



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Esercizi 3 — Dualità e simplesso duale

Esercizi svolti sui capitoli 9–10: costruzione del duale, soluzione grafica di primale e duale, scarti complementari, esiti della coppia primale-duale, algoritmo del simplesso duale.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Teoria della dualità	2
9.1	Costruzione del duale	2
9.2	Soluzione grafica del primale e del duale	5
9.3	Scarti complementari	24
9.4	Esiti della coppia primale-duale	47
10	Algoritmo del simplesso duale	56
10.1	Problemi con due variabili	56
10.2	Problemi con tre variabili	94



Teoria della dualità

9.1 Costruzione del duale

Esercizio 9.1 — Problema duale (P71)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 4$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Il dizionario ottimo del problema LP in forma standard è:

$$\begin{cases} x_2 = 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\ x_4 = 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\ x_6 = 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\ z = 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7 \end{cases}$$

Domande

1. Calcolare lower bound e upper bound sul valore ottimo $z(\text{LP})$ del problema LP.
2. Calcolare la combinazione lineare dei tre vincoli usando i moltiplicatori π_1 , π_2 e π_3 . Dare le condizioni necessarie affinché il termine noto della combinazione lineare fornisca un upper bound sul valore ottimo $z(\text{LP})$ del problema LP.
3. Scrivere il problema duale del problema LP. Poi, usando il dizionario ottimo, trovare una soluzione ottima del problema duale.

Soluzione

1. Un lower bound sul valore ottimo è dato, per esempio, dalla seguente soluzione ammissibile:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 1 \quad \text{di valore} \quad 14.$$

Quindi, abbiamo $z(\text{LP}) \geq 14$.

Possiamo migliorare il lower bound usando, per esempio, la seguente soluzione ammissibile:

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 24.$$

Quindi, abbiamo $z(\text{LP}) \geq 24$.

Un upper bound sul valore ottimo si può ottenere, per esempio, moltiplicando il secondo vincolo per $\frac{5}{3}$:

$$\underbrace{\frac{25}{3} x_1 + \frac{5}{3} x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3} x_4}_{\geq 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4} \leq \frac{275}{3}$$

Quindi, abbiamo $z(\text{LP}) \leq \frac{275}{3}$.

Possiamo migliorare l'upper bound, per esempio, sommando il secondo e il terzo vincolo:

$$\underbrace{4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4}_{\geq 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4} \leq 58$$

Quindi, abbiamo $z(\text{LP}) \leq 58$.

2. Moltiplicando ogni vincolo per il suo moltiplicatore otteniamo:

$$(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) \pi_1 \leq 1 \pi_1$$

$$(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) \pi_2 \leq 55 \pi_2$$

$$(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \pi_3 \leq 3 \pi_3$$

La combinazione lineare dei tre vincoli genera la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} & (\pi_1 + 5\pi_2 - \pi_3) x_1 + (-\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3) x_2 + \\ & + (-\pi_1 + 3\pi_2 + 3\pi_3) x_3 + (3\pi_1 + 8\pi_2 - 5\pi_3) x_4 \leq \\ & \leq \pi_1 + 55\pi_2 + 3\pi_3 \end{aligned}$$

Il termine noto $\pi_1 + 55\pi_2 + 3\pi_3$ di questa disuguaglianza è un upper bound per $z(\text{LP})$ se e solo se:

$$\begin{aligned} \pi_1 + 5\pi_2 - \pi_3 & \geq 4 \\ -\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 & \geq 1 \\ -\pi_1 + 3\pi_2 + 3\pi_3 & \geq 5 \\ 3\pi_1 + 8\pi_2 - 5\pi_3 & \geq 3 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

3. Il problema duale del problema LP, con $m = 3$ variabili non negative e $n = 4$ vincoli di maggiore o uguale, è il seguente:

$$\begin{array}{llllll} \min & \pi_1 & + & 55 & \pi_2 & + & 3 & \pi_3 \\ \text{soggetto a} & \pi_1 & + & 5 & \pi_2 & - & & \pi_3 \geq 4 \\ & - & \pi_1 & + & & \pi_2 & + & 2 & \pi_3 \geq 1 \\ & - & \pi_1 & + & 3 & \pi_2 & + & 3 & \pi_3 \geq 5 \\ & 3 & \pi_1 & + & 8 & \pi_2 & - & 5 & \pi_3 \geq 3 \\ & \pi_1, & & & \pi_2, & & & \pi_3 \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione duale ottima è data da

$$\tilde{\pi}_i = -\hat{c}_{n+i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \text{dove} \quad \hat{c}_j = \begin{cases} \bar{c}_j & \text{se } j \in \mathcal{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I valori $\bar{c}_j$ sono i costi ridotti delle variabili fuori base.

Nel dizionario ottimo abbiamo $\mathcal{N} = \{1, 3, 5, 7\}$, di conseguenza:

$$\hat{c}_5 = -11, \quad \hat{c}_6 = 0, \quad \hat{c}_7 = -6 \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}_1 = 11, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 6$$

è una soluzione ottima del problema duale.

9.2 Soluzione grafica del primale e del duale

Esercizio 9.2 — Problemi primale e duale (P2)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & -4 & x_1 & + & 10 & x_2 \leq 35 \\ & 3 & x_1 & + & & x_2 \leq 12 \\ & x_1, & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

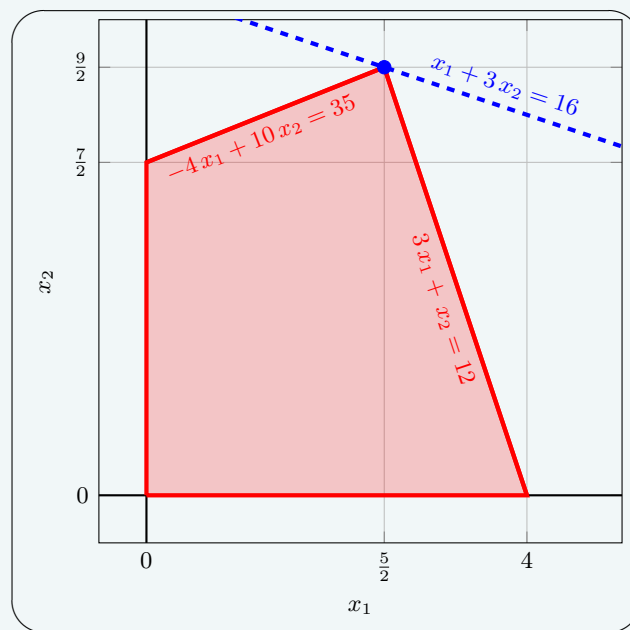
$$\begin{aligned}
 \min \quad & 35 \pi_1 + 12 \pi_2 \\
 \text{soggetto a} \quad & -4 \pi_1 + 3 \pi_2 \geq 1 \\
 & 10 \pi_1 + \pi_2 \geq 3 \\
 & \pi_1, \pi_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

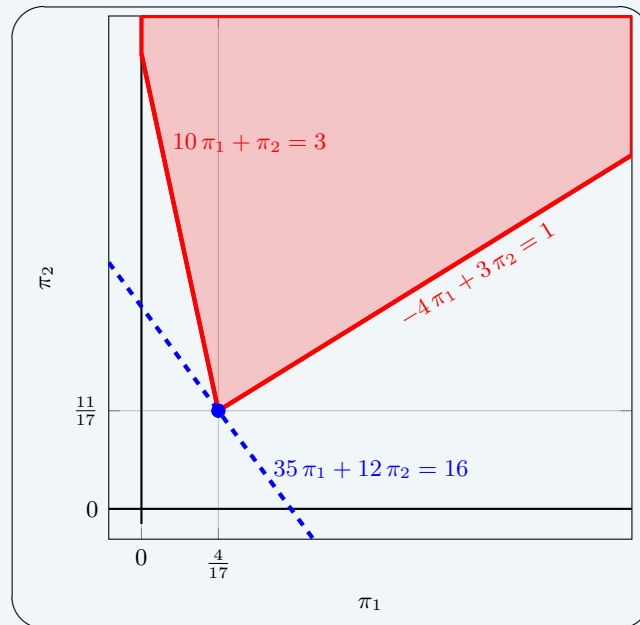
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2} \quad \text{e} \quad z(LP) = \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{9}{2} = 16$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{4}{17}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{11}{17} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 35 \tilde{\pi}_1 + 12 \tilde{\pi}_2 = 35 \cdot \frac{4}{17} + 12 \cdot \frac{11}{17} = 16$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = 16$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.3 — Problemi primale e duale (P3)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

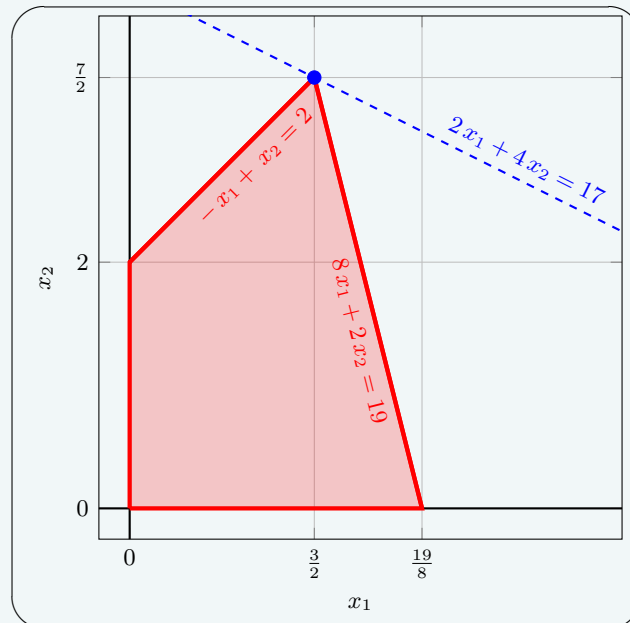
$$\begin{aligned} \min \quad & 2\pi_1 + 19\pi_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 + 8\pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1 + 2\pi_2 \geq 4 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

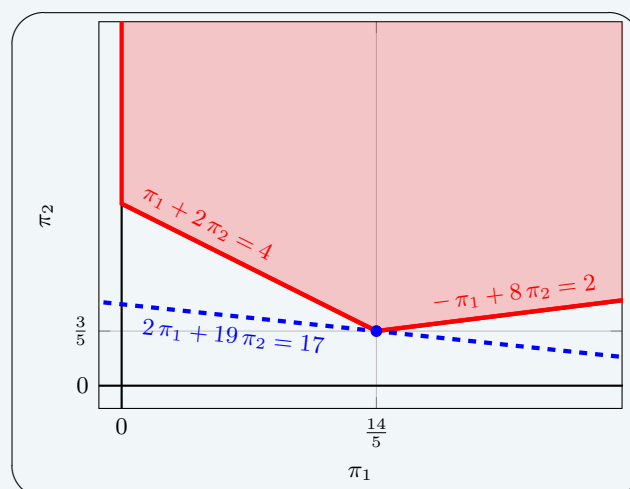
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad z(LP) = 2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{7}{2} = 17$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{14}{5}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 2\tilde{\pi}_1 + 19\tilde{\pi}_2 = 2 \cdot \frac{14}{5} + 19 \cdot \frac{3}{5} = 17$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = 17$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.4 — Problemi primale e duale (P4)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

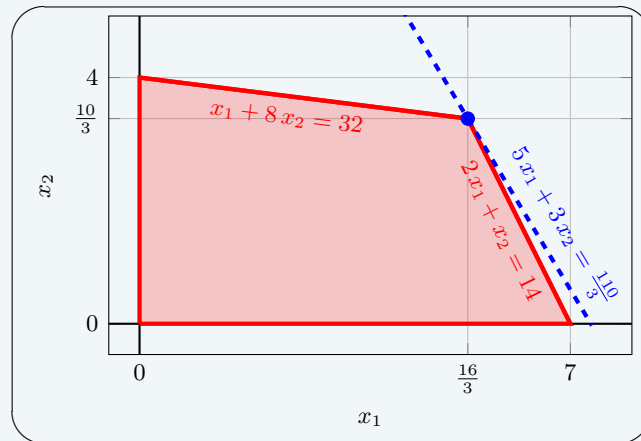
$$\begin{aligned} \min \quad & 14\pi_1 + 32\pi_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2\pi_1 + \pi_2 \geq 5 \\ & \pi_1 + 8\pi_2 \geq 3 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

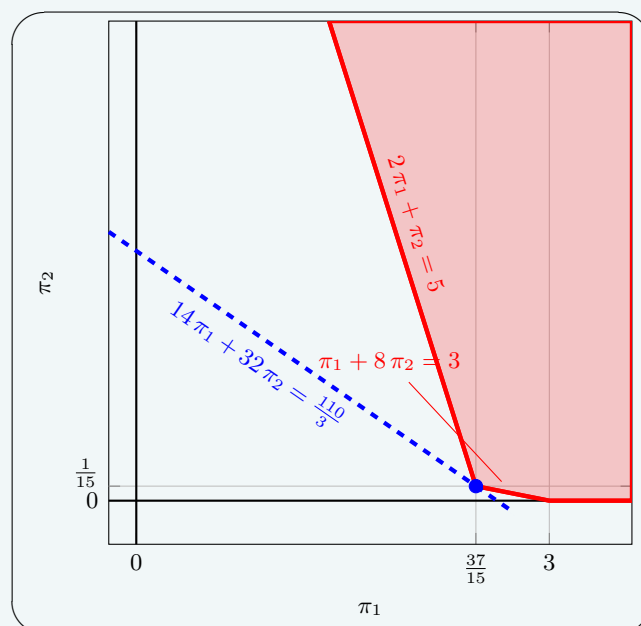
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = 5\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = 5 \cdot \frac{16}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{110}{3}$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{37}{15}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{15} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 14\tilde{\pi}_1 + 32\tilde{\pi}_2 = 14 \cdot \frac{37}{15} + 32 \cdot \frac{1}{15} = \frac{110}{3}$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = \frac{110}{3}$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.5 — Problemi primale e duale (P5)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

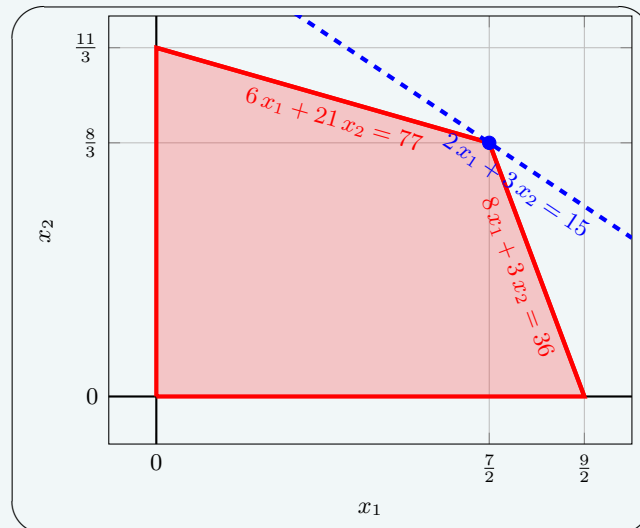
$$\begin{aligned} \min \quad & 77\pi_1 + 36\pi_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 6\pi_1 + 8\pi_2 \geq 2 \\ & 21\pi_1 + 3\pi_2 \geq 3 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

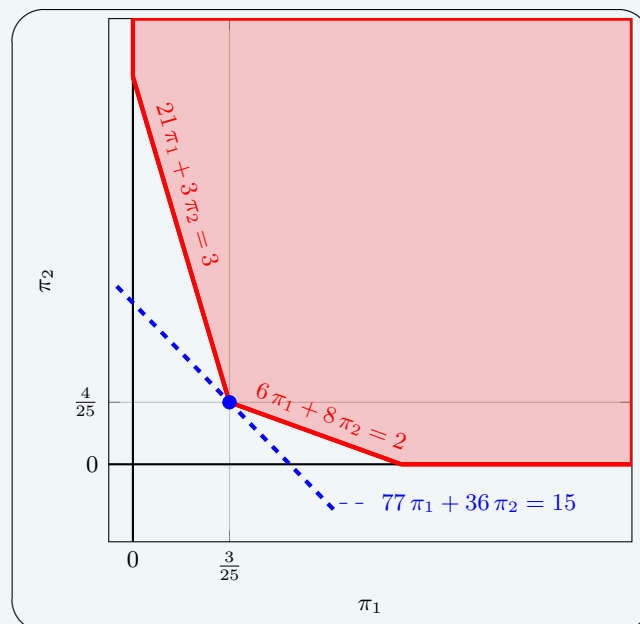
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = 2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = 2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{8}{3} = 15$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{3}{25}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{4}{25} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 77\tilde{\pi}_1 + 36\tilde{\pi}_2 = 77 \cdot \frac{3}{25} + 36 \cdot \frac{4}{25} = 15$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = 15$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.6 — Problemi primale e duale (P6)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & & x_2 \\ \text{soggetto a} & 4 & x_1 & + & 15 & x_2 & \leq & 70 \\ & 12 & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 52 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

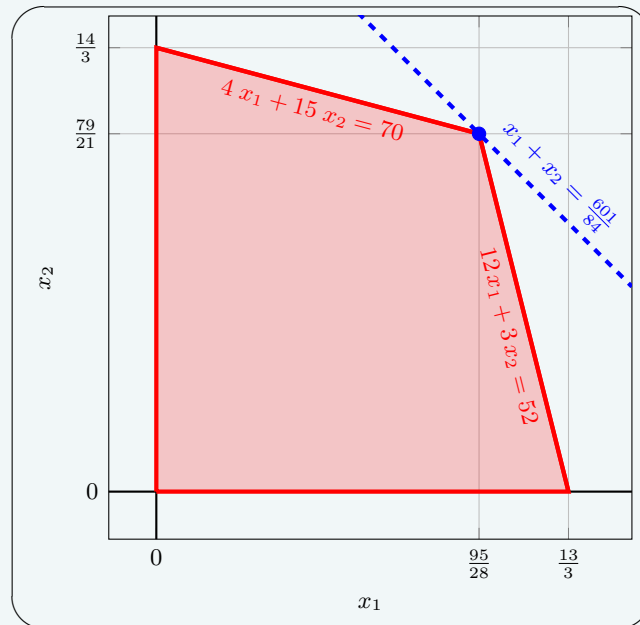
$$\begin{array}{llllll} \min & 70 & \pi_1 & + & 52 & \pi_2 \\ \text{soggetto a} & 4 & \pi_1 & + & 12 & \pi_2 & \geq & 1 \\ & 15 & \pi_1 & + & 3 & \pi_2 & \geq & 1 \\ & & \pi_1, & & & \pi_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

