



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Esercizi 2 — L'algoritmo del simplesso

Esercizi svolti sui capitoli 6–8: dizionari, algoritmo del simplesso, ciclaggio e regola di Bland, Fase 0. Ogni esercizio usa un problema del catalogo e ha la soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

6	Algoritmo del simplesso	2
6.1	Dizionari	2
6.2	Problemi con due variabili	19
6.3	Problemi con tre variabili	67
7	Condizioni di ottimalità e regole di pivot	104
8	Fase 0 dell'algoritmo del simplesso	124



Algoritmo del simplesso

6.1 Dizionari

Esercizio 6.1 — Dizionari del simplesso ($P3$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2 & \leq & 2 \\ & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 19 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo la sua forma standard con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & + & x_4 & = & 19 \\ & & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Considerando la seguente partizione degli indici delle variabili

$$\mathcal{B} = \{1, 3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{2, 4\}$$

verificare che la matrice

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

è una base del problema LP.

2. Calcolare la matrice inversa $\mathbf{A}_B^{-1}$ e scrivere il dizionario associato.

Un **dizionario del semplice** è un sistema di equazioni lineari in cui le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte in funzione delle variabili fuori base:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_N \\ z = \bar{z} + \bar{\mathbf{c}}' \mathbf{x}_N \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \\ \bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \end{cases}$$

Soluzione

1. Nel problema LP i dati sono:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{A}_B) = -1 \cdot 0 - 1 \cdot 8 = -8 \neq 0 \quad \text{quindi} \quad \text{rank}(\mathbf{A}_B) = 2$$

di conseguenza, la matrice $\mathbf{A}_B$ è invertibile ed è una base del problema LP.

2. Calcoliamo la matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 8 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 & 0 \\ 8 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow -R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 & 0 \\ 0 & 8 & | & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_2 \leftarrow R_2 - 8R_1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{8} \end{array} \right) \quad (R_2 \leftarrow \frac{1}{8}R_2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{8} \end{array} \right) \quad (R_1 \leftarrow R_1 + R_2)$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

e possiamo calcolare:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{35}{8} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = (2 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} = (0 \quad \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} = \frac{19}{4}$$

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = (4 \quad 0) - (2 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (4 \quad 0) - (0 \quad \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (4 \quad 0) - (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}) = (\frac{7}{2} \quad -\frac{1}{4})$$

Il dizionario è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{35}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ z = \frac{19}{4} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o, equivalentemente:

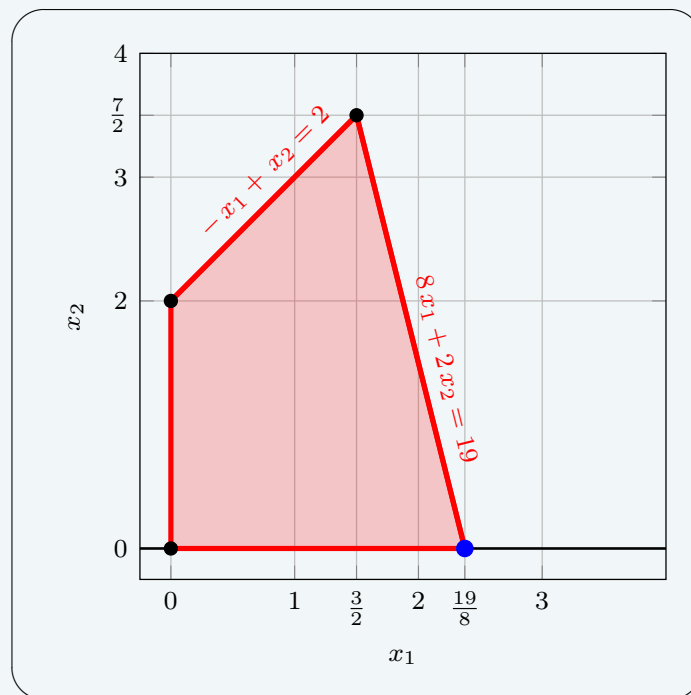
$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8} - \frac{1}{4} x_2 - \frac{1}{8} x_4 \\ x_3 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4} x_2 - \frac{1}{8} x_4 \\ z = \frac{19}{4} + \frac{7}{2} x_2 - \frac{1}{4} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{19}{8}, \quad \bar{x}_3 = \frac{35}{8}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{19}{4}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



In blu la soluzione di base ammissibile associata alla base $\mathcal{B} = \{1, 3\}$, cioè il vertice:

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.2 — Dizionari del semplice (P10)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5 x_1 + 2 x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3 x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2 x_2 \leq 12 \\ & 3 x_1 - 2 x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto otteniamo la sua forma standard con $n + m = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5 x_1 + 2 x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3 x_2 + x_3 = 12 \\ & x_1 + 2 x_2 + x_4 = 12 \\ & 3 x_1 - 2 x_2 + x_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Considerando la seguente partizione degli indici delle variabili

$$\mathcal{B} = \{2, 4, 5\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{1, 3\}$$

verificare che la matrice

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una base del problema LP.

2. Calcolare la matrice inversa $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$ e scrivere il dizionario associato. La soluzione di base associata è ammissibile?

Un **dizionario del simplesso** è un sistema di equazioni lineari in cui le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte in funzione delle variabili fuori base:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ z = \bar{z} + \bar{\mathbf{c}}' \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \\ \bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \end{cases}$$

Soluzione

1. Nel problema LP i dati sono:

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$, abbiamo:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \det(A_{\mathcal{B}}) &= 3 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 0 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-2)) + 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2)) \\ &= 3 \cdot 1 = 3 \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi $\text{rank}(A_{\mathcal{B}}) = 3$. Di conseguenza, la matrice $A_{\mathcal{B}}$ è invertibile ed è una base del problema LP.

2. Calcoliamo la matrice inversa $A_{\mathcal{B}}^{-1}$ con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1)$$

Poiché $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$, abbiamo:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di conseguenza $\mathcal{N} = \{1, 3\}$ e abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = (2 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = (\frac{2}{3} \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 8$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = (5 \ 0) - (2 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (5 \ 0) - (\frac{2}{3} \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (5 \ 0) - (-\frac{2}{3} \ \frac{2}{3}) = (\frac{17}{3} \ -\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Di conseguenza, il dizionario associato è:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ z &= 8 + \begin{pmatrix} \frac{17}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

o, equivalentemente:

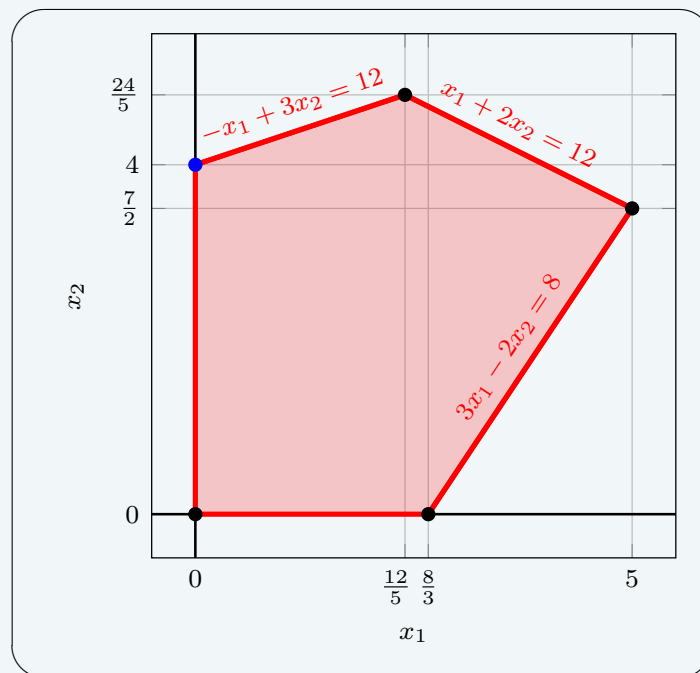
$$\begin{cases} x_2 = 4 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = 4 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_5 = 16 - \frac{7}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \\ z = 8 + \frac{17}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$. Poiché $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$, la soluzione di base associata è ammissibile. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_4 = 4, \quad \bar{x}_5 = 16, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 8$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



In blu la soluzione di base ammissibile associata alla base $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$, cioè il vertice:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.3 — Dizionari del simplesso (P11)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo la sua forma standard con $n + m = 4$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & + & x_3 = -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 & & + & x_4 = 0 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Considerando la seguente partizione degli indici delle variabili

$$\mathcal{B} = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{3, 4\}$$

verificare che la matrice

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è una base del problema LP.

2. Calcolare la matrice inversa $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$ e scrivere il dizionario associato.

Un **dizionario del simplesso** è un sistema di equazioni lineari in cui le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte in funzione delle variabili fuori base:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ z = \bar{z} + \bar{\mathbf{c}}' \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \\ \bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \end{array} \right.$$

Soluzione

1. Nel problema LP i dati sono:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{A}_{\mathcal{B}}) = -1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = 2 \neq 0 \quad \text{quindi} \quad \text{rank}(\mathbf{A}_{\mathcal{B}}) = 2$$

di conseguenza, la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ è invertibile ed è una base del problema LP.

2. Calcoliamo la matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow -R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -1 & 0 \\ 0 & -2 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_2 \leftarrow R_2 - R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow R_1 - R_2)$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e possiamo calcolare:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = (-2 \quad -4) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3 \quad 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = (0 \quad 0) - (-2 \quad -4) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad 0) - (3 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad 0) - (3 \quad 1) = (-3 \quad -1)$$

Il dizionario è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ z = -6 + (-3 \quad -1) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o, equivalentemente:

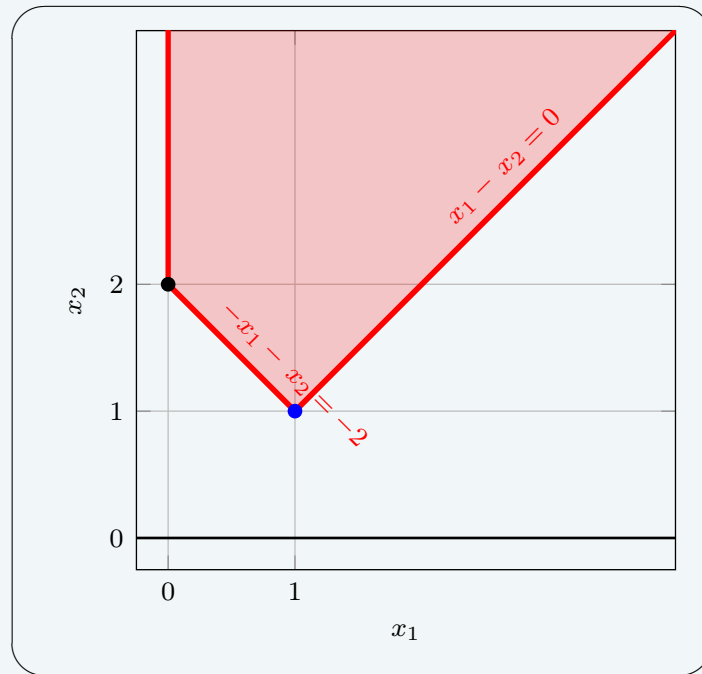
$$\begin{cases} x_1 = 1 & + & \frac{1}{2} x_3 & - & \frac{1}{2} x_4 \\ x_2 = 1 & + & \frac{1}{2} x_3 & + & \frac{1}{2} x_4 \\ z = -6 & - & 3 x_3 & - & x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



In blu la soluzione di base ammissibile associata alla base $\mathcal{B} = \{1, 2\}$, cioè il vertice:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.4 — Dizionari del semplice (P43)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo la sua forma standard con $n + m = 5$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 7 & x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & & + & 2 & x_3 & + & x_4 & & = & 2 \\ & & & & x_2 & + & 2 & x_3 & & & + & x_5 & = & 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Considerando le seguenti partizioni degli indici delle variabili

$$\mathcal{B} = \{2, 3\}, \mathcal{N} = \{1, 4, 5\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \{3, 5\}, \mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$$

verificare che le matrici

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sono basi del problema LP.

2. Calcolare le matrici inverse $A_{\mathcal{B}}^{-1}$ e scrivere i dizionari associati.

Un **dizionario del simplesso** è un sistema di equazioni lineari in cui le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte in funzione delle variabili fuori base:

$$\begin{cases} x_{\mathcal{B}} = \bar{b} - \bar{A} x_{\mathcal{N}} \\ z = \bar{z} + \bar{c}' x_{\mathcal{N}} \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \bar{b} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ \bar{A} = A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} \\ \bar{z} = c'_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ \bar{c}' = c'_{\mathcal{N}} - c'_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} \end{cases}$$

Soluzione

Nel problema LP i dati sono:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Con

$$\mathcal{B} = \{2, 3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$$

abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{A}_B) = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -2 \neq 0$$

quindi $\text{rank}(\mathbf{A}_B) = 2$, di conseguenza la matrice $\mathbf{A}_B$ è invertibile ed è una base del problema LP.

Calcoliamo la matrice inversa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{scambio } R_1 \leftrightarrow R_2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \quad (R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \quad (R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2)$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e possiamo calcolare:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = (2 \quad 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (\frac{3}{2} \quad 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= c'_{\mathcal{N}} - c'_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} = (1 \ 0 \ 0) - (2 \ 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 0 \ 0) - \left(\frac{3}{2} \ 2\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0) - \left(\frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \ 2\right) = \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{3}{2} \ -2\right)\end{aligned}$$

Il dizionario è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ z = 7 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$\begin{cases} x_2 = 0 & + & x_1 & + & x_4 & - & x_5 \\ x_3 = 1 & - & \frac{1}{2} x_1 & - & \frac{1}{2} x_4 \\ z = 7 & - & \frac{1}{2} x_1 & - & \frac{3}{2} x_4 & - & 2 x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 7$$

2. Con

$$\mathcal{B} = \{3, 5\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}x_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} & x_{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} & A_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & A_{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ c_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} & c_{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{A}_B) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2 \neq 0$$

quindi $\text{rank}(\mathbf{A}_B) = 2$, di conseguenza la matrice $\mathbf{A}_B$ è invertibile ed è una base del problema LP.

Calcoliamo la matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e possiamo calcolare:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = (7 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (\frac{7}{2} \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = (1 \ 2 \ 0) - (7 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 2 \ 0) - (\frac{7}{2} \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 0) - (\frac{7}{2} \ 0 \ \frac{7}{2}) = (-\frac{5}{2} \ 2 \ -\frac{7}{2}) \end{aligned}$$

Il dizionario è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ z = 7 + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o, equivalentemente:

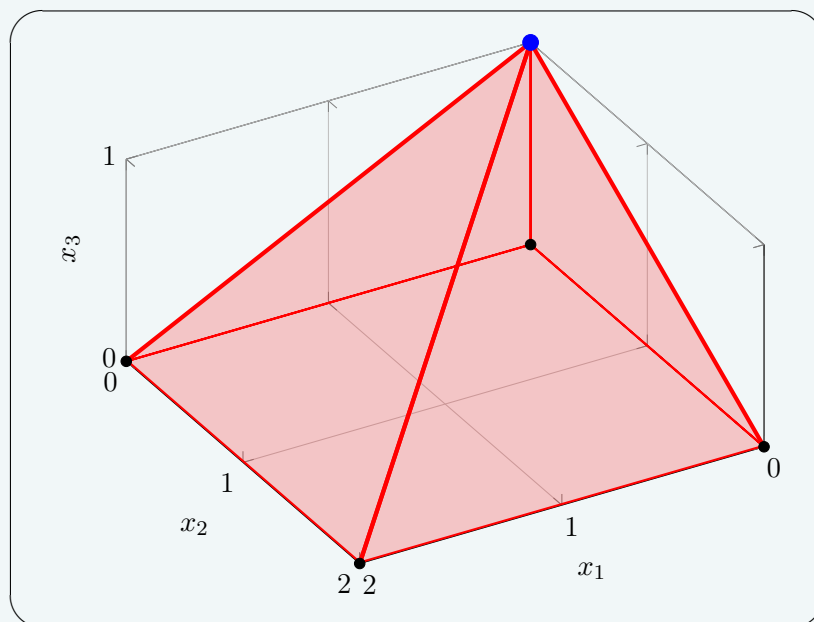
$$\begin{cases} x_3 = 1 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_4 \\ x_5 = 0 + x_1 - x_2 + x_4 \\ z = 7 - \frac{5}{2} x_1 + 2 x_2 - \frac{7}{2} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 1, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore } 7$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



In blu la soluzione di base ammissibile associata a entrambe le basi $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{B} = \{3, 5\}$, cioè il vertice

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

del poliedro: le due basi sono associate alla stessa soluzione di base (con $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ la variabile in base x_2 assume il valore 0, con $\mathcal{B} = \{3, 5\}$ la variabile in base x_5 assume il valore 0).

