}{5} - t \cdot \left(\frac{6}{5}\right)}_{x_0 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{9}{5} - t \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{97}{5} - t \cdot \left(\frac{32}{5}\right)}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{1}{6} \\ t \geq -9 \\ t \leq \frac{97}{32} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{1}{6}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{1}{6}$. Il valore di x_0 diventa zero e x_0 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = \frac{9}{5} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{11}{6}$$

$$x_5 = \frac{97}{5} - \frac{1}{6} \left(\frac{32}{5}\right) = \frac{55}{3}$$

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{55}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$,
primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + 4\pi_2 + \pi_5 = 0 \\ -\pi_1 - 2\pi_2 + 5\pi_5 = 0 \\ \pi_5 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \ 0 \ 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (-1 \ 0 \ 0) - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(-1 \ 0 \ 0)}_{c_0 \ c_3 \ c_4} - \underbrace{(0 \ 0 \ 0)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_0 \ \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \ \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{(-1 \ 0 \ 0)}_{\bar{c}_0 \ \bar{c}_3 \ \bar{c}_4} \end{aligned}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{55}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP ausiliario e $\bar{z} = 0$ è il valore ottimo.

Attenzione

Una soluzione di base ottima del problema ausiliario di valore zero (in cui la variabile ausiliaria è una variabile fuori base) corrisponde a una soluzione di base ammissibile del problema LP originale.

Eliminando la variabile ausiliaria x_0 dalle variabili fuori base, otteniamo $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e la soluzione di base ammissibile del problema LP originale:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{55}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Eseguiamo l'algoritmo del simplesso rivisto sul problema LP originale. Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

• **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{55}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$,
primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + 4\pi_2 + \pi_5 = 1 \\ -\pi_1 - 2\pi_2 + 5\pi_5 = 2 \\ \pi_5 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \left(-\frac{5}{3} \quad -\frac{1}{6} \quad 0 \right)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile

$$\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \left(-\frac{5}{3} \quad -\frac{1}{6} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{13}{6}$$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (0 \quad 0) - \left(-\frac{5}{3} \quad -\frac{1}{6} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(0 \quad 0)}_{c_3 \quad c_4} - \underbrace{\left(-\frac{5}{3} \quad -\frac{1}{6} \right)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4} = \underbrace{\left(\frac{5}{3} \quad \frac{1}{6} \right)}_{\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_3 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3$, x_3 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_3$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_3$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_1 - d_2 = 1 \\ 4d_1 - 2d_2 = 0 \\ d_1 + 5d_2 + d_5 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{11}{6} - t \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{1}{6} - t \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}_{x_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{55}{3} - t \cdot \left(\frac{11}{3}\right)}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -\frac{11}{2} \\ t \geq -\frac{1}{4} \\ t \leq 5 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 5$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_3 = 5$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = \frac{11}{6} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{6} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{2}$$

- Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$,
primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + 4\pi_2 + \pi_3 = 1 \\ -\pi_1 - 2\pi_2 + 5\pi_3 = 2 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \quad \pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} =$
 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix} = \frac{21}{2}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \pi \mathbf{A}_N$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{c_4 \quad c_5} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}}_{\pi \mathbf{A}_4 \quad \pi \mathbf{A}_5} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{22} & -\frac{5}{11} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_4 \quad \bar{c}_5} \end{aligned}$$

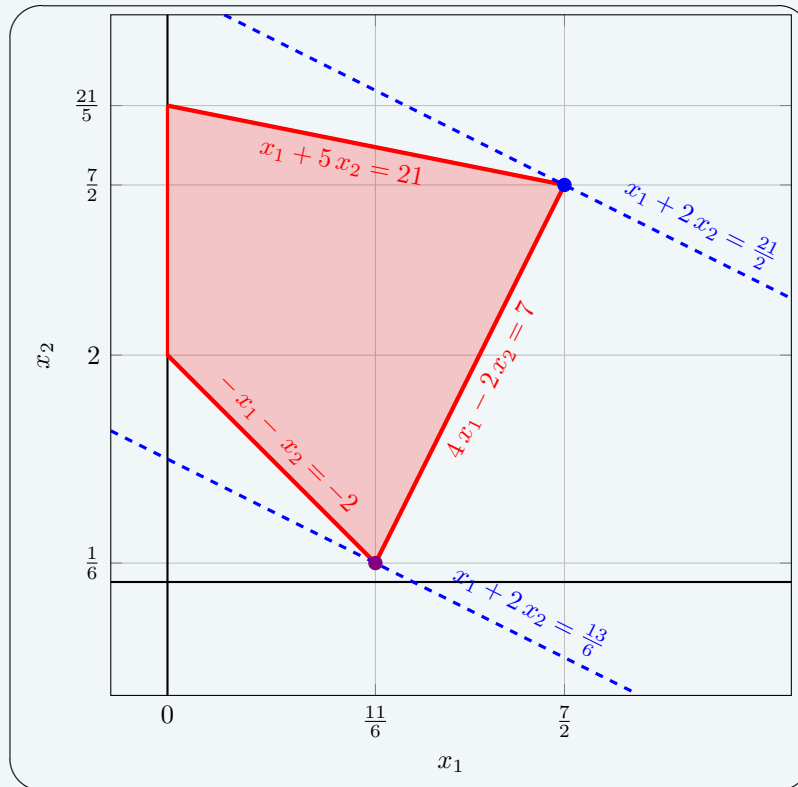
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{21}{2}$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso. In viola la soluzione di base ammissibile ottenuta dalla prima fase, $(\frac{11}{6}, \frac{1}{6})$, in blu quella ottima, $(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$. In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori $\frac{13}{6}$ e $\frac{21}{2}$ assunti nei due vertici.



Esercizio 11.13 — Algoritmo del simplesso rivisto (B1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 25x_1 & + & 16x_2 & & \\ \text{soggetto a} & 50x_1 & + & 31x_2 & \leq & 250 \\ & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & 25 x_1 & + & 16 x_2 & & & & & & \\ \text{soggetto a} & 50 x_1 & + & 31 x_2 & + & x_3 & & & = & 250 \\ & -3 x_1 & + & 2 x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 50 & 31 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 250 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 250 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 50 & 31 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

RisolviAMO $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 & = & 0 \\ & \pi_4 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = (0 \ 0) \begin{pmatrix} 250 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (25 \ 16) - (0 \ 0) \begin{pmatrix} 50 & 31 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{(25 \ 16)}_{\mathbf{c}'_1 \ \mathbf{c}'_2} - \underbrace{(0 \ 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \ \pi \mathbf{A}_2} = \underbrace{(25 \ 16)}_{\bar{\mathbf{c}}_1 \ \bar{\mathbf{c}}_2}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ -3 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_3 = 50 \\ d_4 = -3 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 50 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{250 - t \cdot 50 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{4 - t \cdot (-3) \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 5 \\ t \geq -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 5$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 5$. Il valore di x_3 diventa zero e x_3 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_4 = 4 - 5 \cdot (-3) = 19$$

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 50\pi_1 - 3\pi_4 = 25 \\ \pi_4 = 0 \end{cases} \quad \pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 4 \end{pmatrix} = 125$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (16 \quad 0) - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{(16 \quad 0)}_{c_2 \quad c_3} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{31}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\pi \mathbf{A}_2 \quad \pi \mathbf{A}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \pi \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 31 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_2$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 50d_1 = 31 \\ -3d_1 + d_4 = 2 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{31}{50} \\ \frac{193}{50} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{5 - t \cdot \frac{31}{50} \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{19 - t \cdot \frac{193}{50} \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{250}{31} \\ t \leq \frac{950}{193} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{950}{193}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{950}{193}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = 5 - \frac{950}{193} \cdot \frac{31}{50} = \frac{376}{193}$$

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 50 & 31 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{376}{193} \\ \frac{950}{193} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolvi $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 50 \pi_1 - 3 \pi_2 = 25 \\ 31 \pi_1 + 2 \pi_2 = 16 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{98}{193} & \frac{25}{193} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{98}{193} & \frac{25}{193} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{24600}{193}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{98}{193} & \frac{25}{193} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{98}{193} & \frac{25}{193} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{98}{193} & -\frac{25}{193} \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

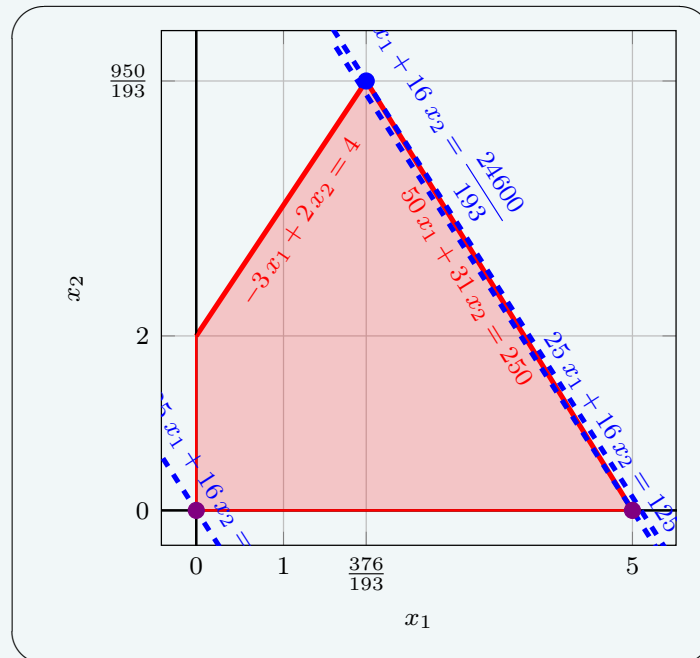
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{376}{193} \\ \frac{950}{193} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{24600}{193}$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{376}{193}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{950}{193}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{24600}{193}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

11.2 Problemi con tre variabili

Esercizio 11.14 — Algoritmo del simplesso rivisto (P41)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & & & \leq & 2 \\ & & & & & x_3 & \leq & 3 \\ & 3x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 7$ variabili e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & & & x_2 & & & + & x_5 & = & 2 \\ & & & & & x_3 & & + & x_6 & = & 3 \\ & 3x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_7 & = & 6 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $b \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, abbiamo:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risoliamo $\pi A_{\mathcal{B}} = c'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\pi = c'_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_4 & & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \\ & & \pi_6 & = 0 \\ & & & \pi_7 & = 0 \end{array} \right. \quad \pi = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} =$
 $(0 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (2 \ 1 \ 3) - (0 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(2 \ 1 \ 3)}_{c_1 \ c_2 \ c_3} - \underbrace{(0 \ 0 \ 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \ \pi \mathbf{A}_2 \ \pi \mathbf{A}_3} = \underbrace{(2 \ 1 \ 3)}_{\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \bar{c}_3} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_4 & = & 1 \\ & d_5 & = 0 \\ & & d_6 = 0 \\ & & d_7 = 3 \end{array} \right. \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{4 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{6 - t \cdot 3}_{x_7 \geq 0} \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t \leq 4 \\ t \leq 2 \end{array} \right. \quad \text{quindi } t_m = 2$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 2$. Il valore di x_7 diventa zero e x_7 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$,

quindi abbiamo:

$$x_4 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$x_5 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

$$x_6 = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 7\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolvi $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & + & 3\pi_6 = 2 \\ \pi_1 & & = 0 \\ & \pi_4 & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (1 \quad 3 \quad 0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(1 \quad 3 \quad 0)}_{c_2 \quad c_3 \quad c_7} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_7} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3 \quad \bar{c}_7} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \pi$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $A_B d = A_2$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_1 + d_4 = 1 \\ d_5 = 1 \\ d_6 = 0 \\ 3d_1 = 0 \end{cases} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{b} - t d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2 - t \cdot 1}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 2 \\ t \leq 2 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 2$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = 2$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m d$, quindi abbiamo:

$$x_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

$$x_5 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$x_6 = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

• Iterazione 3

Con $B = \{1, 2, 5, 6\}$ e $N = \{3, 4, 7\}$, abbiamo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 & & + & 3\pi_6 & = & 2 \\ \pi_1 & + & \pi_2 & & = & 1 \\ & & \pi_2 & & = & 0 \\ & & & \pi_5 & = & 0 \end{cases} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 6$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \pi \mathbf{A}_N$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (3 \quad 0 \quad 0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(3 \quad 0 \quad 0)}_{c_3 \quad c_4 \quad c_7} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\pi \mathbf{A}_3 \quad \pi \mathbf{A}_4 \quad \pi \mathbf{A}_7} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4 \quad \bar{c}_7} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_3 > \pi \mathbf{A}_3$, x_3 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_3$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_3$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 & = & 1 \\ & d_2 + d_5 & = & 0 \\ & & d_6 & = & 1 \\ 3d_1 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{2 - t \cdot \frac{1}{3} \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 - t \cdot \frac{2}{3} \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\ \underbrace{0 - t \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{3 - t \cdot 1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t \leq 6 \\ t \leq 3 \\ t \geq 0 \\ t \leq 3 \end{array} \right. \quad \text{quindi } t_m = 3$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_3 = 3$. Il valore di x_2 diventa zero e x_2 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$x_5 = 0 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$x_6 = 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

• **Iterazione 4**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 7\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolvi $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & + & 3\pi_6 = 2 \\ \pi_1 & + & \pi_5 + \pi_6 = 3 \\ & \pi_3 & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 11$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (1 \ 0 \ 0) - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_{c_2 \ c_4 \ c_7} - \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 7 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\pi \mathbf{A}_2 \ \pi \mathbf{A}_4 \ \pi \mathbf{A}_7} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_2 \ \bar{c}_4 \ \bar{c}_7} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_7 > \pi \mathbf{A}_7$, x_7 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_7$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_7$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d_1 + d_3 & = & 0 \\ & d_5 & = 0 \\ & d_3 + d_6 & = 0 \\ 3d_1 + d_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{1 - t \cdot \frac{1}{2} \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{3 - t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{0 - t \cdot \frac{1}{2} \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t \leq 2 \\ t \geq -6 \\ t \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{quindi} \quad t_m = 0$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_7 = 0$. Il valore di x_6 rimane zero e x_6 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = 1 - 0 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = 3 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$x_5 = 2 - 0 \cdot 0 = 2$$