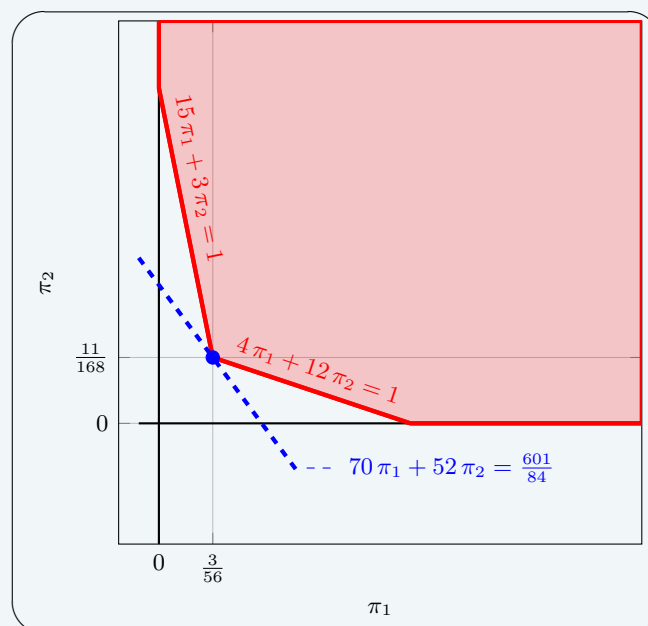
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{79}{21} \quad \text{e} \quad z(LP) = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{95}{28} + \frac{79}{21} = \frac{601}{84}$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{3}{56}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{11}{168} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 70\tilde{\pi}_1 + 52\tilde{\pi}_2 = 70 \cdot \frac{3}{56} + 52 \cdot \frac{11}{168} = \frac{601}{84}$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = \frac{601}{84}$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.7 — Problemi primale e duale (P7)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 3 & x_1 & + & & x_2 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & 4 & x_2 \leq 12 \\ & & 2 & x_1 & + & x_2 \leq 5 \\ & & & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

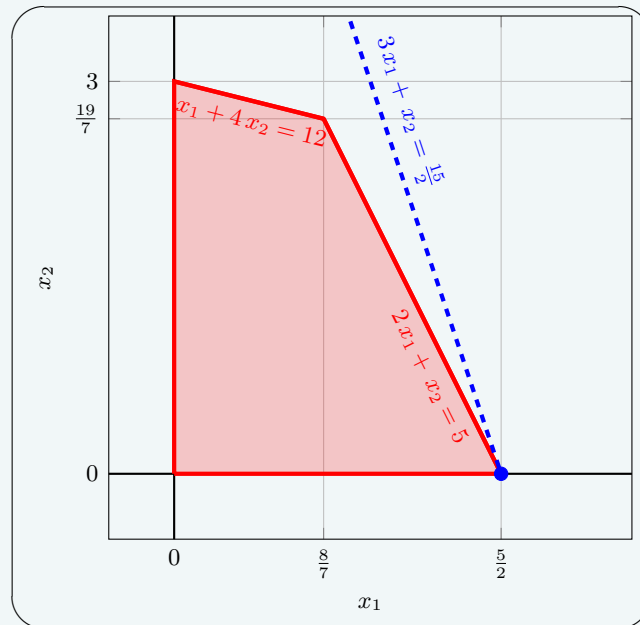
$$\begin{array}{llllll} \min & 12 & \pi_1 & + & 5 & \pi_2 \\ \text{soggetto a} & & \pi_1 & + & 2 & \pi_2 \geq 3 \\ & & 4 & \pi_1 & + & \pi_2 \geq 1 \\ & & & \pi_1, & & \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

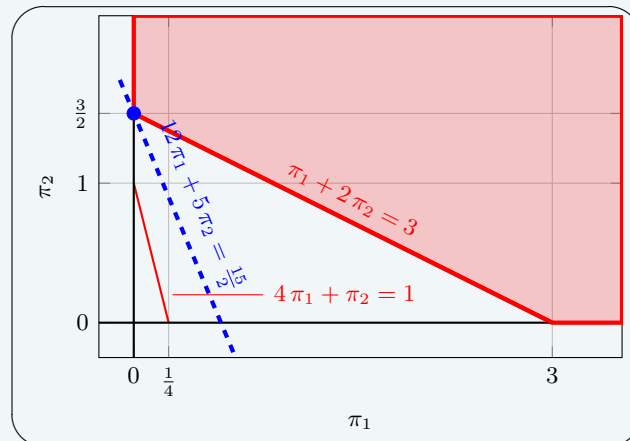
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP) = 3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 3 \cdot \frac{5}{2} + 0 = \frac{15}{2}$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 12\tilde{\pi}_1 + 5\tilde{\pi}_2 = 12 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = \frac{15}{2}$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.8 — Problemi primale e duale (P8)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2 & x_2 & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & 2 & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & + & & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

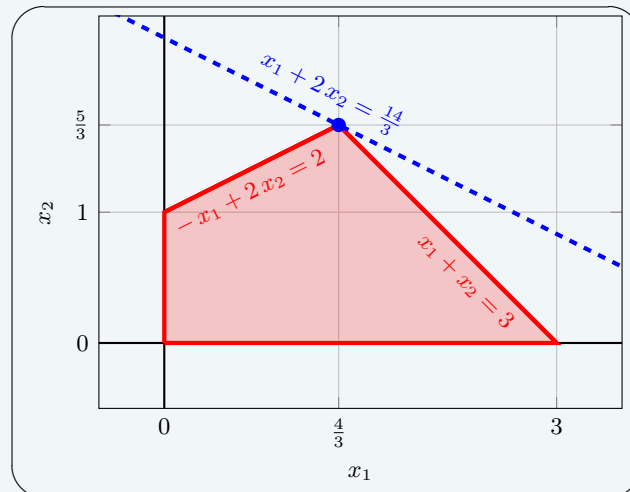
$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & \pi_1 & + & 3 & \pi_2 \\ \text{soggetto a} & -\pi_1 & + & & \pi_2 & \geq 1 \\ & 2 & \pi_1 & + & & \pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1, & & & \pi_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

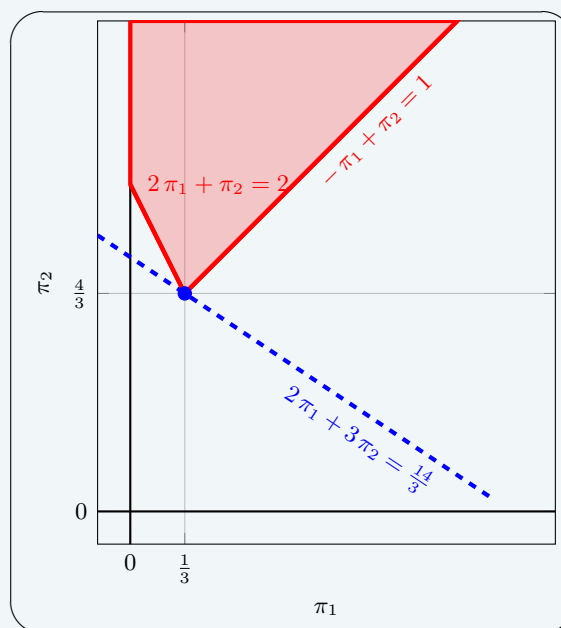
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = 2\tilde{\pi}_1 + 3\tilde{\pi}_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = \frac{14}{3}$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.9 — Problemi primale e duale (P9)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 39 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

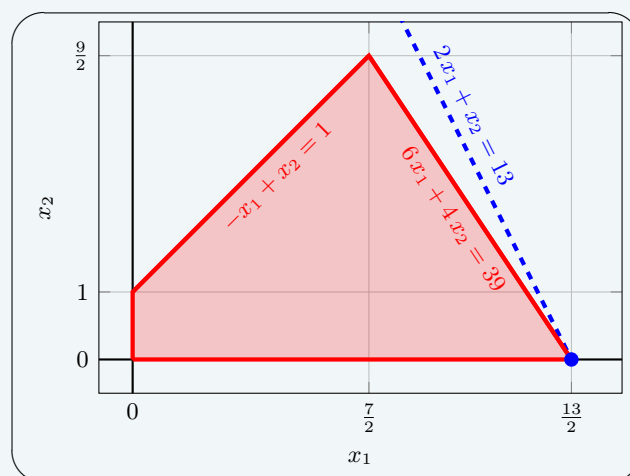
$$\begin{aligned} \min \quad & \pi_1 + 39\pi_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 + 6\pi_2 \geq 2 \\ & \pi_1 + 4\pi_2 \geq 1 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

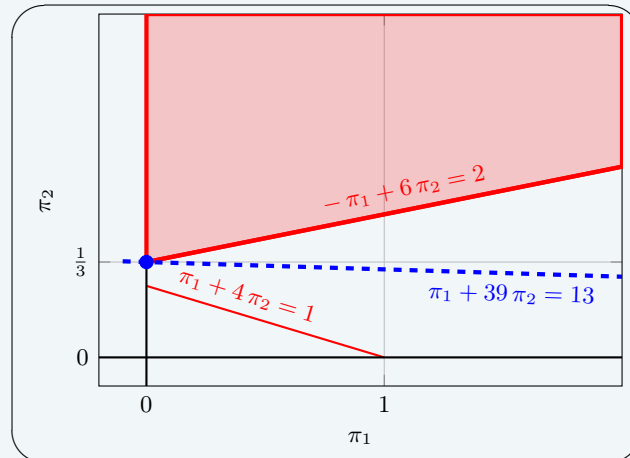
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP) = 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 2 \cdot \frac{13}{2} + 0 = 13$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = \tilde{\pi}_1 + 39\tilde{\pi}_2 = 0 + 39 \cdot \frac{1}{3} = 13$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = 13$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.10 — Problemi primale e duale (P10)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 3$ variabili e $n = 2$ vincoli:

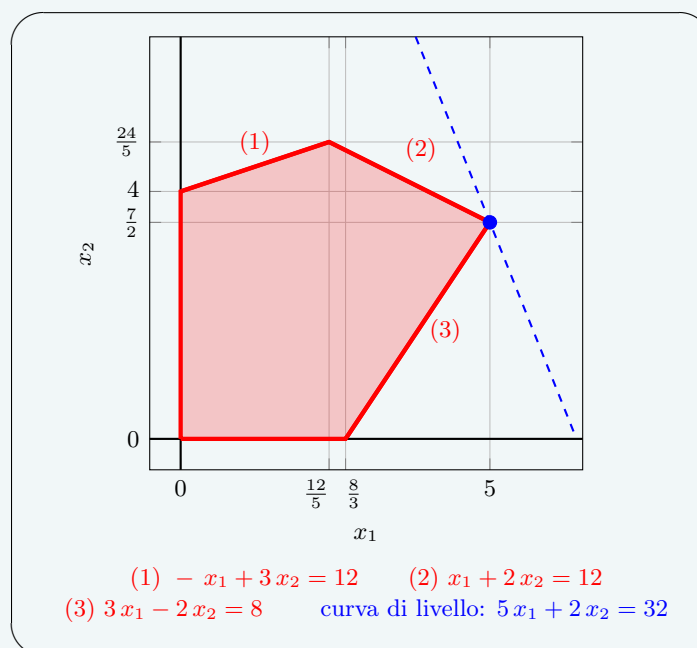
$$\begin{array}{llllll}
 \min & 12 & \pi_1 & + & 12 & \pi_2 & + & 8 & \pi_3 \\
 \text{soggetto a} & - & \pi_1 & + & & \pi_2 & + & 3 & \pi_3 & \geq & 5 \\
 & & 3 & \pi_1 & + & 2 & \pi_2 & - & 2 & \pi_3 & \geq & 2 \\
 & & & \pi_1, & & \pi_2, & & \pi_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

- Per il problema LP primale abbiamo:



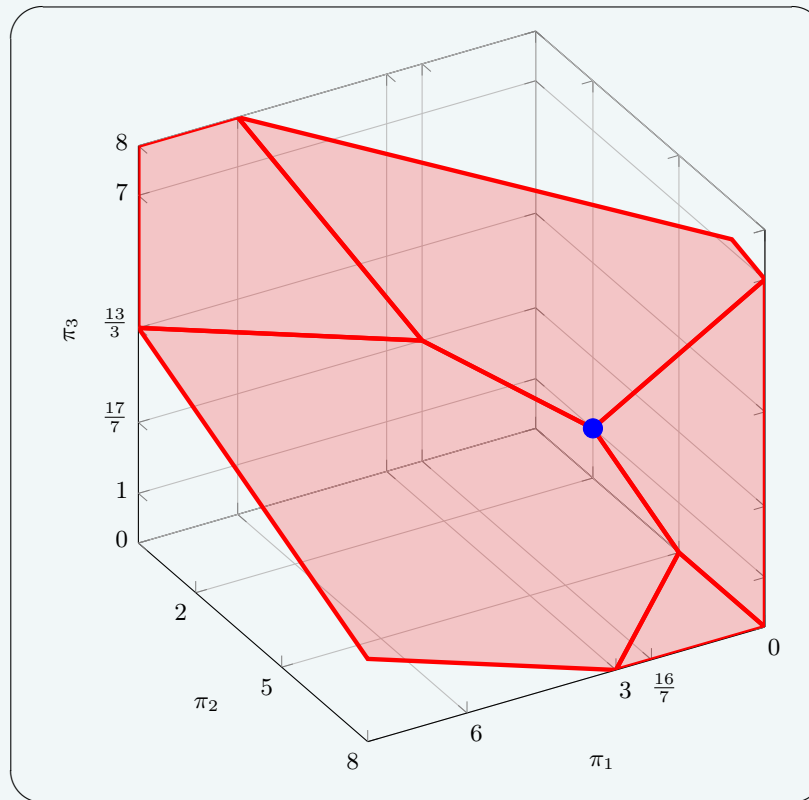
Una soluzione ottima del problema primale è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

e il valore ottimo del problema primale è:

$$z(\text{LP}) = 5\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 32$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



La regione ammissibile del problema duale è illimitata e la soluzione ottima è il vertice indicato in blu:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2, \quad \tilde{\pi}_3 = 1$$

e il valore ottimo del problema duale è:

$$z(\text{D(LP)}) = 12 \tilde{\pi}_1 + 12 \tilde{\pi}_2 + 8 \tilde{\pi}_3 = 12 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 32$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(\text{LP}) = z(\text{D(LP)}) = 32$, come afferma il teorema della dualità forte.

Esercizio 9.11 — Problemi primale e duale (P11)

Consideriamo il seguente problema primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

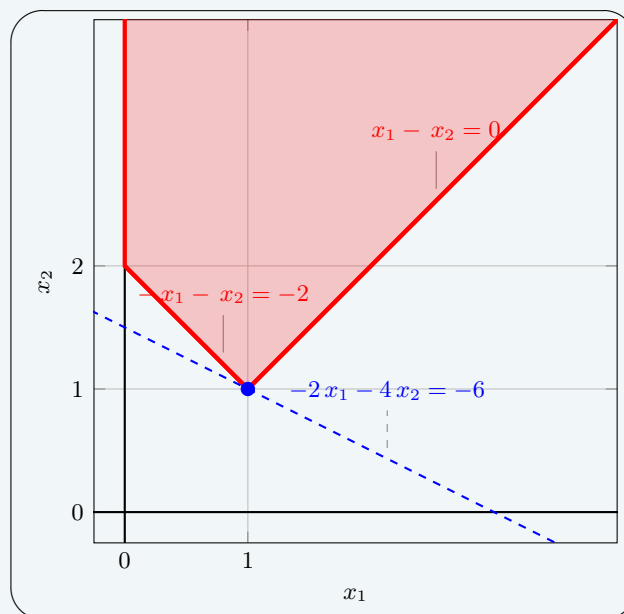
$$\begin{aligned} \min \quad & -2 \pi_1 \\ \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 + \pi_2 \geq -2 \\ & -\pi_1 - \pi_2 \geq -4 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema primale e una soluzione ottima del problema duale. Calcolare i valori ottimi dei due problemi.

Soluzione

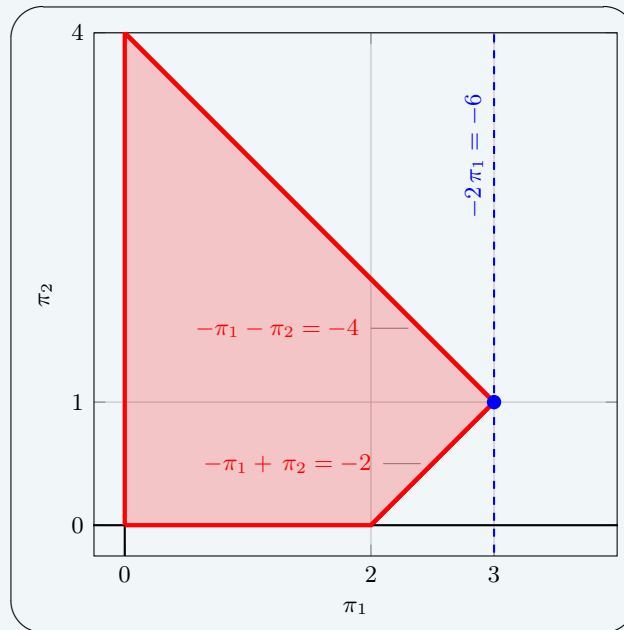
- Per il problema LP primale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = -2\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 = -2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -6$$

- Per il problema LP duale abbiamo:



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 3, \quad \tilde{\pi}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -2\tilde{\pi}_1 + 0\tilde{\pi}_2 = -2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -6$$

- I due valori ottimi coincidono, $z(LP) = z(D(LP)) = -6$, come afferma il teorema della dualità forte.

9.3 Scarti complementari

Esercizio 9.12 — Scarti complementari (P3)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 2$$

è una soluzione ottima del problema LP.

2. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}$$

è una soluzione ottima del problema LP.

Soluzione

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 2$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo la seguente equazione lineare in due variabili:

$$\bar{\pi}_1 + 2 \bar{\pi}_2 = 4 \quad (\bar{x}_2 = 2 > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$-1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2 \not< 2$$

$$8 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4 < 19 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0$$

Risoliamo quindi l'equazione precedente in una variabile e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 4, \quad \bar{\pi}_2 = 0$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$-1 \cdot 4 + 8 \cdot 0 = -4 \not\geq 2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4 \geq 4$$

quindi interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in due variabili:

$$- \bar{\pi}_1 + 8 \bar{\pi}_2 = 2 \quad (\bar{x}_1 = \frac{3}{2} > 0)$$

$$\bar{\pi}_1 + 2 \bar{\pi}_2 = 4 \quad (\bar{x}_2 = \frac{7}{2} > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$-1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{7}{2} = 2 \not\leq 2$$

$$8 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{7}{2} = 19 \not\leq 19$$

Risolviendo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = \frac{14}{5}, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{3}{5}$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$-1 \cdot \frac{14}{5} + 8 \cdot \frac{3}{5} = 2 \geq 2$$

$$1 \cdot \frac{14}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = 4 \geq 4$$

4. Dobbiamo verificare

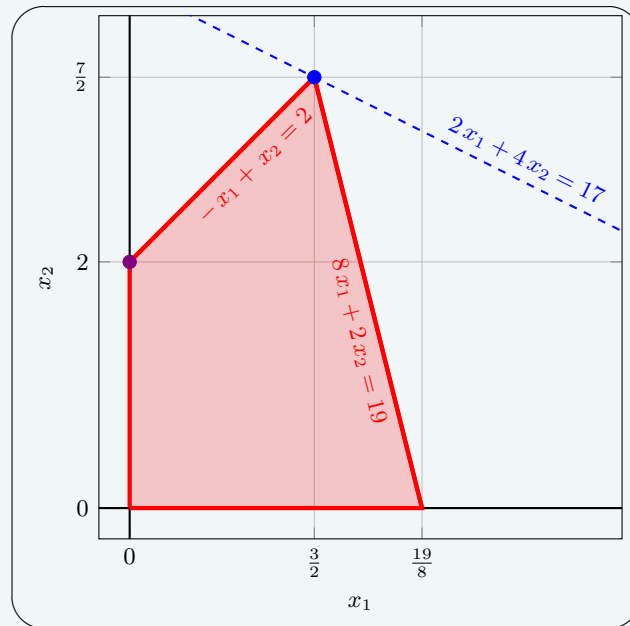
$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

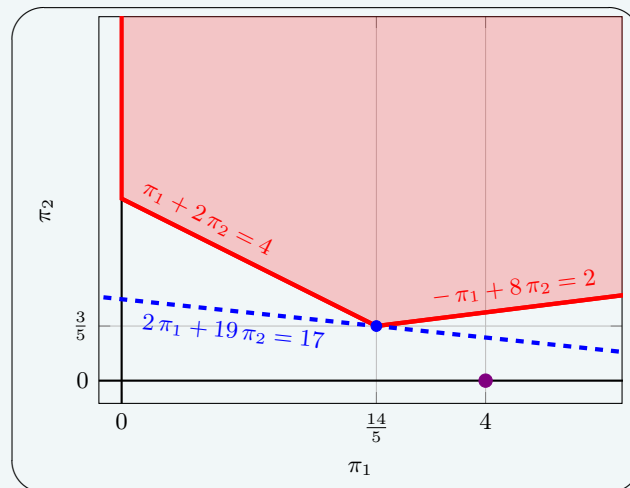
$$\bar{\pi}_1 = \frac{14}{5} \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{3}{5} \geq 0$$

la soluzione è ottima.