6.2 Problemi con due variabili

Esercizio 6.5 — Algoritmo del simplesso (P_0)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo la variabile di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 2x_1 - 3x_2 \\ z = 0 + 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 4 \quad \text{di valore } 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 2x_1 - 3x_2 \\ z = 0 + 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 4, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$x_3 = 4 - 2x_1 \quad \underbrace{4 - 2x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \quad x_1 \leq 2$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 2, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 4 - 2x_1 - 3x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Sostituendo nell'altra equazione del dizionario, otteniamo:

$$z = 2 \left(2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right) + 4x_2 = 4 + x_2 - x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ z = 4 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore } 4$$

- **Iterazione 2**

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2 \quad \underbrace{2 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \quad x_2 \leq \frac{4}{3}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\frac{4}{3}$, il valore di x_1 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_1 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3.$$

Sostituendo nell'altra equazione del dizionario, otteniamo:

$$z = 4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \right) - x_3 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

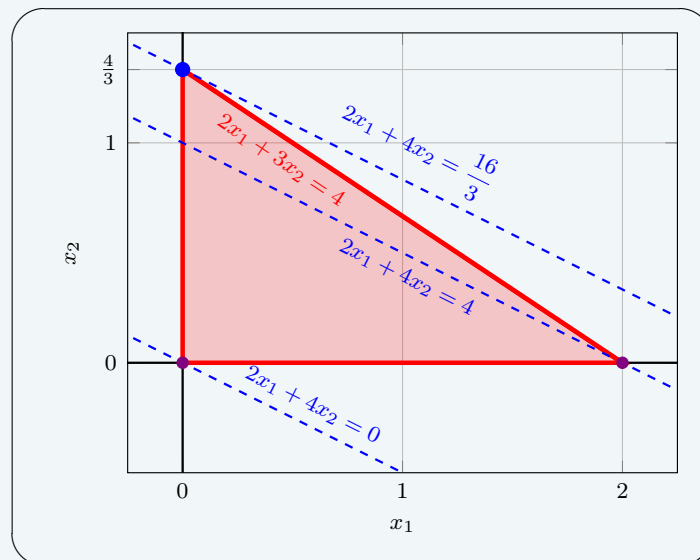
$$\begin{cases} x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ z &= \frac{16}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{16}{3}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.6 — Algoritmo del simplesso ($P1$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 6x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo la variabile di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 16 - 3x_1 - 6x_2 \\ z = 0 + x_1 + 8x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 16 \quad \text{di valore } 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 16 - 3x_1 - 6x_2 \\ z = 0 + x_1 + 8x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 16, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$x_3 = 16 - 3x_1 \quad \underbrace{16 - 3x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \quad x_1 \leq \frac{16}{3}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{16}{3}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 16 - 3x_1 - 6x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{16}{3} - 2x_2 - \frac{1}{3}x_3.$$

Sostituendo nell'altra equazione del dizionario, otteniamo:

$$z = \left(\frac{16}{3} - 2x_2 - \frac{1}{3}x_3 \right) + 8x_2 = \frac{16}{3} + 6x_2 - \frac{1}{3}x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} - 2x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ z = \frac{16}{3} + 6x_2 - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile corrente è:

$$\bar{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

- **Iterazione 2**

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$x_1 = \frac{16}{3} - 2x_2 \quad \underbrace{\frac{16}{3} - 2x_2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \quad x_2 \leq \frac{8}{3}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\frac{8}{3}$, il valore di x_1 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_1 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_1 = \frac{16}{3} - 2x_2 - \frac{1}{3}x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_3.$$

Sostituendo nell'altra equazione del dizionario, otteniamo:

$$z = \frac{16}{3} + 6 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_3 \right) - \frac{1}{3}x_3 = \frac{64}{3} - 3x_1 - \frac{4}{3}x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

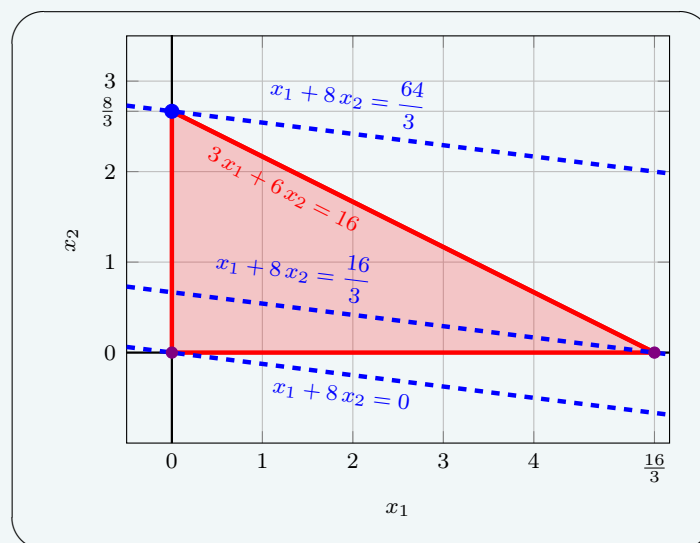
$$\begin{cases} x_2 &= \frac{8}{3} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_3 \\ z &= \frac{64}{3} - 3x_1 - \frac{4}{3}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{64}{3}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.7 — Algoritmo del simplesso (P2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -4x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 35 + 4x_1 - 10x_2 \\ x_4 = 12 - 3x_1 - x_2 \\ z = 0 + x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 35, \quad \bar{x}_4 = 12 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 35 + 4x_1 - 10x_2 \\ x_4 = 12 - 3x_1 - x_2 \\ z = 0 + x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 35, \quad \bar{x}_4 = 12, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 35 + 4x_1 \\ x_4 = 12 - 3x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{35 + 4x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{12 - 3x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -\frac{35}{4} \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 4, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 12 - 3x_1 - x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_3 &= 35 + 4 \left(4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \right) - 10x_2 = 51 - \frac{34}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 \\ z &= 4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 + 3x_2 = 4 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = 51 - \frac{34}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 \\ z = 4 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 4, \quad \bar{x}_3 = 51, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 4$$

• **Iterazione 2**

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{1}{3} x_2 \\ x_3 = 51 - \frac{34}{3} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{4 - \frac{1}{3} x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{51 - \frac{34}{3} x_2 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 12 \\ x_2 \leq \frac{9}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ 12, \frac{9}{2} \right\} = \frac{9}{2}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 51 - \frac{34}{3} x_2 - \frac{4}{3} x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34} x_3 - \frac{4}{34} x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{34} x_3 - \frac{4}{34} x_4 \right) - \frac{1}{3} x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34} x_3 - \frac{5}{17} x_4 \\ z &= 4 + \frac{8}{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{34} x_3 - \frac{4}{34} x_4 \right) - \frac{1}{3} x_4 = 16 - \frac{4}{17} x_3 - \frac{11}{17} x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

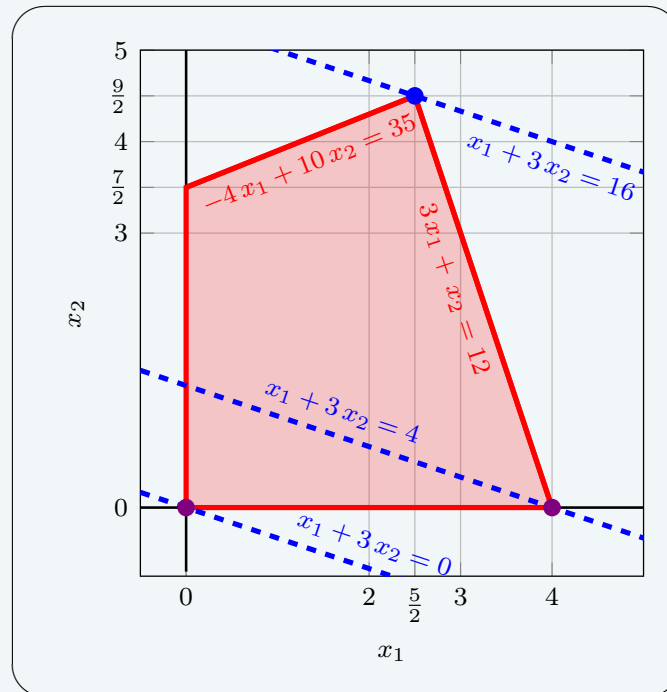
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34} x_3 - \frac{5}{17} x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34} x_3 - \frac{4}{34} x_4 \\ z = 16 - \frac{4}{17} x_3 - \frac{11}{17} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 16$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 16.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.8 — Algoritmo del simplesso ($P3$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2 \leq 2 \\ & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 \leq 19 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_3 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 19 & - & 8 x_1 & - & 2 x_2 \\ z & = & 0 & + & 2 x_1 & + & 4 x_2 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 19 \quad \text{di valore } 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_3 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 19 & - & 8 x_1 & - & 2 x_2 \\ z & = & 0 & + & 2 x_1 & + & 4 x_2 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 19, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + x_1 \\ x_4 = 19 - 8x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{2 + x_1 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \\ \overbrace{19 - 8x_1 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_1 \leq \frac{19}{8} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{19}{8}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 19 - 8x_1 - 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{19}{8} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + \left(\frac{19}{8} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \right) - x_2 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \\ z &= 2 \left(\frac{19}{8} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \right) + 4x_2 = \frac{19}{4} + \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \\ x_3 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \\ z = \frac{19}{4} + \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{19}{8}, \quad \bar{x}_3 = \frac{35}{8}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{19}{4}$$

• Iterazione 2

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8} - \frac{1}{4}x_2 \\ x_3 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4}x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{19}{8} - \frac{1}{4}x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{\frac{35}{8} - \frac{5}{4}x_2 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{19}{2} \\ x_2 \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ \frac{7}{2}, \frac{19}{2} \right\} = \frac{7}{2}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4} x_2 - \frac{1}{8} x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5} x_3 - \frac{1}{10} x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{19}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{7}{2} - \frac{4}{5} x_3 - \frac{1}{10} x_4 \right) - \frac{1}{8} x_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5} x_3 - \frac{1}{10} x_4 \\ z &= \frac{19}{4} + \frac{7}{2} \left(\frac{7}{2} - \frac{4}{5} x_3 - \frac{1}{10} x_4 \right) - \frac{1}{4} x_4 = 17 - \frac{14}{5} x_3 - \frac{3}{5} x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

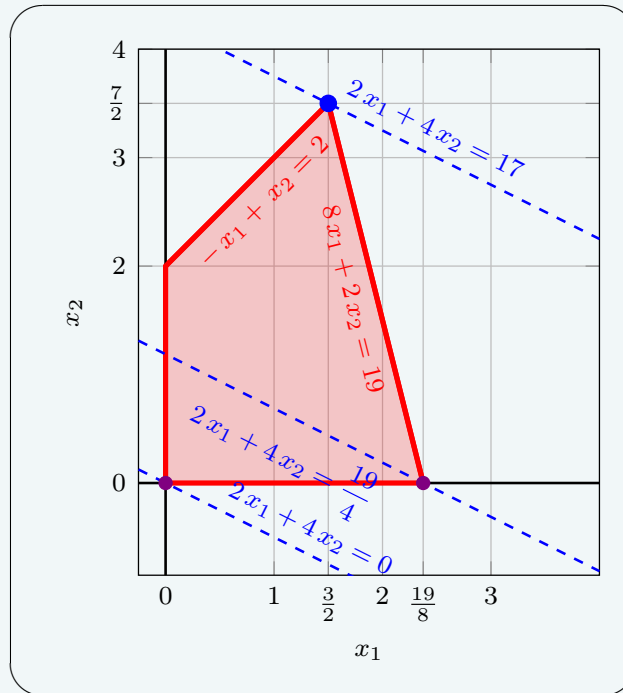
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} & + & \frac{1}{5} x_3 & - & \frac{1}{10} x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2} & - & \frac{4}{5} x_3 & - & \frac{1}{10} x_4 \\ z = 17 & - & \frac{14}{5} x_3 & - & \frac{3}{5} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 17$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 17.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.9 — Algoritmo del simplesso ($P4$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 14 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 32 - x_1 - 8x_2 \\ z = 0 + 5x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 14, \bar{x}_4 = 32 \quad \text{di valore } 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 14 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 32 - x_1 - 8x_2 \\ z = 0 + 5x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 14, \bar{x}_4 = 32, \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 14 - 2x_1 \\ x_4 = 32 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{14 - 2x_1 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \\ \overbrace{32 - x_1 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 7 \\ x_1 \leq 32 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 7, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 14 - 2x_1 - x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 7 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_4 &= 32 - \left(7 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right) - 8x_2 = 25 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ z &= 5 \left(7 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right) + 3x_2 = 35 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 25 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ z = 35 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 7, \quad \bar{x}_4 = 25, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 35$$

• Iterazione 2

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_4 = 25 - \frac{15}{2}x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{7 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{25 - \frac{15}{2}x_2 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq \frac{10}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ 14, \frac{10}{3} \right\} = \frac{10}{3}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 25 - \frac{15}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15} x_3 - \frac{2}{15} x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{15} x_3 - \frac{2}{15} x_4 \right) - \frac{1}{2} x_3 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15} x_3 + \frac{1}{15} x_4 \\ z &= 35 + \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{15} x_3 - \frac{2}{15} x_4 \right) - \frac{5}{2} x_3 = \frac{110}{3} - \frac{37}{15} x_3 - \frac{1}{15} x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

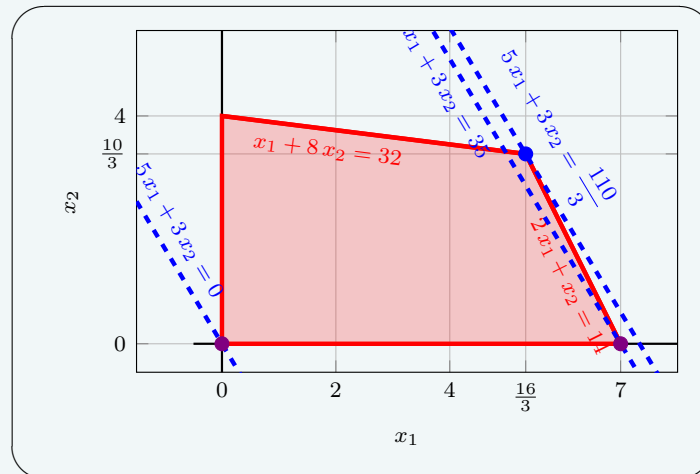
$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} & - & \frac{8}{15} x_3 & + & \frac{1}{15} x_4 \\ x_2 = \frac{10}{3} & + & \frac{1}{15} x_3 & - & \frac{2}{15} x_4 \\ z = \frac{110}{3} & - & \frac{37}{15} x_3 & - & \frac{1}{15} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{110}{3}$.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Tratteggiate in blu, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.10 — Algoritmo del simplesso ($P5$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 77 - 6x_1 - 21x_2 \\ x_4 = 36 - 8x_1 - 3x_2 \\ z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 77, \bar{x}_4 = 36 \quad \text{di valore } 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 77 - 6x_1 - 21x_2 \\ x_4 = 36 - 8x_1 - 3x_2 \\ z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 77, \bar{x}_4 = 36, \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 77 - 6x_1 \\ x_4 = 36 - 8x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{77 - 6x_1}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{36 - 8x_1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{77}{6} \\ x_1 \leq \frac{9}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{9}{2}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 36 - 8x_1 - 3x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = 77 - 6 \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \right) - 21x_2 = 50 - \frac{75}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_4$$

$$z = 2 \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \right) + 3x_2 = 9 + \frac{9}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_4 \\ x_3 &= 50 - \frac{75}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_4 \\ z &= 9 + \frac{9}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_3 = 50, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 9$$

- Iterazione 2**

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_2 \\ x_3 &= 50 - \frac{75}{4}x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{50 - \frac{75}{4}x_2 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 &\leq 12 \\ x_2 &\leq \frac{8}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ 12, \frac{8}{3} \right\} = \frac{8}{3}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 50 - \frac{75}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}x_3 + \frac{1}{25}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{8} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{75}x_3 + \frac{1}{25}x_4 \right) - \frac{1}{8}x_4 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}x_3 - \frac{7}{50}x_4$$

$$z = 9 + \frac{9}{4} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{75}x_3 + \frac{1}{25}x_4 \right) - \frac{1}{4}x_4 = 15 - \frac{3}{25}x_3 - \frac{4}{25}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