• **Iterazione 5**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 6\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} \pi_1 & & & + & 3\pi_7 & = & 2 \\ \pi_1 & & + & \pi_5 & + & \pi_7 & = & 3 \\ & \pi_3 & & & & = & 0 \\ & & & & \pi_7 & = & 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (2 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (2 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 11$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (1 \ 0 \ 0) - (2 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_{c_2 \ c_4 \ c_6} - \underbrace{(2 \ 2 \ 1)}_{\pi A_2 \ \pi A_4 \ \pi A_6} = \underbrace{(-1 \ -2 \ -1)}_{\bar{c}_2 \ \bar{c}_4 \ \bar{c}_6}\end{aligned}$$

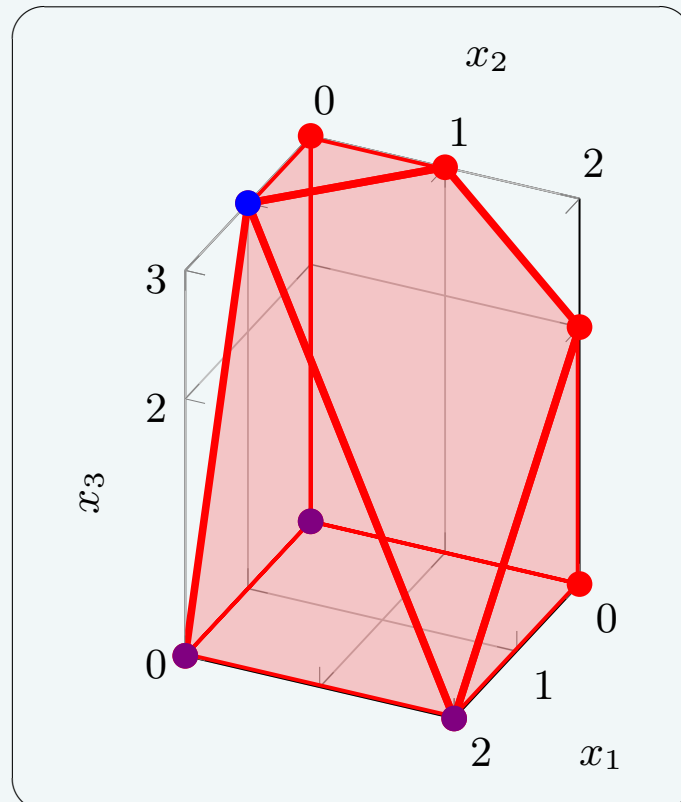
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 11$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 3$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 11.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

Esercizio 11.15 — Algoritmo del simplesso rivisto (P42)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 6$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_5 & = & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & + & x_6 & = & 7 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolvi $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_4 & & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \\ & & \pi_6 = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (3 \quad 2 \quad 4) - (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(3 \quad 2 \quad 4)}_{c_1 \quad c_2 \quad c_3} - \underbrace{(0 \quad 0 \quad 0)}_{\pi A_1 \quad \pi A_2 \quad \pi A_3} = \underbrace{(3 \quad 2 \quad 4)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3}\end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi A_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risolviamo $A_B d = A_1$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_1$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_4 & = 1 \\ & d_5 & = 2 \\ & & d_6 & = 2 \end{cases} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{b} - t d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{4 - t \cdot 1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{5 - t \cdot 2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{7 - t \cdot 2 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 4 \\ t \leq \frac{5}{2} \\ t \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{5}{2}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{5}{2}$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m d$, quindi abbiamo:

$$x_4 = 4 - \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$x_6 = 7 - \frac{5}{2} \cdot 2 = 2$$

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 + 2\pi_4 + 2\pi_6 = 3 \\ \pi_1 = 0 \\ \pi_6 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{15}{2}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{c_2 \quad c_3 \quad c_5}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{\substack{\pi \mathbf{A}_2 \quad \pi \mathbf{A}_3 \quad \pi \mathbf{A}_5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3 \quad \bar{c}_5}} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \pi \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_1 + d_4 = 1 \\ 2d_1 = 0 \\ 2d_1 + d_6 = 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{3}{2} - t \cdot 1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{2 - t \cdot 1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{3}{2} \\ t \leq 2 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{3}{2}$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{3}{2}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot 0 = \frac{5}{2}$$

$$x_6 = 2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

RisolviAMO $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_6 = 3 \\ \pi_1 + \pi_6 = 2 \\ \pi_6 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{21}{2}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{c_3 \quad c_4 \quad c_5}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\substack{\pi \mathbf{A}_3 \quad \pi \mathbf{A}_4 \quad \pi \mathbf{A}_5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4 \quad \bar{c}_5}} \end{aligned}$$

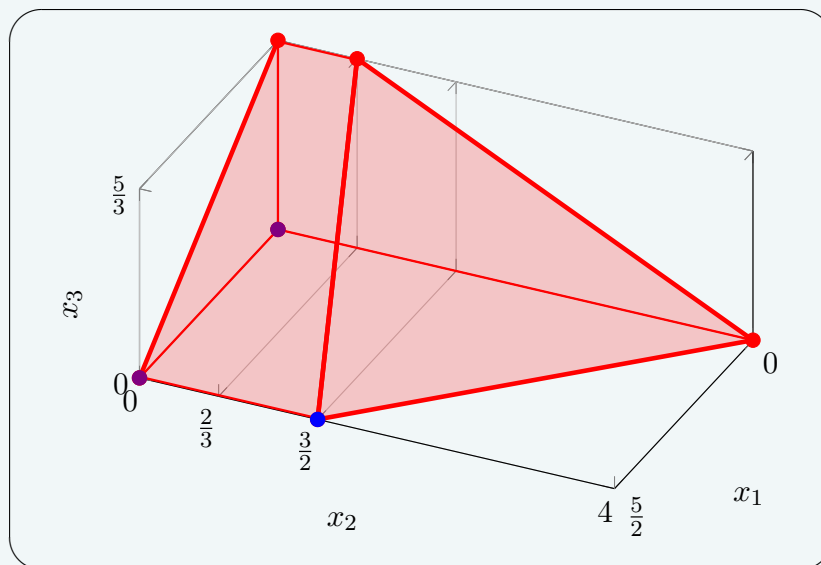
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{21}{2}$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{21}{2}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

Esercizio 11.16 — Algoritmo del simplesso rivisto (P43)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + & 2x_3 \leq 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 5$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 = 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & & + x_5 = 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, usando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_4 & = & 0 \\ & \pi_5 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (1 \quad 2 \quad 7) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(1 \quad 2 \quad 7)}_{c_1 \quad c_2 \quad c_3} - \underbrace{(0 \quad 0 \quad 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_2 \quad \pi \mathbf{A}_3} = \underbrace{(1 \quad 2 \quad 7)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi A_1$, x_1 è la colonna pivot e abbiamo $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $A_B d = A_1$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_4 = 1 \\ d_5 = 0 \end{cases} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{b} - t d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ t \leq 2 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = 2$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 2$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m d$, quindi abbiamo:

$$x_5 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

• Iterazione 2

Con $B = \{1, 5\}$ e $N = \{2, 3, 4\}$, abbiamo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi A_B = c'_B$ per calcolare $\pi = c'_B A_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 \\ \pi_5 = 0 \end{cases} \quad \pi = (1 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi b = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{c}' = c'_N - \pi A_N$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (2 \quad 7 \quad 0) - (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(2 \quad 7 \quad 0)}_{c_2 \quad c_3 \quad c_4} - \underbrace{(0 \quad 2 \quad 1)}_{\pi A_2 \quad \pi A_3 \quad \pi A_4} = \underbrace{(2 \quad 5 \quad -1)}_{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3 \quad \bar{c}_4}\end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \pi A_2$, x_2 è la colonna pivot e abbiamo $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $A_B \quad d = A_2$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_5 = 1 \end{cases} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{b} - t d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot 1}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \\ t \leq 2 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = 2$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = 2$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{b} - t_m d$, quindi abbiamo:

$$x_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

• Iterazione 3

Con $B = \{1, 2\}$ e $N = \{3, 4, 5\}$, abbiamo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolviamo $\pi A_B = c'_B$ per calcolare $\pi = c'_B A_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 \\ \pi_2 = 2 \end{cases} \quad \pi = (1 \quad 2)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (7 \ 0 \ 0) - (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(7 \ 0 \ 0)}_{c_3 \ c_4 \ c_5} - \underbrace{(6 \ 1 \ 2)}_{\pi \mathbf{A}_3 \ \pi \mathbf{A}_4 \ \pi \mathbf{A}_5} = \underbrace{(1 \ -1 \ -2)}_{\bar{c}_3 \ \bar{c}_4 \ \bar{c}_5} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_3 > \pi \mathbf{A}_3$, x_3 è la colonna pivot e abbiamo $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_3$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_3$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_1 & = & 2 \\ & d_2 & = & 2 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{2 - t \cdot 2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 - t \cdot 2 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 1 \\ t \leq 1 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 1$$

Di conseguenza, il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_3 = 1$. Il valore di x_1 diventa zero e x_1 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_2 = 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

• Iterazione 4

Con $\mathcal{B} = \{2, \ 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, \ 4, \ 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test di ottimalità

Risolvi $\pi \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_3 = 2 \\ 2\pi_2 + 2\pi_3 = 7 \end{cases} \quad \pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \pi \mathbf{A}_N$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (1 \quad 0 \quad 0) - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(1 \quad 0 \quad 0)}_{\substack{c_1 \quad c_4 \quad c_5}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_4 \quad \pi \mathbf{A}_5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_4 \quad \bar{c}_5}} \end{aligned}$$

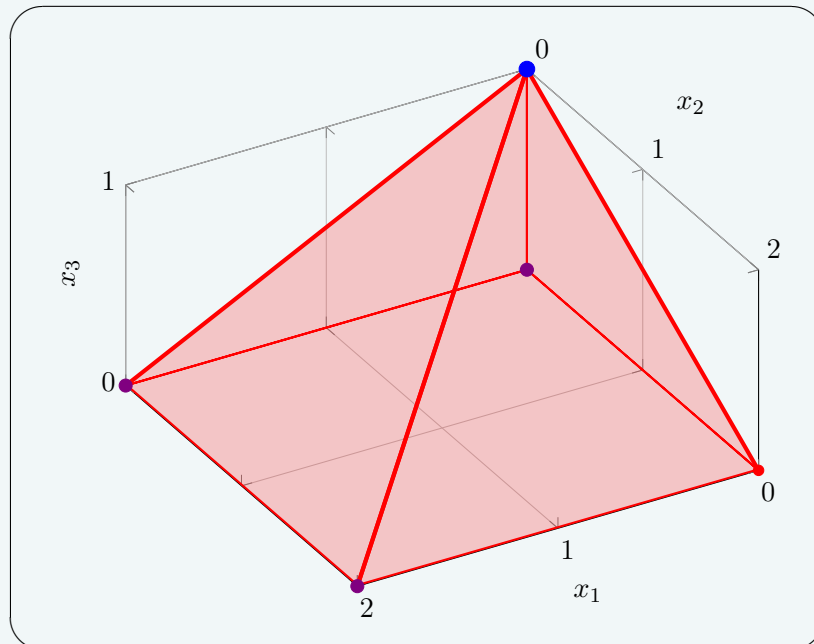
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 7$ è il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 7.

In viola il primo, il secondo e il terzo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

Esercizio 11.17 — Algoritmo del simplesso rivisto (P44)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
 \text{soggetto a} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1 \\
 & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4 \\
 & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 6$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
 \text{soggetto a} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\
 & 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 = 4 \\
 & x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 2 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \geq 0
 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$

e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risoliamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_4 & & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \\ & & \pi_6 = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (1 \quad 2 \quad 3) - (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(1 \quad 2 \quad 3)}_{\substack{c_1 \quad c_2 \quad c_3}} - \underbrace{(0 \quad 0 \quad 0)}_{\substack{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3}} = \underbrace{(1 \quad 2 \quad 3)}_{\substack{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3}} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_4 & = & 1 \\ & d_5 & = & 2 \\ & & d_6 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{1 - t \cdot 1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{4 - t \cdot 2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{2 - t \cdot 1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 1 \\ t \leq 2 \\ t \leq 2 \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = 1$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = 1$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_5 = 4 - 1 \cdot 2 = 2$$

$$x_6 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 + 2\pi_5 + \pi_6 = 1 \\ & \pi_5 = 0 \\ & \pi_6 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (1 \ 0 \ 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \pi \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (2 \ 3 \ 0) - (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(2 \ 3 \ 0)}_{c_2 \ c_3 \ c_4} - \underbrace{(2 \ -2 \ 1)}_{\pi \mathbf{A}_2 \ \pi \mathbf{A}_3 \ \pi \mathbf{A}_4} = \underbrace{(0 \ 5 \ -1)}_{\bar{c}_2 \ \bar{c}_3 \ \bar{c}_4} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_3 > \pi \mathbf{A}_3$, x_3 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_3$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_3$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_1 & = -2 \\ 2d_1 + d_5 & = -3 \\ d_1 + d_6 & = 5 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{1 - t \cdot (-2)}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2 - t \cdot 1}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 - t \cdot 7}_{x_6 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ t \leq 2 \\ t \leq \frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{1}{7}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_3 = \frac{1}{7}$. Il valore di x_6 diventa zero e x_6 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{7} \cdot (-2) = \frac{9}{7}$$

$$x_5 = 2 - \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{13}{7}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 6\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{13}{7} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_1 + 2\pi_3 + \pi_5 = 1 \\ -2\pi_1 - 3\pi_3 + 5\pi_5 = 3 \\ \pi_3 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{12}{7}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{c_2 \quad c_4 \quad c_6}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_6}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_4 \quad \bar{c}_6}} \end{aligned}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{13}{7} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

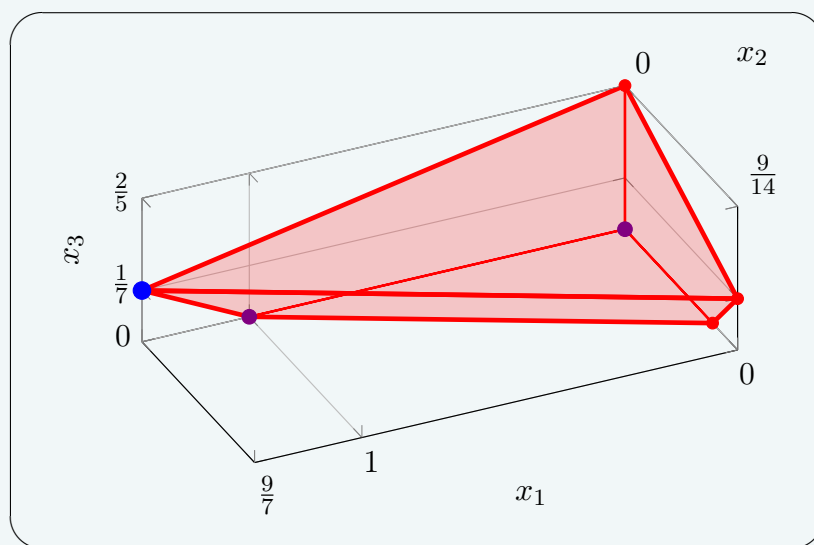
è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{12}{7}$ è il valore della soluzione ottima.