Soluzione grafica: la regione ammissibile del problema LP è il poliedro ombreggiato in rosso; la soluzione $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 2$, che non è ottima, è indicata in viola e la soluzione ottima $\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$, di valore 17, è indicata in blu, insieme alla curva di livello di valore 17.



La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. La soluzione duale $\bar{\pi}_1 = 4, \bar{\pi}_2 = 0$ ottenuta dalla prima soluzione (in viola) viola il primo vincolo duale, mentre la soluzione duale $\bar{\pi}_1 = \frac{14}{5}, \bar{\pi}_2 = \frac{3}{5}$ ottenuta dalla seconda soluzione (in blu) è ammissibile e ha valore 17, uguale al valore della soluzione primale.



Esercizio 9.13 — Scarti complementari (P10)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\
 \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0$$

è una soluzione ottima del problema LP.

2. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = 4$$

è una soluzione ottima del problema LP.

Soluzione

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo la seguente equazione lineare in tre variabili:

$$-\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 3\bar{\pi}_3 = 5 \quad (\bar{x}_1 = \frac{8}{3} > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} -1 \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot 0 &= -\frac{8}{3} < 12 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_1 = 0 \\ 1 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot 0 &= \frac{8}{3} < 12 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0 \\ 3 \cdot \frac{8}{3} - 2 \cdot 0 &= 8 \not< 8 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi l'equazione precedente in una variabile e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{5}{3}$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{5}{3} &= 5 \geq 5 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{5}{3} &= -\frac{10}{3} \not\geq 2 \end{aligned}$$

Poiché il secondo vincolo duale è violato, interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = 4$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} -\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 3\bar{\pi}_3 &= 5 & (\bar{x}_1 = 3 > 0) \\ 3\bar{\pi}_1 + 2\bar{\pi}_2 - 2\bar{\pi}_3 &= 2 & (\bar{x}_2 = 4 > 0) \end{aligned}$$

2. Poiché

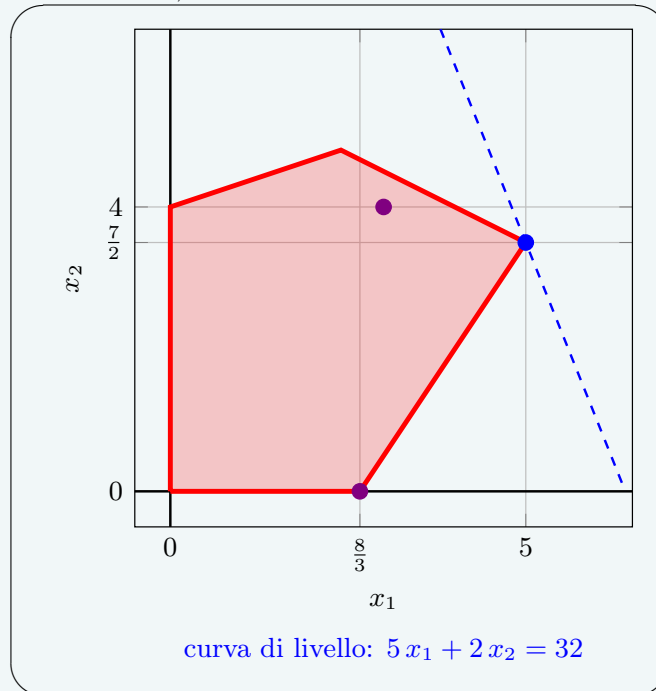
$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} -1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 &= 9 < 12 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_1 = 0 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 &= 11 < 12 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 &= 1 < 8 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_3 = 0 \end{aligned}$$

Con $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3 = 0$ le due equazioni del sistema precedente diventano $0 = 5$ e $0 = 2$. Poiché il sistema non ammette soluzione, interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

Soluzione grafica: la regione ammissibile è il poligono ombreggiato in rosso; le due soluzioni verificate sopra sono indicate in viola e la soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 5$, $\tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$, di valore 32, è indicata in blu, insieme alla curva di livello di valore 32.



Esercizio 9.14 — Scarti complementari (P11)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1$$

è una soluzione ottima del problema LP.

2. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 2$$

è una soluzione ottima del problema LP.

Soluzione

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in due variabili:

$$- \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = -2 \quad (\bar{x}_1 = 1 > 0)$$

$$- \bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 = -4 \quad (\bar{x}_2 = 1 > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2 \not\geq -2$$

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \not\geq 0$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 3, \quad \bar{\pi}_2 = 1$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$-1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -2 \geq -2$$

$$-1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -4 \geq -4$$

4. Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = 3 \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 1 \geq 0$$

la soluzione è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 2$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in due variabili:

$$- \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = -2 \quad (\bar{x}_1 = 1 > 0)$$

$$- \bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 = -4 \quad (\bar{x}_2 = 2 > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

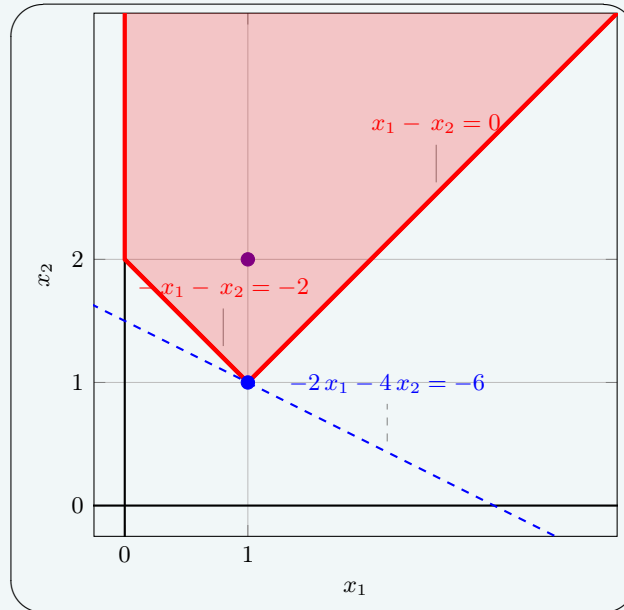
calcoliamo:

$$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -3 < -2 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_1 = 0$$

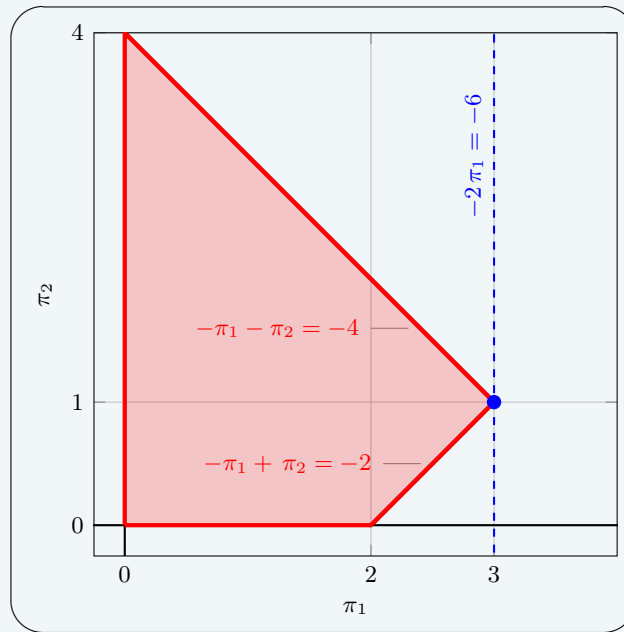
$$1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1 < 0 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0$$

Poiché il sistema precedente non ammette soluzione, interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

Soluzione grafica: la regione ammissibile del problema LP è il poliedro ombreggiato in rosso (è illimitato); la soluzione $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 2$, che non è ottima, è indicata in viola e la soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 1$, di valore -6 , è indicata in blu, insieme alla curva di livello di valore -6 .



La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. La soluzione duale $\bar{\pi}_1 = 3, \bar{\pi}_2 = 1$ ottenuta dalla prima soluzione è indicata in blu: è ammissibile e ha valore -6 , uguale al valore della soluzione primale.



Esercizio 9.15 — Scarti complementari (P44)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
 \text{soggetto a} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1 \\
 & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4 \\
 & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se le seguenti soluzioni ammissibili sono soluzioni ottime del problema LP:

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{7}, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = \frac{9}{14}, \bar{x}_3 = \frac{1}{7}$$

2. Calcolare i valori della funzione obiettivo delle due soluzioni.
3. Sostituire la funzione obiettivo con la seguente:

$$\max \quad 7x_1 + 14x_2 + 30x_3$$

e verificare se le seguenti soluzioni ammissibili sono soluzioni ottime del problema LP:

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{7}, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = \frac{2}{5}$$

Soluzione

1. Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{7}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{7}$$

del problema LP è ottima.

(a) Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} 1 \bar{\pi}_1 + 2 \bar{\pi}_2 + 1 \bar{\pi}_3 &= 1 & (\bar{x}_1 = \frac{9}{7} > 0) \\ -2 \bar{\pi}_1 - 3 \bar{\pi}_2 + 5 \bar{\pi}_3 &= 3 & (\bar{x}_3 = \frac{1}{7} > 0) \end{aligned}$$

(b) Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{9}{7} + 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{7} &= 1 \not\leq 1 \\ 2 \cdot \frac{9}{7} - 1 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{7} &= \frac{15}{7} < 4 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0 \\ 1 \cdot \frac{9}{7} + 2 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{1}{7} &= 2 \not\leq 2 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = \frac{2}{7}, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{5}{7}$$

(c) Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{5}{7} &= 1 \geq 1 \\ 2 \cdot \frac{2}{7} - 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{5}{7} &= 2 \geq 2 \\ -2 \cdot \frac{2}{7} - 3 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{5}{7} &= 3 \geq 3 \end{aligned}$$

(d) Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = \frac{2}{7} \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0 \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{5}{7} \geq 0$$

la soluzione è ottima.

Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \frac{9}{14}, \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{7}$$

del problema LP è ottima.

(a) Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} 2 \bar{\pi}_1 - 1 \bar{\pi}_2 + 2 \bar{\pi}_3 &= 2 & (\bar{x}_2 = \frac{9}{14} > 0) \\ -2 \bar{\pi}_1 - 3 \bar{\pi}_2 + 5 \bar{\pi}_3 &= 3 & (\bar{x}_3 = \frac{1}{7} > 0) \end{aligned}$$

(b) Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{9}{14} - 2 \cdot \frac{1}{7} &= 1 \not\leq 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{9}{14} - 3 \cdot \frac{1}{7} &= -\frac{15}{14} < 4 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{9}{14} + 5 \cdot \frac{1}{7} &= 2 \not\leq 2 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = \frac{2}{7}, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{5}{7}$$

(c) Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{5}{7} &= 1 \geq 1 \\ 2 \cdot \frac{2}{7} - 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{5}{7} &= 2 \geq 2 \\ -2 \cdot \frac{2}{7} - 3 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{5}{7} &= 3 \geq 3 \end{aligned}$$

(d) Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = \frac{2}{7} \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0 \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{5}{7} \geq 0$$

la soluzione è ottima.

2. Il valore della funzione obiettivo della prima soluzione è:

$$\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 = \frac{9}{7} + 0 + 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{12}{7}$$

e il valore della funzione obiettivo della seconda è:

$$\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 = 0 + 2 \cdot \frac{9}{14} + 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{12}{7}$$

Poiché le soluzioni sono entrambe ottime, i due valori devono coincidere. Inoltre, entrambe le soluzioni soddisfano all'uguaglianza il primo e il terzo vincolo, e ogni punto del segmento che le congiunge,

$$\bar{\mathbf{x}}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{14} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

è una soluzione ammissibile di valore $\frac{12}{7}$. Di conseguenza, il problema LP ha infinite soluzioni ottime: l'intero spigolo del poliedro tra le due soluzioni è ottimo.

3. Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{7}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{7}$$

del problema LP è ottima considerando la nuova funzione obiettivo:

$$\max \quad 7x_1 + 14x_2 + 30x_3$$

(a) Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} 1 \bar{\pi}_1 + 2 \bar{\pi}_2 + 1 \bar{\pi}_3 &= 7 & (\bar{x}_1 = \frac{9}{7} > 0) \\ -2 \bar{\pi}_1 - 3 \bar{\pi}_2 + 5 \bar{\pi}_3 &= 30 & (\bar{x}_3 = \frac{1}{7} > 0) \end{aligned}$$

(b) Dal punto 1(b) abbiamo che $\bar{\pi}_2 = 0$. Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = \frac{5}{7}, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{44}{7}$$

(c) Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{5}{7} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{44}{7} &= 7 \geq 7 \\ 2 \cdot \frac{5}{7} - 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{44}{7} &= 14 \geq 14 \\ -2 \cdot \frac{5}{7} - 3 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{44}{7} &= 30 \geq 30 \end{aligned}$$

(d) Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = \frac{5}{7} \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0 \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{44}{7} \geq 0$$

la soluzione è ottima.

Verifichiamo quindi se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \frac{2}{5}$$

del problema LP è ottima considerando la nuova funzione obiettivo:

$$\max \quad 7x_1 + 14x_2 + 30x_3$$

(a) Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo la seguente equazione lineare in tre variabili:

$$-2 \bar{\pi}_1 - 3 \bar{\pi}_2 + 5 \bar{\pi}_3 = 30 \quad (\bar{x}_3 = \frac{2}{5} > 0)$$

(b) Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{4}{5} < 1 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_1 = 0$$

$$2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{6}{5} < 4 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0$$

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{2}{5} = 2 \not< 2$$

Risolviamo quindi l'equazione precedente in una variabile e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 6$$

(c) Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 6 \not\geq 7$$

interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

Esercizio 9.16 — Scarti complementari (P71)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 4$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rccccccccccc} \max & 4 & x_1 & + & & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 3 & x_4 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & - & & x_2 & - & & x_3 & + & 3 & x_4 & \leq & 1 \\ & & 5 & x_1 & + & & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 8 & x_4 & \leq & 55 \\ & & - & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & - & 5 & x_4 & \leq & 3 \\ & & x_1, & & & x_2, & & & x_3, & & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 14, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 5$$

è una soluzione ottima del problema LP.

2. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 1$$

è una soluzione ottima del problema LP.

3. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0$$

è una soluzione ottima del problema LP.

Soluzione

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 14, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 5$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} -\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 2\bar{\pi}_3 &= 1 & (\bar{x}_2 = 14 > 0) \\ 3\bar{\pi}_1 + 8\bar{\pi}_2 - 5\bar{\pi}_3 &= 3 & (\bar{x}_4 = 5 > 0) \end{aligned}$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 - 1 \cdot 14 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 &= 1 \not\geq 1 \\ 5 \cdot 0 + 1 \cdot 14 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 5 &= 54 < 55 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_2 = 0 \\ -1 \cdot 0 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 5 &= 3 \not\geq 3 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 11, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 6$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 11 + 5 \cdot 0 - 1 \cdot 6 &= 5 \geq 4 \\ -1 \cdot 11 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 &= 1 \geq 1 \\ -1 \cdot 11 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 6 &= 7 \geq 5 \\ 3 \cdot 11 + 8 \cdot 0 - 5 \cdot 6 &= 3 \geq 3 \end{aligned}$$

4. Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = 11 \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0 \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = 6 \geq 0$$

la soluzione è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 1$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} -\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 2\bar{\pi}_3 &= 1 & (\bar{x}_2 = 1 > 0) \\ -\bar{\pi}_1 + 3\bar{\pi}_2 + 3\bar{\pi}_3 &= 5 & (\bar{x}_3 = 2 > 0) \\ 3\bar{\pi}_1 + 8\bar{\pi}_2 - 5\bar{\pi}_3 &= 3 & (\bar{x}_4 = 1 > 0) \end{aligned}$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 &= 0 < 1 & \text{quindi} & \bar{\pi}_1 = 0 \\ 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 &= 15 < 55 & \text{quindi} & \bar{\pi}_2 = 0 \\ -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 &= 3 \not< 3 \end{aligned}$$

Poiché il sistema precedente non ammette soluzione, interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 + 5\bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 &= 4 & (\bar{x}_1 = 5 > 0) \\ -\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 2\bar{\pi}_3 &= 1 & (\bar{x}_2 = 4 > 0) \end{aligned}$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 5 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 1 \not< 1 \\ 5 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 0 &= 29 < 55 & \text{quindi} & \bar{\pi}_2 = 0 \\ -1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 &= 3 \not< 3 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 9, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 5$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 + 5 \cdot 0 - 1 \cdot 5 &= 4 \geq 4 \\ -1 \cdot 9 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 &= 1 \geq 1 \\ -1 \cdot 9 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 5 &= 6 \geq 5 \\ 3 \cdot 9 + 8 \cdot 0 - 5 \cdot 5 &= 2 \not\geq 3 \end{aligned}$$

quindi interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

Esercizio 9.17 — Scarti complementari (P72)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 5$ variabili e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = 0$$

è una soluzione ottima del problema LP.

2. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{39}{59}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \frac{91}{59}, \quad \bar{x}_4 = \frac{166}{59}, \quad \bar{x}_5 = \frac{37}{59}$$

è una soluzione ottima del problema LP.