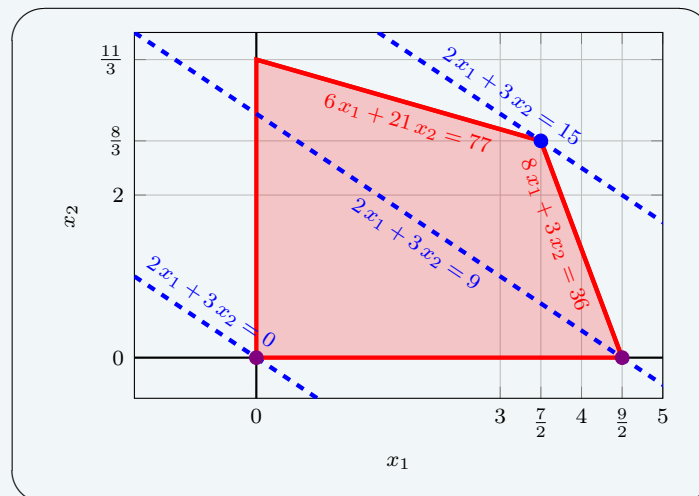
$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}x_3 - \frac{7}{50}x_4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}x_3 + \frac{1}{25}x_4 \\ z = 15 - \frac{3}{25}x_3 - \frac{4}{25}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 15$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 15.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Tratteggiate in blu, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.11 — Algoritmo del simplesso (P6)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & & x_1 & + & x_2 & \\ \text{soggetto a} & 4 & x_1 & + & 15 & x_2 \leq 70 \\ & 12 & x_1 & + & 3 & x_2 \leq 52 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_3 & = & 70 & - & 4x_1 & - & 15x_2 \\ x_4 & = & 52 & - & 12x_1 & - & 3x_2 \\ z & = & 0 & + & x_1 & + & x_2 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 70, \quad \bar{x}_4 = 52 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 70 - 4x_1 - 15x_2 \\ x_4 = 52 - 12x_1 - 3x_2 \\ z = 0 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 70, \quad \bar{x}_4 = 52, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 70 - 4x_1 \\ x_4 = 52 - 12x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{70 - 4x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{52 - 12x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{35}{2} \\ x_1 \leq \frac{13}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \left\{ \frac{35}{2}, \frac{13}{3} \right\} = \frac{13}{3}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

We have:

$$x_4 = 52 - 12x_1 - 3x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{13}{3} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{12}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_3 &= 70 - 4 \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{12}x_4 \right) - 15x_2 = \frac{158}{3} - 14x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ z &= \left(\frac{13}{3} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{12}x_4 \right) + x_2 = \frac{13}{3} + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{12}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{3} - \frac{1}{4} x_2 - \frac{1}{12} x_4 \\ x_3 = \frac{158}{3} - 14 x_2 + \frac{1}{3} x_4 \\ z = \frac{13}{3} + \frac{3}{4} x_2 - \frac{1}{12} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{13}{3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{158}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{13}{3}$$

• **Iterazione 2**

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{3} - \frac{1}{4} x_2 \\ x_3 = \frac{158}{3} - 14 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{13}{3} - \frac{1}{4} x_2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{158}{3} - 14 x_2 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{52}{3} \\ x_2 \leq \frac{79}{21} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ \frac{52}{3}, \frac{79}{21} \right\} = \frac{79}{21}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = \frac{158}{3} - 14 x_2 + \frac{1}{3} x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{79}{21} - \frac{1}{14} x_3 + \frac{1}{42} x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{13}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{79}{21} - \frac{1}{14} x_3 + \frac{1}{42} x_4 \right) - \frac{1}{12} x_4 = \frac{95}{28} + \frac{1}{56} x_3 - \frac{5}{56} x_4 \\ z &= \frac{13}{3} + \frac{3}{4} \left(\frac{79}{21} - \frac{1}{14} x_3 + \frac{1}{42} x_4 \right) - \frac{1}{12} x_4 = \frac{601}{84} - \frac{3}{56} x_3 - \frac{11}{168} x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

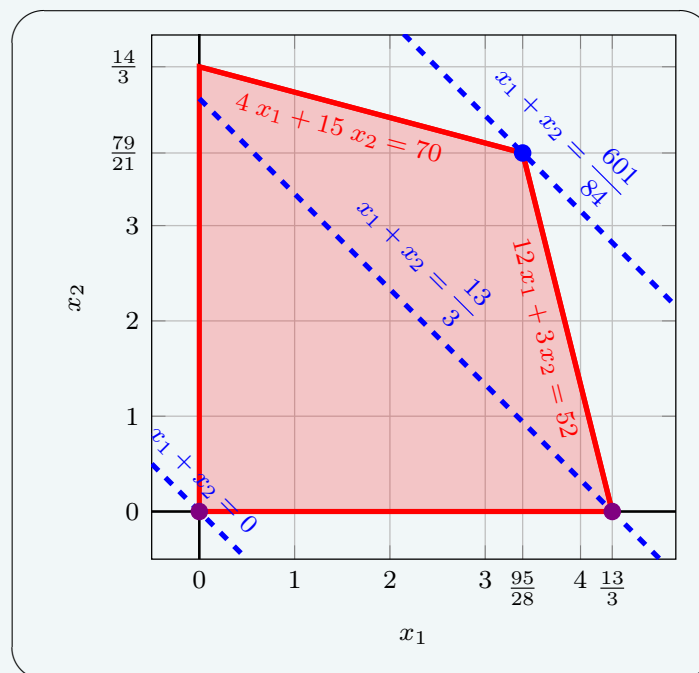
$$\begin{cases} x_1 = \frac{95}{28} + \frac{1}{56} x_3 - \frac{5}{56} x_4 \\ x_2 = \frac{79}{21} - \frac{1}{14} x_3 + \frac{1}{42} x_4 \\ z = \frac{601}{84} - \frac{3}{56} x_3 - \frac{11}{168} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{79}{21}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{601}{84}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{79}{21}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{601}{84}$.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Trattegiate in blu, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.12 — Algoritmo del simplesso (P7)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 3 & x_1 & + & & x_2 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & 4 & x_2 \leq 12 \\ & & 2 & x_1 & + & x_2 \leq 5 \\ & & & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_3 & = & 12 - x_1 - 4 x_2 \\ x_4 & = & 5 - 2 x_1 - x_2 \\ z & = & 0 + 3 x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 12, \quad \bar{x}_4 = 5 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_3 & = & 12 - x_1 - 4 x_2 \\ x_4 & = & 5 - 2 x_1 - x_2 \\ z & = & 0 + 3 x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 12 \quad \bar{x}_4 = 5, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 12 - x_1 \\ x_4 = 5 - 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{12 - x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{5 - 2x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 12 \\ x_1 \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{5}{2}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = 12 - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \right) - 4x_2 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = 3 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \right) + x_2 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

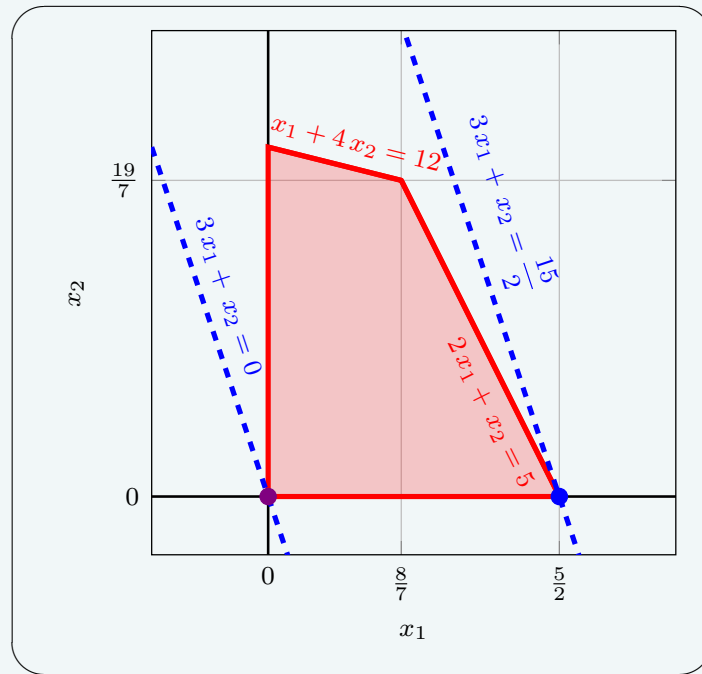
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{19}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{15}{2}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{15}{2}$.

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Tratteggiate in blu, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei due vertici.

Esercizio 6.13 — Algoritmo del simplesso (P8)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 2 & x_2 \leq 2 \\ & & x_1 & + & & x_2 \leq 3 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_3 & = & 2 & + & x_1 & - & 2x_2 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 \\ z & = & 0 & + & x_1 & + & 2x_2 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 3 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_3 & = & 2 & + & x_1 & - & 2x_2 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & - & x_2 \\ z & = & 0 & + & x_1 & + & 2x_2 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_4 = 3, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + x_1 \\ x_4 = 3 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{2 + x_1 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \\ \overbrace{3 - x_1 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 3, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

We have:

$$x_4 = 3 - x_1 - x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 3 - x_2 - x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = 2 + (3 - x_2 - x_4) - 2x_2 = 5 - 3x_2 - x_4$$

$$z = (3 - x_2 - x_4) + 2x_2 = 3 + x_2 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_4 \\ x_3 = 5 - 3x_2 - x_4 \\ z = 3 + x_2 - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 3$$

• Iterazione 2

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_3 = 5 - 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{3 - x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{5 - 3x_2 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ 3, \frac{5}{3} \right\} = \frac{5}{3}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 5 - 3x_2 - x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \right) - x_4 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ z &= 3 + \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \right) - x_4 = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

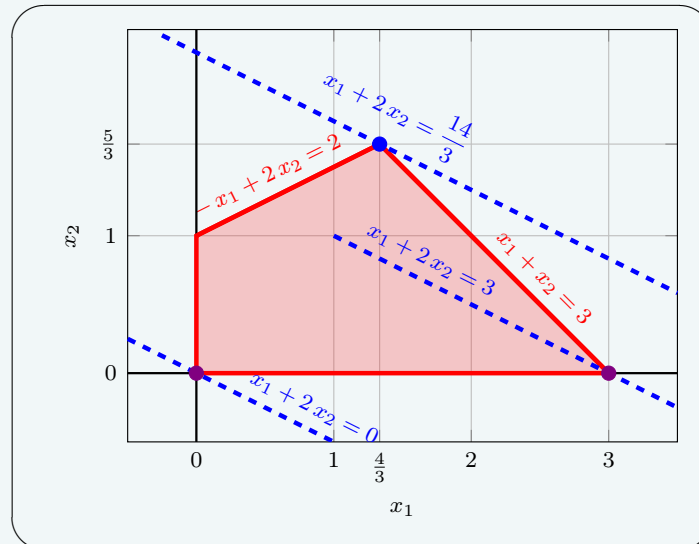
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ z = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{14}{3}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{14}{3}$.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Tratteggiate in blu, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.14 — Algoritmo del simplesso (P9)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 39 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 39 - 6x_1 - 4x_2 \\ z = 0 + 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 1, \quad \bar{x}_4 = 39 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 39 - 6x_1 - 4x_2 \\ z = 0 + 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 1, \quad \bar{x}_4 = 39, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 \\ x_4 = 39 - 6x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{1 + x_1 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{39 - 6x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -1 \\ x_1 \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{13}{2}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

We have:

$$x_4 = 39 - 6x_1 - 4x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{13}{2} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = 1 + \left(\frac{13}{2} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4 \right) - x_2 = \frac{15}{2} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4$$

$$z = 2 \left(\frac{13}{2} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4 \right) + x_2 = 13 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

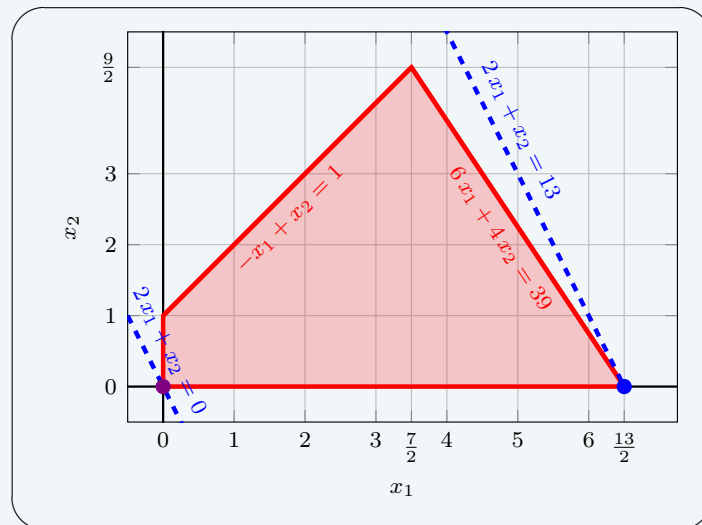
$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{2} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_3 = \frac{15}{2} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_4 \\ z = 13 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{15}{2}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 13$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 13.

In viola il primo vertice esplorato dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Tratteggiate in blu, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei due vertici.

Esercizio 6.15 — Algoritmo del simplesso (P10)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_3 & = & 12 + x_1 - 3x_2 \\ x_4 & = & 12 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 & = & 8 - 3x_1 + 2x_2 \\ z & = & 0 + 5x_1 + 2x_2 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 12, \quad \bar{x}_4 = 12, \quad \bar{x}_5 = 8 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 12 + x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 12 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \\ z = 0 + 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 12, \quad \bar{x}_4 = 12, \quad \bar{x}_5 = 8, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

- Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 12 + x_1 \\ x_4 = 12 - x_1 \\ x_5 = 8 - 3x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{12 + x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{12 - x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{8 - 3x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -12 \\ x_1 \leq 12 \\ x_1 \leq \frac{8}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min\left\{12, \frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_3 &= 12 + \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5\right) - 3x_2 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 &= 12 - \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5\right) - 2x_2 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5 \end{aligned}$$

$$z = 5 \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \right) + 2 x_2 = \frac{40}{3} + \frac{16}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_5 \\ z = \frac{40}{3} + \frac{16}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{44}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{28}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{40}{3}$$

• **Iterazione 2**

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 \\ x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 \\ x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{\frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \\ \overbrace{\frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \geq -4 \\ x_2 \leq \frac{44}{7} \\ x_2 \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ \frac{44}{7}, \frac{7}{2} \right\} = \frac{7}{2}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_5 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \right) - \frac{1}{3} x_5 = 5 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_5$$

$$x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \right) - \frac{1}{3} x_5 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8} x_4 - \frac{5}{8} x_5$$

$$z = \frac{40}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \right) - \frac{5}{3} x_5 = 32 - 2 x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

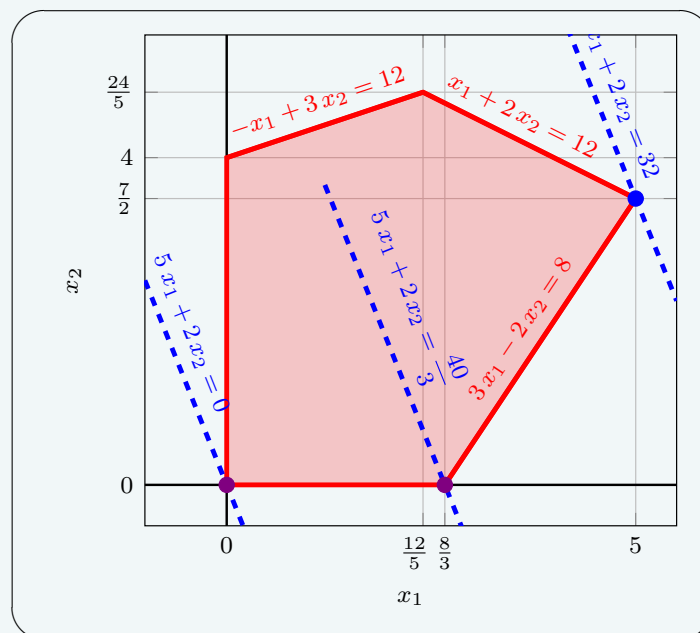
$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 = 5 & - & \frac{1}{4} x_4 & - & \frac{1}{4} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} & - & \frac{3}{8} x_4 & + & \frac{1}{8} x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} & + & \frac{7}{8} x_4 & - & \frac{5}{8} x_5 \\ z = 32 & - & 2 x_4 & - & x_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 32$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 32.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del semplice (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Esercizio 6.16 — Algoritmo del semplice con una diversa colonna pivot (P10)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_3 & = & 12 + x_1 - 3x_2 \\ x_4 & = & 12 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 & = & 8 - 3x_1 + 2x_2 \\ z & = & 0 + 5x_1 + 2x_2 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 12, \quad \bar{x}_4 = 12, \quad \bar{x}_5 = 8 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo del semplice per trovare una soluzione ottima di questo problema LP, scegliendo x_2 come colonna pivot alla prima iterazione.
2. Confrontare il numero di iterazioni con l'esecuzione dell'algoritmo del semplice che sceglie x_1 come colonna pivot alla prima iterazione (esercizio *Algoritmo del semplice (P10)*).