- **Soluzioni ottime multiple**

La soluzione ottima non è unica: nella base finale la variabile non di base x_2 ha costo ridotto $\bar{c}_2 = 0$, e ogni punto dello spigolo che congiunge $\left(\frac{9}{7}, 0, \frac{1}{7}\right)$ e $\left(0, \frac{9}{14}, \frac{1}{7}\right)$ è ottimo, con valore $\frac{12}{7}$.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{7}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{12}{7}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

Esercizio 11.18 — Algoritmo del simplesso rivisto (P45)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 4x_1 & - & 13x_2 & + & 7x_3 \\ \text{soggetto a} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 5$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllllll} \max & 4x_1 & - & 13x_2 & + & 7x_3 & & & & \\ \text{soggetto a} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & & = & 5 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & & & + & x_5 & = & 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Iterazione 1

Con $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi_4 & = & 0 \\ & \pi_5 & = & 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (4 \quad -13 \quad 7) - (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(4 \quad -13 \quad 7)}_{\substack{c_1 \quad c_2 \quad c_3}} - \underbrace{(0 \quad 0 \quad 0)}_{\substack{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_2 \quad \pi \mathbf{A}_3}} = \underbrace{(4 \quad -13 \quad 7)}_{\substack{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3}} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > 0$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_4 & = & 3 \\ & d_5 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{5 - t \cdot 3}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{3 - t \cdot 1}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{5}{3} \\ t \leq 3 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{5}{3}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{5}{3}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{b} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_5 = 3 - \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3\pi_1 + \pi_5 = 4 \\ \pi_5 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{20}{3}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (-13 \quad 7 \quad 0) - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(-13 \quad 7 \quad 0)}_{\substack{c_2 \quad c_3 \quad c_4}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{47}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3 \quad \bar{c}_4}} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_3 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_3$, x_3 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_3$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_3$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3d_1 & = & 5 \\ d_1 + d_5 & = & 5 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{5}{3} - t \cdot \frac{5}{3}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{4}{3} - t \cdot \frac{10}{3}}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 1 \\ t \leq \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{2}{5}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_3 = \frac{2}{5}$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 5\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3\pi_1 + \pi_3 = 4 \\ 5\pi_1 + 5\pi_3 = 7 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{34}{5}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (-13 \quad 0 \quad 0) - \left(\frac{13}{10} \quad \frac{1}{10} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{c_2 \quad c_4 \quad c_5}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{23}{10} & \frac{13}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{\substack{\pi A_2 \quad \pi A_4 \quad \pi A_5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{153}{10} & -\frac{13}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_4 \quad \bar{c}_5}}\end{aligned}$$

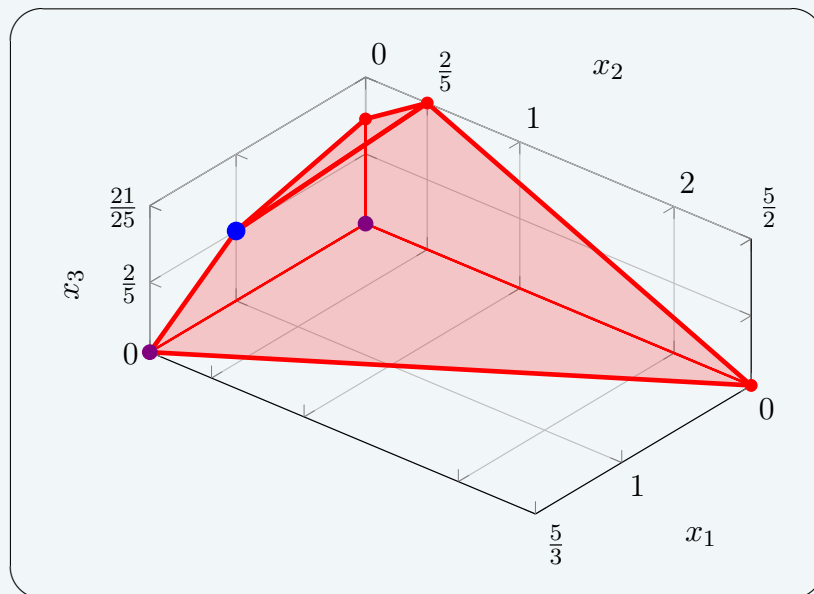
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{34}{5}$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{5}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{34}{5}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

Esercizio 11.19 — Algoritmo del simplesso rivisto (P46)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 9x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 16 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 6$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 9x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + x_5 = 16 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_6 = 10 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, utilizzando la regola di Bland per scegliere la colonna pivot e la riga pivot.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché si tratta di un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{b} \geq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è associata alla seguente soluzione di base ammissibile:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_4 & & = 0 \\ & \pi_5 & = 0 \\ & & \pi_6 = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= (5 \quad 6 \quad 10) - (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(5 \quad 6 \quad 10)}_{\substack{c_1 \quad c_2 \quad c_3}} - \underbrace{(0 \quad 0 \quad 0)}_{\substack{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_2 \quad \pi \mathbf{A}_3}} = \underbrace{(5 \quad 6 \quad 10)}_{\substack{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3}} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \pi \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} d_4 & = & 9 \\ & d_5 & = & 2 \\ & & d_6 & = & 4 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{11 - t \cdot 9 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{16 - t \cdot 2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{10 - t \cdot 4 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{11}{9} \\ t \leq 8 \\ t \leq \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{11}{9}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{11}{9}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_5 = 16 - \frac{11}{9} \cdot 2 = \frac{122}{9}$$

$$x_6 = 10 - \frac{11}{9} \cdot 4 = \frac{46}{9}$$

- Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} \\ \frac{122}{9} \\ \frac{46}{9} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\pi \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\pi = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 9\pi_1 + 2\pi_5 + 4\pi_6 = 5 \\ \pi_5 = 0 \\ \pi_6 = 0 \end{cases} \quad \pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \pi \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{55}{9}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \pi \mathbf{A}_N$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}}_{c_2 \quad c_3 \quad c_4} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{10}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}}_{\pi \mathbf{A}_2 \quad \pi \mathbf{A}_3 \quad \pi \mathbf{A}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{44}{9} & \frac{80}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_2 \quad \bar{c}_3 \quad \bar{c}_4} \end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \pi \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot e si ha $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 9d_1 = 2 \\ 2d_1 + d_5 = 6 \\ 4d_1 + d_6 = 2 \end{cases} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{50}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\frac{11}{9} - t \cdot \frac{2}{9}}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{122}{9} - t \cdot \frac{50}{9}}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{46}{9} - t \cdot \frac{10}{9}}_{x_6 \geq 0} \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t \leq \frac{11}{2} \\ t \leq \frac{61}{25} \\ t \leq \frac{23}{5} \end{array} \right. \quad \text{quindi } t_m = \frac{61}{25}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{61}{25}$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi si ha:

$$x_1 = \frac{11}{9} - \frac{61}{25} \cdot \frac{2}{9} = \frac{17}{25}$$

$$x_6 = \frac{46}{9} - \frac{61}{25} \cdot \frac{10}{9} = \frac{12}{5}$$

• **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{61}{25} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9\pi_1 + 2\pi_2 + 4\pi_6 = 5 \\ 2\pi_1 + 6\pi_2 + 2\pi_6 = 6 \\ \pi_6 = 0 \end{array} \right. \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{22}{25} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} =$
 $\begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{22}{25} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{451}{25}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{c}' = c'_N - \pi A_N$:

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= (10 \quad 0 \quad 0) - \begin{pmatrix} 9 & 22 & 0 \\ 25 & 25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(10 \quad 0 \quad 0)}_{c_3 \quad c_4 \quad c_5} - \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 9 & 22 \\ 25 & 25 & 25 \end{pmatrix}}_{\pi A_3 \quad \pi A_4 \quad \pi A_5} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -\frac{9}{25} & -\frac{22}{25} \end{pmatrix}}_{\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4 \quad \bar{c}_5}\end{aligned}$$

Non tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi eseguiamo un'operazione di pivot.

Operazione di pivot

Poiché $c_3 > \pi A_3$, x_3 è la colonna pivot e si ha $A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Risolviamo $A_B d = A_3$ per calcolare $d = A_B^{-1} A_3$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 9d_1 + 2d_2 = 2 \\ 2d_1 + 6d_2 = 6 \\ 4d_1 + 2d_2 + d_6 = 7 \end{cases} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il massimo t tale che $\bar{b} - t d \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{61}{25} - t \cdot 1}_{x_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{12}{5} - t \cdot 5}_{x_6 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{61}{25} \\ t \leq \frac{12}{25} \end{cases} \quad \text{quindi } t_m = \frac{12}{25}$$

Di conseguenza il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_3 = \frac{12}{25}$. Il valore di x_6 diventa zero e x_6 è la riga pivot. Le altre variabili di base assumono i valori $\bar{b} - t_m d$, quindi si ha:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{17}{25} - \frac{12}{25} \cdot 0 = \frac{17}{25} \\ x_2 &= \frac{61}{25} - \frac{12}{25} \cdot 1 = \frac{49}{25}\end{aligned}$$

• Iterazione 4

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5, 6\}$, si ha:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{49}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifica di ottimalità

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 9\pi_1 + 2\pi_2 + 4\pi_3 = 5 \\ 2\pi_1 + 6\pi_2 + 2\pi_3 = 6 \\ 2\pi_1 + 6\pi_2 + 7\pi_3 = 10 \end{cases} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{18}{25} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{18}{25} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{499}{25}$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{18}{25} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{c_4 \quad c_5 \quad c_6}} - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{18}{25} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_5 \quad \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_6}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{25} & -\frac{18}{25} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}}_{\substack{\bar{c}_4 \quad \bar{c}_5 \quad \bar{c}_6}} \end{aligned}$$

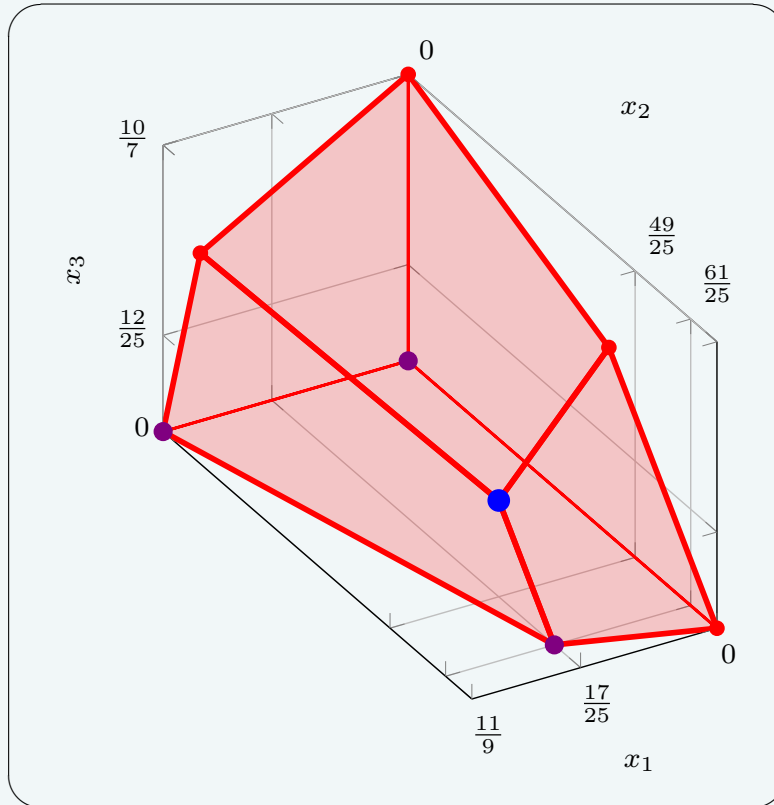
Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{49}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = \frac{499}{25}$ è il valore della soluzione ottima.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro colorato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{17}{25}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{49}{25}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{12}{25}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{499}{25}$.

In viola il primo, il secondo e il terzo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso rivisto (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

Algoritmo del simplesso duale rivisto

Esercizio 12.1 — Algoritmo del simplesso duale rivisto ($P11$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & \leq & -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 & \leq & 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- **Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, poiché $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ danno

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- **Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_3 & = & -2 \\ \bar{b}_4 & = & 0 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_3 = -2 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_3 < 0$, x_3 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_3$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_3 \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_3 &= 1 \\ u_4 &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \ 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_3 , $\bar{a}_{3j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{31}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{32}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{3j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2}, \underbrace{\frac{-4}{-1}}_{=4} \right\} = 2,$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{3j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 2 \bar{a}_{3j}$:

$$\underbrace{-2}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{-2}_{\bar{c}_3}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 4\}$.