Soluzione

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = 0$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di tre equazioni lineari in quattro variabili:

$$\begin{aligned} 3 \bar{\pi}_1 + 2 \bar{\pi}_2 + 4 \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_4 &= 6 & (\bar{x}_2 = \frac{4}{3} > 0) \\ 5 \bar{\pi}_1 - 2 \bar{\pi}_2 + 4 \bar{\pi}_3 + 2 \bar{\pi}_4 &= 5 & (\bar{x}_3 = \frac{2}{3} > 0) \\ -2 \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 - 2 \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 &= -2 & (\bar{x}_4 = \frac{5}{3} > 0) \end{aligned}$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{4}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot 0 &= 4 \not\leq 4 \\ 4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{5}{3} + 1 \cdot 0 &= 3 \not\leq 3 \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} + 5 \cdot 0 &= \frac{14}{3} < 5 & \text{quindi} \quad \bar{\pi}_3 = 0 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{5}{3} - 2 \cdot 0 &= 1 \not\leq 1 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di tre equazioni in tre variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 1$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 &= 8 \geq 7 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 &= 6 \geq 6 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 &= 5 \geq 5 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 &= -2 \geq -2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= 1 \not\geq 3 \end{aligned}$$

quindi interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{39}{59}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \frac{91}{59}, \quad \bar{x}_4 = \frac{166}{59}, \quad \bar{x}_5 = \frac{37}{59}$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di quattro equazioni lineari in quattro variabili:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 + 4 \bar{\pi}_2 + 2 \bar{\pi}_3 + 3 \bar{\pi}_4 &= 7 & (\bar{x}_1 = \frac{39}{59} > 0) \\ 5 \bar{\pi}_1 - 2 \bar{\pi}_2 + 4 \bar{\pi}_3 + 2 \bar{\pi}_4 &= 5 & (\bar{x}_3 = \frac{91}{59} > 0) \\ -2 \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 - 2 \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 &= -2 & (\bar{x}_4 = \frac{166}{59} > 0) \\ 2 \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 5 \bar{\pi}_3 - 2 \bar{\pi}_4 &= 3 & (\bar{x}_5 = \frac{37}{59} > 0) \end{aligned}$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{39}{59} + 3 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{91}{59} - 2 \cdot \frac{166}{59} + 2 \cdot \frac{37}{59} &= 4 \not\leq 4 \\ 4 \cdot \frac{39}{59} + 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{91}{59} + 1 \cdot \frac{166}{59} + 1 \cdot \frac{37}{59} &= 3 \not\leq 3 \\ 2 \cdot \frac{39}{59} + 4 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{91}{59} - 2 \cdot \frac{166}{59} + 5 \cdot \frac{37}{59} &= 5 \not\leq 5 \\ 3 \cdot \frac{39}{59} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{91}{59} - 1 \cdot \frac{166}{59} - 2 \cdot \frac{37}{59} &= 1 \not\leq 1 \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di quattro equazioni in quattro variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{58}{59}, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{13}{59}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{32}{59}$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{58}{59} + 2 \cdot \frac{13}{59} + 3 \cdot \frac{32}{59} &= 7 \geq 7 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{58}{59} + 4 \cdot \frac{13}{59} + 1 \cdot \frac{32}{59} &= \frac{377}{59} \geq 6 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{58}{59} + 4 \cdot \frac{13}{59} + 2 \cdot \frac{32}{59} &= 5 \geq 5 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{58}{59} - 2 \cdot \frac{13}{59} - 1 \cdot \frac{32}{59} &= -2 \geq -2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{58}{59} + 5 \cdot \frac{13}{59} - 2 \cdot \frac{32}{59} &= 3 \geq 3 \end{aligned}$$

4. Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = 1 \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{58}{59} \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{13}{59} \geq 0, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{32}{59} \geq 0$$

la soluzione è ottima.

Esercizio 9.18 — Scarti complementari (B1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 3 & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 6 \\ & & 2 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 4 \\ & & & & x_1 & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 2$$

è una soluzione ottima del problema LP.

2. Usando il teorema degli scarti complementari, verificare se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = 0$$

è una soluzione ottima del problema LP.

Soluzione

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 2$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$1 \cdot \bar{\pi}_1 + 2 \cdot \bar{\pi}_2 + 1 \cdot \bar{\pi}_3 = 3 \quad (\bar{x}_1 = 2 > 0)$$

$$2 \cdot \bar{\pi}_1 + 1 \cdot \bar{\pi}_2 + 1 \cdot \bar{\pi}_3 = 3 \quad (\bar{x}_2 = 2 > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6 \not\leq 6$$

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6 \not\leq 6$$

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4 \not\leq 4$$

Tutti e tre i vincoli sono attivi, quindi nessuna variabile duale è forzata a zero. Il sistema del passo 1 ha due equazioni e tre incognite e quindi ha **infinita soluzioni**. Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo $\bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_1 = 0$, cioè $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2$. Ponendo $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = s$ e sostituendo nella prima equazione otteniamo $\bar{\pi}_3 = 3 - 3s$. Scegliamo $s = 1$ e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3 \geq 3$$

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3 \geq 3$$

4. Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

quindi, poiché

$$\bar{\pi}_1 = 1 \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 1 \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0 \geq 0$$

la soluzione è ottima.

- Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = 0$$

del problema LP è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo la seguente equazione lineare in tre variabili:

$$1 \cdot \bar{\pi}_1 + 2 \cdot \bar{\pi}_2 + 1 \cdot \bar{\pi}_3 = 3 \quad (\bar{x}_1 = 3 > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 3 < 6 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_1 = 0$$

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6 \not< 6$$

$$1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 3 < 4 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

Risolviamo quindi l'equazione precedente in una variabile e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{3}{2}, \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

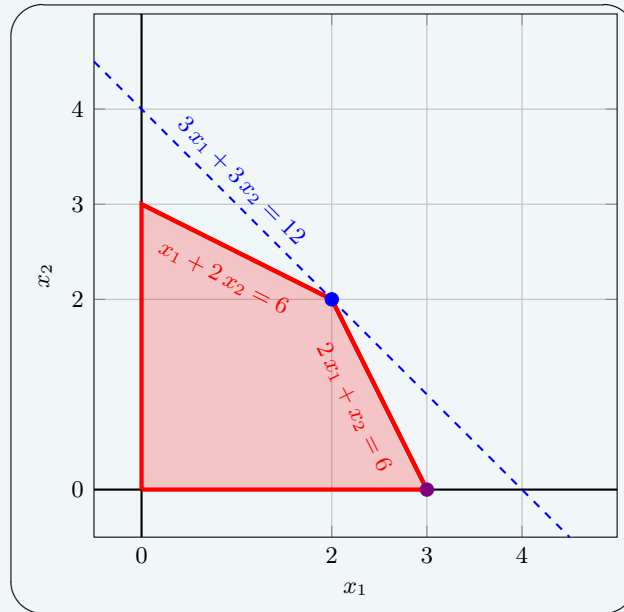
quindi calcoliamo:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 = 3 \geq 3$$

$$2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 = \frac{3}{2} \not\geq 3$$

quindi interrompiamo la verifica e concludiamo che la soluzione non è ottima.

Soluzione grafica: la regione ammissibile del problema LP è il poliedro ombreggiato in rosso; la soluzione $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 0$, che non è ottima, è indicata in viola e la soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 2, \tilde{x}_2 = 2$, di valore 12, è indicata in blu, insieme alla curva di livello di valore 12. La curva di livello coincide con la retta $x_1 + x_2 = 4$ del terzo vincolo, che tocca la regione ammissibile solo nel vertice ottimo: il vertice ottimo è degenere, poiché tutti e tre i vincoli sono attivi in esso.



9.4 Esiti della coppia primale-duale

Esercizio 9.19 — Esiti del primale e del duale (P31)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & x_2 & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ & & x_1 & - & x_2 & \leq 1 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere il problema duale.
2. Determinare l'esito del problema primale (soluzione ottima, illimitato o inammissibile).
3. Determinare l'esito del problema duale e verificare che la coppia sia uno dei quattro casi del teorema sui possibili esiti di una coppia di problemi primale e duale.

Soluzione

- Il problema duale ha $m = 2$ variabili non negative e $n = 2$ vincoli lineari di maggiore o uguale, ottenuti trasponendo la matrice dei vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \min & & \pi_1 & + & \pi_2 & \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & + & \pi_2 & \geq 1 \\ & & \pi_1 & - & \pi_2 & \geq 1 \\ & & \pi_1, & & \pi_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Il problema primale è **illimitato**. Infatti, per ogni valore $t \geq 0$ il punto $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = t$ è una soluzione ammissibile, poiché

$$-t + t = 0 \leq 1, \quad t - t = 0 \leq 1, \quad t \geq 0,$$

e il suo valore obiettivo è $2t$, che supera qualunque valore fissato M per t abbastanza grande.

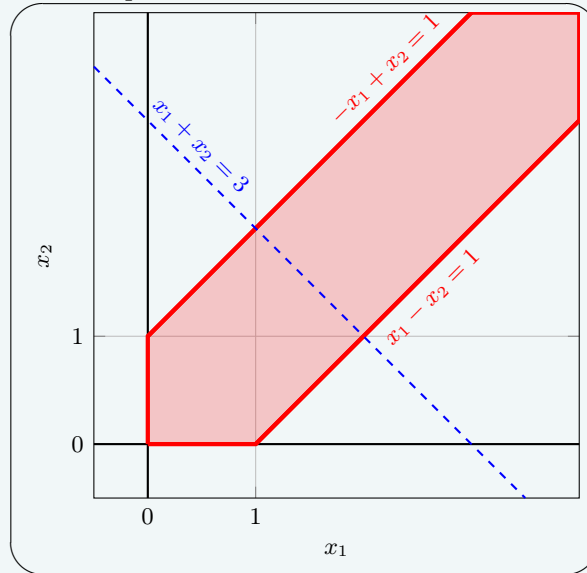
- Il problema duale è **inammissibile**. Infatti, sommando i suoi due vincoli otteniamo

$$\underbrace{(-\pi_1 + \pi_2)}_{\geq 1} + \underbrace{(\pi_1 - \pi_2)}_{\geq 1} = 0 \geq 2,$$

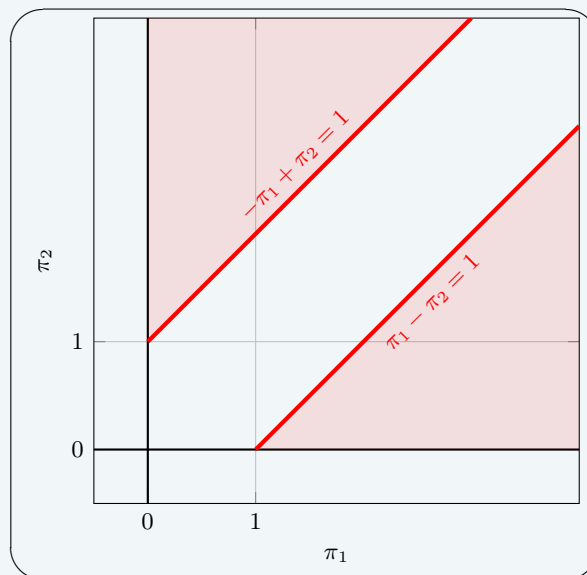
che non è mai soddisfatta.

La coppia ricade quindi nel caso “*primale illimitato, duale inammissibile*”, come previsto dal corollario: se il problema primale è illimitato, allora il problema duale è inammissibile.

Soluzione grafica: la regione ammissibile del problema primale è il poliedro illimitato ombreggiato in rosso; la curva di livello $x_1 + x_2 = 3$ è tracciata in blu, e le curve di livello $x_1 + x_2 = k$ intersecano la regione ammissibile per ogni valore di $k \geq 0$, quindi la funzione obiettivo può crescere senza limite.



I due semipiani definiti dai vincoli duali, ombreggiati in rosso chiaro, non hanno alcun punto in comune nell'ortante non negativo: la regione ammissibile duale è vuota.



Esercizio 9.20 — Esiti del primale e del duale (P33)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & x_2 & \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & x_2 & \leq 2 \\ & & -x_1 & - & x_2 & \leq -4 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere il problema duale.
2. Determinare l'esito del problema primale (soluzione ottima, illimitato o inammissibile).
3. Determinare l'esito del problema duale e verificare che la coppia sia uno dei quattro casi del teorema sui possibili esiti di una coppia di problemi primale e duale.

Soluzione

- Il problema duale ha $m = 2$ variabili non negative e $n = 2$ vincoli lineari di maggiore o uguale, ottenuti trasponendo la matrice dei vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & \pi_1 & - & 4 & \pi_2 \\ \text{soggetto a} & & \pi_1 & - & & \pi_2 \geq 1 \\ & & \pi_1 & - & & \pi_2 \geq 1 \\ & & \pi_1, & & \pi_2 & \geq 0 \end{array}$$

(i due vincoli duali coincidono, poiché le due colonne della matrice dei vincoli del primale sono uguali).

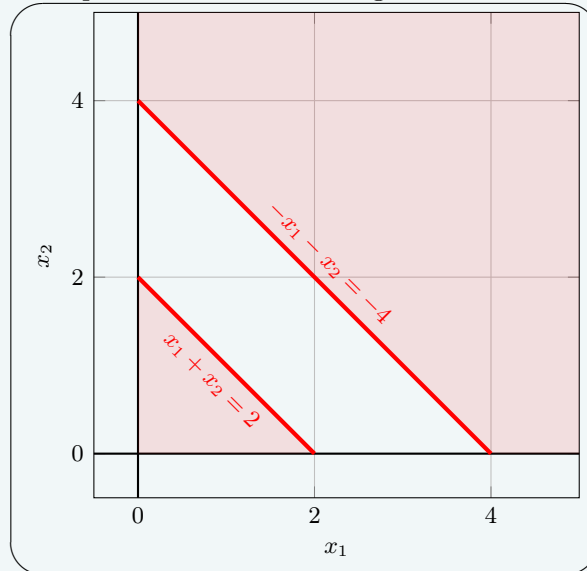
- Il problema primale è **inammissibile**: il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \leq 2$ e il secondo, moltiplicato per -1 , impone $x_1 + x_2 \geq 4$.
- Il problema duale è **illimitato**. Infatti, per ogni valore $t \geq 0$ il punto $\bar{\pi}_1 = 1 + t$ e $\bar{\pi}_2 = t$ è una soluzione ammissibile, poiché $\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 = 1 \geq 1$, e il suo valore obiettivo è

$$2(1 + t) - 4t = 2 - 2t,$$

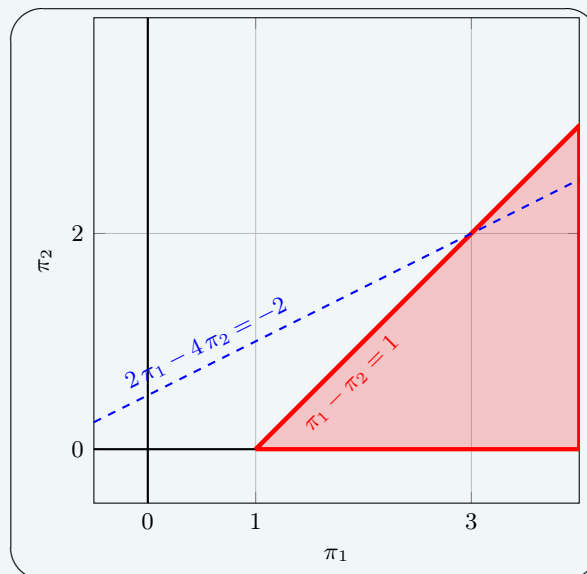
che tende a $-\infty$ al crescere di t . Poiché il problema duale è un problema di minimo, è illimitato.

La coppia ricade quindi nel caso “*primale inammissibile, duale illimitato*”.

Soluzione grafica: i due semipiani definiti dai vincoli primali, ombreggiati in rosso chiaro, non hanno alcun punto in comune: la regione ammissibile primale è vuota.



La regione ammissibile duale è il poliedro illimitato ombreggiato in rosso (i due vincoli duali coincidono). La curva di livello $2\pi_1 - 4\pi_2 = -2$ è tracciata in blu: muovendosi nella direzione $(1, 1)$ la funzione obiettivo decresce senza limite.



Esercizio 9.21 — Esiti del primale e del duale (P35)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & + & x_2 & & \\
 \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & - & x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere il problema duale.
2. Determinare l'esito del problema primale (soluzione ottima, illimitato o inammissibile).
3. Determinare l'esito del problema duale e verificare che la coppia sia uno dei quattro casi del teorema sui possibili esiti di una coppia di problemi primale e duale.

Soluzione

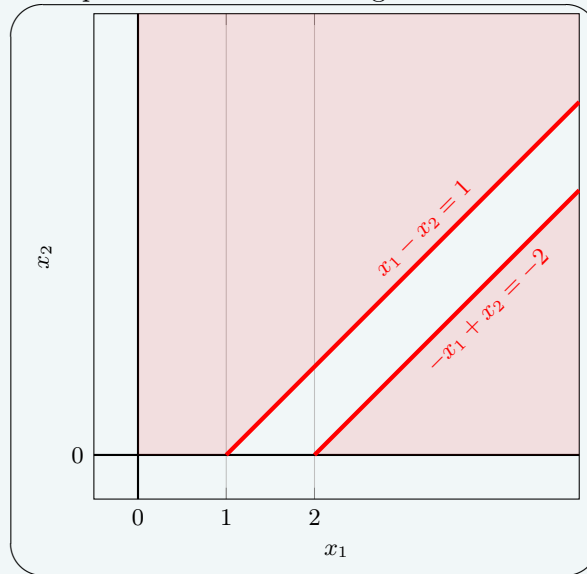
- Il problema duale ha $m = 2$ variabili non negative e $n = 2$ vincoli lineari di maggiore o uguale, ottenuti trasponendo la matrice dei vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & \pi_1 & - & 2 & \pi_2 & \\
 \text{soggetto a} & \pi_1 & - & \pi_2 & \geq & 1 \\
 & - & \pi_1 & + & \pi_2 & \geq 1 \\
 & \pi_1, & & \pi_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

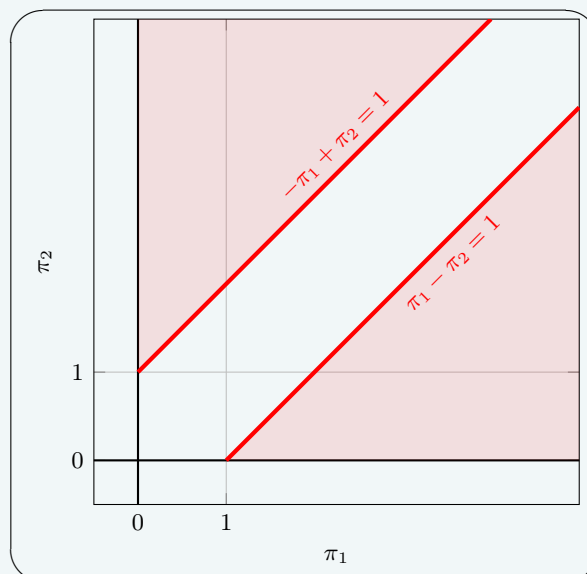
- Il problema primale è **inammissibile**: i due vincoli impongono $x_1 - x_2 \leq 1$ e $x_1 - x_2 \geq 2$.
- Anche il problema duale è **inammissibile**: sommando i suoi due vincoli otteniamo $0 \geq 2$, che non è mai soddisfatta.

La coppia ricade quindi nel caso “*entrambi i problemi inammissibili*”. Questo esempio mostra che l’inammissibilità del problema primale, da sola, non determina l’esito del problema duale: nell’esercizio P33 il problema primale è inammissibile e il problema duale è illimitato, mentre qui entrambi sono inammissibili.

Soluzione grafica: i due semipiani definiti dai vincoli primali, ombreggiati in rosso chiaro, non hanno alcun punto in comune: la regione ammissibile primale è vuota.



Anche i due semipiani definiti dai vincoli duali non hanno alcun punto in comune: anche la regione ammissibile duale è vuota.