Soluzione

1. • Inizializzazione

Consideriamo il dizionario:

$$\begin{cases} x_3 = 12 + x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 12 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \\ z = 0 + 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 12, \quad \bar{x}_4 = 12, \quad \bar{x}_5 = 8, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

• Iterazione 1

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 (la colonna pivot richiesta dalla domanda), possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 12 - 3x_2 \\ x_4 = 12 - 2x_2 \\ x_5 = 8 + 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{12 - 3x_2 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{12 - 2x_2 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{8 + 2x_2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq -4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min\{4, 6\} = 4$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 12 + x_1 - 3x_2 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 4 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_4 &= 12 - x_1 - 2x_2 = 12 - x_1 - 2\left(4 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 4 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_5 &= 8 - 3x_1 + 2x_2 = 8 - 3x_1 + 2\left(4 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 16 - \frac{7}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \\ z &= 5x_1 + 2x_2 = 5x_1 + 2\left(4 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 8 + \frac{17}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \end{aligned}$$

• **Iterazione 2**

Consideriamo il dizionario:

$$\begin{cases} x_2 = 4 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 = 4 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_5 = 16 - \frac{7}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \\ z = 8 + \frac{17}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_4 = 4, \quad \bar{x}_5 = 16, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 8$$

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_2 = 4 + \frac{1}{3}x_1 \\ x_4 = 4 - \frac{5}{3}x_1 \\ x_5 = 16 - \frac{7}{3}x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{4 + \frac{1}{3}x_1 \geq 0}^{x_2 \geq 0} \\ \overbrace{4 - \frac{5}{3}x_1 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \\ \overbrace{16 - \frac{7}{3}x_1 \geq 0}^{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -12 \\ x_1 \leq \frac{12}{5} \\ x_1 \leq \frac{48}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \left\{ \frac{12}{5}, \frac{48}{7} \right\} = \frac{12}{5}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 4 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 + \frac{1}{3} \left(\frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \right) - \frac{1}{3}x_3 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_5 &= 16 - \frac{7}{3} \left(\frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \right) - \frac{2}{3}x_3 = \frac{52}{5} - \frac{8}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4 \\ z &= 8 + \frac{17}{3} \left(\frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \right) - \frac{2}{3}x_3 = \frac{108}{5} + \frac{8}{5}x_3 - \frac{17}{5}x_4 \end{aligned}$$

• **Iterazione 3**

Consideriamo il dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_5 = \frac{52}{5} - \frac{8}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4 \\ z = \frac{108}{5} + \frac{8}{5}x_3 - \frac{17}{5}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{12}{5}, \quad \bar{x}_2 = \frac{24}{5}, \quad \bar{x}_5 = \frac{52}{5}, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{108}{5}$$

Se aumentiamo il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_3 \\ x_5 = \frac{52}{5} - \frac{8}{5}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{12}{5} + \frac{2}{5}x_3 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_3 \geq 0 \\ \underbrace{\frac{52}{5} - \frac{8}{5}x_3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \geq -6 \\ x_3 \leq 24 \\ x_3 \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a $\min \left\{ 24, \frac{13}{2} \right\} = \frac{13}{2}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = \frac{52}{5} - \frac{8}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{13}{2} + \frac{7}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \right) - \frac{3}{5}x_4 = 5 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \\ x_2 &= \frac{24}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{13}{2} + \frac{7}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \right) - \frac{1}{5}x_4 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 \end{aligned}$$

$$z = \frac{108}{5} + \frac{8}{5} \left(\frac{13}{2} + \frac{7}{8} x_4 - \frac{5}{8} x_5 \right) - \frac{17}{5} x_4 = 32 - 2x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima e questo è il dizionario ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 = 5 & - & \frac{1}{4} x_4 & - & \frac{1}{4} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} & - & \frac{3}{8} x_4 & + & \frac{1}{8} x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} & + & \frac{7}{8} x_4 & - & \frac{5}{8} x_5 \\ z = 32 & - & 2 x_4 & - & x_5 \end{array} \right.$$

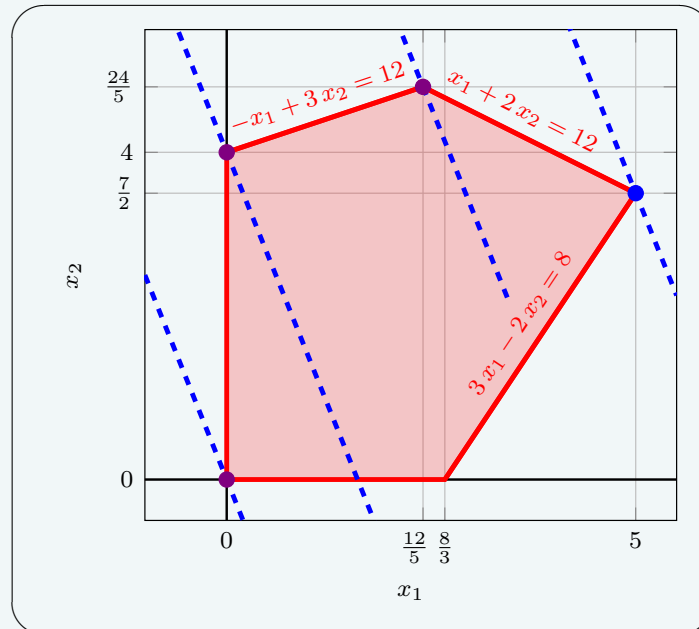
dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$. La soluzione ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 32$$

2. L'esecuzione che sceglie x_2 come prima colonna pivot effettua tre operazioni di pivot e visita i vertici $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$ prima di raggiungere quello ottimo. L'esecuzione che sceglie x_1 come prima colonna pivot effettua solo due operazioni di pivot e visita i vertici $(0, 0)$ e $(\frac{8}{3}, 0)$. Entrambe le esecuzioni raggiungono la stessa soluzione ottima di valore 32: la scelta della colonna pivot cambia il cammino seguito sul poliedro, non il valore ottimo.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 32.

In viola il primo, il secondo e il terzo vertice esplorati dall'esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello $5x_1 + 2x_2 = 0$, $5x_1 + 2x_2 = 8$, $5x_1 + 2x_2 = \frac{108}{5}$ e $5x_1 + 2x_2 = 32$ della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei quattro vertici.

Esercizio 6.17 — Algoritmo del simplesso (B1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 25 x_1 + 16 x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 50 x_1 + 31 x_2 \leq 250 \\ & -3 x_1 + 2 x_2 \leq 4 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 250 - 50 x_1 - 31 x_2 \\ x_4 = 4 + 3 x_1 - 2 x_2 \\ z = 0 + 25 x_1 + 16 x_2 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 250, \quad \bar{x}_4 = 4 \quad \text{di valore } 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 250 - 50 x_1 - 31 x_2 \\ x_4 = 4 + 3 x_1 - 2 x_2 \\ z = 0 + 25 x_1 + 16 x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 250, \quad \bar{x}_4 = 4, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \text{di valore } 0$$

- Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 250 - 50 x_1 \\ x_4 = 4 + 3 x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{250 - 50 x_1 \geq 0}^{x_3 \geq 0} \\ \overbrace{4 + 3 x_1 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_1 \geq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 5, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 250 - 50 x_1 - 31 x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 5 - \frac{31}{50} x_2 - \frac{1}{50} x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 + 3 \left(5 - \frac{31}{50} x_2 - \frac{1}{50} x_3 \right) - 2 x_2 = 19 - \frac{193}{50} x_2 - \frac{3}{50} x_3 \\ z &= 25 \left(5 - \frac{31}{50} x_2 - \frac{1}{50} x_3 \right) + 16 x_2 = 125 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{31}{50} x_2 - \frac{1}{50} x_3 \\ x_4 = 19 - \frac{193}{50} x_2 - \frac{3}{50} x_3 \\ z = 125 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_4 = 19, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 125$$

• Iterazione 2

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{31}{50} x_2 \\ x_4 = 19 - \frac{193}{50} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{5 - \frac{31}{50} x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{19 - \frac{193}{50} x_2 \geq 0}^{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{250}{31} \\ x_2 \leq \frac{950}{193} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ \frac{250}{31}, \frac{950}{193} \right\} = \frac{950}{193}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 19 - \frac{193}{50} x_2 - \frac{3}{50} x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{950}{193} - \frac{3}{193} x_3 - \frac{50}{193} x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - \frac{31}{50} \left(\frac{950}{193} - \frac{3}{193} x_3 - \frac{50}{193} x_4 \right) - \frac{1}{50} x_3 = \frac{376}{193} - \frac{2}{193} x_3 + \frac{31}{193} x_4 \\ z &= 125 + \frac{1}{2} \left(\frac{950}{193} - \frac{3}{193} x_3 - \frac{50}{193} x_4 \right) - \frac{1}{2} x_3 = \frac{24600}{193} - \frac{98}{193} x_3 - \frac{25}{193} x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

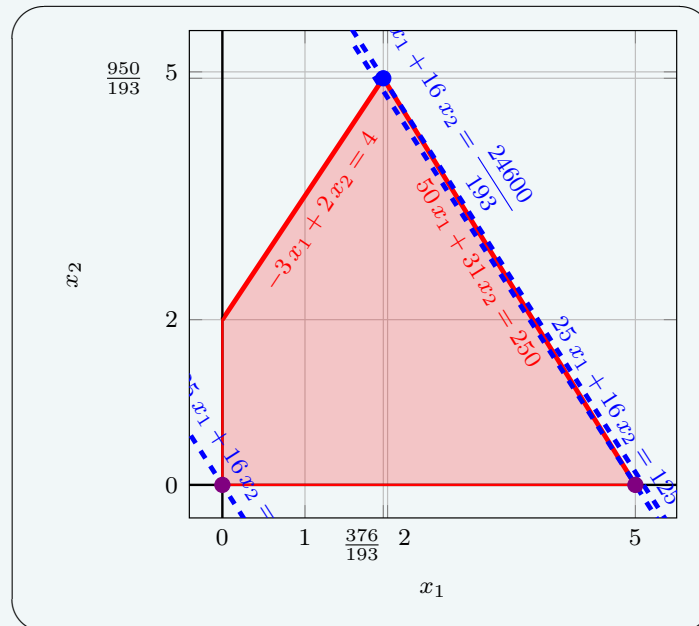
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{376}{193} - \frac{2}{193} x_3 + \frac{31}{193} x_4 \\ x_2 = \frac{950}{193} - \frac{3}{193} x_3 - \frac{50}{193} x_4 \\ z = \frac{24600}{193} - \frac{98}{193} x_3 - \frac{25}{193} x_4 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{376}{193}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{950}{193}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{24600}{193}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{376}{193}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{950}{193}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{24600}{193}$.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

6.3 Problemi con tre variabili

Esercizio 6.18 — Algoritmo del simplesso (*P41*)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2 & x_1 & + & x_2 & + & 3 & x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & & & & x_2 & & \leq & 2 \\ & & & & & x_3 & \leq & 3 \\ & 3 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\ & x_1, & & x_2, & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} x_4 = 4 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\ x_5 = 2 & & & - & x_2 & & \\ x_6 = 3 & & & & & - & x_3 \\ x_7 = 6 & - & 3 & x_1 & & - & x_3 \\ z = 0 & + & 2 & x_1 & + & x_2 & + & 3 & x_3 \end{array} \right.$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 4, \quad \bar{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_6 = 3, \quad \bar{x}_7 = 6 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_4 = 4 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\ x_5 = 2 & & & - & x_2 & & \\ x_6 = 3 & & & & & - & x_3 \\ x_7 = 6 & - & 3 x_1 & & & - & x_3 \\ z = 0 & + & 2 x_1 & + & x_2 & + & 3 x_3 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 4, \quad \bar{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_6 = 3, \quad \bar{x}_7 = 6, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = 4 - x_1 \\ x_7 = 6 - 3 x_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{4 - x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{6 - 3 x_1 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \{4, 2\} = 2$, il valore di x_7 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_7 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_7 = 6 - 3 x_1 - x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - \frac{1}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_7.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - \left(2 - \frac{1}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_7 \right) - x_2 - x_3 = 2 - x_2 - \frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_7 \\ z &= 2 \left(2 - \frac{1}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_7 \right) + x_2 + 3 x_3 = 4 + x_2 + \frac{7}{3} x_3 - \frac{2}{3} x_7 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 & & - & \frac{1}{3} x_3 & - & \frac{1}{3} x_7 \\ x_4 = 2 & - & x_2 & - & \frac{2}{3} x_3 & + & \frac{1}{3} x_7 \\ x_5 = 2 & - & x_2 & & & & \\ x_6 = 3 & & & - & x_3 & & \\ z = 4 & + & x_2 & + & \frac{7}{3} x_3 & - & \frac{2}{3} x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 7\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_4 = 2, \quad \bar{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_6 = 3, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 4$$

• Iterazione 2

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 2 - x_2 \\ x_5 = 2 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - x_2 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{2 - x_2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \{2, 2\} = 2$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 2 - x_2 - \frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_7 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 2 - \frac{2}{3} x_3 - x_4 + \frac{1}{3} x_7.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = 2 - \left(2 - \frac{2}{3} x_3 - x_4 + \frac{1}{3} x_7 \right) = \frac{2}{3} x_3 + x_4 - \frac{1}{3} x_7$$

$$z = 4 + \left(2 - \frac{2}{3} x_3 - x_4 + \frac{1}{3} x_7 \right) + \frac{7}{3} x_3 - \frac{2}{3} x_7 = 6 + \frac{5}{3} x_3 - x_4 - \frac{1}{3} x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_7 \\ x_2 = 2 - \frac{2}{3} x_3 - x_4 + \frac{1}{3} x_7 \\ x_5 = 0 + \frac{2}{3} x_3 + x_4 - \frac{1}{3} x_7 \\ x_6 = 3 - x_3 \\ z = 6 + \frac{5}{3} x_3 - x_4 - \frac{1}{3} x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 7\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 2, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 3, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 6$$

• Iterazione 3

Se aumentiamo il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3} x_3 \\ x_2 = 2 - \frac{2}{3} x_3 \\ x_5 = 0 + \frac{2}{3} x_3 \\ x_6 = 3 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - \frac{1}{3} x_3 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 - \frac{2}{3} x_3 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\ \underbrace{0 + \frac{2}{3} x_3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{3 - x_3 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \leq 6 \\ x_3 \leq 3 \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a $\min \{6, 3, 3\} = 3$, il valore di x_2 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_2 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3} x_3 - x_4 + \frac{1}{3} x_7 \quad \text{quindi} \quad x_3 = 3 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_7.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{1}{3} \left(3 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_7 \right) - \frac{1}{3} x_7 = 1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_7 \\ x_5 &= \frac{2}{3} \left(3 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_7 \right) + x_4 - \frac{1}{3} x_7 = 2 - x_2 \end{aligned}$$

$$x_6 = 3 - \left(3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_7\right) = \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_7$$

$$z = 6 + \frac{5}{3} \left(3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_7\right) - x_4 - \frac{1}{3}x_7 = 11 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_3 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_7 \\ x_5 = 2 - x_2 \\ x_6 = 0 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_7 \\ z = 11 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_7 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 7\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_3 = 3, \quad \bar{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 11$$

• Iterazione 4

Se aumentiamo il valore della variabile x_7 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_7 \\ x_6 = 0 - \frac{1}{2}x_7 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{1 - \frac{1}{2}x_7 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{3 + \frac{1}{2}x_7 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{0 - \frac{1}{2}x_7 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_7 \leq 2 \\ x_7 \geq -6 \\ x_7 \leq 0 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_7 fino a $\min\{2, 0\} = 0$, il valore di x_6 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_7 entra in base e di conseguenza x_6 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_6 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_7 \quad \text{quindi} \quad x_7 = 3x_2 + 3x_4 - 2x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} (3 x_2 + 3 x_4 - 2 x_6) = 1 - x_2 - x_4 + x_6$$

$$x_3 = 3 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_4 + \frac{1}{2} (3 x_2 + 3 x_4 - 2 x_6) = 3 - x_6$$

$$z = 11 - \frac{5}{2} x_2 - \frac{7}{2} x_4 + \frac{1}{2} (3 x_2 + 3 x_4 - 2 x_6) = 11 - x_2 - 2 x_4 - x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

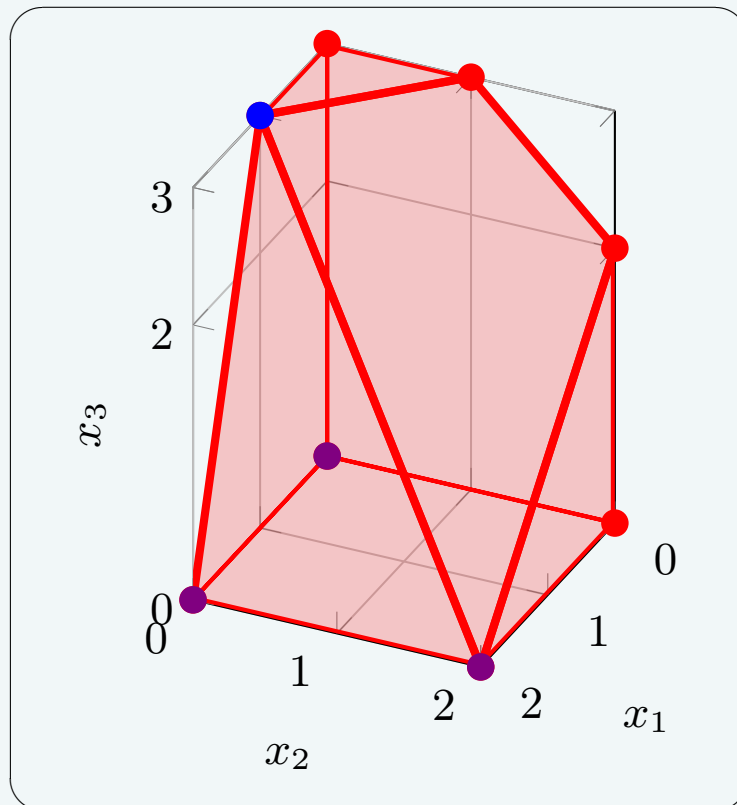
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \quad - \quad x_2 \quad - \quad x_4 \quad + \quad x_6 \\ x_3 = 3 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \quad x_6 \\ x_5 = 2 \quad - \quad x_2 \\ x_7 = 0 \quad + \quad 3 x_2 \quad + \quad 3 x_4 \quad - \quad 2 x_6 \\ z = 11 \quad - \quad x_2 \quad - \quad 2 x_4 \quad - \quad x_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 6\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 3, \quad \tilde{x}_5 = 2, \quad \tilde{x}_7 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 11$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 3$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 11.