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-2 \quad -2)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_B \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 &= -2 \\ \bar{b}_1 + \bar{b}_4 &= 0 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -2 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $u A_B = e'_4$ per calcolare $u = e'_4 A_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_1 + u_4 = 0 \\ u_4 = 1 \end{cases} \quad u = (1 \quad 1)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{A}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = u A_j$:

$$\underbrace{-2}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{1}_{\bar{a}_{43}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ \underbrace{-2}_{=1} \end{array} \right\} = 1,$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-3}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_4}$$

La nuova base è $B = \{1, 2\}$.

• Iterazione 3

Con $B = \{1, 2\}$ e $N = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{c}' = (-3 \quad -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & -\bar{b}_2 & = & -2 \\ \bar{b}_1 & -\bar{b}_2 & = & 0 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

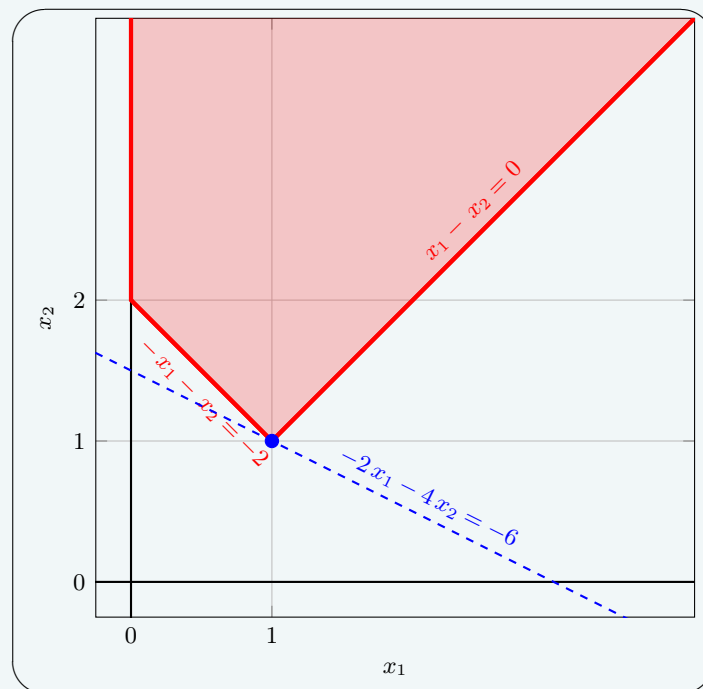
$$\text{Calcoliamo il valore ottimo } \bar{z} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} = (-2 \quad -4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP) = -6.$$

Soluzione grafica:

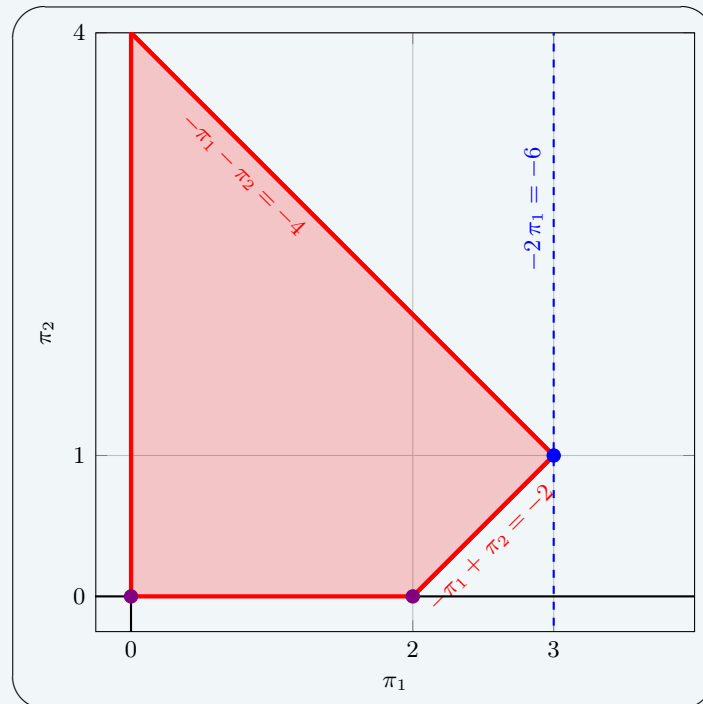
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP) = -6$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali: π_1, π_2 .



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 3, \quad \tilde{\pi}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -6.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.2 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P12)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Poiché $c \leq 0$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, poiché $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ danno

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = (-1 \quad -2) \leq \mathbf{0}.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -2)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_3 & = & -3 \\ \bar{b}_4 & = & -1 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_3 = -3 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_3 < 0$, x_3 è la riga pivot e abbiamo $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $u A_B = e'_3$ per calcolare $u = e'_3 A_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_3 = 1 \\ u_4 = 0 \end{cases} \quad u = (1 \ 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{A}$ associata a x_3 , $\bar{a}_{3j} = u A_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{31}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{32}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{3j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2} \right\} = 1,$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{3j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{3j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_3}$$

La nuova base è $B = \{1, 4\}$.

• Iterazione 2

Con $B = \{1, 4\}$ e $N = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{c}' = (-1 \ -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & = & -3 \\ \bar{b}_1 + \bar{b}_4 & = & -1 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -4 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_4$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_4 \mathbf{A}_B^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_1 + u_4 & = & 0 \\ u_4 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \quad 1)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-3}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{1}_{\bar{a}_{43}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ \underbrace{-3}_{=\frac{1}{3}} \end{array} \right\} = \frac{1}{3},$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{1}{3} \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-\frac{4}{3}}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-\frac{1}{3}}_{\bar{c}_4}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 2\}$.

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \left(-\frac{4}{3} \quad -\frac{1}{3}\right)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_B \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & -\bar{b}_2 & = & -3 \\ \bar{b}_1 & -2\bar{b}_2 & = & -1 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

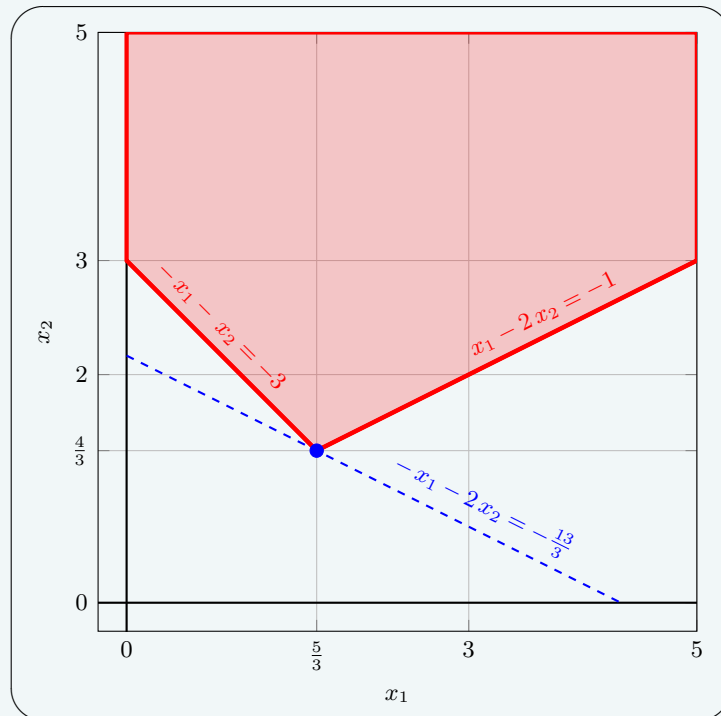
$$\text{Calcoliamo il valore ottimo } \bar{z} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = -\frac{13}{3}$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{13}{3}.$$

Soluzione grafica:

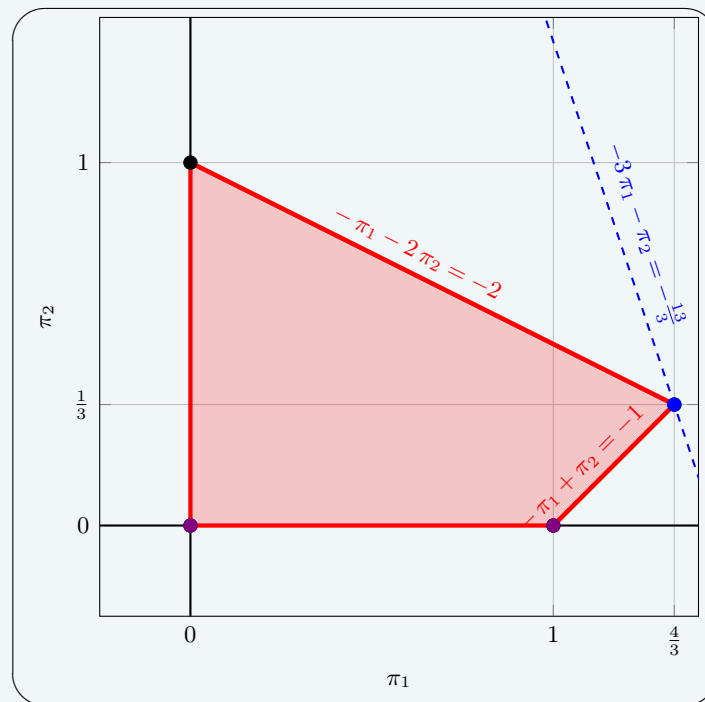
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{13}{3}.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali: π_1, π_2 .



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{13}{3}.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.3 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P13)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x_1 - 3x_2 \\
 \text{soggetto a} \quad & -x_1 - 2x_2 \leq -6 \\
 & x_1 - 4x_2 \leq -6 \\
 & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, poiché $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ danno

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = (-1 \quad -3) \leq \mathbf{0}.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -3)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_3 & = & -6 \\ \bar{b}_4 & = & -6 \\ \bar{b}_5 & = & 3 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_3 = -6 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_3 < 0$, x_3 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_3'$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3' \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_3 & = & 1 \\ u_4 & = & 0 \\ u_5 & = & 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_3 , $\bar{a}_{3j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{31}} \quad \underbrace{-2}_{\bar{a}_{32}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{3j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-3}{-2}}_{=\frac{3}{2}} \right\} = 1,$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{3j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{3j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_3}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$.

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & & = & -6 \\ \bar{b}_1 & +\bar{b}_4 & = & -6 \\ 2\bar{b}_1 & & +\bar{b}_5 & = & 3 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -12 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}'_4$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_4 \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_1 + u_4 + 2u_5 = 0 \\ u_4 = 1 \\ u_5 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \quad 1 \quad 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-6}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{1}_{\bar{a}_{43}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ \underbrace{-6}_{=\frac{1}{6}} \end{array} \right\} = \frac{1}{6},$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{1}{6} \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-\frac{7}{6}}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-\frac{1}{6}}_{\bar{c}_4}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$.

- **Iterazione 3**

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & -2\bar{b}_2 & & = & -6 \\ \bar{b}_1 & -4\bar{b}_2 & & = & -6 \\ 2\bar{b}_1 & -2\bar{b}_2 & +\bar{b}_5 & = & 3 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

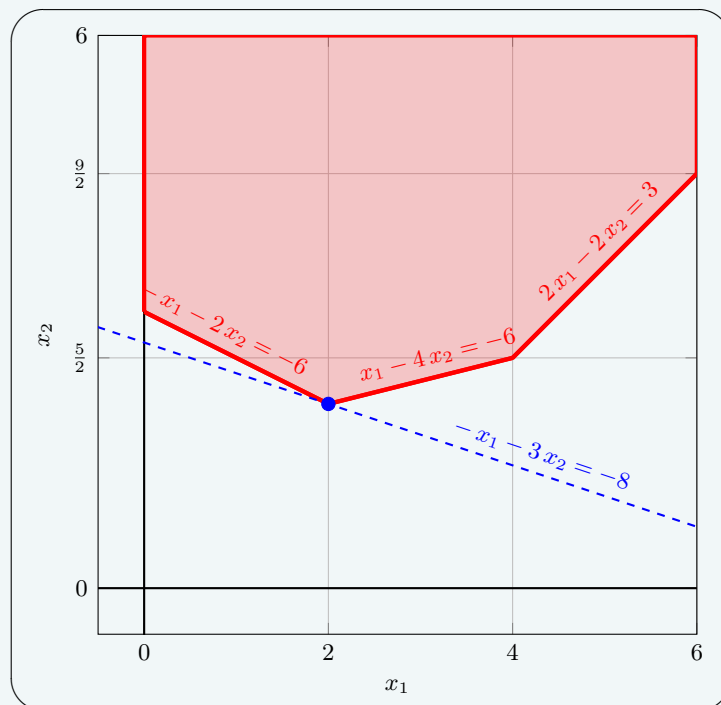
$$\text{Calcoliamo il valore ottimo } \bar{z} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -8$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.

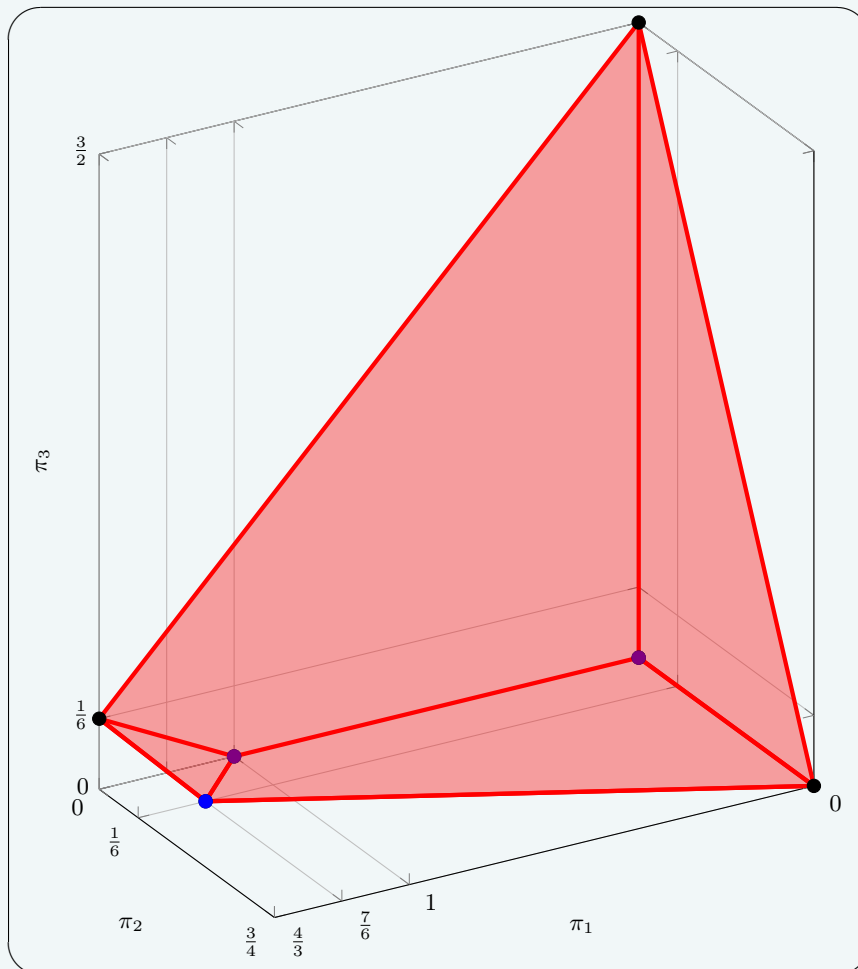


Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le tre variabili duali originali:

π_1, π_2, π_3 .