Esercizio 9.22 — Esiti del primale e del duale (P36)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & - & x_1 & - & x_2 & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 & \leq -2 \\ & & x_1 & - & x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere il problema duale.
2. Determinare l'esito del problema primale (soluzione ottima, illimitato o inammissibile).
3. Determinare l'esito del problema duale e verificare che la coppia sia uno dei quattro casi del teorema sui possibili esiti di una coppia di problemi primale e duale.

Soluzione

- Il problema duale ha $m = 2$ variabili non negative e $n = 2$ vincoli lineari di maggiore o uguale, ottenuti trasponendo la matrice dei vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \min & -2 & \pi_1 & + & 2 & \pi_2 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & + & & \pi_2 \geq -1 \\ & & - & \pi_1 & - & \pi_2 \geq -1 \\ & & & \pi_1, & & \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

- Il problema primale ammette una **soluzione ottima**. La sua regione ammissibile è illimitata, ma il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \geq 2$ per ogni soluzione ammissibile, e quindi

$$-x_1 - x_2 \leq -2, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in F.$$

Le due soluzioni ammissibili $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ raggiungono questo valore, e quindi il valore ottimo è $z(LP) = -2$.

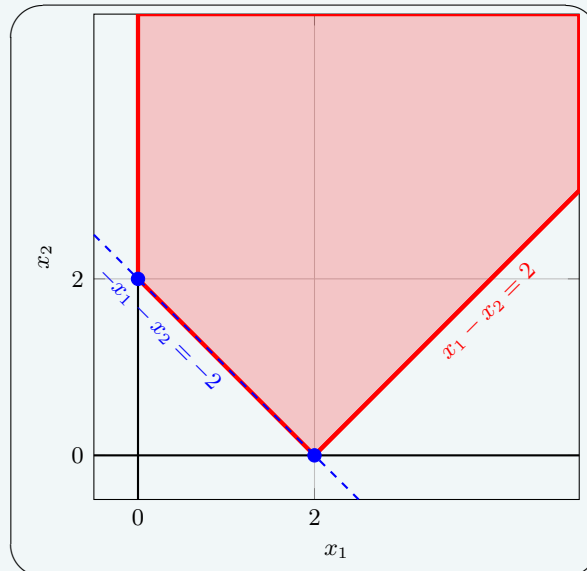
- Anche il problema duale ammette una **soluzione ottima** e, per la dualità forte, il suo valore ottimo è $z(D(LP)) = -2$. Una soluzione duale ottima è

$$\tilde{\pi}_1 = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}_2 = 0,$$

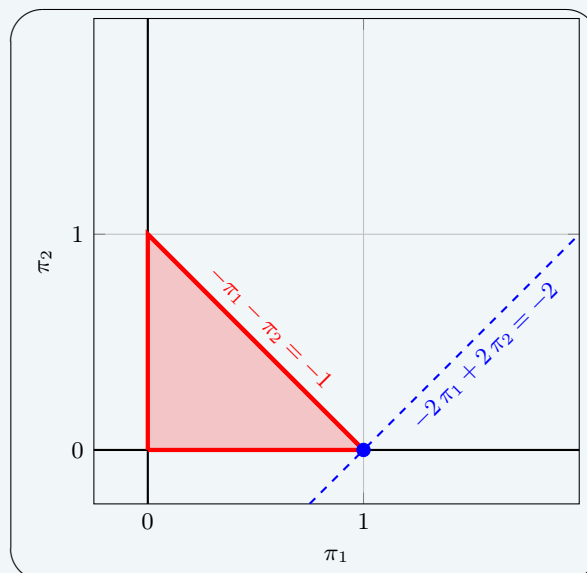
che è ammissibile, poiché $-1 + 0 = -1 \geq -1$ e $-1 - 0 = -1 \geq -1$, e il cui valore della funzione obiettivo è $-2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -2$.

La coppia ricade quindi nel caso “*entrambi i problemi ammettono una soluzione ottima, con valori ottimi uguali*”.

Soluzione grafica: la regione ammissibile del problema primale è il poliedro illimitato ombreggiato in rosso. La curva di livello $-x_1 - x_2 = -2$, tracciata in blu, coincide con la retta del primo vincolo: tutti i punti del segmento tra i due vertici indicati in blu sono soluzioni ottime di valore -2 .



La regione ammissibile duale è il triangolo ombreggiato in rosso; la soluzione ottima duale $\tilde{\pi}_1 = 1$, $\tilde{\pi}_2 = 0$ è indicata in blu. La curva di livello $-2\pi_1 + 2\pi_2 = -2$, tracciata in blu, coincide con la retta del primo vincolo duale, che tocca il triangolo solo nel vertice ottimo.



Algoritmo del simplesso duale

10.1 Problemi con due variabili

Esercizio 10.1 — Algoritmo del simplesso duale (P11)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \min & -2\pi_1 & & & & \\ \text{soggetto a} & -\pi_1 & + & \pi_2 & \geq & -2 \\ & -\pi_1 & - & \pi_2 & \geq & -4 \\ & \pi_1, & & \pi_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & 2 & \pi_3 & \\ \text{soggetto a} & -\pi_1 & & - & \pi_3 & + \pi_4 = -2 \\ & & -\pi_2 & - & \pi_3 & - \pi_4 = -4 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4 & \geq 0 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 2 - \pi_3 + \pi_4 \\ \pi_2 = 4 - \pi_3 - \pi_4 \\ -w = 0 + 2\pi_3 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 2, \quad \bar{\pi}_2 = 4, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 = -2 \\ & x_1 & - & x_2 & & + x_4 = 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = -2 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 0 - x_1 + x_2 \\ z = 0 - 2x_1 - 4x_2 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = -2, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

L'unica variabile in base con valore negativo è x_3 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_3 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 2 - \pi_3 \\ \pi_2 = 4 - \pi_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - \pi_3 \geq 0 \\ \pi_1 \geq 0 \\ 4 - \pi_3 \geq 0 \\ \pi_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_3 \leq 2 \\ \pi_3 \leq 4 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_3 : $s_m = \min \left\{ \frac{-2}{-1}, \frac{-4}{-1} \right\} = 2$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_3 fino a 2, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_3 diventa duale in base e, di conseguenza, x_3 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 2 - \pi_3 + \pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_3 = 2 - \pi_1 + \pi_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_2 = 4 - (2 - \pi_1 + \pi_4) - \pi_4 = 2 + \pi_1 - 2\pi_4$$

$$-w = 0 + 2(2 - \pi_1 + \pi_4) = 4 - 2\pi_1 + 2\pi_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = 2 & + & \pi_1 & - & 2\pi_4 \\ \pi_3 = 2 & - & \pi_1 & + & \pi_4 \\ -w = 4 & - & 2\pi_1 & + & 2\pi_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 2, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -4$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_3 = -2 + x_1 + x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - x_2 + x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_4 = 0 - (2 + x_3 - x_2) + x_2 = -2 + 2x_2 - x_3$$

$$z = 0 - 2(2 + x_3 - x_2) - 4x_2 = -4 - 2x_2 - 2x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_3 \\ x_4 = -2 + 2x_2 - x_3 \\ z = -4 - 2x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_4 = -2, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -4$$

• Iterazione 2

L'unica variabile in base con valore negativo è x_4 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = 2 - 2\pi_4 \\ \pi_3 = 2 + \pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - 2\pi_4 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{2 + \pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq 1 \\ \pi_4 \geq -2 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \frac{-2}{-2} = 1$, raggiunto da x_2 ($\bar{a}_{43} = 1 > 0$ non dà alcun candidato). Aumentando il valore di π_4 fino a 1, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;
 π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 2 - 2\pi_4 + \pi_1 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = 1 + \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_3 &= 2 + \left(1 + \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2\right) - \pi_1 = 3 - \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2 \\ -w &= 4 + 2 \left(1 + \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_2\right) - 2\pi_1 = 6 - \pi_1 - \pi_2 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} \pi_3 & = & 3 & - & \frac{1}{2} & \pi_1 & - & \frac{1}{2} & \pi_2 \\ \pi_4 & = & 1 & + & \frac{1}{2} & \pi_1 & - & \frac{1}{2} & \pi_2 \\ -w & = & 6 & - & & \pi_1 & - & & \pi_2 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_3 = 3, \quad \tilde{\pi}_4 = 1, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_3, π_4 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 3, \quad \tilde{\pi}_2 = 1, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -6.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -2 - x_3 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_3 - \left(1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ z &= -4 - 2x_3 - 2\left(1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) = -6 - 3x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & = & 1 & + & \frac{1}{2} & x_3 & - & \frac{1}{2} & x_4 \\ x_2 & = & 1 & + & \frac{1}{2} & x_3 & + & \frac{1}{2} & x_4 \\ z & = & -6 & - & 3 & x_3 & - & & x_4 \end{array} \right.$$

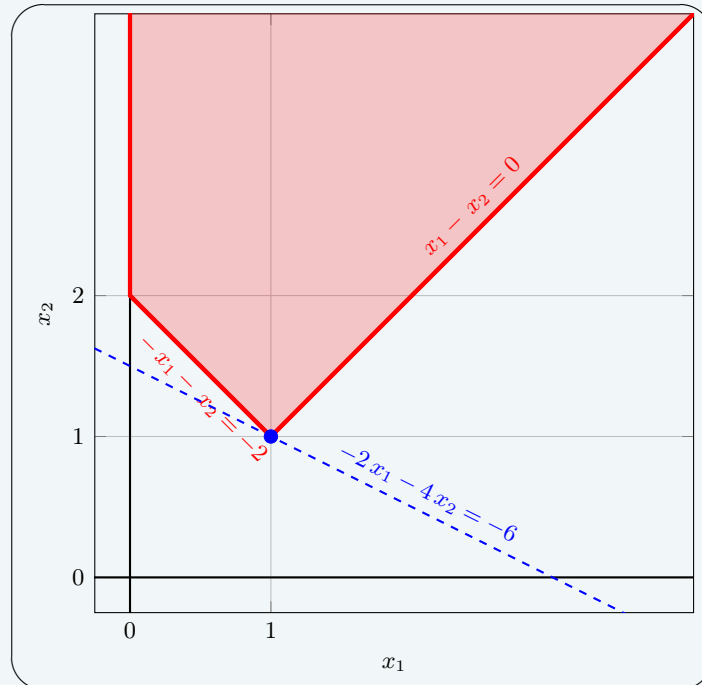
dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6,$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

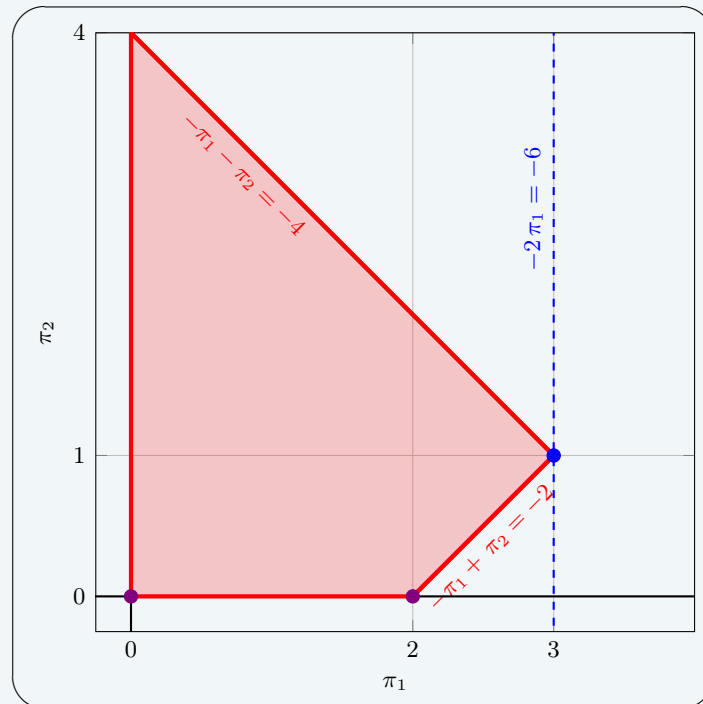
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP) = -6$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali π_1, π_2 , che corrispondono alle variabili π_3, π_4 dei dizionari duali.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 3, \quad \tilde{\pi}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -6.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

Esercizio 10.2 — Algoritmo del simplesso duale (P12)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & -3 & \pi_1 & - & \pi_2 & \\
 \text{soggetto a} & - & \pi_1 & + & \pi_2 & \geq -1 \\
 & & - & \pi_1 & - & 2 \pi_2 \geq -2 \\
 & & & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & & & 3 & \pi_3 & + & \pi_4 \\
 \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & - & \pi_3 & + & \pi_4 & = & -1 \\
 & & & - & \pi_2 & - & \pi_3 & - & 2 \pi_4 & = & -2 \\
 & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 \\
 \pi_2 = 2 - \pi_3 - 2 \pi_4 \\
 -w = 0 + 3 \pi_3 + \pi_4
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 & & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ & & x_1 & - & 2 & x_2 & & & + & x_4 & = & -1 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = -3 + x_1 + x_2 \\ x_4 = -1 - x_1 + 2x_2 \\ z = 0 - x_1 - 2x_2 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = -3, \quad \bar{x}_4 = -1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Iterazione 1**

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_3 e x_4 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_3 . Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_3 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 1 - \pi_3 \\ \pi_2 = 2 - \pi_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{1 - \pi_3 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 - \pi_3 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_3 \leq 1 \\ \pi_3 \leq 2 \end{array} \right.$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_3 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-2}{-1} \right\} = 1$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_3 fino a 1, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_3 diventa duale in base e, di conseguenza, x_3 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_3 = 1 - \pi_1 + \pi_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_2 = 2 - (1 - \pi_1 + \pi_4) - 2\pi_4 = 1 + \pi_1 - 3\pi_4$$

$$-w = 3(1 - \pi_1 + \pi_4) + \pi_4 = 3 - 3\pi_1 + 4\pi_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 + \pi_1 - 3\pi_4 \\ \pi_3 = 1 - \pi_1 + \pi_4 \\ -w = 3 - 3\pi_1 + 4\pi_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 1, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad -w = 3, \quad w = -3.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_3 = -3 + x_1 + x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 3 - x_2 + x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_4 = -1 - (3 - x_2 + x_3) + 2x_2 = -4 + 3x_2 - x_3$$

$$z = -(3 - x_2 + x_3) - 2x_2 = -3 - x_2 - x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + x_3 \\ x_4 = -4 + 3x_2 - x_3 \\ z = -3 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_4 = -4, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -3$$

• Iterazione 2

L'unica variabile in base con valore negativo è x_4 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 - 3\pi_4 \\ \pi_3 = 1 + \pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - 3\pi_4 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{1 + \pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq \frac{1}{3} \\ \pi_4 \geq -1 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, raggiunto da x_2 ($\bar{a}_{43} = 1 > 0$ non dà alcun candidato). Aumentando il valore di π_4 fino a $\frac{1}{3}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;
 π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 1 + \pi_1 - 3\pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_3 &= 1 - \pi_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2\right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 \\ -w &= 3 - 3\pi_1 + 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2\right) = \frac{13}{3} - \frac{5}{3}\pi_1 - \frac{4}{3}\pi_2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 \\ -w = \frac{13}{3} - \frac{5}{3}\pi_1 - \frac{4}{3}\pi_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad -w = \frac{13}{3}, \quad w = -\frac{13}{3}.$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_3, π_4 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{13}{3}.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -4 + 3x_2 - x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) + x_3 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ z &= -3 - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) - x_3 = -\frac{13}{3} - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4 \\ z = -\frac{13}{3} - \frac{4}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 \end{cases}$$

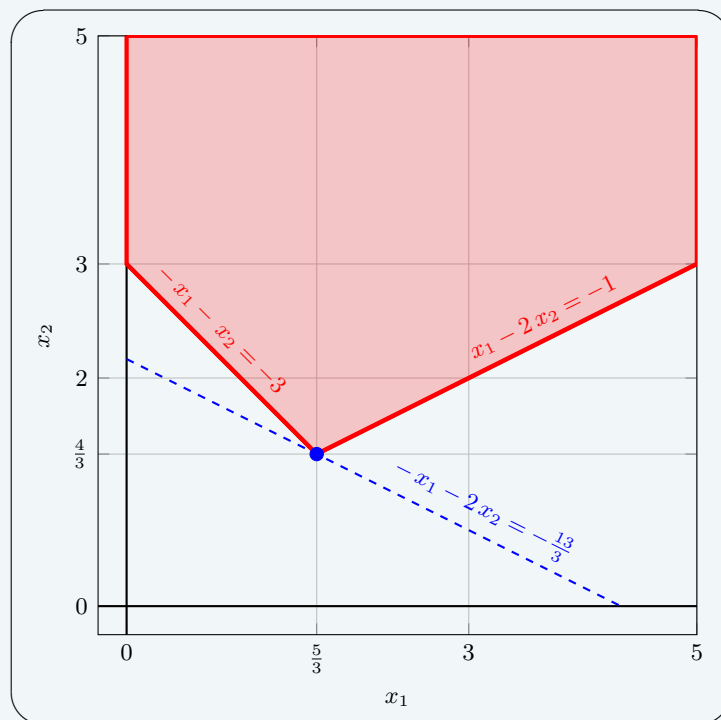
dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -\frac{13}{3},$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

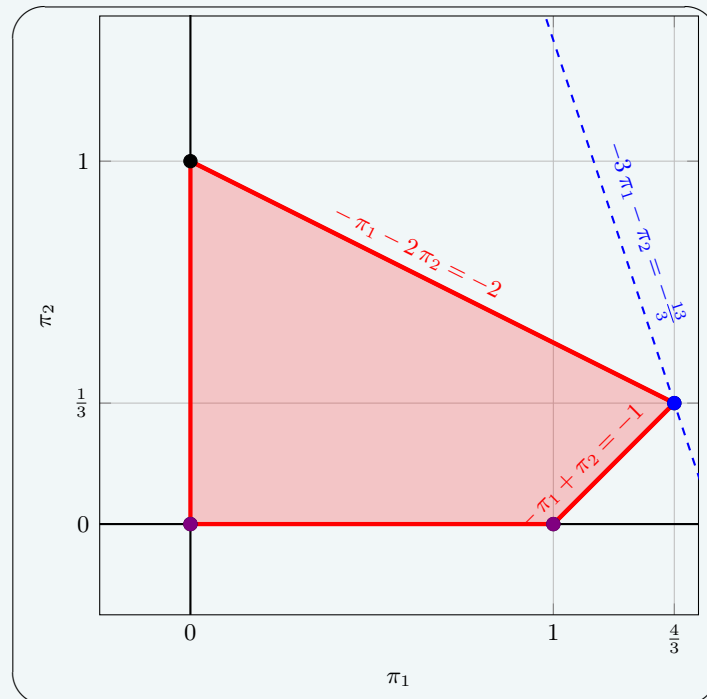
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{13}{3}.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali π_1, π_2 , che corrispondono alle variabili π_3, π_4 dei dizionari duali.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{13}{3}.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