In viola il primo e il secondo vertice esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Define the polyhedron using inequalities (Hyperplane Representation)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (4, -1, -1, -1), # (-1, -1, -1) x + 4 >= 0
    (2, 0, -1, 0), # (0, -1, 0) x + 2 >= 0
    (3, 0, 0, -1), # (0, 0, -1) x + 3 >= 0
    (6, -3, 0, -1), # (-3, 0, -1) x + 6 >= 0
    (0, 1, 0, 0), # (1, 0, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 1, 0), # (0, 1, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 0, 1) # (0, 0, 1) x + 0 >= 0
])

# Display the inequalities of the polyhedron
p.Hrepresentation()

# Display the extreme points and extreme rays of the polyhedron
p.Vrepresentation()

# Plot the polyhedron (3D)
p.plot()
```

Esercizio 6.19 — Algoritmo del simplesso (*P42*)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3 \\ x_6 = 7 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ z = 0 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 4, \bar{x}_5 = 5, \bar{x}_6 = 7 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 4 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2 x_3 \\ x_5 = 5 & - & 2 x_1 & & & - & 3 x_3 \\ x_6 = 7 & - & 2 x_1 & - & x_2 & - & 3 x_3 \\ z = 0 & + & 3 x_1 & + & 2 x_2 & + & 4 x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 4, \bar{x}_5 = 5, \bar{x}_6 = 7, \quad \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 4 - x_1 \\ x_5 = 5 - 2 x_1 \\ x_6 = 7 - 2 x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{4 - x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{5 - 2 x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{7 - 2 x_1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq \frac{5}{2} \\ x_1 \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \left\{ 4, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right\} = \frac{5}{2}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

We have:

$$x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_4 = 4 - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \right) - x_2 - 2x_3 = \frac{3}{2} - x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$$x_6 = 7 - 2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \right) - x_2 - 3x_3 = 2 - x_2 + x_5$$

$$z = 3 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \right) + 2x_2 + 4x_3 = \frac{15}{2} + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} & & - \frac{3}{2}x_3 & - \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = \frac{3}{2} & - & x_2 & - \frac{1}{2}x_3 & + \frac{1}{2}x_5 \\ x_6 = 2 & - & x_2 & & + x_5 \\ z = \frac{15}{2} & + & 2x_2 & - \frac{1}{2}x_3 & - \frac{3}{2}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_4 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_6 = 2, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{15}{2}$$

• Iterazione 2

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{3}{2} - x_2 \\ x_6 = 2 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{2} - x_2 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ 2 - x_2 \geq 0 \\ x_6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{3}{2} \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\frac{3}{2}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = \frac{3}{2} - x_2 - \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_5 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_3 - x_4 + \frac{1}{2} x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_6 = 2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_3 - x_4 + \frac{1}{2} x_5 \right) + x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_3 + x_4 + \frac{1}{2} x_5$$

$$z = \frac{15}{2} + 2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_3 - x_4 + \frac{1}{2} x_5 \right) - \frac{1}{2} x_3 - \frac{3}{2} x_5 = \frac{21}{2} - \frac{3}{2} x_3 - 2 x_4 - \frac{1}{2} x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

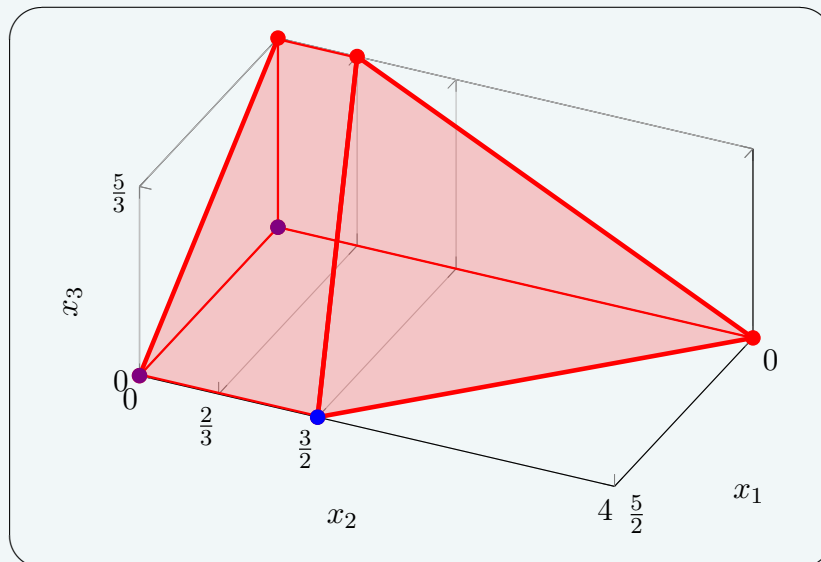
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2} x_3 & & - & \frac{1}{2} x_5 \\ x_2 = \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2} x_3 & - & x_4 & + & \frac{1}{2} x_5 \\ x_6 = \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} x_3 & + & x_4 & + & \frac{1}{2} x_5 \\ z = \frac{21}{2} & - & \frac{3}{2} x_3 & - & 2 x_4 & - & \frac{1}{2} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{21}{2}$.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Attenzione

Questa è un'altra possibile esecuzione dell'algoritmo del simplesso, in cui si selezionano le variabili fuori base con il massimo costo ridotto invece di seguire l'ordine naturale.

- **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3 \\ x_6 = 7 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ z = 0 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 4, \quad \bar{x}_5 = 5, \quad \bar{x}_6 = 7, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 4 - 2x_3 \\ x_5 = 5 - 3x_3 \\ x_6 = 7 - 3x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{4 - 2x_3 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{5 - 3x_3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{7 - 3x_3 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \leq 2 \\ x_3 \leq \frac{5}{3} \\ x_3 \leq \frac{7}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a $\frac{5}{3}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

We have:

$$x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_4 = 4 - x_1 - x_2 - 2 \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_5$$

$$x_6 = 7 - 2x_1 - x_2 - 3 \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 \right) = 2 - x_2 + x_5$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 4 \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 \right) = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{4}{3}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 - x_2 + \frac{2}{3} x_5 \\ x_6 = 2 - x_2 + x_5 \\ z = \frac{20}{3} + \frac{1}{3} x_1 + 2 x_2 - \frac{4}{3} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_6 = 2, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \text{di valore} \quad \frac{20}{3}$$

• **Iterazione 2**

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{2}{3} - x_2 \\ x_6 = 2 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{2}{3} - x_2 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{2 - x_2 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{2}{3} \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\frac{2}{3}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

We have:

$$x_4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 - x_2 + \frac{2}{3} x_5 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 - x_4 + \frac{2}{3} x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_6 &= 2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 - x_4 + \frac{2}{3} x_5 \right) + x_5 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} x_1 + x_4 + \frac{1}{3} x_5 \\ z &= \frac{20}{3} + \frac{1}{3} x_1 + 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 - x_4 + \frac{2}{3} x_5 \right) - \frac{4}{3} x_5 = 8 + x_1 - 2 x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 - x_4 + \frac{2}{3} x_5 \\ x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_6 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} x_1 + x_4 + \frac{1}{3} x_5 \\ z = 8 + x_1 - 2 x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_6 = \frac{4}{3} \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \text{di valore } 8$$

• **Iterazione 3**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 \\ x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_1 \\ x_6 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_1 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{1}{3} x_1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_1 \leq \frac{5}{2} \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{5}{2}$, il valore di x_3 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

We have:

$$x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_5 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_5 \right) - x_4 + \frac{2}{3} x_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_3 - x_4 + \frac{1}{2} x_5$$

$$x_6 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_5 \right) + x_4 + \frac{1}{3} x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_3 + x_4 + \frac{1}{2} x_5$$

$$z = 8 + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_5 \right) - 2 x_4 = \frac{21}{2} - \frac{3}{2} x_3 - 2 x_4 - \frac{1}{2} x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

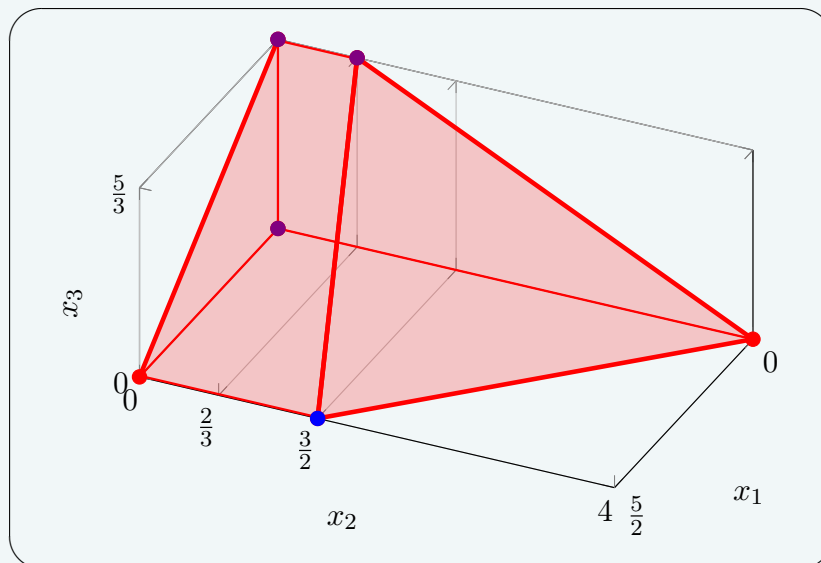
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_5 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_3 - x_4 + \frac{1}{2} x_5 \\ x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_3 + x_4 + \frac{1}{2} x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{2} x_3 - 2 x_4 - \frac{1}{2} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_6 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 0$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{21}{2}$.

In viola i primi tre vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Definizione del poliedro tramite disuguaglianze (rappresentazione per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (4, -1, -1, -2), # (-1, -1, -2) x + 4 >= 0
    (5, -2, 0, -3), # (-2, 0, -3) x + 5 >= 0
    (7, -2, -1, -3), # (-2, -1, -3) x + 7 >= 0
    (0, 1, 0, 0), # (1, 0, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 1, 0), # (0, 1, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 0, 1) # (0, 0, 1) x + 0 >= 0
])

# Disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Punti estremi e raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Grafico del poliedro (3D)
p.plot()
```

Esercizio 6.20 — Algoritmo del simplesso (*P43*)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 2 - x_1 - 2x_3 \\ x_5 = 2 - x_2 - 2x_3 \\ z = 0 + x_1 + 2x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 2, \bar{x}_5 = 2 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 2 - x_1 - 2x_3 \\ x_5 = 2 - x_2 - 2x_3 \\ z = 0 + x_1 + 2x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 2, \bar{x}_5 = 2, \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 2 - x_1 \\ \underbrace{2 - x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 2, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 2 - x_1 - 2x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - 2x_3 - x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$z = (2 - 2x_3 - x_4) + 2x_2 + 7x_3 = 2 + 2x_2 + 5x_3 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 & - 2 x_3 & - x_4 \\ x_5 = 2 & - x_2 & - 2 x_3 \\ z = 2 & + 2 x_2 & + 5 x_3 & - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 2$$

• **Iterazione 2**

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_5 = 2 - x_2 \\ \underbrace{2 - x_2}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a 2, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = 2 - x_2 - 2 x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 2 - 2 x_3 - x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$z = 2 + 2(2 - 2 x_3 - x_5) + 5 x_3 - x_4 = 6 + x_3 - x_4 - 2 x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 & - 2 x_3 & - x_4 \\ x_2 = 2 & - 2 x_3 & & - x_5 \\ z = 6 & + x_3 & - x_4 & - 2 x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 2, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 6$$

• **Iterazione 3**

Aumentando il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 \\ x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - 2x_3 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 - 2x_3 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a 1, il valore di entrambe x_1 e x_2 scende a 0. Scegliamo x_1 come variabile uscente.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_1 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_1 = 2 - 2x_3 - x_4 \quad \text{quindi} \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - 2\left(1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_5 = x_1 + x_4 - x_5 \\ z &= 6 + \left(1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_4 - 2x_5 = 7 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4 - 2x_5 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

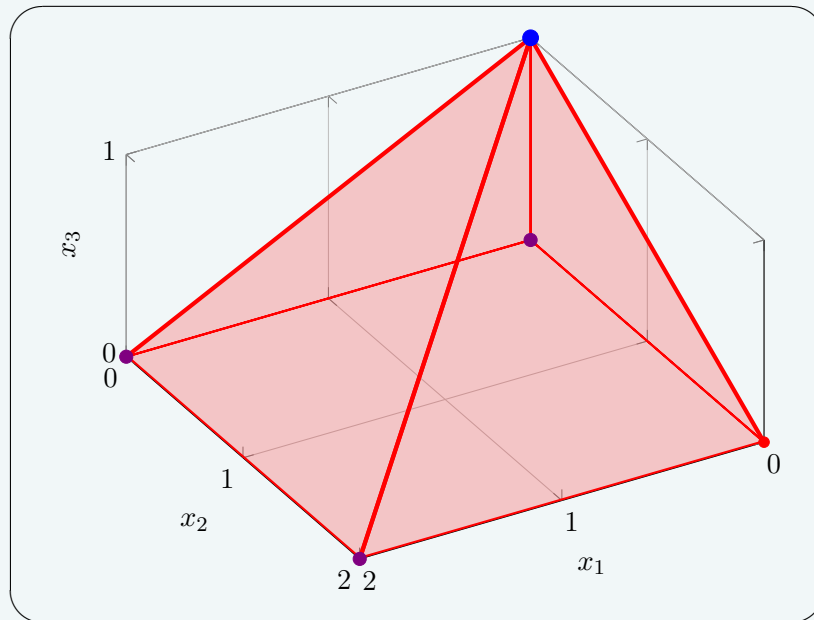
$$\begin{cases} x_2 = 0 & + & x_1 & + & x_4 & - & x_5 \\ x_3 = 1 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_4 \\ z = 7 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_4 & - & 2x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 7$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 7.