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{7}{6}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.4 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P14)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2 \leq 2 \\
 & & x_1 & - & 2 & x_2 \leq 2 \\
 & - & x_1 & - & & x_2 \leq -3 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, poiché $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ danno

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = (-1 \quad -2) \leq \mathbf{0}.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -2)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_3 & = & 2 \\ \bar{b}_4 & = & 2 \\ \bar{b}_5 & = & -3 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_5 = -3 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_5 < 0$, x_5 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_5'$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}_5' \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_3 & = & 0 \\ u_4 & = & 0 \\ u_5 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_5 , $\bar{a}_{5j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{51}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{52}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{5j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2} \right\} = 1,$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{5j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{5j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_5}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$.

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 + \bar{b}_3 = 2 \\ \bar{b}_1 + \bar{b}_4 = 2 \\ -\bar{b}_1 = -3 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -1 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}'_4$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_4 \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_1 + u_3 - u_4 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_3 = 1 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (0 \quad 1 \quad 1)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-3}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{1}_{\bar{a}_{45}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-3}}_{=\frac{1}{3}} \right\} = \frac{1}{3},$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{1}{3} \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-\frac{1}{3}}_{\bar{c}_4} \quad \underbrace{-\frac{4}{3}}_{\bar{c}_5}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$.

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & +\bar{b}_2 & +\bar{b}_3 & = & 2 \\ \bar{b}_1 & -2\bar{b}_2 & & = & 2 \\ -\bar{b}_1 & -\bar{b}_2 & & = & -3 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

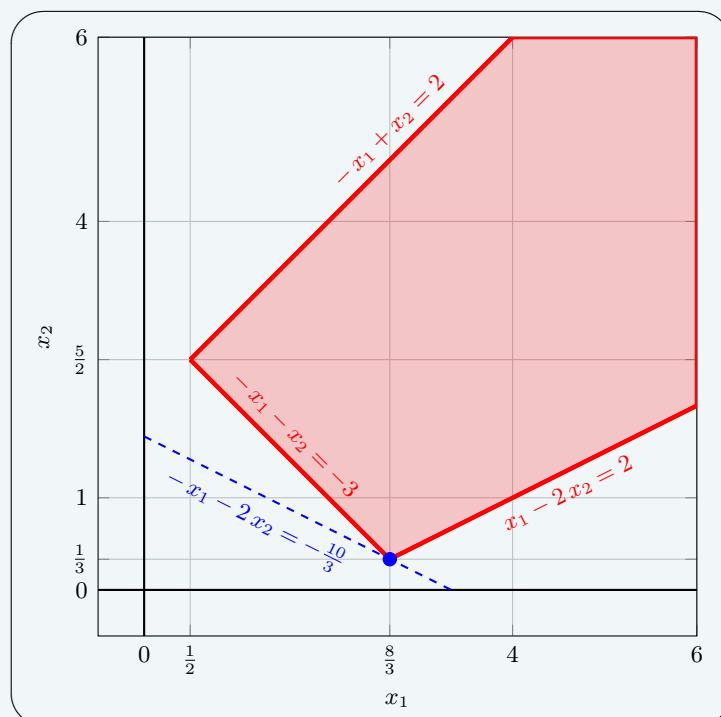
$$\text{Calcoliamo il valore ottimo } \bar{z} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} = -\frac{10}{3}$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{10}{3}.$$

Soluzione grafica:

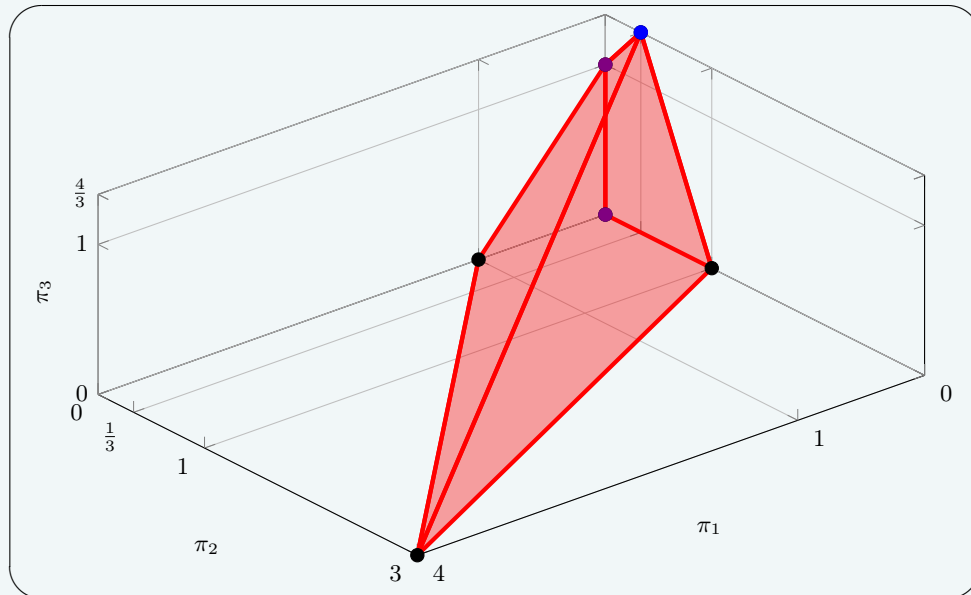
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{10}{3}.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le tre variabili duali originali: π_1, π_2, π_3 .



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_3 = \frac{4}{3}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{10}{3}.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.5 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P15)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & -3 & x_1 & - & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -4 \\ & & - & x_1 & - & 3 & x_2 \leq -6 \\ & & & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, poiché $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ danno

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = (-3 \quad -2) \leq \mathbf{0}.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-3 \quad -2)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_3 & = & -4 \\ \bar{b}_4 & = & -6 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_3 = -4 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_3 < 0$, x_3 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}_3'$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3' \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_3 = 1 \\ u_4 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \quad 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_3 , $\bar{a}_{3j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{31}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{32}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{3j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-3}{-1}}_{=3}, \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2} \right\} = 2,$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{3j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 2 \bar{a}_{3j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_1} \quad \underbrace{-2}_{\bar{c}_3}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{2, 4\}$.

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -2)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_2 & = & -4 \\ -3\bar{b}_2 & +\bar{b}_4 & = & -6 \end{cases} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

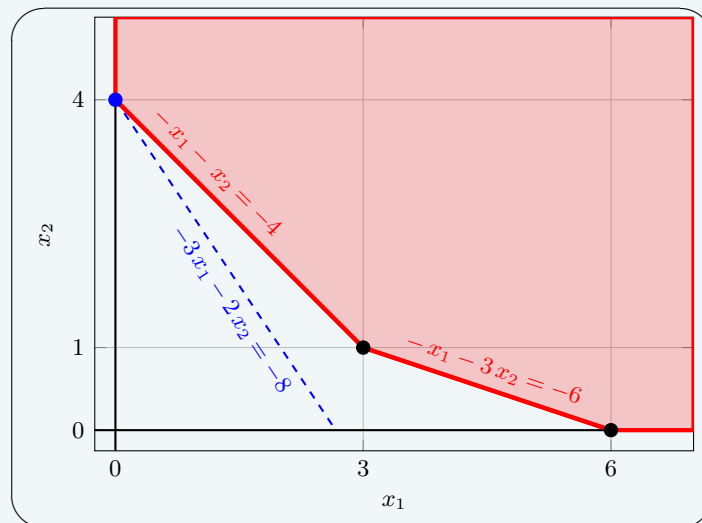
$$\text{Calcoliamo il valore ottimo } \bar{z} = c'_B \bar{b} = (-2 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -8$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

Soluzione grafica:

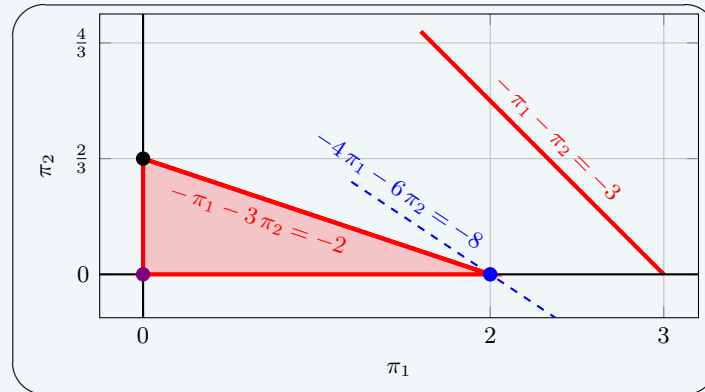
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali: π_1, π_2 . Il vincolo $-\pi_1 - \pi_2 \geq -3$ è ridondante.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 2, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.6 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P16)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & -2 & x_1 & - & & x_2 \leq -4 \\ & & - & x_1 & - & 3 & x_2 \leq -6 \\ & & & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, resolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, poiché $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ danno

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_3 & = & -4 \\ \bar{b}_4 & = & -6 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_3 = -4 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_3 < 0$, x_3 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_3$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_3 \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_3 = 1 \\ u_4 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \ 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_3 , $\bar{a}_{3j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-2}_{\bar{a}_{31}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{32}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{3j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-2}}_{=\frac{1}{2}}, \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2} \right\} = \frac{1}{2},$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{3j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{1}{2} \bar{a}_{3j}$:

$$\underbrace{-\frac{3}{2}}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\bar{c}_3}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 4\}$.

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_B \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -2\bar{b}_1 = -4 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_4 = -6 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -4 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_4$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_4 \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -2u_1 - u_4 = 0 \\ u_4 = 1 \end{cases} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-\frac{5}{2}}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\bar{a}_{43}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{-\frac{3}{2}}_{=\frac{3}{5}}, \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=1} \right\} = \frac{3}{5},$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{3}{5} \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-\frac{1}{5}}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-\frac{3}{5}}_{\bar{c}_4}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 2\}$.

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -2\bar{b}_1 & -\bar{b}_2 & = & -4 \\ -\bar{b}_1 & -3\bar{b}_2 & = & -6 \end{cases} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

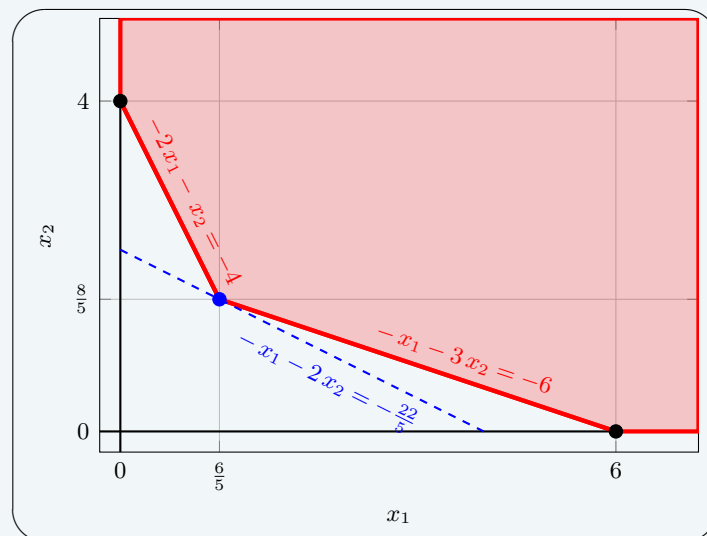
Calcoliamo il valore ottimo $\bar{z} = c'_B \bar{b} = (-1 \quad -2) \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = -\frac{22}{5}$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = \frac{6}{5}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{22}{5}.$$

Soluzione grafica:

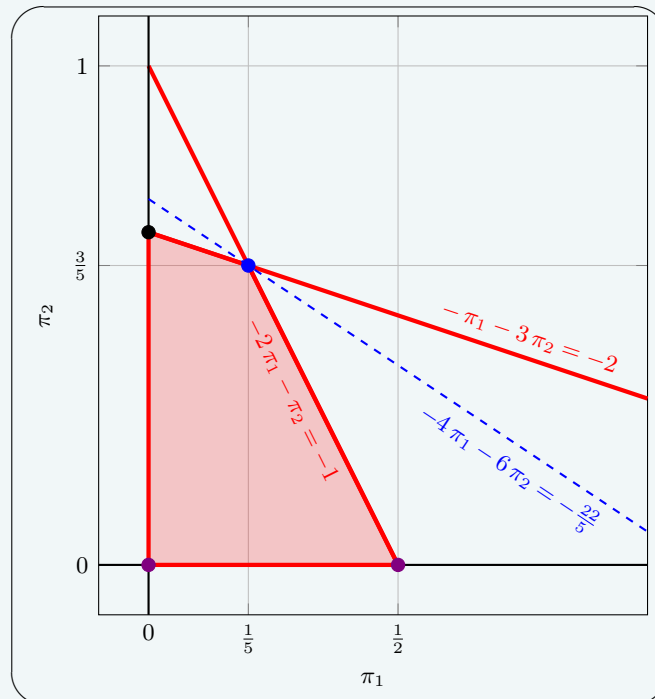
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{6}{5}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{22}{5}.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali: π_1, π_2 .