Esercizio 10.3 — Algoritmo del simplesso duale (P13)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 - 2x_2 \leq -6 \\ & x_1 - 4x_2 \leq -6 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 3$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{ll}
 \min & -6 \pi_1 - 6 \pi_2 + 3 \pi_3 \\
 \text{soggetto a} & -\pi_1 + \pi_2 + 2 \pi_3 \geq -1 \\
 & -2 \pi_1 - 4 \pi_2 - 2 \pi_3 \geq -3 \\
 & \pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3 \geq 0
 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 6 \pi_3 + 6 \pi_4 - 3 \pi_5 \\
 \text{soggetto a} & -\pi_1 - \pi_3 + \pi_4 + 2 \pi_5 = -1 \\
 & -\pi_2 - 2 \pi_3 - 4 \pi_4 - 2 \pi_5 = -3 \\
 & \pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \pi_4, \quad \pi_5 \geq 0
 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 + 2 \pi_5 \\
 \pi_2 = 3 - 2 \pi_3 - 4 \pi_4 - 2 \pi_5 \\
 -w = 0 + 6 \pi_3 + 6 \pi_4 - 3 \pi_5
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 3, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{rclclclclcl}
 \max & - & x_1 & - & 3 & x_2 & & & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & - & 2 & x_2 & + & x_3 & & = & -6 \\
 & & x_1 & - & 4 & x_2 & & & + & x_4 & = & -6 \\
 & & 2 & x_1 & - & 2 & x_2 & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_3 = -6 + x_1 + 2 x_2 \\
 x_4 = -6 - x_1 + 4 x_2 \\
 x_5 = 3 - 2 x_1 + 2 x_2 \\
 z = 0 - x_1 - 3 x_2
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = -6, \quad \bar{x}_4 = -6, \quad \bar{x}_5 = 3, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 1

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_3 e x_4 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_3 . Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_3 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \pi_1 = 1 - \pi_3 \\
 \pi_2 = 3 - 2 \pi_3
 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \underbrace{1 - \pi_3 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\
 \underbrace{3 - 2 \pi_3 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0}
 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \pi_3 \leq 1 \\
 \pi_3 \leq \frac{3}{2}
 \end{array} \right.$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_3 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-3}{-2} \right\} = 1$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_3 fino a 1, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_3 diventa duale in base e, di conseguenza, x_3 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 + 2 \pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_3 = 1 - \pi_1 + \pi_4 + 2 \pi_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_2 = 3 - 2(1 - \pi_1 + \pi_4 + 2 \pi_5) - 4 \pi_4 - 2 \pi_5 = 1 + 2 \pi_1 - 6 \pi_4 - 6 \pi_5$$

$$-w = 0 + 6(1 - \pi_1 + \pi_4 + 2\pi_5) + 6\pi_4 - 3\pi_5 = 6 - 6\pi_1 + 12\pi_4 + 9\pi_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 + 2\pi_1 - 6\pi_4 - 6\pi_5 \\ \pi_3 = 1 - \pi_1 + \pi_4 + 2\pi_5 \\ -w = 6 - 6\pi_1 + 12\pi_4 + 9\pi_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 1, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad -w = 6, \quad w = -6.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 6 - 2x_2 + x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_4 = -6 - (6 - 2x_2 + x_3) + 4x_2 = -12 + 6x_2 - x_3$$

$$x_5 = 3 - 2(6 - 2x_2 + x_3) + 2x_2 = -9 + 6x_2 - 2x_3$$

$$z = 0 - (6 - 2x_2 + x_3) - 3x_2 = -6 - x_2 - x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -12 + 6x_2 - x_3 \\ x_5 = -9 + 6x_2 - 2x_3 \\ z = -6 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 6, \quad \bar{x}_4 = -12, \quad \bar{x}_5 = -9, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6$$

• Iterazione 2

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_4 e x_5 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_4 . Corrispondentemente, nel dizionario

duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 - 6\pi_4 \\ \pi_3 = 1 + \pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - 6\pi_4 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{1 + \pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq \frac{1}{6} \\ \pi_4 \geq -1 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$, raggiunto da x_2 ($\bar{a}_{43} = 1 > 0$ non dà alcun candidato). Aumentando il valore di π_4 fino a $\frac{1}{6}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;

π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 1 + 2\pi_1 - 6\pi_4 - 6\pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_3 &= 1 - \pi_1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5\right) + 2\pi_5 = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 + \pi_5 \\ -w &= 6 - 6\pi_1 + 12\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5\right) + 9\pi_5 = 8 - 2\pi_1 - 2\pi_2 - 3\pi_5. \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 + \pi_5 \\ \pi_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5 \\ -w = 8 - 2\pi_1 - 2\pi_2 - 3\pi_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 5\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{7}{6}, \quad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad -w = 8, \quad w = -8.$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_3, π_4, π_5 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{7}{6}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -12 + 6x_2 - x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 6 - 2 \left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right) + x_3 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$x_5 = -9 + 6 \left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right) - 2x_3 = 3 - x_3 + x_4$$

$$z = -6 - \left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right) - x_3 = -8 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 = & 2 & + & \frac{2}{3} x_3 & - & \frac{1}{3} x_4 \\ x_2 = & 2 & + & \frac{1}{6} x_3 & + & \frac{1}{6} x_4 \\ x_5 = & 3 & - & x_3 & + & x_4 \\ z = & -8 & - & \frac{7}{6} x_3 & - & \frac{1}{6} x_4 \end{array} \right.$$

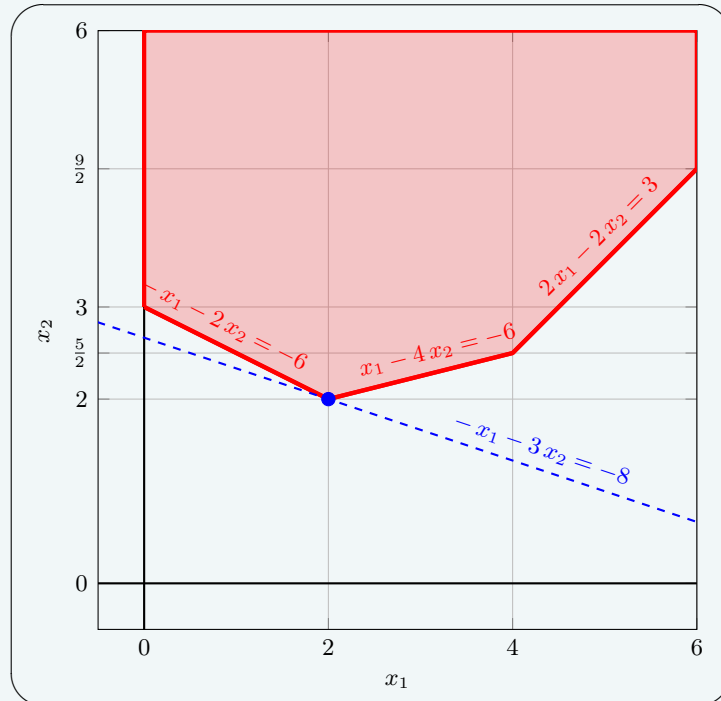
dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_5 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -8,$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

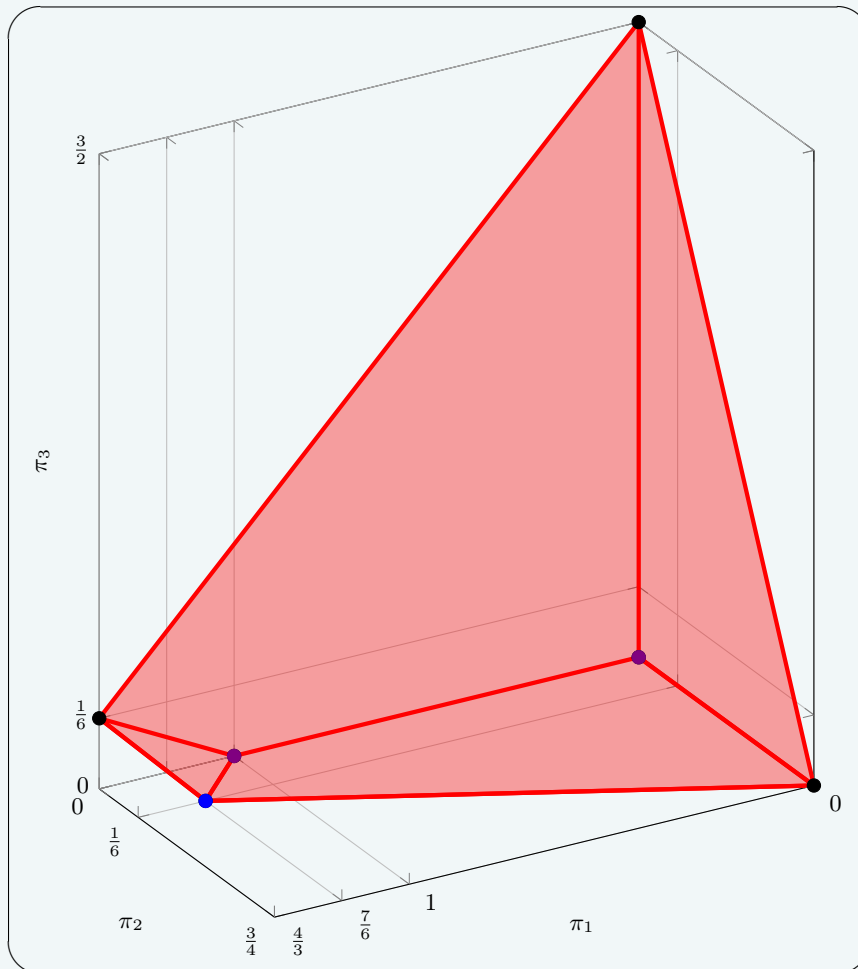
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le tre variabili duali originali π_1, π_2, π_3 , che corrispondono alle variabili π_3, π_4, π_5 dei dizionari duali.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{7}{6}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Variabili (pi_3, pi_4, pi_5): le variabili duali originali.
# Poliedro definito da disuguaglianze (rappr. per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (1, -1, 1, 2),      # 1 - pi_3 + pi_4 + 2*pi_5 >= 0
    (3, -2, -4, -2),   # 3 - 2*pi_3 - 4*pi_4 - 2*pi_5 >= 0
    (0, 1, 0, 0),      # pi_3 >= 0
    (0, 0, 1, 0),      # pi_4 >= 0
    (0, 0, 0, 1)       # pi_5 >= 0
])

# Mostra le disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Mostra i punti estremi e i raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Disegna il poliedro (3D)
p.plot()
```

Esercizio 10.4 — Algoritmo del sempliceo duale (P14)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rcll} \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 2 \\ & - & x_1 & - & & x_2 & \leq & -3 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 3$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcll} \min & 2 & \pi_1 & + & 2 & \pi_2 & - & 3 & \pi_3 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & + & & \pi_2 & - & \pi_3 & \geq & -1 \\ & & \pi_1 & - & 2 & \pi_2 & - & \pi_3 & \geq & -2 \\ & & \pi_1, & & \pi_2, & & \pi_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & & & & -2 & \pi_3 & - & 2 & \pi_4 & + & 3 & \pi_5 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & & & - & \pi_3 & + & \pi_4 & - & \pi_5 & = & -1 \\ & & & - & \pi_2 & + & \pi_3 & - & 2 & \pi_4 & - & \pi_5 & = & -2 \\ & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_5 \\ \pi_2 = 2 + \pi_3 - 2\pi_4 - \pi_5 \\ -w = 0 - 2\pi_3 - 2\pi_4 + 3\pi_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{rcllclclclclcl} \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 & & & & & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ & & x_1 & - & 2 & x_2 & & & + & x_4 & & = & 2 \\ & & - & x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & -3 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = -3 + x_1 + x_2 \\ z = 0 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 2, \quad \bar{x}_5 = -3, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Iterazione 1**

L'unica variabile in base con valore negativo è x_5 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_5 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - \pi_5 \\ \pi_2 = 2 - \pi_5 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - \pi_5}_{\pi_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2 - \pi_5}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_5 \leq 1 \\ \pi_5 \leq 2 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_5 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-2}{-1} \right\} = 1$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_5 fino a 1, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 diventa duale in base e, di conseguenza, x_5 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_5 = 1 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_1.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= 2 + \pi_3 - 2\pi_4 - (1 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_1) = 1 + \pi_1 + 2\pi_3 - 3\pi_4 \\ -w &= -2\pi_3 - 2\pi_4 + 3(1 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_1) = 3 - 3\pi_1 - 5\pi_3 + \pi_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 + \pi_1 + 2\pi_3 - 3\pi_4 \\ \pi_5 = 1 - \pi_1 - \pi_3 + \pi_4 \\ -w = 3 - 3\pi_1 - 5\pi_3 + \pi_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_5 = 1, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad -w = 3, \quad w = -3.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_5 = -3 + x_1 + x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 3 - x_2 + x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_3 = 2 + (3 - x_2 + x_5) - x_2 = 5 - 2x_2 + x_5$$

$$x_4 = 2 - (3 - x_2 + x_5) + 2x_2 = -1 + 3x_2 - x_5$$

$$z = -(3 - x_2 + x_5) - 2x_2 = -3 - x_2 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = & 3 & - & x_2 & + & x_5 \\ x_3 = & 5 & - & 2x_2 & + & x_5 \\ x_4 = & -1 & + & 3x_2 & - & x_5 \\ z = & -3 & - & x_2 & - & x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_4 = -1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad -3$$

• Iterazione 2

L'unica variabile in base con valore negativo è x_4 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = & 1 - 3\pi_4 \\ \pi_5 = & 1 + \pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - 3\pi_4}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 + \pi_4}_{\pi_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq & \frac{1}{3} \\ \pi_4 \geq & -1 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, raggiunto da x_2 ($\bar{a}_{45} = 1 > 0$ non dà alcun candidato). Aumentando il valore di π_4 fino a $\frac{1}{3}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;
 π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 1 + \pi_1 + 2\pi_3 - 3\pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 - \frac{1}{3}\pi_2.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_5 = 1 - \pi_1 - \pi_3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 - \frac{1}{3}\pi_2 \right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 - \frac{1}{3}\pi_3$$

$$-w = 3 - 3\pi_1 - 5\pi_3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 - \frac{1}{3}\pi_2 \right) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 - \frac{13}{3}\pi_3.$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\begin{cases} \pi_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_5 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 - \frac{1}{3}\pi_3 \\ -w = \frac{10}{3} - \frac{8}{3}\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_2 - \frac{13}{3}\pi_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad -w = \frac{10}{3}, \quad w = -\frac{10}{3}.$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_3, π_4, π_5 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_3 = \frac{4}{3}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{10}{3}.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -1 + 3x_2 - x_5 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 3 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \right) + x_5 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5$$

$$x_3 = 5 - 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \right) + x_5 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$$

$$z = -3 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \right) - x_5 = -\frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ z = -\frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \end{cases}$$

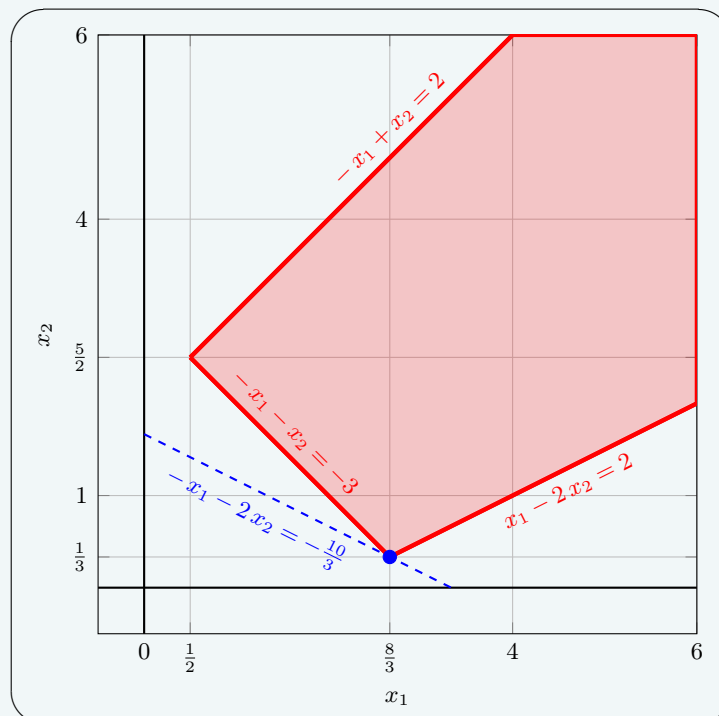
dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{13}{3}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad -\frac{10}{3},$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

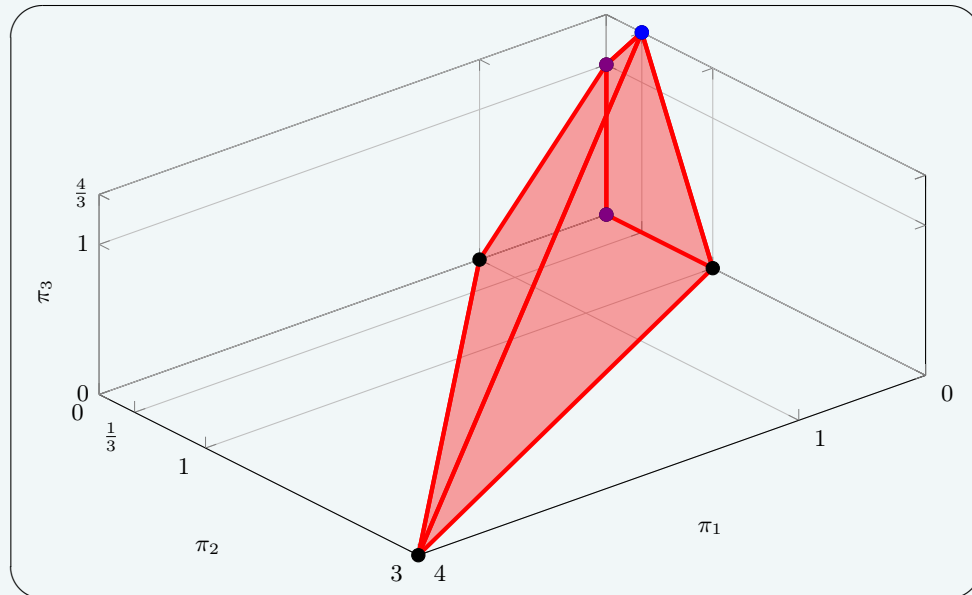
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{10}{3}.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le tre variabili duali originali π_1, π_2, π_3 , che corrispondono alle variabili π_3, π_4, π_5 dei dizionari duali.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_3 = \frac{4}{3}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{10}{3}.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Variabili (pi_1, pi_2, pi_3): le variabili duali originali.
# Poliedro definito da disuguaglianze (rappr. per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (1, -1, 1, -1), # 1 - pi_1 + pi_2 - pi_3 >= 0
    (2, 1, -2, -1), # 2 + pi_1 - 2*pi_2 - pi_3 >= 0
    (0, 1, 0, 0),   # pi_1 >= 0
    (0, 0, 1, 0),   # pi_2 >= 0
    (0, 0, 0, 1)    # pi_3 >= 0
])

# Mostra le disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Mostra i punti estremi e i raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Disegna il poliedro (3D)
p.plot()
```

Esercizio 10.5 — Algoritmo del simplesso duale (P15)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & -3 & x_1 & - & 2 & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & \leq & -4 \\ & & - & x_1 & - & 3 & x_2 & \leq -6 \\ & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & -4 & \pi_1 & - & 6 & \pi_2 & & \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & - & & \pi_2 & \geq & -3 \\ & & - & \pi_1 & - & 3 & \pi_2 & \geq -2 \\ & & & \pi_1, & & \pi_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