In viola i primi tre vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Definizione del poliedro tramite disuguaglianze (rappresentazione per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (2, -1, 0, -2), # (-1, 0, -2) x + 2 >= 0
    (2, 0, -1, -2), # (0, -1, -2) x + 2 >= 0
    (0, 1, 0, 0), # (1, 0, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 1, 0), # (0, 1, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 0, 1) # (0, 0, 1) x + 0 >= 0
])

# Disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Punti estremi e raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Grafico del poliedro (3D)
p.plot()
```

Esercizio 6.21 — Algoritmo del simplesso (P44)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 1 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_5 = 4 - 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_6 = 2 - x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ z = 0 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 1, \bar{x}_5 = 4, \bar{x}_6 = 2 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 1 & - & x_1 & - & 2 x_2 & + & 2 x_3 \\ x_5 = 4 & - & 2 x_1 & + & x_2 & + & 3 x_3 \\ x_6 = 2 & - & x_1 & - & 2 x_2 & - & 5 x_3 \\ z = 0 & + & x_1 & + & 2 x_2 & + & 3 x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 1, \bar{x}_5 = 4, \bar{x}_6 = 2, \quad \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 1 - x_1 \\ x_5 = 4 - 2 x_1 \\ x_6 = 2 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{4 - 2 x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{2 - x_1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 1, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 1 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = 4 - 2(1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4) + x_2 + 3x_3 = 2 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$$

$$x_6 = 2 - (1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4) - 2x_2 - 5x_3 = 1 - 7x_3 + x_4$$

$$z = (1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4) + 2x_2 + 3x_3 = 1 + 5x_3 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_5 = 2 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_6 = 1 - 7x_3 + x_4 \\ z = 1 + 5x_3 - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_6 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 1$$

• Iterazione 2

Aumentando il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 \\ x_5 = 2 - x_3 \\ x_6 = 1 - 7x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{1 + 2x_3 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \overbrace{2 - x_3 \geq 0}^{x_5 \geq 0} \\ \overbrace{1 - 7x_3 \geq 0}^{x_6 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \geq -\frac{1}{2} \\ x_3 \leq 2 \\ x_3 \leq \frac{1}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a $\frac{1}{7}$, il valore di x_6 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_6 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_6 = 1 - 7x_3 + x_4 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = 1 - 2x_2 + 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_6\right) - x_4 = \frac{9}{7} - 2x_2 - \frac{5}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_6$$

$$x_5 = 2 + 5x_2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_6\right) + 2x_4 = \frac{13}{7} + 5x_2 + \frac{13}{7}x_4 + \frac{1}{7}x_6$$

$$z = 1 + 5\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_6\right) - x_4 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_4 - \frac{5}{7}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{7} - 2x_2 - \frac{5}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_6 \\ x_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_6 \\ x_5 = \frac{13}{7} + 5x_2 + \frac{13}{7}x_4 + \frac{1}{7}x_6 \\ z = \frac{12}{7} - \frac{2}{7}x_4 - \frac{5}{7}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 6\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{7}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = \frac{13}{7}, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{12}{7}$$

- Soluzioni ottime multiple**

Nel dizionario ottimo la variabile fuori base x_2 ha costo ridotto $\bar{c}_2 = 0$. Di conseguenza, aumentare il valore di x_2 non cambia il valore di z . Abbiamo:

$$x_1 = \frac{9}{7} - 2x_2 \quad \underbrace{\frac{9}{7} - 2x_2}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \quad x_2 \leq \frac{9}{14}$$

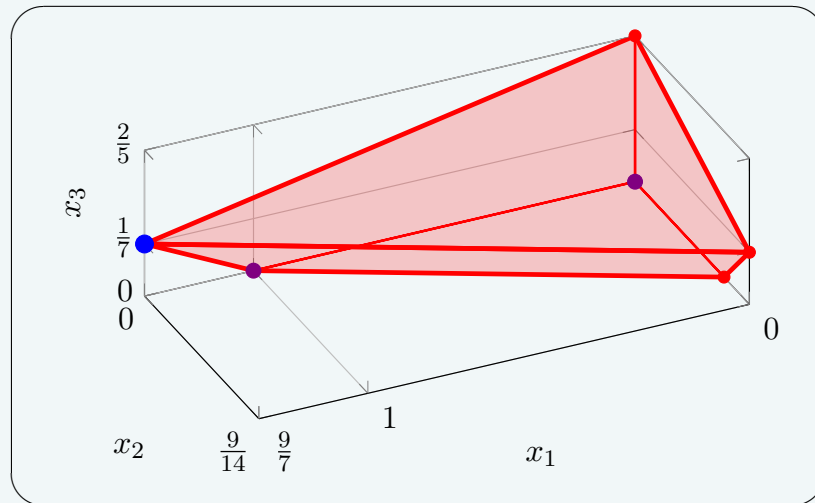
($x_3 = \frac{1}{7}$ non cambia e x_5 aumenta). Aumentando il valore di x_2 fino a $\frac{9}{14}$, il valore di x_1 scende a 0 e otteniamo il vertice

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{14}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{12}{7}$$

che è anch'esso ottimo. Quindi la soluzione ottima **non è unica**: ogni punto dello spigolo che congiunge $\left(\frac{9}{7}, 0, \frac{1}{7}\right)$ e $\left(0, \frac{9}{14}, \frac{1}{7}\right)$ è ottimo, di valore $\frac{12}{7}$.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{7}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{12}{7}$.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Definizione del poliedro tramite disuguaglianze (rappresentazione per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (1, -1, -2, 2), # 1 - x1 - 2*x2 + 2*x3 >= 0
    (4, -2, 1, 3), # 4 - 2*x1 + x2 + 3*x3 >= 0
    (2, -1, -2, -5), # 2 - x1 - 2*x2 - 5*x3 >= 0
    (0, 1, 0, 0), # x1 >= 0
    (0, 0, 1, 0), # x2 >= 0
    (0, 0, 0, 1) # x3 >= 0
])

# Disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Punti estremi e raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Grafico del poliedro (3D)
p.plot()
```

Esercizio 6.22 — Algoritmo del simplesso (*P45*)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 - 13x_2 + 7x_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ & x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 5 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_5 = 3 - x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ z = 0 + 4x_1 - 13x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 5, \bar{x}_5 = 3 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

• Inizializzazione

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 5 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_5 = 3 - x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ z = 0 + 4x_1 - 13x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 5, \quad \bar{x}_5 = 3, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 1

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 5 - 3x_1 \\ x_5 = 3 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{5 - 3x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{3 - x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{5}{3} \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{5}{3}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 5 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = 3 - \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \right) + 3x_2 - 5x_3 = \frac{4}{3} + \frac{11}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

$$z = 4 \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 \right) - 13 x_2 + 7 x_3 = \frac{20}{3} - \frac{47}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 - \frac{4}{3} x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 \\ x_5 = \frac{4}{3} + \frac{11}{3} x_2 - \frac{10}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4 \\ z = \frac{20}{3} - \frac{47}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 - \frac{4}{3} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{20}{3}$$

• Iterazione 2

Aumentando il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} x_3 \\ x_5 = \frac{4}{3} - \frac{10}{3} x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{5}{3} - \frac{5}{3} x_3 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{10}{3} x_3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq \frac{2}{5} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a $\frac{2}{5}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = \frac{4}{3} + \frac{11}{3} x_2 - \frac{10}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{2}{5} + \frac{11}{10} x_2 + \frac{1}{10} x_4 - \frac{3}{10} x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3} x_2 - \frac{5}{3} \left(\frac{2}{5} + \frac{11}{10} x_2 + \frac{1}{10} x_4 - \frac{3}{10} x_5 \right) - \frac{1}{3} x_4 = 1 - \frac{5}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_5 \\ z &= \frac{20}{3} - \frac{47}{3} x_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} + \frac{11}{10} x_2 + \frac{1}{10} x_4 - \frac{3}{10} x_5 \right) - \frac{4}{3} x_4 = \frac{34}{5} - \frac{153}{10} x_2 - \frac{13}{10} x_4 - \frac{1}{10} x_5 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

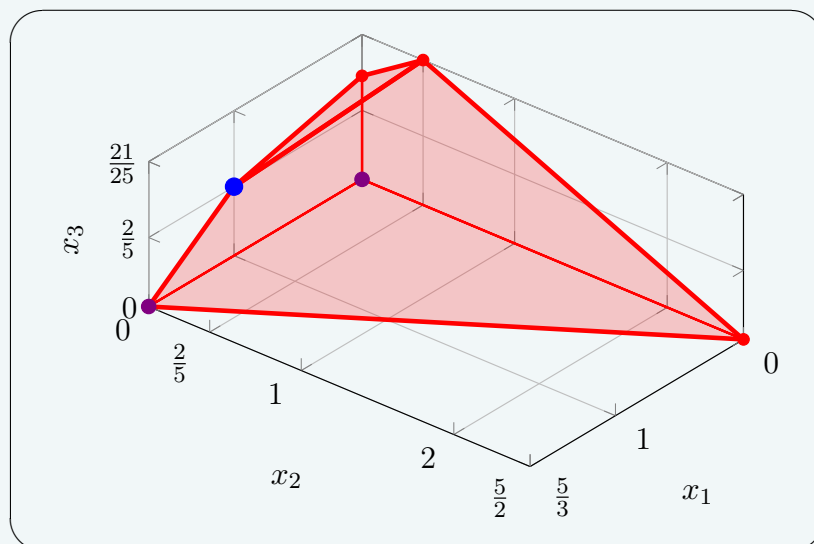
$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = \frac{2}{5} + \frac{11}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{3}{10}x_5 \\ z = \frac{34}{5} - \frac{153}{10}x_2 - \frac{13}{10}x_4 - \frac{1}{10}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{5}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{34}{5}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{5}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{34}{5}$.

In viola i primi due vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Definizione del poliedro tramite disuguaglianze (rappresentazione per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (5, -3, -2, -5), # 5 - 3*x1 - 2*x2 - 5*x3 >= 0
    (3, -1, 3, -5), # 3 - x1 + 3*x2 - 5*x3 >= 0
    (0, 1, 0, 0), # x1 >= 0
    (0, 0, 1, 0), # x2 >= 0
    (0, 0, 0, 1) # x3 >= 0
])

# Disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Punti estremi e raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Grafico del poliedro (3D)
p.plot()
```

Esercizio 6.23 — Algoritmo del simplesso (P46)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned}
 &\max \quad 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\
 &\text{sogetto a} \quad 9x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
 &\quad \quad \quad 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 16 \\
 &\quad \quad \quad 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\
 &\quad \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases}
 x_4 = 11 - 9x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\
 x_5 = 16 - 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 \\
 x_6 = 10 - 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 \\
 z = 0 + 5x_1 + 6x_2 + 10x_3
 \end{cases}$$

La soluzione ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 11, \bar{x}_5 = 16, \bar{x}_6 = 10 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP.

Soluzione

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_4 = 11 & - & 9 x_1 & - & 2 x_2 & - & 2 x_3 \\ x_5 = 16 & - & 2 x_1 & - & 6 x_2 & - & 6 x_3 \\ x_6 = 10 & - & 4 x_1 & - & 2 x_2 & - & 7 x_3 \\ z = 0 & + & 5 x_1 & + & 6 x_2 & + & 10 x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 11, \bar{x}_5 = 16, \bar{x}_6 = 10, \bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- Iterazione 1**

Aumentando il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 11 - 9 x_1 \\ x_5 = 16 - 2 x_1 \\ x_6 = 10 - 4 x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{11 - 9 x_1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{16 - 2 x_1}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{10 - 4 x_1}_{x_6 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{11}{9} \\ x_1 \leq 8 \\ x_1 \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\frac{11}{9}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 11 - 9x_1 - 2x_2 - 2x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = 16 - 2\left(\frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4\right) - 6x_2 - 6x_3 = \frac{122}{9} - \frac{50}{9}x_2 - \frac{50}{9}x_3 + \frac{2}{9}x_4$$

$$x_6 = 10 - 4\left(\frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4\right) - 2x_2 - 7x_3 = \frac{46}{9} - \frac{10}{9}x_2 - \frac{55}{9}x_3 + \frac{4}{9}x_4$$

$$z = 5\left(\frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4\right) + 6x_2 + 10x_3 = \frac{55}{9} + \frac{44}{9}x_2 + \frac{80}{9}x_3 - \frac{5}{9}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4 \\ x_5 = \frac{122}{9} - \frac{50}{9}x_2 - \frac{50}{9}x_3 + \frac{2}{9}x_4 \\ x_6 = \frac{46}{9} - \frac{10}{9}x_2 - \frac{55}{9}x_3 + \frac{4}{9}x_4 \\ z = \frac{55}{9} + \frac{44}{9}x_2 + \frac{80}{9}x_3 - \frac{5}{9}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{11}{9}, \quad \bar{x}_5 = \frac{122}{9}, \quad \bar{x}_6 = \frac{46}{9}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{55}{9}$$

• Iterazione 2

Aumentando il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2 \\ x_5 = \frac{122}{9} - \frac{50}{9}x_2 \\ x_6 = \frac{46}{9} - \frac{10}{9}x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{11}{9} - \frac{2}{9}x_2}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{122}{9} - \frac{50}{9}x_2}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{46}{9} - \frac{10}{9}x_2}_{x_6 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{11}{2} \\ x_2 \leq \frac{61}{25} \\ x_2 \leq \frac{23}{5} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\frac{61}{25}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = \frac{122}{9} - \frac{50}{9} x_2 - \frac{50}{9} x_3 + \frac{2}{9} x_4 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{61}{25} - x_3 + \frac{1}{25} x_4 - \frac{9}{50} x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{9} - \frac{2}{9} \left(\frac{61}{25} - x_3 + \frac{1}{25} x_4 - \frac{9}{50} x_5 \right) - \frac{2}{9} x_3 - \frac{1}{9} x_4 = \frac{17}{25} - \frac{3}{25} x_4 + \frac{1}{25} x_5 \\ x_6 &= \frac{46}{9} - \frac{10}{9} \left(\frac{61}{25} - x_3 + \frac{1}{25} x_4 - \frac{9}{50} x_5 \right) - \frac{55}{9} x_3 + \frac{4}{9} x_4 = \frac{12}{5} - 5 x_3 + \frac{2}{5} x_4 + \frac{1}{5} x_5 \\ z &= \frac{55}{9} + \frac{44}{9} \left(\frac{61}{25} - x_3 + \frac{1}{25} x_4 - \frac{9}{50} x_5 \right) + \frac{80}{9} x_3 - \frac{5}{9} x_4 = \frac{451}{25} + 4 x_3 - \frac{9}{25} x_4 - \frac{22}{25} x_5 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{17}{25} & & - \frac{3}{25} x_4 + \frac{1}{25} x_5 \\ x_2 = \frac{61}{25} & - x_3 + \frac{1}{25} x_4 - \frac{9}{50} x_5 \\ x_6 = \frac{12}{5} & - 5 x_3 + \frac{2}{5} x_4 + \frac{1}{5} x_5 \\ z = \frac{451}{25} & + 4 x_3 - \frac{9}{25} x_4 - \frac{22}{25} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{17}{25}, \quad \bar{x}_2 = \frac{61}{25}, \quad \bar{x}_6 = \frac{12}{5}, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{451}{25}$$

• Iterazione 3

Aumentando il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{61}{25} - x_3 \\ x_6 = \frac{12}{5} - 5 x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{61}{25} - x_3}_{x_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{12}{5} - 5 x_3}_{x_6 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \leq \frac{61}{25} \\ x_3 \leq \frac{12}{25} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a $\frac{12}{25}$, il valore di x_6 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_6 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_6 = \frac{12}{5} - 5x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{12}{25} + \frac{2}{25}x_4 + \frac{1}{25}x_5 - \frac{1}{5}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_2 = \frac{61}{25} - \left(\frac{12}{25} + \frac{2}{25}x_4 + \frac{1}{25}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \right) + \frac{1}{25}x_4 - \frac{9}{50}x_5 = \frac{49}{25} - \frac{1}{25}x_4 - \frac{11}{50}x_5 + \frac{1}{5}x_6$$

$$z = \frac{451}{25} + 4 \left(\frac{12}{25} + \frac{2}{25}x_4 + \frac{1}{25}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \right) - \frac{9}{25}x_4 - \frac{22}{25}x_5 = \frac{499}{25} - \frac{1}{25}x_4 - \frac{18}{25}x_5 - \frac{4}{5}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non sono possibili ulteriori miglioramenti) e questo è un dizionario ottimo:

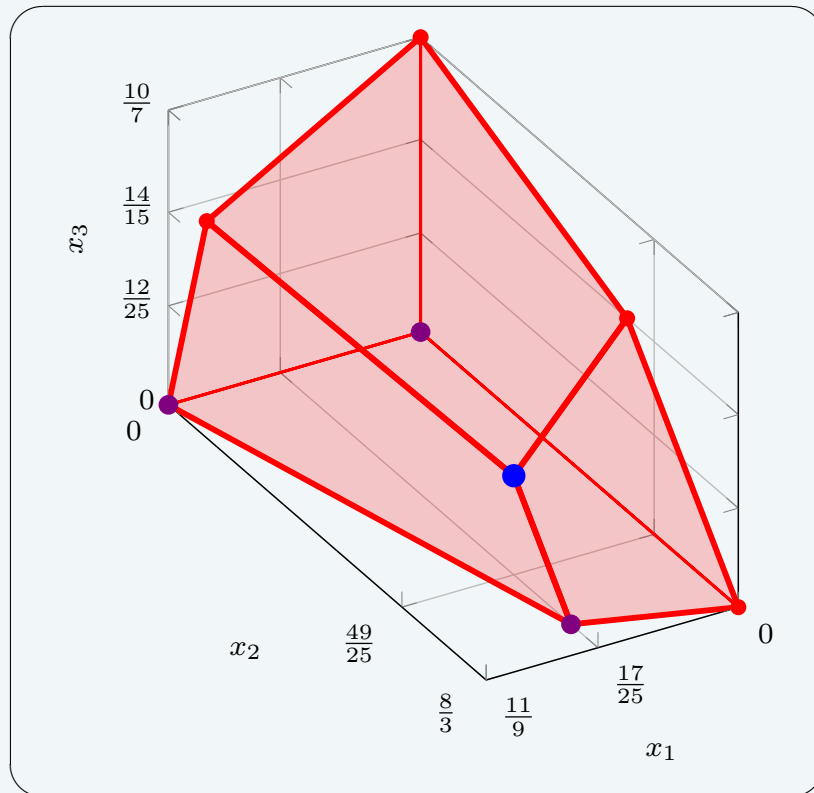
$$\begin{cases} x_1 = \frac{17}{25} & - \frac{3}{25}x_4 & + \frac{1}{25}x_5 \\ x_2 = \frac{49}{25} & - \frac{1}{25}x_4 & - \frac{11}{50}x_5 & + \frac{1}{5}x_6 \\ x_3 = \frac{12}{25} & + \frac{2}{25}x_4 & + \frac{1}{25}x_5 & - \frac{1}{5}x_6 \\ z = \frac{499}{25} & - \frac{1}{25}x_4 & - \frac{18}{25}x_5 & - \frac{4}{5}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5, 6\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{17}{25}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{49}{25}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{12}{25}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{499}{25}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{17}{25}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{49}{25}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{12}{25}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{499}{25}$.

In viola i primi tre vertici esplorati dalla precedente esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo, rappresentato in blu).

Codice SageMath: poliedri 3D (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Definizione del poliedro tramite disuguaglianze (rappresentazione per iperpiani)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (11, -9, -2, -2), # 11 - 9*x1 - 2*x2 - 2*x3 >= 0
    (16, -2, -6, -6), # 16 - 2*x1 - 6*x2 - 6*x3 >= 0
    (10, -4, -2, -7), # 10 - 4*x1 - 2*x2 - 7*x3 >= 0
    (0, 1, 0, 0), # x1 >= 0
    (0, 0, 1, 0), # x2 >= 0
    (0, 0, 0, 1) # x3 >= 0
])

# Disuguaglianze del poliedro
p.Hrepresentation()

# Punti estremi e raggi estremi del poliedro
p.Vrepresentation()

# Grafico del poliedro (3D)
p.plot()
```

Condizioni di ottimalità e regole di pivot

Esercizio 7.1 — Algoritmo del simplesso (C1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 4$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 53 x_1 + 41 x_2 - 204 x_3 - 20 x_4 \\
 \text{soggetto a} \quad & -11 x_1 - 5 x_2 + 18 x_3 + 2 x_4 \leq 0 \\
 & 4 x_1 + 2 x_2 - 8 x_3 - x_4 \leq 0 \\
 & 11 x_1 + 5 x_2 - 18 x_3 - 2 x_4 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases}
 x_5 = 0 + 11 x_1 + 5 x_2 - 18 x_3 - 2 x_4 \\
 x_6 = 0 - 4 x_1 - 2 x_2 + 8 x_3 + x_4 \\
 x_7 = 1 - 11 x_1 - 5 x_2 + 18 x_3 + 2 x_4 \\
 z = 0 + 53 x_1 + 41 x_2 - 204 x_3 - 20 x_4
 \end{cases}$$

La soluzione di base ammissibile associata è:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 0, \bar{x}_5 = 0, \bar{x}_6 = 0, \bar{x}_7 = 1 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP. Scegliere come colonna pivot quella con il costo ridotto maggiore. Quando esistono

due o più righe pivot, usare la variabile in base associata al vincolo di indice minimo (in ogni operazione di pivot la colonna pivot prende il vincolo della riga pivot; inizialmente x_5 , x_6 e x_7 sono associate rispettivamente ai vincoli 1, 2 e 3).

2. Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP. Scegliere la colonna pivot e la riga pivot utilizzando la regola di Bland.

Soluzione

1. • Inizializzazione

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_5 = 0 & + & 11 x_1 & + & 5 x_2 & - & 18 x_3 & - & 2 x_4 \\ x_6 = 0 & - & 4 x_1 & - & 2 x_2 & + & 8 x_3 & + & x_4 \\ x_7 = 1 & - & 11 x_1 & - & 5 x_2 & + & 18 x_3 & + & 2 x_4 \\ z = 0 & + & 53 x_1 & + & 41 x_2 & - & 204 x_3 & - & 20 x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 1

Il costo ridotto maggiore è quello associato alla variabile fuori base x_1 . Quindi, se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_5 = 0 + 11 x_1 \\ x_6 = 0 - 4 x_1 \\ x_7 = 1 - 11 x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 + 11 x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{0 - 4 x_1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \\ \underbrace{1 - 11 x_1 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \\ x_1 \leq \frac{1}{11} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \left\{ 0, \frac{1}{11} \right\} = 0$, il valore di x_6 scende a 0. Questa è un'operazione di pivot degenera, poiché il valore della funzione obiettivo non aumenta.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_6 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_6 = 0 - 4 x_1 - 2 x_2 + 8 x_3 + x_4 \quad \text{allora} \quad x_1 = -\frac{1}{2} x_2 + 2 x_3 + \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned}
 x_5 &= 11 \left(-\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \right) + 5x_2 - 18x_3 - 2x_4 \\
 &= -\frac{1}{2}x_2 + 4x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{11}{4}x_6 \\
 x_7 &= 1 - 11 \left(-\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \right) - 5x_2 + 18x_3 + 2x_4 \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x_2 - 4x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{11}{4}x_6 \\
 z &= 53 \left(-\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \right) + 41x_2 - 204x_3 - 20x_4 \\
 &= \frac{29}{2}x_2 - 98x_3 - \frac{27}{4}x_4 - \frac{53}{4}x_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 x_1 = 0 & - & \frac{1}{2} x_2 & + & 2 x_3 & + & \frac{1}{4} x_4 & - & \frac{1}{4} x_6 \\
 x_5 = 0 & - & \frac{1}{2} x_2 & + & 4 x_3 & + & \frac{3}{4} x_4 & - & \frac{11}{4} x_6 \\
 x_7 = 1 & + & \frac{1}{2} x_2 & - & 4 x_3 & - & \frac{3}{4} x_4 & + & \frac{11}{4} x_6 \\
 z = 0 & + & \frac{29}{2} x_2 & - & 98 x_3 & - & \frac{27}{4} x_4 & - & \frac{53}{4} x_6
 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 2

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_2 . Abbiamo:

$$\begin{cases}
 x_1 = 0 - \frac{1}{2} x_2 \\
 x_5 = 0 - \frac{1}{2} x_2 \\
 x_7 = 1 + \frac{1}{2} x_2
 \end{cases}
 \begin{cases}
 \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\
 \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\
 \underbrace{1 + \frac{1}{2} x_2 \geq 0}_{x_7 \geq 0}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 x_2 \leq 0 \\
 x_2 \leq 0 \\
 x_2 \geq -2
 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a 0, sia x_1 sia x_5 restano uguali a 0. Poiché esistono due righe pivot, usiamo la variabile in base associata al vincolo di indice minimo: x_5 è associata al vincolo 1, mentre x_1 è associata al vincolo 2 (ha sostituito x_6). Quindi x_5 è la riga pivot.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = 0 - \frac{1}{2}x_2 + 4x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{11}{4}x_6 \quad \text{allora} \quad x_2 = -2x_5 + 8x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \left(-2x_5 + 8x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6 \right) + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \\ &= x_5 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_6 \\ x_7 &= 1 + \frac{1}{2} \left(-2x_5 + 8x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6 \right) - 4x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{11}{4}x_6 \\ &= 1 - x_5 \\ z &= \frac{29}{2} \left(-2x_5 + 8x_3 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6 \right) - 98x_3 - \frac{27}{4}x_4 - \frac{53}{4}x_6 \\ &= -29x_5 + 18x_3 + 15x_4 - 93x_6 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \quad + \quad x_5 \quad - \quad 2x_3 \quad - \quad \frac{1}{2}x_4 \quad + \quad \frac{5}{2}x_6 \\ x_2 = 0 \quad - \quad 2x_5 \quad + \quad 8x_3 \quad + \quad \frac{3}{2}x_4 \quad - \quad \frac{11}{2}x_6 \\ x_7 = 1 \quad - \quad x_5 \\ z = 0 \quad - \quad 29x_5 \quad + \quad 18x_3 \quad + \quad 15x_4 \quad - \quad 93x_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 3

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_3 . Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 - 2x_3 \\ x_2 = 0 + 8x_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 - 2x_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ 0 + 8x_3 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 \leq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_3 fino a 0, il valore di x_1 scende a 0. Anche questa è un'operazione di pivot degenera.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_1 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_1 = 0 + x_5 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_6 \quad \text{allora} \quad x_3 = \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{5}{4}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_5 + 8 \left(\frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{5}{4}x_6 \right) + \frac{3}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6 \\ &= 2x_5 - 4x_1 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{9}{2}x_6 \\ z &= -29x_5 + 18 \left(\frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{5}{4}x_6 \right) + 15x_4 - 93x_6 \\ &= -20x_5 - 9x_1 + \frac{21}{2}x_4 - \frac{141}{2}x_6 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \quad + \quad 2x_5 \quad - \quad 4x_1 \quad - \quad \frac{1}{2}x_4 \quad + \quad \frac{9}{2}x_6 \\ x_3 = 0 \quad + \quad \frac{1}{2}x_5 \quad - \quad \frac{1}{2}x_1 \quad - \quad \frac{1}{4}x_4 \quad + \quad \frac{5}{4}x_6 \\ x_7 = 1 \quad - \quad x_5 \\ z = 0 \quad - \quad 20x_5 \quad - \quad 9x_1 \quad + \quad \frac{21}{2}x_4 \quad - \quad \frac{141}{2}x_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 4

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_4 . Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = 0 - \frac{1}{4}x_4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \\ \underbrace{x_2 \geq 0} \\ 0 - \frac{1}{4}x_4 \geq 0 \\ \underbrace{x_3 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_4 \leq 0 \\ x_4 \leq 0 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_4 fino a 0, sia x_2 sia x_3 restano uguali a 0. La variabile in base x_2 è associata al vincolo 1 (ha sostituito x_5), mentre x_3 è associata al vincolo 2 (ha sostituito x_1). Quindi x_2 è la riga pivot.

Abbiamo quindi che:

x_4 entra in base e di conseguenza x_2 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_2 = 0 + 2x_5 - 4x_1 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{9}{2}x_6 \quad \text{allora} \quad x_4 = 4x_5 - 8x_1 - 2x_2 + 9x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}(4x_5 - 8x_1 - 2x_2 + 9x_6) + \frac{5}{4}x_6 \\&= -\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_6 \\z &= -20x_5 - 9x_1 + \frac{21}{2}(4x_5 - 8x_1 - 2x_2 + 9x_6) - \frac{141}{2}x_6 \\&= 22x_5 - 93x_1 - 21x_2 + 24x_6\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x_3 = 0 & - & \frac{1}{2}x_5 & + & \frac{3}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_6 \\x_4 = 0 & + & 4x_5 & - & 8x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_6 \\x_7 = 1 & - & x_5 \\z = 0 & + & 22x_5 & - & 93x_1 & - & 21x_2 & + & 24x_6\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 5, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 5**

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_6 . Abbiamo:

$$\begin{cases}x_3 = 0 - x_6 \\x_4 = 0 + 9x_6\end{cases} \quad \begin{cases}0 - x_6 \geq 0 \\x_3 \geq 0 \\0 + 9x_6 \geq 0 \\x_4 \geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x_6 \leq 0 \\x_6 \geq 0\end{cases}$$

Aumentando il valore di x_6 fino a 0, il valore di x_3 scende a 0. Questa è un'operazione di pivot degenera.

Abbiamo quindi che:

x_6 entra in base e di conseguenza x_3 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_3 = 0 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_6 \quad \text{allora} \quad x_6 = -\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned}x_4 &= 4x_5 - 8x_1 - 2x_2 + 9\left(-\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right) \\&= -\frac{1}{2}x_5 + \frac{11}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 - 9x_3 \\z &= 22x_5 - 93x_1 - 21x_2 + 24\left(-\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right) \\&= 10x_5 - 57x_1 - 9x_2 - 24x_3\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0 & - & \frac{1}{2} x_5 & + & \frac{11}{2} x_1 & + & \frac{5}{2} x_2 & - & 9 x_3 \\ x_6 = 0 & - & \frac{1}{2} x_5 & + & \frac{3}{2} x_1 & + & \frac{1}{2} x_2 & - & x_3 \\ x_7 = 1 & - & x_5 \\ z = 0 & + & 10 x_5 & - & 57 x_1 & - & 9 x_2 & - & 24 x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 6**

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_5 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 0 - \frac{1}{2} x_5 \\ x_6 = 0 - \frac{1}{2} x_5 \\ x_7 = 1 - x_5 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_5 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_5 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \\ \underbrace{1 - x_5 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 \leq 0 \\ x_5 \leq 0 \\ x_5 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_5 fino a 0, sia x_4 sia x_6 restano uguali a 0. La variabile in base x_4 è associata al vincolo 1 (ha sostituito x_2), mentre x_6 è associata al vincolo 2 (ha sostituito x_3). Quindi x_4 è la riga pivot.

Abbiamo quindi che:

x_5 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 0 - \frac{1}{2} x_5 + \frac{11}{2} x_1 + \frac{5}{2} x_2 - 9 x_3 \quad \text{allora} \quad x_5 = 11 x_1 + 5 x_2 - 18 x_3 - 2 x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned} x_6 &= -\frac{1}{2} (11x_1 + 5x_2 - 18x_3 - 2x_4) + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ &= -4x_1 - 2x_2 + 8x_3 + x_4 \\ x_7 &= 1 - (11x_1 + 5x_2 - 18x_3 - 2x_4) \\ &= 1 - 11x_1 - 5x_2 + 18x_3 + 2x_4 \\ z &= 10(11x_1 + 5x_2 - 18x_3 - 2x_4) - 57x_1 - 9x_2 - 24x_3 \\ &= 53x_1 + 41x_2 - 204x_3 - 20x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_5 = 0 & + & 11 x_1 & + & 5 x_2 & - & 18 x_3 & - & 2 x_4 \\ x_6 = 0 & - & 4 x_1 & - & 2 x_2 & + & 8 x_3 & + & x_4 \\ x_7 = 1 & - & 11 x_1 & - & 5 x_2 & + & 18 x_3 & + & 2 x_4 \\ z = 0 & + & 53 x_1 & + & 41 x_2 & - & 204 x_3 & - & 20 x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Questo dizionario coincide con quello iniziale e l'algoritmo del simplesso cicla.

2. Eseguiamo ora l'algoritmo del simplesso utilizzando la regola di pivot di Bland. Quindi, tra le variabili fuori base con costo ridotto positivo, scegliamo quella di indice minimo. Se è possibile più di una variabile uscente, scegliamo la variabile in base di indice minimo.

- **Iterazione 1**

Nel dizionario iniziale, i costi ridotti positivi sono associati a x_1 e x_2 . La regola di Bland seleziona x_1 . Come nella precedente esecuzione, il test dei rapporti dà x_6 come variabile uscente.

Abbiamo quindi che:

$$x_1 \text{ entra in base e di conseguenza } x_6 \text{ esce dalla base}$$

Abbiamo:

$$x_6 = 0 - 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 + x_4 \quad \text{allora} \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 \left(-\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \right) + 5x_2 - 18x_3 - 2x_4 \\ &= -\frac{1}{2}x_2 + 4x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{11}{4}x_6 \\ x_7 &= 1 - 11 \left(-\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \right) - 5x_2 + 18x_3 + 2x_4 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x_2 - 4x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{11}{4}x_6 \\ z &= 53 \left(-\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \right) + 41x_2 - 204x_3 - 20x_4 \\ &= \frac{29}{2}x_2 - 98x_3 - \frac{27}{4}x_4 - \frac{53}{4}x_6 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 & - & \frac{1}{2} x_2 & + & 2 x_3 & + & \frac{1}{4} x_4 & - & \frac{1}{4} x_6 \\ x_5 = 0 & - & \frac{1}{2} x_2 & + & 4 x_3 & + & \frac{3}{4} x_4 & - & \frac{11}{4} x_6 \\ x_7 = 1 & + & \frac{1}{2} x_2 & - & 4 x_3 & - & \frac{3}{4} x_4 & + & \frac{11}{4} x_6 \\ z = 0 & + & \frac{29}{2} x_2 & - & 98 x_3 & - & \frac{27}{4} x_4 & - & \frac{53}{4} x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 2**

L'unico costo ridotto positivo è quello associato a x_2 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 - \frac{1}{2} x_2 \\ x_5 = 0 - \frac{1}{2} x_2 \\ x_7 = 1 + \frac{1}{2} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{1 + \frac{1}{2} x_2 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_2 \geq -2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a 0, sia x_1 sia x_5 restano uguali a 0. La regola di Bland seleziona x_1 come variabile uscente, poiché ha l'indice minimo tra le possibili variabili uscenti.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_1 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_1 = 0 - \frac{1}{2} x_2 + 2 x_3 + \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_6 \quad \text{allora} \quad x_2 = -2 x_1 + 4 x_3 + \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{aligned} x_5 &= -\frac{1}{2} \left(-2x_1 + 4x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \right) + 4x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{11}{4}x_6 \\ &= x_1 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_6 \\ x_7 &= 1 + \frac{1}{2} \left(-2x_1 + 4x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \right) - 4x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{11}{4}x_6 \\ &= 1 - x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_6 \\ z &= \frac{29}{2} \left(-2x_1 + 4x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \right) - 98x_3 - \frac{27}{4}x_4 - \frac{53}{4}x_6 \\ &= -29x_1 - 40x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{41}{2}x_6 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 & - & 2x_1 & + & 4x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 = 0 & + & x_1 & + & 2x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{5}{2}x_6 \\ x_7 = 1 & - & x_1 & - & 2x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & + & \frac{5}{2}x_6 \\ z = 0 & - & 29x_1 & - & 40x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{41}{2}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3, 4, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 3**

L'unico costo ridotto positivo è quello associato a x_4 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_2 = 0 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 0 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_7 = 1 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\ \underbrace{0 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{1 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_4 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_4 fino a 2, il valore di x_7 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_4 entra in base e di conseguenza x_7 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_7 = 1 - x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_6 \quad \text{allora} \quad x_4 = 2 - 2x_1 - 4x_3 + 5x_6 - 2x_7.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo un dizionario ottimo:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_1 + 4x_3 + \frac{1}{2}(2 - 2x_1 - 4x_3 + 5x_6 - 2x_7) - \frac{1}{2}x_6 \\ &= 1 - 3x_1 + 2x_3 + 2x_6 - x_7 \\ x_5 &= x_1 + 2x_3 + \frac{1}{2}(2 - 2x_1 - 4x_3 + 5x_6 - 2x_7) - \frac{5}{2}x_6 \\ &= 1 - x_7 \\ z &= -29x_1 - 40x_3 + \frac{1}{2}(2 - 2x_1 - 4x_3 + 5x_6 - 2x_7) - \frac{41}{2}x_6 \\ &= 1 - 30x_1 - 42x_3 - 18x_6 - x_7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 & - & 3 x_1 & + & 2 x_3 & + & 2 x_6 & - & x_7 \\ x_4 = 2 & - & 2 x_1 & - & 4 x_3 & + & 5 x_6 & - & 2 x_7 \\ x_5 = 1 & & & & & & & - & x_7 \\ z = 1 & - & 30 x_1 & - & 42 x_3 & - & 18 x_6 & - & x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3, 6, 7\}$. Poiché tutti i costi ridotti sono non positivi, non è possibile alcun ulteriore miglioramento. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 2, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 1$$

Esercizio 7.2 — Algoritmo del simplesso (C2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 4$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10 x_1 - 57 x_2 - 9 x_3 - 24 x_4 \\ \text{soggetto a} \quad & \frac{1}{2} x_1 - \frac{11}{2} x_2 - \frac{5}{2} x_3 + 9 x_4 \leq 0 \\ & \frac{1}{2} x_1 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 + x_4 \leq 0 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Introducendo le variabili di scarto, otteniamo il seguente dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_5 = 0 & - & \frac{1}{2} x_1 & + & \frac{11}{2} x_2 & + & \frac{5}{2} x_3 & - & 9 x_4 \\ x_6 = 0 & - & \frac{1}{2} x_1 & + & \frac{3}{2} x_2 & + & \frac{1}{2} x_3 & - & x_4 \\ x_7 = 1 & - & x_1 \\ z = 0 & + & 10 x_1 & - & 57 x_2 & - & 9 x_3 & - & 24 x_4 \end{cases}$$

La soluzione di base ammissibile associata è:

$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP. Scegliere come colonna pivot quella con il costo ridotto maggiore. Quando esistono due o più righe pivot, usare quella di indice minimo.