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{5}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{5}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{22}{5}.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.7 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P51)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -5 \\ & -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $c \leq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è **duale ammissibile**, poiché $A_{\mathcal{B}} = I$ e $c_{\mathcal{B}} = 0$ danno

$$\bar{c}' = c'_{\mathcal{N}} = (-2 \quad -1 \quad 0) \leq 0.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, abbiamo:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \bar{c}' = (-2 \quad -1 \quad 0)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $A_{\mathcal{B}} \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_4 & = & -5 \\ \bar{b}_5 & = & -2 \end{cases} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -5 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_4$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_4 \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_4 = 1 \\ u_5 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (1 \ 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{1}_{\bar{a}_{41}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{-3}_{\bar{a}_{43}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{0}{-3}}_{=0} \right\} = 0,$$

quindi x_3 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 0 \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-2}_{\bar{c}_1} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{0}_{\bar{c}_4}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{3, 5\}$.

• Iterazione 2

Con $\mathcal{B} = \{3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-2 \ -1 \ 0)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -3\bar{b}_3 & = & -5 \\ 2\bar{b}_3 + \bar{b}_5 & = & -2 \end{cases} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_5 = -\frac{16}{3} < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_5 < 0$, x_5 è la riga pivot e abbiamo $e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $u A_B = e'_5$ per calcolare $u = e'_5 A_B^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -3u_3 + 2u_5 & = & 0 \\ u_5 & = & 1 \end{cases} \quad u = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la riga di $\bar{A}$ associata a x_5 , $\bar{a}_{5j} = u A_j$:

$$\underbrace{-\frac{7}{3}}_{\bar{a}_{51}} \quad \underbrace{-\frac{8}{3}}_{\bar{a}_{52}} \quad \underbrace{\frac{2}{3}}_{\bar{a}_{54}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{5j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{-\frac{2}{-\frac{7}{3}}}_{=\frac{6}{7}}, \underbrace{-\frac{1}{-\frac{8}{3}}}_{=\frac{3}{8}} \right\} = \frac{3}{8},$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{5j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{3}{8} \bar{a}_{5j}$:

$$\underbrace{-\frac{9}{8}}_{\bar{c}_1} \quad \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\bar{c}_4} \quad \underbrace{-\frac{3}{8}}_{\bar{c}_5}$$

La nuova base è $B = \{2, 3\}$.

• Iterazione 3

Con $B = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$, abbiamo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \left(-\frac{9}{8} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{8}\right)$$

Test di ammissibilità

RisolviAMO $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_2 & -3\bar{b}_3 & = & -5 \\ -2\bar{b}_2 & +2\bar{b}_3 & = & -2 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

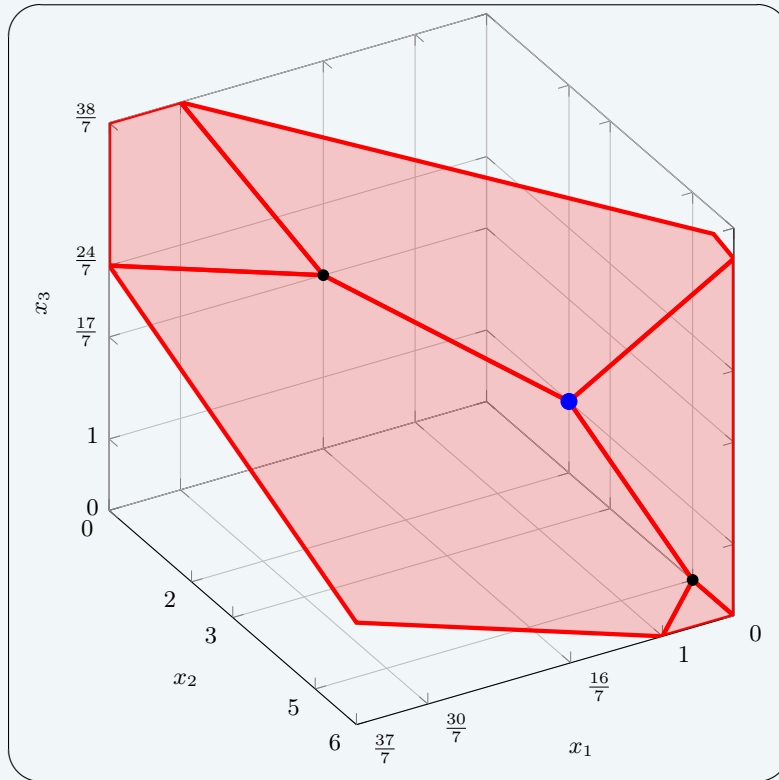
Calcoliamo il valore ottimo $\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP) = -2.$$

Soluzione grafica:

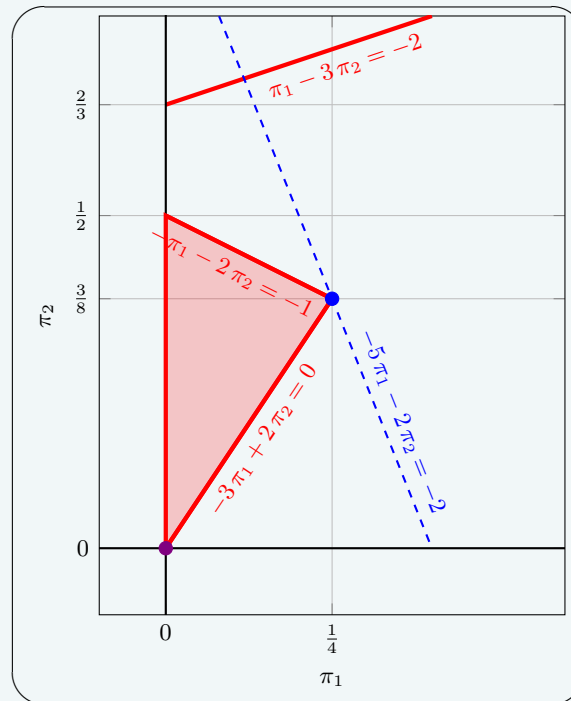
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP) = -2.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali: π_1, π_2 .



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -2.$$

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Esercizio 12.8 — Algoritmo del simplesso duale rivisto (P53)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 & - & 4 & x_3 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & & & \leq & -2 \\ & & & & - & x_2 & - & & x_3 & \leq & -3 \\ & & - & x_1 & & & - & & x_3 & \leq & -2 \\ & & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso duale rivisto per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, risolvendo a ogni iterazione i due sistemi di equazioni lineari. Come riga pivot scegliere la variabile in base con l'indice minimo tra quelle con $\bar{b}_r < 0$ e, nel test dei rapporti per la colonna pivot, risolvere i pareggi scegliendo l'indice minimo.

Soluzione

Abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

- Inizializzazione**

Poiché è un problema LP in forma standard ottenuto da un problema LP in forma canonica con $c \leq 0$ aggiungendo le variabili di scarto, la partizione $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ è **duale ammissibile**, poiché $A_{\mathcal{B}} = I$ e $c_{\mathcal{B}} = 0$ danno

$$\bar{c}' = c'_{\mathcal{N}} = (-1 \quad -2 \quad -4) \leq 0.$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, e quindi si usa l'algoritmo del simplesso duale.

- Iterazione 1**

Con $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, abbiamo:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c}' = (-1 \quad -2 \quad -4)$$

Test di ammissibilità

RisolviAMO $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \bar{b}_4 & = & -2 \\ \bar{b}_5 & = & -3 \\ \bar{b}_6 & = & -2 \end{cases} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_4 = -2 < 0$, quindi eseguiAMO un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_4 < 0$, x_4 è la riga pivot e abbiamo $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

RisolviAMO $u A_B = e'_4$ per calcolare $u = e'_4 A_B^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} u_4 & = & 1 \\ u_5 & = & 0 \\ u_6 & = & 0 \end{cases} \quad u = (1 \ 0 \ 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{A}$ associata a x_4 , $\bar{a}_{4j} = u A_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{41}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{42}} \quad \underbrace{0}_{\bar{a}_{43}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{4j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2} \right\} = 1,$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{4j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{4j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_2} \quad \underbrace{-4}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_4}$$

La nuova base è $B = \{1, 5, 6\}$.

• **Iterazione 2**

Con $\mathcal{B} = \{1, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}' = (-1 \quad -4 \quad -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & = -2 \\ & \bar{b}_5 & = -3 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_6 & = -2 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_5 = -3 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_5 < 0$, x_5 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}'_5$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_5 \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_1 & -u_6 & = 0 \\ & u_5 & = 1 \\ & u_6 & = 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_5 , $\bar{a}_{5j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{52}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{53}} \quad \underbrace{0}_{\bar{a}_{54}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{5j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-4}{-1}}_{=4} \right\} = 1,$$

quindi x_2 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{5j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{5j}$:

$$\underbrace{-3}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_4} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_5}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$.

• Iterazione 3

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-3 \quad -1 \quad -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 - \bar{b}_2 & = -2 \\ & -\bar{b}_2 & = -3 \\ -\bar{b}_1 & + \bar{b}_6 & = -2 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_1 = -1 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_1 < 0$, x_1 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_1$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_1 & -u_6 & = & 1 \\ -u_1 & -u_2 & & = & 0 \\ & & u_6 & = & 0 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (-1 \quad 1 \quad 0)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_1 , $\bar{a}_{1j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{13}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{14}} \quad \underbrace{1}_{\bar{a}_{15}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{1j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-3}{-1}}_{=3}, \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1} \right\} = 1,$$

quindi x_4 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{1j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{1j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_1} \quad \underbrace{-2}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-2}_{\bar{c}_5}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{2, 4, 6\}$.

• **Iterazione 4**

Con $\mathcal{B} = \{2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -2 \quad -2)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_B \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_2 + \bar{b}_4 & = & -2 \\ -\bar{b}_2 & = & -3 \\ & \bar{b}_6 & = & -2 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Non tutte le variabili in base sono non negative, poiché $\bar{b}_6 = -2 < 0$, quindi eseguiamo un'operazione di pivot duale.

Operazione di pivot duale

Poiché $\bar{b}_6 < 0$, x_6 è la riga pivot e abbiamo $\mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_B = \mathbf{e}'_6$ per calcolare $\mathbf{u} = \mathbf{e}'_6 \mathbf{A}_B^{-1}$,
secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -u_2 - u_4 & = & 0 \\ u_2 & = & 0 \\ & u_6 & = & 1 \end{cases} \quad \mathbf{u} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Calcoliamo la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_6 , $\bar{a}_{6j} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{a}_{61}} \quad \underbrace{-1}_{\bar{a}_{63}} \quad \underbrace{0}_{\bar{a}_{65}}$$

I candidati sono le variabili fuori base con $\bar{a}_{6j} < 0$, e il test dei rapporti dà:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2} \right\} = 1,$$

quindi x_1 è la colonna pivot.

Aggiorniamo i costi ridotti con la riga $\bar{a}_{6j}$ già calcolata, $\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - 1 \bar{a}_{6j}$:

$$\underbrace{-1}_{\bar{c}_3} \quad \underbrace{-2}_{\bar{c}_5} \quad \underbrace{-1}_{\bar{c}_6}$$

La nuova base è $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$.

• Iterazione 5

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5, 6\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}}' = (-1 \quad -2 \quad -1)$$

Test di ammissibilità

Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ per calcolare $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 & -\bar{b}_2 & +\bar{b}_4 & = & -2 \\ & -\bar{b}_2 & & = & -3 \\ -\bar{b}_1 & & & = & -2 \end{cases} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tutte le variabili in base sono non negative, quindi la base è primale ammissibile e duale ammissibile: è **ottima**.

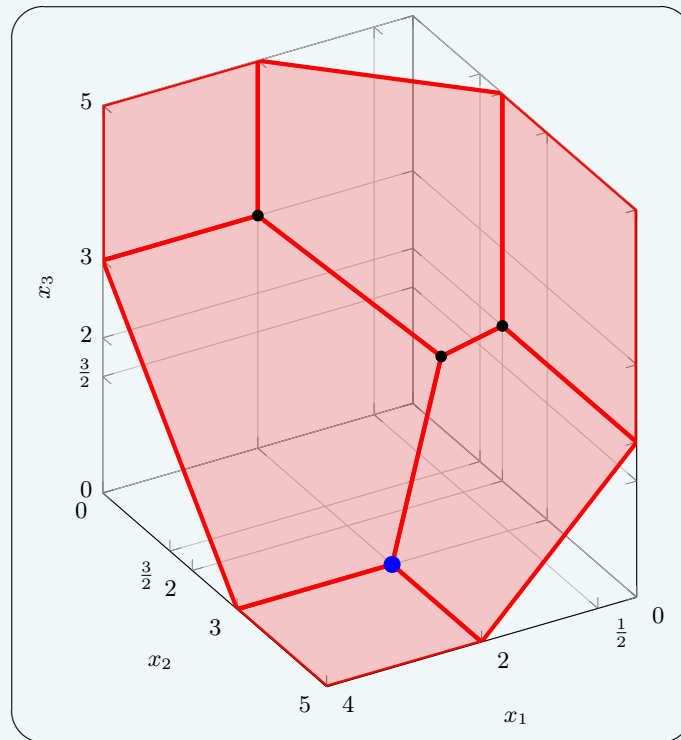
$$\text{Calcoliamo il valore ottimo } \bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = (-1 \quad -2 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -8$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

Soluzione grafica:

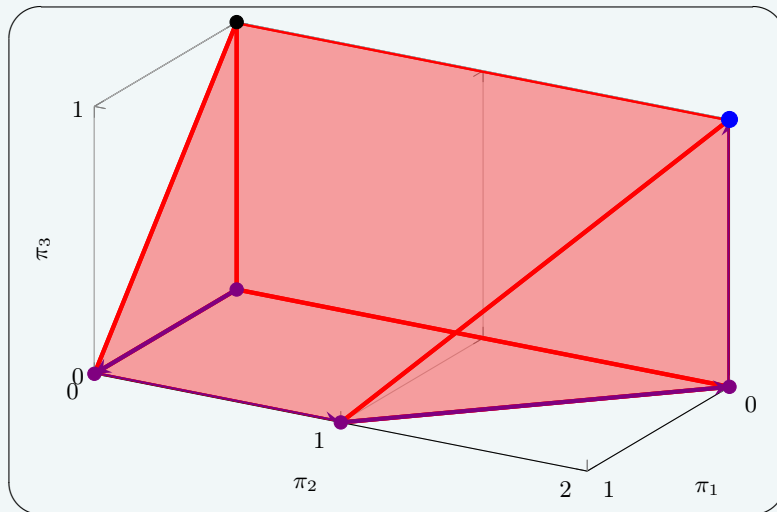
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata: disegniamo solo le sue facce, tagliate in $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 5$.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le tre variabili duali originali: π_1, π_2, π_3 . Il vincolo $-\pi_2 - \pi_3 \geq -4$ è ridondante.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2, \quad \tilde{\pi}_3 = 1, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

In viola i quattro vertici $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,2,0)$ esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto (prima di raggiungere quello ottimo $(0,2,1)$, rappresentato in blu). I valori della funzione obiettivo duale sono $0 \rightarrow -2 \rightarrow -5 \rightarrow -6 \rightarrow -8$.