• Inizializzazione

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & 4 & \pi_3 & + & 6 & \pi_4 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & & - & \pi_3 & - & \pi_4 & = & -3 \\ & & & - & \pi_2 & - & \pi_3 & - & 3 & \pi_4 & = & -2 \\ & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & & \pi_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 3 - \pi_3 - \pi_4 \\ \pi_2 = 2 - \pi_3 - 3\pi_4 \\ -w = 0 + 4\pi_3 + 6\pi_4 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 3, \quad \bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{llllll} \max & -3 & x_1 & - & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & = & -4 \\ & & - & x_1 & - & 3 & x_2 & & + & x_4 & = & -6 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\begin{cases} x_3 = -4 + x_1 + x_2 \\ x_4 = -6 + x_1 + 3x_2 \\ z = 0 - 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = -4, \quad \bar{x}_4 = -6, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_3 e x_4 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_3 . Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_3 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 3 - \pi_3 \\ \pi_2 = 2 - \pi_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{3 - \pi_3}_{\pi_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2 - \pi_3}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_3 \leq 3 \\ \pi_3 \leq 2 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_3 : $s_m = \min \left\{ \frac{-3}{-1}, \frac{-2}{-1} \right\} = 2$, raggiunto da x_2 . Aumentando il valore di π_3 fino a 2, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_3 diventa duale in base e, di conseguenza, x_3 diventa primale fuori base;
 π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 2 - \pi_3 - 3\pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_3 = 2 - \pi_2 - 3\pi_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_1 = 3 - (2 - \pi_2 - 3\pi_4) - \pi_4 = 1 + \pi_2 + 2\pi_4$$

$$-w = 4(2 - \pi_2 - 3\pi_4) + 6\pi_4 = 8 - 4\pi_2 - 6\pi_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 + \pi_2 + 2\pi_4 \\ \pi_3 = 2 - \pi_2 - 3\pi_4 \\ -w = 8 - 4\pi_2 - 6\pi_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 1, \quad \tilde{\pi}_3 = 2, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad -w = 8, \quad w = -8.$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_3, π_4 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 2, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_3 = -4 + x_1 + x_2 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 4 - x_1 + x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_4 = -6 + x_1 + 3(4 - x_1 + x_3) = 6 - 2x_1 + 3x_3$$

$$z = -3x_1 - 2(4 - x_1 + x_3) = -8 - x_1 - 2x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_2 = & 4 & - & x_1 & + & x_3 \\ x_4 = & 6 & - & 2x_1 & + & 3x_3 \\ z = & -8 & - & x_1 & - & 2x_3 \end{cases}$$

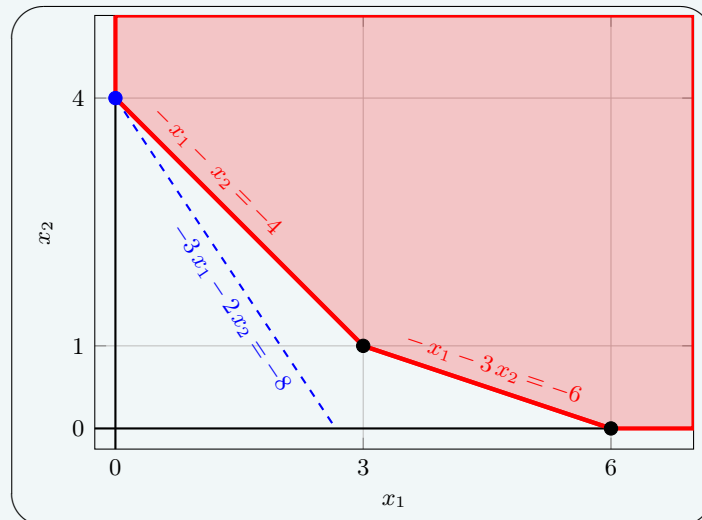
dove $\mathcal{B} = \{2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_4 = 6, \quad \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -8,$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

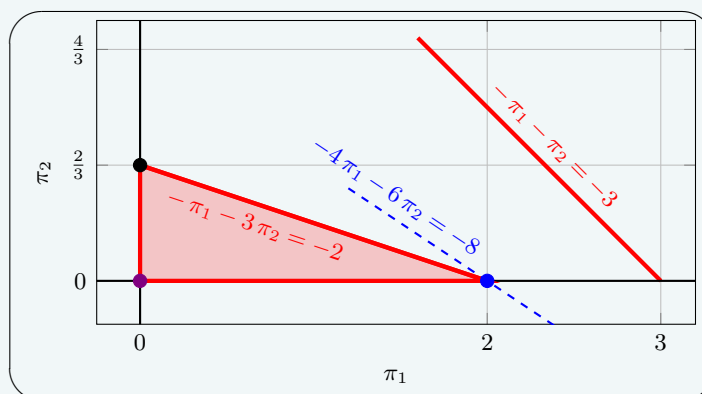
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali π_1, π_2 , che corrispondono alle variabili π_3, π_4 dei dizionari duali. Il vincolo $-\pi_1 - \pi_2 \geq -3$ è ridondante.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 2, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

Esercizio 10.6 — Algoritmo del simplesso duale (P16)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & - & x_1 & - & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & -2 & x_1 & - & & x_2 & \leq -4 \\ & & - & x_1 & - & 3 & x_2 \leq -6 \\ & & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \min & -4 & \pi_1 & - & 6 & \pi_2 \\ \text{soggetto a} & -2 & \pi_1 & - & & \pi_2 \geq -1 \\ & & - & \pi_1 & - & 3 & \pi_2 \geq -2 \\ & & & \pi_1, & & \pi_2 & \geq 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{llllllll} \max & & & & 4 & \pi_3 & + & 6 & \pi_4 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & - & 2 & \pi_3 & - & \pi_4 = -1 \\ & & & - & \pi_2 & - & \pi_3 & - & 3 & \pi_4 = -2 \\ & & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & & \pi_4 & \geq 0 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - 2\pi_3 - \pi_4 \\ \pi_2 = 2 - \pi_3 - 3\pi_4 \\ -w = 0 + 4\pi_3 + 6\pi_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ & -x_1 - 3x_2 + x_4 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\begin{cases} x_3 = -4 + 2x_1 + x_2 \\ x_4 = -6 + x_1 + 3x_2 \\ z = 0 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = -4, \quad \bar{x}_4 = -6, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

• Iterazione 1

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_3 e x_4 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_3 . Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_3 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - 2\pi_3 \\ \pi_2 = 2 - \pi_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - 2\pi_3}_{\pi_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2 - \pi_3}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_3 \leq \frac{1}{2} \\ \pi_3 \leq 2 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_3 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-2}, \frac{-2}{-1} \right\} = \frac{1}{2}$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_3 fino a $\frac{1}{2}$, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_3 diventa duale in base e, di conseguenza, x_3 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - 2\pi_3 - \pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_2 = 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_4 \right) - 3\pi_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{5}{2}\pi_4$$

$$-w = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_4 \right) + 6\pi_4 = 2 - 2\pi_1 + 4\pi_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{5}{2}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{2}\pi_4 \\ -w = 2 - 2\pi_1 + 4\pi_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = \frac{3}{2}, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{1}{2}, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad -w = 2, \quad w = -2.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_3 = -4 + 2x_1 + x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_4 = -6 + \left(2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right) + 3x_2 = -4 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$z = - \left(2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right) - 2x_2 = -2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = -4 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ z = -2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_4 = -4, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

• **Iterazione 2**

L'unica variabile in base con valore negativo è x_4 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{5}{2} \pi_4}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pi_4}_{\pi_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq \frac{3}{5} \\ \pi_4 \leq 1 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \min \left\{ \frac{-3/2}{-5/2}, \frac{-1/2}{-1/2} \right\} = \frac{3}{5}$, raggiunto da x_2 . Aumentando il valore di π_4 fino a $\frac{3}{5}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;
 π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \pi_1 - \frac{5}{2} \pi_4 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \pi_1 - \frac{2}{5} \pi_2.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pi_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \pi_1 - \frac{2}{5} \pi_2 \right) = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \pi_1 + \frac{1}{5} \pi_2 \\ -w &= 2 - 2 \pi_1 + 4 \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \pi_1 - \frac{2}{5} \pi_2 \right) = \frac{22}{5} - \frac{6}{5} \pi_1 - \frac{8}{5} \pi_2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \pi_1 + \frac{1}{5} \pi_2 \\ \pi_4 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \pi_1 - \frac{2}{5} \pi_2 \\ -w = \frac{22}{5} - \frac{6}{5} \pi_1 - \frac{8}{5} \pi_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{1}{5}, \quad \tilde{\pi}_4 = \frac{3}{5}, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad -w = \frac{22}{5}, \quad w = -\frac{22}{5}.$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_3, π_4 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{5}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{5}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{22}{5}.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -4 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \right) + \frac{1}{2}x_3 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4$$

$$z = -2 - \frac{3}{2} \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \right) - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{22}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ z = -\frac{22}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$$

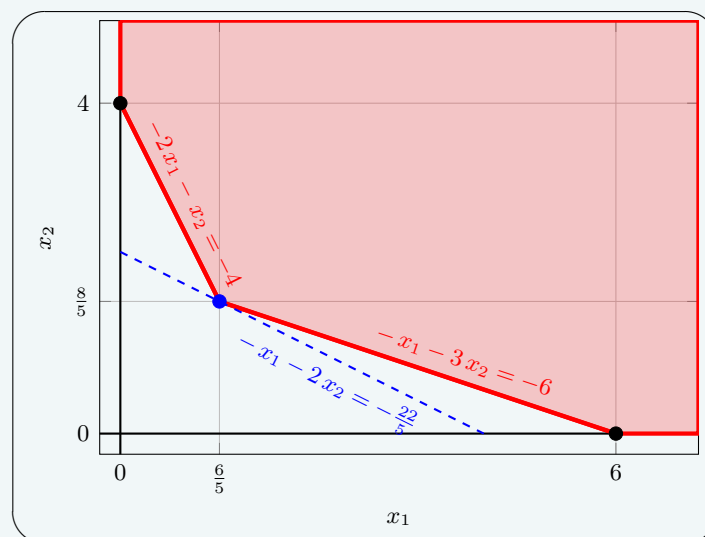
dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{6}{5}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{5}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -\frac{22}{5},$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

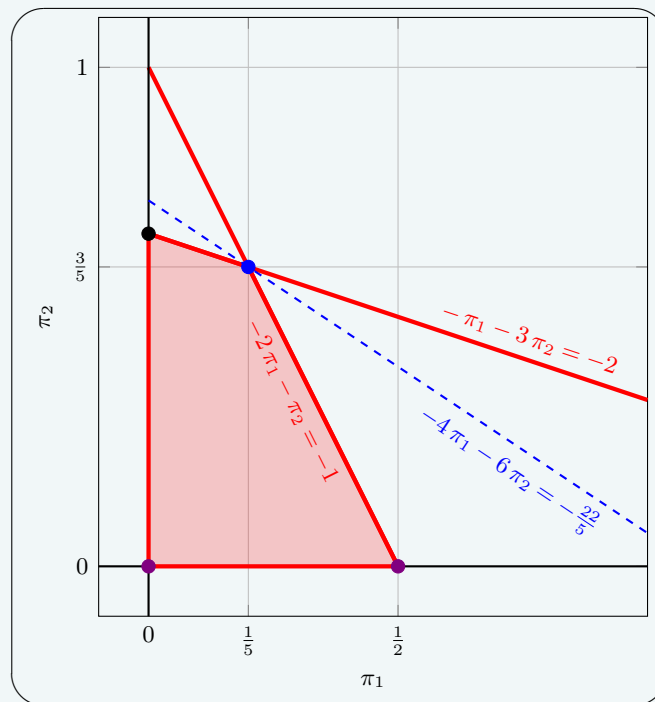
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{6}{5}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{22}{5}.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali π_1, π_2 , che corrispondono alle variabili π_3, π_4 dei dizionari duali.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{5}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{5}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -\frac{22}{5}.$$

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del semplice duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

10.2 Problemi con tre variabili

Esercizio 10.7 — Algoritmo del simplesso duale (P51)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & - & 2x_1 & - & x_2 & \\ \text{soggetto a} & & x_1 & - & x_2 & - 3x_3 \leq -5 \\ & & -3x_1 & - & 2x_2 & + 2x_3 \leq -2 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 2$ variabili e $n = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \min & -5\pi_1 & - & 2\pi_2 & \\ \text{soggetto a} & & \pi_1 & - & 3\pi_2 \geq -2 \\ & & -\pi_1 & - & 2\pi_2 \geq -1 \\ & & -3\pi_1 & + & 2\pi_2 \geq 0 \\ & & \pi_1, & & \pi_2 \geq 0 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 3$ e aggiungiamo in testa $n = 3$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & & & 5\pi_4 & + & 2\pi_5 \\
 \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & + & \pi_4 & - & 3\pi_5 & = & -2 \\
 & & - & \pi_2 & & - & \pi_4 & - & 2\pi_5 & = & -1 \\
 & & & - & \pi_3 & - & 3\pi_4 & + & 2\pi_5 & = & 0 \\
 & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \pi_1 = 2 + \pi_4 - 3\pi_5 \\
 \pi_2 = 1 - \pi_4 - 2\pi_5 \\
 \pi_3 = 0 - 3\pi_4 + 2\pi_5 \\
 -w = 0 + 5\pi_4 + 2\pi_5
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 2, \quad \bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & -2x_1 & - & x_2 \\
 \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5 \\
 & -3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & + & x_5 & = & -2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_4 = -5 - x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 x_5 = -2 + 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\
 z = 0 - 2x_1 - x_2
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = -5, \quad \bar{x}_5 = -2, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_4 e x_5 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_4 . Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 2 + \pi_4 \\ \pi_2 = 1 - \pi_4 \\ \pi_3 = -3\pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 + \pi_4 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{1 - \pi_4 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{-3\pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \geq -2 \\ \pi_4 \leq 1 \\ \pi_4 \leq 0 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{0}{-3} \right\} = 0$, raggiunto da x_3 ($\bar{a}_{41} = 1 > 0$ non dà alcun candidato). Aumentando il valore di π_4 fino a 0, il valore di π_3 resta uguale a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;
 π_3 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_3 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_3 = -3\pi_4 + 2\pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = -\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2 - \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_5 - 3\pi_5 = 2 - \frac{1}{3}\pi_3 - \frac{7}{3}\pi_5 \\ \pi_2 &= 1 + \frac{1}{3}\pi_3 - \frac{2}{3}\pi_5 - 2\pi_5 = 1 + \frac{1}{3}\pi_3 - \frac{8}{3}\pi_5 \\ -w &= 5 \left(-\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_5 \right) + 2\pi_5 = -\frac{5}{3}\pi_3 + \frac{16}{3}\pi_5 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_1 = 2 & - & \frac{1}{3} \pi_3 & - & \frac{7}{3} \pi_5 \\ \pi_2 = 1 & + & \frac{1}{3} \pi_3 & - & \frac{8}{3} \pi_5 \\ \pi_4 = 0 & - & \frac{1}{3} \pi_3 & + & \frac{2}{3} \pi_5 \\ -w = 0 & - & \frac{5}{3} \pi_3 & + & \frac{16}{3} \pi_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 2, \quad \bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -5 - x_1 + x_2 + 3x_3 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_5 = -2 + 3x_1 + 2x_2 - 2\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4\right) = -\frac{16}{3} + \frac{7}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4$$

$$z = -2x_1 - x_2$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_3 = & \frac{5}{3} & + & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 = & -\frac{16}{3} & + & \frac{7}{3}x_1 & + & \frac{8}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}x_4 \\ z = & 0 & - & 2x_1 & - & x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{16}{3}, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 2

L'unica variabile in base con valore negativo è x_5 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_5 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = & 2 - \frac{7}{3}\pi_5 \\ \pi_2 = & 1 - \frac{8}{3}\pi_5 \\ \pi_4 = & \frac{2}{3}\pi_5 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - \frac{7}{3}\pi_5}_{\pi_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 - \frac{8}{3}\pi_5}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{2}{3}\pi_5}_{\pi_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_5 \leq \frac{6}{7} \\ \pi_5 \leq \frac{3}{8} \\ \pi_5 \geq 0 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_5 : $s_m = \min \left\{ \frac{-2}{-7/3}, \frac{-1}{-8/3} \right\} = \frac{3}{8}$, raggiunto da x_2 ($\bar{a}_{54} = \frac{2}{3} > 0$ non dà alcun candidato).

Aumentando il valore di π_5 fino a $\frac{3}{8}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 diventa duale in base e, di conseguenza, x_5 diventa primale fuori base;
 π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 1 + \frac{1}{3}\pi_3 - \frac{8}{3}\pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_5 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\pi_3 - \frac{3}{8}\pi_2.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2 - \frac{1}{3}\pi_3 - \frac{7}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\pi_3 - \frac{3}{8}\pi_2\right) = \frac{9}{8} + \frac{7}{8}\pi_2 - \frac{5}{8}\pi_3 \\ \pi_4 &= -\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\pi_3 - \frac{3}{8}\pi_2\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\pi_2 - \frac{1}{4}\pi_3 \\ -w &= -\frac{5}{3}\pi_3 + \frac{16}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\pi_3 - \frac{3}{8}\pi_2\right) = 2 - 2\pi_2 - \pi_3 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{9}{8} + \frac{7}{8}\pi_2 - \frac{5}{8}\pi_3 \\ \pi_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\pi_2 - \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_5 = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\pi_2 + \frac{1}{8}\pi_3 \\ -w = 2 - 2\pi_2 - \pi_3 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{9}{8}, \quad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{3}{8}, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_4, π_5 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{8}, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -2.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_5 = -\frac{16}{3} + \frac{7}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 2 - \frac{7}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}\left(2 - \frac{7}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}x_5\right) + \frac{1}{3}x_4 = 1 + \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}x_5$$

$$z = -2x_1 - \left(2 - \frac{7}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}x_5\right) = -2 - \frac{9}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{8}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - \frac{7}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}x_5 \\ x_3 = 1 + \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}x_5 \\ z = -2 - \frac{9}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{8}x_5 \end{cases}$$

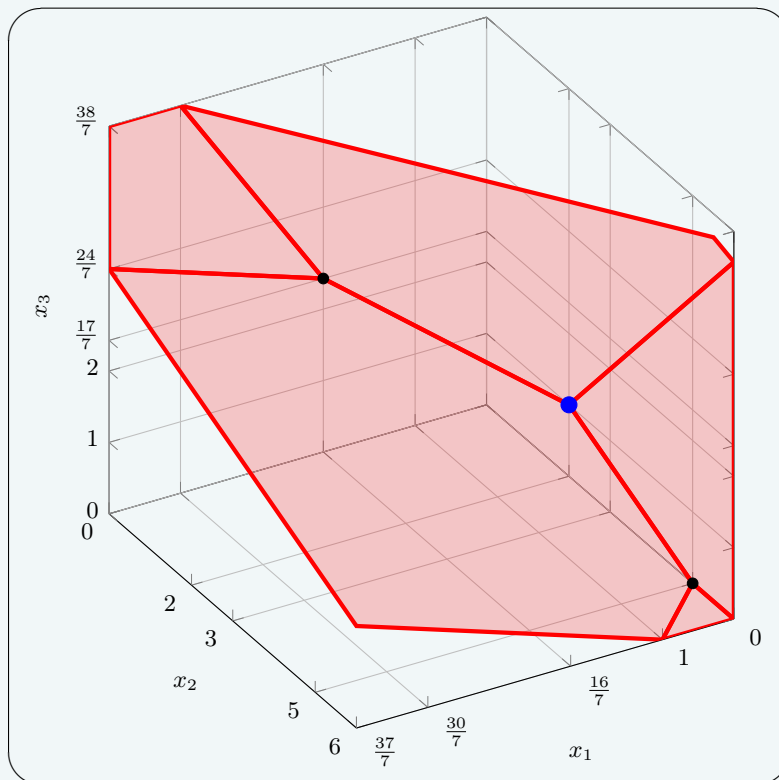
dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2,$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

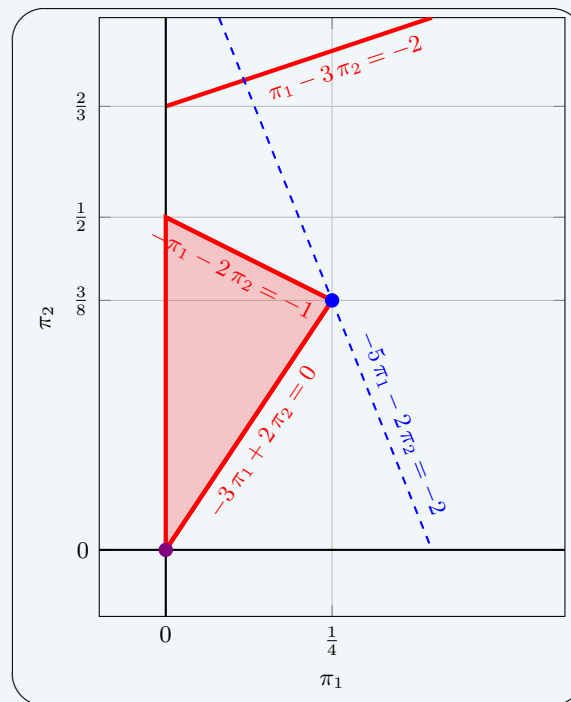
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP) = -2.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le due variabili duali originali π_1, π_2 , che corrispondono alle variabili π_4, π_5 dei dizionari duali.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_2 = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -2.$$

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu.