Il metodo primale-duale

Esercizio 13.1 — Il metodo primale-duale (PD1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma standard di minimo con $n = 3$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 2 & x_3 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & & x_2 & + & 2 & x_3 & = & 5 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & + & & x_3 & = & 4 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Il suo vettore dei termini noti è non negativo e il suo vettore dei costi è non negativo, quindi $\pi = (0 \ 0)'$ è una soluzione ammissibile del suo problema duale.

Domande

Eseguire il metodo primale-duale a partire da $\pi = (0 \ 0)'$, mostrando a ogni iterazione l'insieme ammesso, il valore ottimo del primale ristretto e il passo duale.

Soluzione

- **Iterazione 1**

Con $\pi = (0 \ 0)'$ gli scarti duali $s_j = c_j - A'_j \pi$ sono

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 2,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \emptyset$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha solo le m variabili artificiali, perché nessuna variabile originale è ammessa. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 9 > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $\mathbf{y} = (1 \ 1)'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$\mathbf{A}'_1 \mathbf{y} = 2, \quad \mathbf{A}'_2 \mathbf{y} = 3, \quad \mathbf{A}'_3 \mathbf{y} = 3.$$

Passo duale. I candidati sono le colonne non ammesse con $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0$:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1}, \underbrace{\frac{2}{3}}_{=2/3}, \underbrace{\frac{2}{3}}_{=2/3} \right\} = \frac{2}{3},$$

realizzato da $j^* = 2, 3$. La nuova soluzione duale è

$$\boldsymbol{\pi} \leftarrow (0 \ 0)' + \frac{2}{3} \cdot (1 \ 1)' = \left(\frac{2}{3} \ \frac{2}{3}\right)',$$

con valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} = 6$.

- **Iterazione 2**

Con $\boldsymbol{\pi} = (\frac{2}{3} \ \frac{2}{3})'$ gli scarti duali $s_j = c_j - \mathbf{A}'_j \boldsymbol{\pi}$ sono

$$s_1 = \frac{2}{3}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \{2, 3\}$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha le variabili x_2, x_3 e le m variabili artificiali. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 0,$$

quindi il metodo **si arresta**. Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 2$$

con valore ottimo $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} = 6$. Una soluzione ottima del problema duale è $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (\frac{2}{3} \ \frac{2}{3})'$, con valore obiettivo $\mathbf{b}'\tilde{\boldsymbol{\pi}} = 6$: i due valori coincidono, in accordo con il teorema della dualità forte.

Esercizio 13.2 — Il metodo primale-duale (PD2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma standard di minimo con $n = 3$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 2 & x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & & x_2 & + & & x_3 & = & 4 \\ & x_1 & + & 2 & x_2 & + & & x_3 & = & 5 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Il suo vettore dei termini noti è non negativo e il suo vettore dei costi è non negativo, quindi $\pi = (0 \ 0)'$ è una soluzione ammissibile del suo problema duale.

Domande

Eseguire il metodo primale-duale a partire da $\pi = (0 \ 0)'$, mostrando a ogni iterazione l'insieme ammesso, il valore ottimo del primale ristretto e il passo duale.

Soluzione

• Iterazione 1

Con $\pi = (0 \ 0)'$ gli scarti duali $s_j = c_j - A'_j \pi$ sono

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 2,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \emptyset$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha solo le m variabili artificiali, perché nessuna variabile originale è ammessa. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 9 > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $y = (1 \ 1)'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$A'_1 y = 2, \quad A'_2 y = 3, \quad A'_3 y = 2.$$

Passo duale. I candidati sono le colonne non ammesse con $A'_j y > 0$:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1}, \underbrace{\frac{2}{3}}_{=2/3}, \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1} \right\} = \frac{2}{3},$$

realizzato da $j^* = 2$. La nuova soluzione duale è

$$\pi \leftarrow (0 \ 0)' + \frac{2}{3} \cdot (1 \ 1)' = \left(\frac{2}{3} \ \frac{2}{3}\right)',$$

con valore obiettivo duale $b' \pi = 6$.

• Iterazione 2

Con $\pi = (\frac{2}{3} \ \frac{2}{3})'$ gli scarti duali $s_j = c_j - A'_j \pi$ sono

$$s_1 = \frac{2}{3}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{2}{3},$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \{2\}$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha le variabili x_2 e le m variabili artificiali. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = \frac{3}{2} > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $\mathbf{y} = (1 \quad -\frac{1}{2})'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$\mathbf{A}'_1 \mathbf{y} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{A}'_3 \mathbf{y} = \frac{1}{2}.$$

Passo duale. I candidati sono le colonne non ammesse con $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0$:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{2/3}{1/2}}_{=4/3}, \underbrace{\frac{2/3}{1/2}}_{=4/3} \right\} = \frac{4}{3},$$

realizzato da $j^* = 1, 3$. La nuova soluzione duale è

$$\boldsymbol{\pi} \leftarrow \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}\right)' + \frac{4}{3} \cdot \left(1 \quad -\frac{1}{2}\right)' = (2 \quad 0)',$$

con valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} = 8$.

• **Iterazione 3**

Con $\boldsymbol{\pi} = (2 \quad 0)'$ gli scarti duali $s_j = c_j - \mathbf{A}'_j \boldsymbol{\pi}$ sono

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha le variabili x_1, x_2, x_3 e le m variabili artificiali. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 0,$$

quindi il metodo **si arresta**. Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 0$$

con valore ottimo $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} = 8$. Una soluzione ottima del problema duale è $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (2 \quad 0)'$, con valore obiettivo $\mathbf{b}'\tilde{\boldsymbol{\pi}} = 8$: i due valori coincidono, in accordo con il teorema della dualità forte.

Esercizio 13.3 — Il metodo primale-duale (PD3)

Consideriamo il seguente problema LP in forma standard di minimo con $n = 3$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & 4 & x_3 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 2 & x_3 & = & 6 \\ & & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Il suo vettore dei termini noti è non negativo e il suo vettore dei costi è non negativo, quindi $\pi = (0 \ 0)'$ è una soluzione ammissibile del suo problema duale.

Domande

Eseguire il metodo primale-duale a partire da $\pi = (0 \ 0)'$, mostrando a ogni iterazione l'insieme ammesso, il valore ottimo del primale ristretto e il passo duale.

Soluzione

• Iterazione 1

Con $\pi = (0 \ 0)'$ gli scarti duali $s_j = c_j - A'_j \pi$ sono

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 4,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \emptyset$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha solo le m variabili artificiali, perché nessuna variabile originale è ammessa. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 8 > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $y = (1 \ 1)'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$A'_1 y = 3, \quad A'_2 y = 4, \quad A'_3 y = 3.$$

Passo duale. I candidati sono le colonne non ammesse con $A'_j y > 0$:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{2}{3}}_{=2/3}, \underbrace{\frac{3}{4}}_{=3/4}, \underbrace{\frac{4}{3}}_{=4/3} \right\} = \frac{2}{3},$$

realizzato da $j^* = 1$. La nuova soluzione duale è

$$\pi \leftarrow (0 \ 0)' + \frac{2}{3} \cdot (1 \ 1)' = \left(\frac{2}{3} \ \frac{2}{3}\right)',$$

con valore obiettivo duale $b' \pi = \frac{16}{3}$.

• Iterazione 2

Con $\pi = (\frac{2}{3} \ \frac{2}{3})'$ gli scarti duali $s_j = c_j - A'_j \pi$ sono

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{1}{3}, \quad s_3 = 2,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \{1\}$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha le variabili x_1 e le m variabili artificiali. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 5 > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $\mathbf{y} = (1 \quad -\frac{1}{2})'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$\mathbf{A}'_2 \mathbf{y} = 1, \quad \mathbf{A}'_3 \mathbf{y} = \frac{3}{2}.$$

Passo duale. I candidati sono le colonne non ammesse con $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0$:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{1/3}{1}}_{=1/3}, \underbrace{\frac{2}{3/2}}_{=4/3} \right\} = \frac{1}{3},$$

realizzato da $j^* = 2$. La nuova soluzione duale è

$$\boldsymbol{\pi} \leftarrow \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}\right)' + \frac{1}{3} \cdot \left(1 \quad -\frac{1}{2}\right)' = \left(1 \quad \frac{1}{2}\right)',$$

con valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} = 7$.

- **Iterazione 3**

Con $\boldsymbol{\pi} = (1 \quad \frac{1}{2})'$ gli scarti duali $s_j = c_j - \mathbf{A}'_j \boldsymbol{\pi}$ sono

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{3}{2},$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \{1, 2\}$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha le variabili x_1, x_2 e le m variabili artificiali. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 4 > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $\mathbf{y} = (1 \quad -1)'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$\mathbf{A}'_3 \mathbf{y} = 1.$$

Passo duale. I candidati sono le colonne non ammesse con $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0$:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{3/2}{1}}_{=3/2} \right\} = \frac{3}{2},$$

realizzato da $j^* = 3$. La nuova soluzione duale è

$$\boldsymbol{\pi} \leftarrow \left(1 \quad \frac{1}{2}\right)' + \frac{3}{2} \cdot (1 \quad -1)' = \left(\frac{5}{2} \quad -1\right)',$$

con valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} = 13$.

- **Iterazione 4**

Con $\boldsymbol{\pi} = (\frac{5}{2} \quad -1)'$ gli scarti duali $s_j = c_j - \mathbf{A}'_j \boldsymbol{\pi}$ sono

$$s_1 = \frac{3}{2}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \{2, 3\}$.

Il primale ristretto $RP(\mathcal{J})$ ha le variabili x_2, x_3 e le m variabili artificiali. Il suo valore ottimo è

$$\xi(\mathcal{J}) = 2 > 0.$$

La soluzione ottima di $DRP(\mathcal{J})$ è $\mathbf{y} = (1 \quad -2)'$, e per le colonne non ammesse abbiamo

$$\mathbf{A}'_1 \mathbf{y} = -3,$$

che è non positivo, e non ci sono altre colonne non ammesse. Di conseguenza θ può crescere senza limite: il problema duale è **illimitato** e questo problema LP è **inammissibile**.

Analisi di sensitività

Esercizio 14.1 — Analisi di sensitività (S1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto, l'algoritmo del simplesso determina la base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, con il dizionario associato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 6 + x_3 - 2x_4 \\ z = 26 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e abbiamo

$$A_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \pi = (1 \ 2).$$

Domande

1. Determinare l'intervallo dei valori di c_1 per cui la base $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ resta ottima, e dire come cambiano la soluzione ottima e il valore ottimo all'interno di tale intervallo.
2. Determinare lo stesso intervallo per c_2 .
3. Determinare il nuovo valore ottimo quando c_1 aumenta da 4 a 5.

Soluzione

- La variabile x_1 è **in base**, quindi una variazione $c_1 \rightarrow 4 + \delta$ modifica tutti i costi ridotti. La riga di x_1 nella matrice $\bar{\mathbf{A}}$ è $(1 \quad -1)$, con un elemento positivo, che dà un lower bound su δ , e un elemento negativo, che dà un upper bound:

$$\underbrace{\frac{\bar{c}_3}{\bar{a}_{13}}}_{=\frac{-1}{1}=-1} \leq \delta \leq \underbrace{\frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{14}}}_{=\frac{-2}{-1}=2},$$

cioè $-1 \leq \delta \leq 2$ e quindi

$$c_1 \in [3, 6].$$

Per ogni valore di c_1 in questo intervallo la soluzione ottima resta $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, mentre il valore ottimo diventa $26 + \delta \cdot \tilde{x}_1 = 26 + 2\delta$.

- Anche la variabile x_2 è in base. La riga di x_2 in $\bar{\mathbf{A}}$ è $(-1 \quad 2)$, e quindi

$$\underbrace{\frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{24}}}_{=\frac{-2}{2}=-1} \leq \delta \leq \underbrace{\frac{\bar{c}_3}{\bar{a}_{23}}}_{=\frac{-1}{-1}=1},$$

cioè $-1 \leq \delta \leq 1$ e quindi

$$c_2 \in [2, 4].$$

Per ogni valore di c_2 in questo intervallo la soluzione ottima non cambia, mentre il valore ottimo diventa $26 + \delta \cdot \tilde{x}_2 = 26 + 6\delta$.

- Con $c_1 = 5$ abbiamo $\delta = 1$, che appartiene all'intervallo $[-1, 2]$ determinato nella prima domanda. Di conseguenza, la soluzione ottima non cambia e il nuovo valore ottimo è

$$z(LP) = 26 + 1 \cdot 2 = 28,$$

come conferma $5 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 28$.

Esercizio 14.2 — Analisi di sensitività (S2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 4 & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 10 \\ & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto, l'algoritmo del simplesso determina la base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, con il dizionario associato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 6 + x_3 - 2x_4 \\ z = 26 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e abbiamo

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\pi} = (1 \ 2).$$

Domande

1. Scrivere i prezzi ombra dei due vincoli lineari e spiegarne il significato.
2. Determinare l'intervallo dei valori di b_1 per cui la base $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ resta ottima.
3. Determinare lo stesso intervallo per b_2 , e calcolare il nuovo valore ottimo quando b_2 aumenta da 8 a 9.

Soluzione

- I prezzi ombra sono le componenti del vettore riga $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = (1 \ 2)$, cioè

$$\pi_1 = 1 \quad \text{e} \quad \pi_2 = 2.$$

Il prezzo ombra π_i è l'aumento del valore ottimo per ogni aumento unitario di b_i , finché la base ottima resta ottima. Entrambi i vincoli sono attivi nella soluzione ottima, perché entrambe le variabili di scarto sono fuori base con valore 0. Entrambi i prezzi ombra sono strettamente positivi, quindi aumentare uno qualsiasi dei due termini noti aumenta il valore ottimo. Un vincolo attivo può anche avere prezzo ombra nullo, in presenza di degenerazione duale: qui ciò non accade, perché $\pi_1 = 1$ e $\pi_2 = 2$.

- Una variazione $b_1 \rightarrow 10 + \delta$ modifica i valori delle variabili in base di δ volte la prima colonna di $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, che è $(1 \ -1)'$:

$$\begin{cases} 2 + \delta \geq 0 \\ 6 - \delta \geq 0 \end{cases} \implies -2 \leq \delta \leq 6 \implies b_1 \in [8, 16].$$

- La seconda colonna di $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$ è $(-1 \ 2)'$, quindi

$$\begin{cases} 2 - \delta \geq 0 \\ 6 + 2\delta \geq 0 \end{cases} \implies -3 \leq \delta \leq 2 \implies b_2 \in [5, 10].$$

Con $b_2 = 9$ abbiamo $\delta = 1$, che appartiene all'intervallo $[-3, 2]$, quindi il nuovo valore ottimo è

$$z(LP) = 26 + \delta \pi_2 = 26 + 1 \cdot 2 = 28.$$

La nuova soluzione ottima è $\tilde{x}_1 = 2 - 1 = 1$ e $\tilde{x}_2 = 6 + 2 = 8$, e infatti $4 \cdot 1 + 3 \cdot 8 = 28$.

Esercizio 14.3 — Analisi di sensitività (S3)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & 4 & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 10 \\ & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto, l'algoritmo del simplesso determina la base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, con il dizionario associato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 6 + x_3 - 2x_4 \\ z = 26 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e abbiamo

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\pi} = (1 \ 2).$$

Domande

1. Al problema LP si aggiunge una nuova variabile non negativa x_* , con coefficiente di costo $c_* = 7$ e colonna $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolarne il costo ridotto rispetto alla base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e dire se la base è ancora ottima.
2. In caso contrario, far ripartire l'algoritmo del simplesso da quella base e determinare la nuova soluzione ottima e il nuovo valore ottimo.

Soluzione

- Il costo ridotto della nuova variabile è

$$\bar{c}_* = c_* - \pi A_* = 7 - (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 - 5 = 2 > 0.$$

Di conseguenza, la base $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ non è più duale ammissibile e non è ottima per il nuovo problema LP: conviene produrre la nuova variabile.

- Facciamo ripartire l'algoritmo del simplesso dalla base $\mathcal{B} = \{1, 2\}$, che è ancora primale ammissibile, con x_* come colonna pivot. La sua colonna nel dizionario è

$$\bar{A}_* = A_{\mathcal{B}}^{-1} A_* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'unico elemento positivo è quello della variabile in base x_2 , quindi

$$t_m = \frac{6}{3} = 2$$

e la riga pivot è x_2 , che esce dalla base. Dopo questa sola operazione di pivot tutti i costi ridotti diventano non positivi, e la nuova soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_* = 2,$$

con valore ottimo

$$z(LP) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 30.$$

Esercizio 14.4 — Analisi di sensitività (S4)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto, l'algoritmo del simplesso determina la base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, con il dizionario associato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 6 + x_3 - 2x_4 \\ z = 26 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e abbiamo

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\pi} = (1 \ 2).$$

Domande

1. Al problema LP si aggiunge un nuovo vincolo lineare $x_1 + 2x_2 \leq 10$. Verificare se la soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ lo soddisfa.
2. Scrivere l'equazione della variabile di scarto x_5 del nuovo vincolo nel dizionario della base $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$, e dire quale algoritmo occorre usare per ripristinare l'ottimalità.
3. Eseguire un'operazione di pivot di tale algoritmo e determinare la nuova soluzione ottima e il nuovo valore ottimo.

Soluzione

- La soluzione ottima del problema LP originale viola il nuovo vincolo, perché

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 2 + 12 = 14 > 10.$$

- La variabile di scarto del nuovo vincolo è $x_5 = 10 - x_1 - 2x_2$. Sostituendo le equazioni di x_1 e x_2 del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = 10 - \underbrace{(2 - x_3 + x_4)}_{=x_1} - 2 \underbrace{(6 + x_3 - 2x_4)}_{=x_2} = -4 - x_3 + 3x_4,$$

cioè $\bar{b}_5 = -4$, $\bar{a}_{53} = 1$ e $\bar{a}_{54} = -3$.

La base estesa $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ è ancora **duale ammissibile**, perché i costi ridotti $\bar{c}_3 = -1$ e $\bar{c}_4 = -2$ non cambiano, ma non è primale ammissibile, perché $\bar{b}_5 = -4 < 0$. Di conseguenza, usiamo l'**algoritmo del simplesso duale**.

- La riga pivot è x_5 . L'unico elemento negativo della sua riga è $\bar{a}_{54} = -3$, quindi il ratio test gives

$$\frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{54}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

e la colonna pivot è x_4 . Dopo questa sola operazione di pivot duale la base diventa primale ammissibile, e la nuova soluzione ottima è

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad z(LP) = 4 \cdot \frac{10}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{70}{3}.$$

Aggiungere un vincolo non può allargare la regione ammissibile, quindi il valore ottimo di un problema in forma di massimo non può aumentare: infatti $\frac{70}{3} < 26$.

La geometria della programmazione lineare

Esercizio 15.1 — La geometria della programmazione lineare (P2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & -4 & x_1 & + & 10 & x_2 \leq 35 \\ & & 3 & x_1 & + & x_2 \leq 12 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Determinare la dimensione della regione ammissibile F e dire se è a dimensione piena.
2. Determinare le faccette e i vertici di F .
3. Scrivere la sua forma standard di massimo, elencare tutte le basi e dire quali di esse sono associate a una soluzione di base ammissibile. Verificare la corrispondenza con i vertici trovati nella domanda precedente.

Soluzione

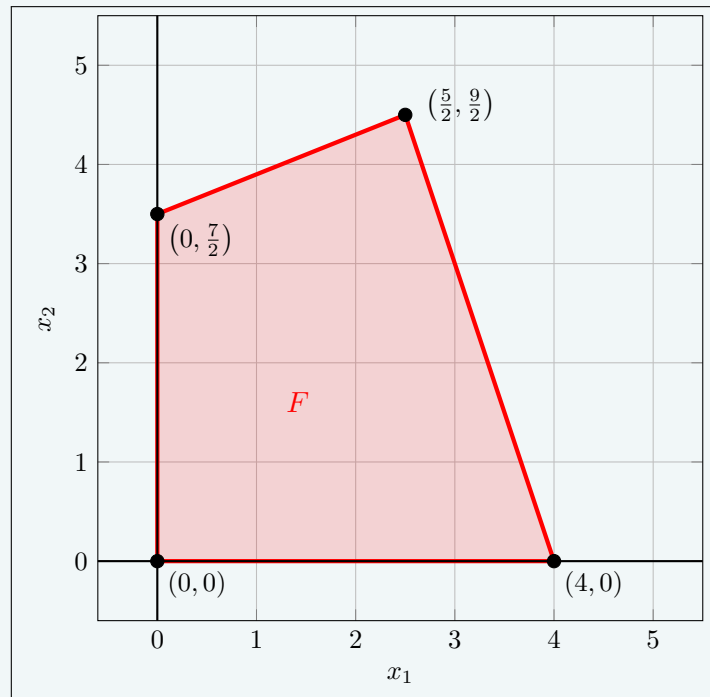
- La regione ammissibile è

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -4x_1 + 10x_2 \leq 35, \quad 3x_1 + x_2 \leq 12, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa tutti e quattro i vincoli in senso stretto, quindi un piccolo disco centrato in esso è contenuto in F : abbiamo $\dim(F) = 2$ e F è **a dimensione piena**.

- Poiché $\dim(F) = 2$, le sue faccette sono le facce di dimensione 1, cioè i suoi spigoli, e i suoi vertici sono le facce di dimensione 0. Ciascuno dei quattro vincoli definisce una faccetta, e i vertici sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$



- Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto otteniamo la forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di uguaglianza. Una base è un sottoinsieme di 2 indici su 4, e ci sono $\binom{4}{2} = 6$ sottoinsiemi di questo tipo, che danno tutti una matrice invertibile:

$\mathcal{B}$	$\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$	ammissibile	vertice (x_1, x_2)
$\{1, 2\}$	$(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$	✓	$(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$
$\{1, 3\}$	$(4, 51)$	✓	$(4, 0)$
$\{1, 4\}$	$(-\frac{35}{4}, \frac{153}{4})$		
$\{2, 3\}$	$(12, -85)$		
$\{2, 4\}$	$(\frac{7}{2}, \frac{17}{2})$	✓	$(0, \frac{7}{2})$
$\{3, 4\}$	$(35, 12)$	✓	$(0, 0)$

Esattamente 4 delle 6 basi sono ammissibili, e corrispondono ai 4 vertici trovati nella domanda precedente. La corrispondenza è **biunivoca**, perché nessuna soluzione di base ammissibile è degenere.

Esercizio 15.2 — La geometria della programmazione lineare (G2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n = 3$ variabili non negative e $m = 1$ vincolo lineare di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & x_3 \\ \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Determinare la dimensione della regione ammissibile F e dire se è a dimensione piena.
2. Determinare i vertici di F enumerando tutte le basi.
3. Determinare l'insieme delle soluzioni ottime e dire se è una faccia di F .

Soluzione

- Tutti i punti di F soddisfano il vincolo di uguaglianza $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$, quindi $\text{aff}(F)$ è contenuto in tale piano:

$$\dim(F) \leq n - \text{rank}(\mathbf{A}) = 3 - 1 = 2.$$

I tre punti $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartengono a F e non sono allineati, quindi $\dim(F) =$

2. La regione ammissibile non è quindi a dimensione piena, come accade sempre per la forma standard di massimo.
- Una base è un sottoinsieme di $m = 1$ indice su $n = 3$, e ci sono 3 sottoinsiemi di questo tipo, che danno tutti una matrice invertibile:

$\mathcal{B}$	$\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$	ammissibile	vertice
$\{1\}$	(2)	✓	$(2, 0, 0)$
$\{2\}$	$(\frac{4}{3})$	✓	$(0, \frac{4}{3}, 0)$
$\{3\}$	(4)	✓	$(0, 0, 4)$

Tutte e tre le basi sono ammissibili, quindi F ha esattamente tre vertici: è un triangolo.

- I valori obiettivo nei tre vertici sono

$$2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}, \quad 1 \cdot 4 = 4,$$

quindi il valore ottimo è $z(LP) = 4$, raggiunto in due vertici. Per l'osservazione sulle soluzioni ottime multiple, ogni punto del segmento che li unisce è ottimo:

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} : \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Questo insieme è la **faccia** di F definita dalla disuguaglianza valida $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$, e ha dimensione 1: è uno spigolo del triangolo.

Esercizio 15.3 — La geometria della programmazione lineare (G3)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2 & x_2 & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & & x_2 & \leq 2 \\ & - & x_1 & - & & x_2 & \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 & \leq 0 \\ & - & x_1 & + & & x_2 & \leq 0 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Determinare la regione ammissibile F e la sua dimensione.
2. Dire quante basi della forma standard di massimo sono associate all'unico punto di F , e spiegare perché la corrispondenza tra basi e vertici non è biunivoca.

Soluzione

- I primi due vincoli impongono $x_1 + x_2 \leq 2$ e $x_1 + x_2 \geq 2$, cioè $x_1 + x_2 = 2$. Gli ultimi due impongono $x_1 \leq x_2$ e $x_1 \geq x_2$, cioè $x_1 = x_2$. Le due uguaglianze danno $x_1 = x_2 = 1$, e quindi

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \dim(F) = 0.$$

L'unico punto di F è quindi un vertice (qui il vertice è la faccia $G = F$ stessa, di dimensione 0), ed è la soluzione ottima, con valore ottimo $z(LP) = 1 + 2 = 3$.

- In forma standard di massimo il problema ha $n + m = 6$ variabili non negative e $m = 4$ vincoli lineari di uguaglianza, e una base è un sottoinsieme di 4 indici su 6. Nel

punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tutti e quattro i vincoli sono attivi, quindi tutte e quattro le variabili di scarto assumono il valore 0. Poiché $x_1 = x_2 = 1 > 0$, ogni base associata a quel punto contiene gli indici 1 e 2 delle due variabili strutturali, insieme a due delle quattro variabili di scarto. Delle $\binom{4}{2} = 6$ scelte, $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{1, 2, 5, 6\}$ danno una matrice singolare $\mathbf{A}_B$ (le colonne di x_1 e x_2 ristrette alle righe delle altre due variabili di scarto sono linearmente dipendenti), mentre le restanti quattro sono basi:

$$\{1, 2, 3, 5\}, \quad \{1, 2, 3, 6\}, \quad \{1, 2, 4, 5\}, \quad \{1, 2, 4, 6\},$$

cioè **quattro** basi diverse danno lo stesso vertice. In ciascuna di esse due variabili in base assumono il valore 0: la soluzione di base ammissibile è **degenere**.

Ogni soluzione di base ammissibile è un vertice, ma un vertice degenere può essere associato a più basi, come in questo caso: la corrispondenza tra basi e vertici è suriettiva, non biunivoca.