Esercizio 10.8 — Algoritmo del simplesso duale (P53)

Consideriamo il seguente problema LP primale in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 & & \leq -2 \\
 & & & & - & x_2 & - & x_3 \leq -3 \\
 & - & x_1 & & & - & x_3 \leq -2 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0
 \end{array}$$

e il suo problema LP duale in forma canonica di minimo con $m = 3$ variabili e $n = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & - & 2\pi_1 & - & 3\pi_2 & - & 2\pi_3 \\
 \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & & - & \pi_3 \geq -1 \\
 & - & \pi_1 & - & \pi_2 & & \geq -2 \\
 & & & - & \pi_2 & - & \pi_3 \geq -4 \\
 & & \pi_1, & & \pi_2, & & \pi_3 \geq 0
 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la base delle m variabili di scarto è **duale ammissibile** ma non è primale ammissibile.

Domande

Risolvere il problema LP primale con l'algoritmo del simplesso duale e, in parallelo, il problema LP duale con l'algoritmo del simplesso, mostrando a ogni iterazione il dizionario duale e il dizionario primale.

Soluzione

- Inizializzazione**

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 3$ e aggiungiamo in testa $n = 3$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & & & & 2\pi_4 & + & 3\pi_5 & + & 2\pi_6 \\
 \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & & - & \pi_4 & & - & \pi_6 = -1 \\
 & & & - & \pi_2 & & - & \pi_4 & - & \pi_5 & = -2 \\
 & & & & & - & \pi_3 & & - & \pi_5 & - & \pi_6 = -4 \\
 & & \pi_1, & & \pi_2, & & \pi_3, & & \pi_4, & & \pi_5, & & \pi_6 \geq 0
 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} \pi_1 & = & 1 & - & \pi_4 & & - & \pi_6 \\ \pi_2 & = & 2 & - & \pi_4 & - & \pi_5 & \\ \pi_3 & = & 4 & & & - & \pi_5 & - & \pi_6 \\ -w & = & 0 & + & 2\pi_4 & + & 3\pi_5 & + & 2\pi_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5, 6\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 4, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{rclclclclcl} \max & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & -2 \\ & & & - & x_2 & - & x_3 & & + & x_5 & = & -3 \\ & & - & x_1 & & - & x_3 & & & + & x_6 & = & -2 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_4 & = & -2 & + & x_1 & + & x_2 \\ x_5 & = & -3 & & & + & x_2 & + & x_3 \\ x_6 & = & -2 & + & x_1 & & & + & x_3 \\ z & = & 0 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = -2, \quad \bar{x}_5 = -3, \quad \bar{x}_6 = -2, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 1

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_4 , x_5 e x_6 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_4 . Corrispondentemente, nel dizionario

duale aumentiamo la variabile π_4 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - \pi_4 \\ \pi_2 = 2 - \pi_4 \\ \pi_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - \pi_4 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 - \pi_4 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq 1 \\ \pi_4 \leq 2 \\ \text{(nessuna condizione)} \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_4 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-2}{-1} \right\} = 1$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_4 fino a 1, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 diventa duale in base e, di conseguenza, x_4 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - \pi_4 - \pi_6 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = 1 - \pi_1 - \pi_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_2 = 2 - (1 - \pi_1 - \pi_6) - \pi_5 = 1 + \pi_1 - \pi_5 + \pi_6$$

$$\pi_3 = 4 - \pi_5 - \pi_6$$

$$-w = 2(1 - \pi_1 - \pi_6) + 3\pi_5 + 2\pi_6 = 2 - 2\pi_1 + 3\pi_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 + \pi_1 - \pi_5 + \pi_6 \\ \pi_3 = 4 - \pi_5 - \pi_6 \\ \pi_4 = 1 - \pi_1 - \pi_6 \\ -w = 2 - 2\pi_1 + 3\pi_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 6\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 4, \quad \bar{\pi}_4 = 1, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad -w = 2, \quad w = -2.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -2 + x_1 + x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - x_2 + x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_5 = -3 + x_2 + x_3$$

$$x_6 = -2 + (2 - x_2 + x_4) + x_3 = 0 - x_2 + x_3 + x_4$$

$$z = -(2 - x_2 + x_4) - 2x_2 - 4x_3 = -2 - x_2 - 4x_3 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_4 \\ x_5 = -3 + x_2 + x_3 \\ x_6 = 0 - x_2 + x_3 + x_4 \\ z = -2 - x_2 - 4x_3 - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_5 = -3, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

• Iterazione 2

L'unica variabile in base con valore negativo è x_5 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_5 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 - \pi_5 \\ \pi_3 = 4 - \pi_5 \\ \pi_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - \pi_5}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{4 - \pi_5}_{\pi_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1}_{\pi_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_5 \leq 1 \\ \pi_5 \leq 4 \\ \text{(nessuna condizione)} \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_5 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-4}{-1} \right\} = 1$, raggiunto da x_2 . Aumentando il valore di π_5 fino a 1, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 diventa duale in base e, di conseguenza, x_5 diventa primale fuori base;

π_2 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 1 + \pi_1 - \pi_5 + \pi_6 \quad \text{quindi} \quad \pi_5 = 1 + \pi_1 - \pi_2 + \pi_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_3 = 4 - (1 + \pi_1 - \pi_2 + \pi_6) - \pi_6 = 3 - \pi_1 + \pi_2 - 2\pi_6$$

$$\pi_4 = 1 - \pi_1 - \pi_6$$

$$-w = 2 - 2\pi_1 + 3(1 + \pi_1 - \pi_2 + \pi_6) = 5 + \pi_1 - 3\pi_2 + 3\pi_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} \pi_3 & = & 3 & - & \pi_1 & + & \pi_2 & - & 2\pi_6 \\ \pi_4 & = & 1 & - & \pi_1 & & & - & \pi_6 \\ \pi_5 & = & 1 & + & \pi_1 & - & \pi_2 & + & \pi_6 \\ -w & = & 5 & + & \pi_1 & - & 3\pi_2 & + & 3\pi_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 6\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_3 = 3, \quad \bar{\pi}_4 = 1, \quad \bar{\pi}_5 = 1, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad -w = 5, \quad w = -5.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_5 = -3 + x_2 + x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 3 - x_3 + x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 2 - (3 - x_3 + x_5) + x_4 = -1 + x_3 + x_4 - x_5$$

$$x_6 = -(3 - x_3 + x_5) + x_3 + x_4 = -3 + 2x_3 + x_4 - x_5$$

$$z = -2 - (3 - x_3 + x_5) - 4x_3 - x_4 = -5 - 3x_3 - x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & = & -1 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 \\ x_2 & = & 3 & - & x_3 & & & + & x_5 \\ x_6 & = & -3 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 \\ z & = & -5 & - & 3x_3 & - & x_4 & - & x_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = -1, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_6 = -3, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad -5$$

• **Iterazione 3**

Nel dizionario primale, le variabili in base con valore negativo sono x_1 e x_6 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_1 (anche se $\bar{x}_6 = -3$ è più negativo). Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_1 , cioè la variabile con coefficiente positivo di indice minimo nella funzione obiettivo, e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = 3 - \pi_1 \\ \pi_4 = 1 - \pi_1 \\ \pi_5 = 1 + \pi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{3 - \pi_1}_{\pi_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 - \pi_1}_{\pi_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 + \pi_1}_{\pi_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_1 \leq 3 \\ \pi_1 \leq 1 \\ \pi_1 \geq -1 \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_1 : $s_m = \min \left\{ \frac{-3}{-1}, \frac{-1}{-1} \right\} = 1$, raggiunto da x_4 ($\bar{a}_{15} = 1 > 0$ non dà alcun candidato). Aumentando il valore di π_1 fino a 1, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_1 diventa duale in base e, di conseguenza, x_1 diventa primale fuori base;
 π_4 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_4 = 1 - \pi_1 - \pi_6 \quad \text{quindi} \quad \pi_1 = 1 - \pi_4 - \pi_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_3 = 3 - (1 - \pi_4 - \pi_6) + \pi_2 - 2\pi_6 = 2 + \pi_2 + \pi_4 - \pi_6$$

$$\pi_5 = 1 + (1 - \pi_4 - \pi_6) - \pi_2 + \pi_6 = 2 - \pi_2 - \pi_4$$

$$-w = 5 + (1 - \pi_4 - \pi_6) - 3\pi_2 + 3\pi_6 = 6 - 3\pi_2 - \pi_4 + 2\pi_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 & - \pi_4 & - \pi_6 \\ \pi_3 = 2 & + \pi_2 & + \pi_4 & - \pi_6 \\ \pi_5 = 2 & - \pi_2 & - \pi_4 \\ -w = 6 & - 3\pi_2 & - \pi_4 & + 2\pi_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 6\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 2, \quad \bar{\pi}_5 = 2, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad -w = 6, \quad w = -6.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_1 = -1 + x_3 + x_4 - x_5 \quad \text{quindi} \quad x_4 = 1 + x_1 - x_3 + x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = 3 - x_3 + x_5$$

$$x_6 = -3 + 2x_3 + (1 + x_1 - x_3 + x_5) - x_5 = -2 + x_1 + x_3$$

$$z = -5 - 3x_3 - (1 + x_1 - x_3 + x_5) - x_5 = -6 - x_1 - 2x_3 - 2x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_2 = 3 & - & x_3 & + & x_5 \\ x_4 = 1 & + & x_1 & - & x_3 & + & x_5 \\ x_6 = -2 & + & x_1 & + & x_3 \\ z = -6 & - & x_1 & - & 2x_3 & - & 2x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3, 5\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_4 = 1, \quad \bar{x}_6 = -2, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6$$

• Iterazione 4

L'unica variabile in base con valore negativo è x_6 , che è la riga pivot. Corrispondentemente, nel dizionario duale aumentiamo la variabile π_6 e possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - \pi_6 \\ \pi_3 = 2 - \pi_6 \\ \pi_5 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - \pi_6}_{\pi_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2 - \pi_6}_{\pi_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{2}_{\pi_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_6 \leq 1 \\ \pi_6 \leq 2 \\ \text{(nessuna condizione)} \end{cases}$$

Questi sono esattamente i rapporti dell'algoritmo del simplesso duale sulla riga di x_6 : $s_m = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-2}{-1} \right\} = 1$, raggiunto da x_1 . Aumentando il valore di π_6 fino a 1, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 diventa duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa primale fuori base;
 π_1 diventa duale fuori base e, di conseguenza, x_1 diventa primale in base.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - \pi_4 - \pi_6 \quad \text{quindi} \quad \pi_6 = 1 - \pi_1 - \pi_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\pi_3 = 2 + \pi_2 + \pi_4 - (1 - \pi_1 - \pi_4) = 1 + \pi_1 + \pi_2 + 2\pi_4$$

$$\pi_5 = 2 - \pi_2 - \pi_4$$

$$-w = 6 - 3\pi_2 - \pi_4 + 2(1 - \pi_1 - \pi_4) = 8 - 2\pi_1 - 3\pi_2 - 3\pi_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{rclclclcl} \pi_3 & = & 1 & + & \pi_1 & + & \pi_2 & + & 2\pi_4 \\ \pi_5 & = & 2 & & & - & \pi_2 & - & \pi_4 \\ \pi_6 & = & 1 & - & \pi_1 & & & - & \pi_4 \\ -w & = & 8 & - & 2\pi_1 & - & 3\pi_2 & - & 3\pi_4 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$. Tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non positivi, quindi la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_3 = 1, \quad \tilde{\pi}_5 = 2, \quad \tilde{\pi}_6 = 1, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad -w = 8, \quad w = -8.$$

Ricordando che le variabili duali originali sono le variabili traslate π_4, π_5, π_6 , la soluzione ottima del problema LP duale originale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2, \quad \tilde{\pi}_3 = 1, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_6 = -2 + x_1 + x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - x_3 + x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = 3 - x_3 + x_5$$

$$x_4 = 1 + (2 - x_3 + x_6) - x_3 + x_5 = 3 - 2x_3 + x_5 + x_6$$

$$z = -6 - (2 - x_3 + x_6) - 2x_3 - 2x_5 = -8 - x_3 - 2x_5 - x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_6 \\ x_2 = 3 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 3 - 2x_3 + x_5 + x_6 \\ z = -8 - x_3 - 2x_5 - x_6 \end{cases}$$

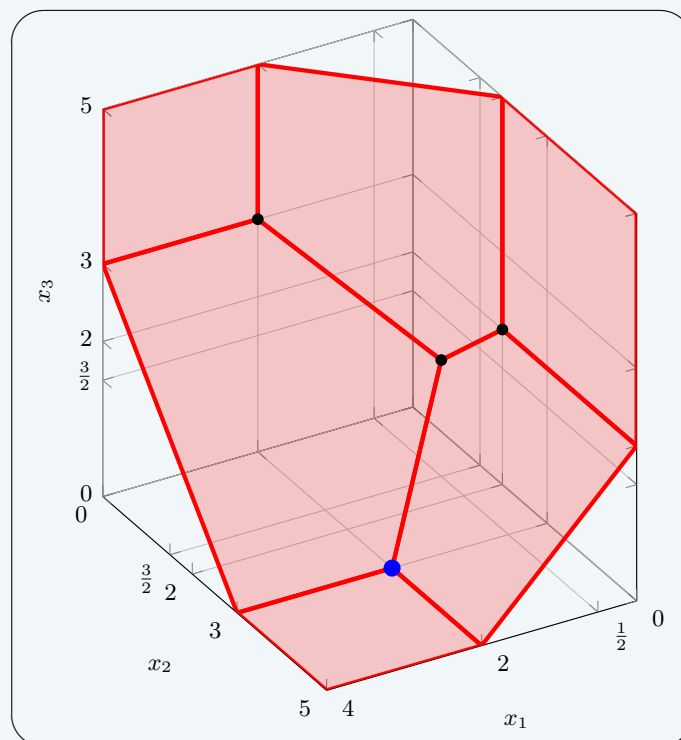
dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5, 6\}$. La soluzione di base è ora primale ammissibile e duale ammissibile, quindi la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_4 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad -8,$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Soluzione grafica:

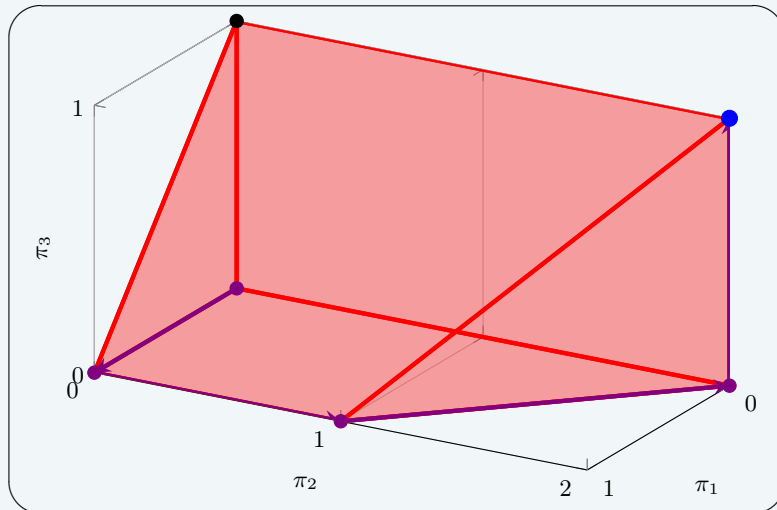
La regione ammissibile del problema LP in forma canonica è il poliedro ombreggiato in rosso. La regione ammissibile è illimitata: disegniamo solo le sue facce, troncate in $x_1 = 4$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 5$.



Una soluzione ottima del problema LP primale è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP) = -8.$$

La regione ammissibile del problema LP duale in forma canonica di minimo è il poliedro ombreggiato in rosso. Nella figura seguente rappresentiamo le tre variabili duali originali π_1, π_2, π_3 , che corrispondono alle variabili π_4, π_5, π_6 dei dizionari duali. Il vincolo $-\pi_2 - \pi_3 \geq -4$ è ridondante.



Una soluzione ottima del problema LP duale è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2, \quad \tilde{\pi}_3 = 1, \quad \text{e} \quad z(D(LP)) = -8.$$

In viola i quattro vertici $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,2,0)$ esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale, prima di raggiungere quello ottimo $(0,2,1)$ rappresentato in blu. I valori della funzione obiettivo duale sono $0 \rightarrow -2 \rightarrow -5 \rightarrow -6 \rightarrow -8$.

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Variabili (pi_1, pi_2, pi_3): le variabili duali originali.
# Poliedro definito da disuguaglianze (rappr. per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (1, -1, 0, -1), # 1 - pi_1 - pi_3 >= 0
    (2, -1, -1, 0), # 2 - pi_1 - pi_2 >= 0
    (4, 0, -1, -1), # 4 - pi_2 - pi_3 >= 0
    (0, 1, 0, 0),   # pi_1 >= 0
    (0, 0, 1, 0),   # pi_2 >= 0
    (0, 0, 0, 1)    # pi_3 >= 0
])

# Mostra le disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Mostra i punti estremi e i raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Disegna il poliedro (3D)
p.plot()
```