2. Eseguire l'algoritmo del simplesso per trovare una soluzione ottima di questo problema LP. Scegliere la colonna pivot e la riga pivot utilizzando la regola di Bland.

Soluzione

1. • **Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_5 = 0 & - \frac{1}{2} x_1 & + \frac{11}{2} x_2 & + \frac{5}{2} x_3 & - 9 x_4 \\ x_6 = 0 & - \frac{1}{2} x_1 & + \frac{3}{2} x_2 & + \frac{1}{2} x_3 & - x_4 \\ x_7 = 1 & - x_1 \\ z = 0 & + 10 x_1 & - 57 x_2 & - 9 x_3 & - 24 x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

Il costo ridotto maggiore è quello associato alla variabile fuori base x_1 . Quindi, se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_5 = 0 - \frac{1}{2} x_1 \\ x_6 = 0 - \frac{1}{2} x_1 \\ x_7 = 1 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_1 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \\ \underbrace{1 - x_1 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_1 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 0, sia x_5 sia x_6 restano uguali a 0. Poiché esistono due righe pivot, usiamo quella di indice minimo, e quindi x_5 è la riga pivot. Questa è un'operazione di pivot degenera, poiché il valore della funzione obiettivo non aumenta.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - 9x_4 \quad \text{allora} \quad x_1 = 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_6 &= -\frac{1}{2}(11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5) + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 \\&= -4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \\x_7 &= 1 - (11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5) = 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5 \\z &= 10(11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5) - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\&= 53x_2 + 41x_3 - 204x_4 - 20x_5\end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5 \\ x_6 = 0 - 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \\ x_7 = 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5 \\ z = 0 + 53x_2 + 41x_3 - 204x_4 - 20x_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 2**

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_2 . Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 + 11x_2 \\ x_6 = 0 - 4x_2 \\ x_7 = 1 - 11x_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{0 + 11x_2 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{0 - 4x_2 \geq 0}_{x_6 \geq 0} \\ \underbrace{1 - 11x_2 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq \frac{1}{11} \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min\left\{0, \frac{1}{11}\right\} = 0$, il valore di x_6 resta uguale a 0, e x_6 è l'unica riga pivot. Anche questa è un'operazione di pivot degenera. Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_6 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_6 = -4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \quad \text{allora} \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 11 \left(-\frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \right) + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5 \\
 &= -\frac{1}{2}x_3 + 4x_4 + \frac{3}{4}x_5 - \frac{11}{4}x_6 \\
 x_7 &= 1 - 11 \left(-\frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \right) - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5 \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x_3 - 4x_4 - \frac{3}{4}x_5 + \frac{11}{4}x_6 \\
 z &= 53 \left(-\frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \right) + 41x_3 - 204x_4 - 20x_5 \\
 &= \frac{29}{2}x_3 - 98x_4 - \frac{27}{4}x_5 - \frac{53}{4}x_6
 \end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\begin{cases}
 x_1 = 0 & - & \frac{1}{2} x_3 & + & 4 x_4 & + & \frac{3}{4} x_5 & - & \frac{11}{4} x_6 \\
 x_2 = 0 & - & \frac{1}{2} x_3 & + & 2 x_4 & + & \frac{1}{4} x_5 & - & \frac{1}{4} x_6 \\
 x_7 = 1 & + & \frac{1}{2} x_3 & - & 4 x_4 & - & \frac{3}{4} x_5 & + & \frac{11}{4} x_6 \\
 z = 0 & + & \frac{29}{2} x_3 & - & 98 x_4 & - & \frac{27}{4} x_5 & - & \frac{53}{4} x_6
 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 3

L'unico costo ridotto positivo è quello associato a x_3 . Abbiamo:

$$\begin{cases}
 x_1 = 0 - \frac{1}{2} x_3 \\
 x_2 = 0 - \frac{1}{2} x_3 \\
 x_7 = 1 + \frac{1}{2} x_3
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_3 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\
 \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_3 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\
 \underbrace{1 + \frac{1}{2} x_3 \geq 0}_{x_7 \geq 0}
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 x_3 \leq 0 \\
 x_3 \leq 0 \\
 x_3 \geq -2
 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a 0, sia x_1 sia x_2 restano uguali a 0. Poiché esistono due righe pivot, usiamo quella di indice minimo, e quindi x_1 è la riga pivot.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_1 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + 4x_4 + \frac{3}{4}x_5 - \frac{11}{4}x_6 \quad \text{allora} \quad x_3 = -2x_1 + 8x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \frac{11}{2}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{2} \left(-2x_1 + 8x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \frac{11}{2}x_6 \right) + 2x_4 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \\ &= x_1 - 2x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{5}{2}x_6 \\ z &= \frac{29}{2} \left(-2x_1 + 8x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \frac{11}{2}x_6 \right) - 98x_4 - \frac{27}{4}x_5 - \frac{53}{4}x_6 \\ &= -29x_1 + 18x_4 + 15x_5 - 93x_6 \end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \quad + \quad x_1 \quad - \quad 2x_4 \quad - \quad \frac{1}{2}x_5 \quad + \quad \frac{5}{2}x_6 \\ x_3 = 0 \quad - \quad 2x_1 \quad + \quad 8x_4 \quad + \quad \frac{3}{2}x_5 \quad - \quad \frac{11}{2}x_6 \\ x_7 = 1 \quad - \quad x_1 \\ z = 0 \quad - \quad 29x_1 \quad + \quad 18x_4 \quad + \quad 15x_5 \quad - \quad 93x_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Iterazione 4

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_4 . Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 - 2x_4 \\ x_3 = 0 + 8x_4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 - 2x_4 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ 0 + 8x_4 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_4 \leq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_4 fino a 0, il valore di x_2 resta uguale a 0, e x_2 è l'unica riga pivot (x_7 non dipende da x_4).

Abbiamo quindi che:

x_4 entra in base e di conseguenza x_2 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_2 = x_1 - 2x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{5}{2}x_6 \quad \text{allora} \quad x_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_3 &= -2x_1 + 8 \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_6 \right) + \frac{3}{2}x_5 - \frac{11}{2}x_6 \\&= 2x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{9}{2}x_6 \\z &= -29x_1 + 18 \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_6 \right) + 15x_5 - 93x_6 \\&= -20x_1 - 9x_2 + \frac{21}{2}x_5 - \frac{141}{2}x_6\end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \quad + \quad 2x_1 \quad - \quad 4x_2 \quad - \quad \frac{1}{2}x_5 \quad + \quad \frac{9}{2}x_6 \\ x_4 = 0 \quad + \quad \frac{1}{2}x_1 \quad - \quad \frac{1}{2}x_2 \quad - \quad \frac{1}{4}x_5 \quad + \quad \frac{5}{4}x_6 \\ x_7 = 1 \quad - \quad x_1 \\ z = 0 \quad - \quad 20x_1 \quad - \quad 9x_2 \quad + \quad \frac{21}{2}x_5 \quad - \quad \frac{141}{2}x_6 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 5, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 5**

L'unico costo ridotto positivo è quello associato a x_5 . Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 0 - \frac{1}{4}x_5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 - \frac{1}{2}x_5 \geq 0 \\ \underbrace{x_3 \geq 0} \\ 0 - \frac{1}{4}x_5 \geq 0 \\ \underbrace{x_4 \geq 0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_5 \leq 0 \\ x_5 \leq 0 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_5 fino a 0, sia x_3 sia x_4 restano uguali a 0 (x_7 non dipende da x_5). Poiché esistono due righe pivot, usiamo quella di indice minimo, e quindi x_3 è la riga pivot.

Abbiamo quindi che:

$$x_5 \text{ entra in base e di conseguenza } x_3 \text{ esce dalla base}$$

Abbiamo:

$$x_3 = 2x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{9}{2}x_6 \quad \text{allora} \quad x_5 = 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}(4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6) + \frac{5}{4}x_6 \\&= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_6 \\z &= -20x_1 - 9x_2 + \frac{21}{2}(4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6) - \frac{141}{2}x_6 \\&= 22x_1 - 93x_2 - 21x_3 + 24x_6\end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\begin{cases}x_4 = 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & x_6 \\x_5 = 0 & + & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 & + & 9x_6 \\x_7 = 1 & - & x_1 \\z = 0 & + & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3 & + & 24x_6\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 6**

Il costo ridotto maggiore è ora quello associato a x_6 . Abbiamo:

$$\begin{cases}x_4 = 0 - x_6 \\x_5 = 0 + 9x_6\end{cases} \quad \begin{cases}0 - x_6 \geq 0 \\x_4 \geq 0 \\0 + 9x_6 \geq 0 \\x_5 \geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x_6 \leq 0 \\x_6 \geq 0\end{cases}$$

Aumentando il valore di x_6 fino a 0, il valore di x_4 resta uguale a 0, e x_4 è l'unica riga pivot (x_7 non dipende da x_6).

Abbiamo quindi che:

x_6 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_6 \quad \text{allora} \quad x_6 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_5 &= 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4\right) \\&= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - 9x_4 \\z &= 22x_1 - 93x_2 - 21x_3 + 24\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4\right) \\&= 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4\end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\begin{cases} x_5 = 0 & - \frac{1}{2} x_1 & + \frac{11}{2} x_2 & + \frac{5}{2} x_3 & - 9 x_4 \\ x_6 = 0 & - \frac{1}{2} x_1 & + \frac{3}{2} x_2 & + \frac{1}{2} x_3 & - x_4 \\ x_7 = 1 & - x_1 \\ z = 0 & + 10 x_1 & - 57 x_2 & - 9 x_3 & - 24 x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore } 0$$

Questo dizionario coincide con quello iniziale e l'algoritmo del simplesso cicla.

2. Eseguiamo ora l'algoritmo del simplesso utilizzando la regola di pivot di Bland. Quindi, tra le variabili fuori base con costo ridotto positivo, scegliamo quella di indice minimo. Se è possibile più di una variabile uscente, scegliamo la variabile in base di indice minimo.

Le iterazioni 1–5 sono le stesse della precedente esecuzione: in ciascuna di esse, la variabile fuori base con il costo ridotto maggiore è anche quella di indice minimo tra quelle con costo ridotto positivo. Partiamo dal dizionario ottenuto all'Iterazione 5, con $\mathcal{B} = \{4, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 6\}$.

• Iterazione 6

In questo dizionario, i costi ridotti positivi sono associati a x_1 e x_6 . La regola di Bland seleziona x_1 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_4 = 0 - \frac{1}{2} x_1 \\ x_5 = 0 + 4 x_1 \\ x_7 = 1 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 - \frac{1}{2} x_1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{0 + 4 x_1}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 - x_1}_{x_7 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min\{0, 1\} = 0$, il valore di x_4 resta uguale a 0, e x_4 è l'unica riga pivot. Anche questa è un'operazione di pivot degenera.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_6 \quad \text{allora} \quad x_1 = 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_5 &= 4(3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_6) - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6 \\&= 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 + x_6 \\x_7 &= 1 - (3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_6) = 1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_6 \\z &= 22(3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_6) - 93x_2 - 21x_3 + 24x_6 \\&= -27x_2 + x_3 - 44x_4 - 20x_6\end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\begin{cases} x_1 = 0 & + & 3 & x_2 & + & & x_3 & - & 2 & x_4 & - & 2 & x_6 \\ x_5 = 0 & + & 4 & x_2 & + & 2 & x_3 & - & 8 & x_4 & + & & x_6 \\ x_7 = 1 & - & 3 & x_2 & - & & x_3 & + & 2 & x_4 & + & 2 & x_6 \\ z = 0 & - & 27 & x_2 & + & & x_3 & - & 44 & x_4 & - & 20 & x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 6\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 7**

L'unico costo ridotto positivo è quello associato a x_3 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + x_3 \\ x_5 = 0 + 2x_3 \\ x_7 = 1 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{0 + x_3 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{0 + 2x_3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \\ \underbrace{1 - x_3 \geq 0}_{x_7 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a 1, il valore di x_7 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_7 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_7 = 1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_6 \quad \text{allora} \quad x_3 = 1 - 3x_2 + 2x_4 + 2x_6 - x_7.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo un dizionario ottimo:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3x_2 + (1 - 3x_2 + 2x_4 + 2x_6 - x_7) - 2x_4 - 2x_6 = 1 - x_7 \\x_5 &= 4x_2 + 2(1 - 3x_2 + 2x_4 + 2x_6 - x_7) - 8x_4 + x_6 \\&= 2 - 2x_2 - 4x_4 + 5x_6 - 2x_7 \\z &= -27x_2 + (1 - 3x_2 + 2x_4 + 2x_6 - x_7) - 44x_4 - 20x_6 \\&= 1 - 30x_2 - 42x_4 - 18x_6 - x_7\end{aligned}$$

Il dizionario risultante è:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_3 = 1 - 3x_2 + 2x_4 + 2x_6 - x_7 \\ x_5 = 2 - 2x_2 - 4x_4 + 5x_6 - 2x_7 \\ z = 1 - 30x_2 - 42x_4 - 18x_6 - x_7 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4, 6, 7\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 1$$

Fase 0 dell'algoritmo del simplesso

Esercizio 8.1 — Fase zero dell'algoritmo del simplesso (P11)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Eseguire la fase zero dell'algoritmo del simplesso per ottenere una soluzione ammissibile e il dizionario associato del problema LP.
2. A partire dal dizionario ottenuto, eseguire l'algoritmo del simplesso per risolvere il problema LP.

Soluzione

1. Prima fase dell'algoritmo del simplesso

Scriviamo il problema ausiliario in forma standard:

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & - & x_0 & & & & & & & \\ \text{soggetto a} & - & x_0 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & - & x_0 & + & x_1 & - & x_2 & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & x_0, & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

e il suo dizionario iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_3 & = & -2 + x_0 + x_1 + x_2 \\ x_4 & = & 0 + x_0 - x_1 + x_2 \\ z & = & 0 - x_0 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$. La soluzione di base **non ammissibile** è:

$$\bar{x}_3 = -2, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Inizializzazione**

Per ottenere una soluzione ammissibile del problema ausiliario aumentiamo il valore di x_0 . Abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = -2 + x_0 \\ x_4 = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{-2 + x_0}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{x_0}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq 2 \\ x_0 \geq 0 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_0 fino a 2, il valore di x_3 sale a 0, quindi x_3 esce dalla base.

Abbiamo:

$$x_3 = -2 + x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{allora} \quad x_0 = 2 - x_1 - x_2 + x_3$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_4 = (2 - x_1 - x_2 + x_3) - x_1 + x_2 = 2 - 2x_1 + x_3$$

$$z = -(2 - x_1 - x_2 + x_3) = -2 + x_1 + x_2 - x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_1 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 2 - 2x_1 + x_3 \\ z = -2 + x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = 2, \quad \bar{x}_4 = 2, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

• **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_1 \\ x_4 = 2 - 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - x_1 \geq 0}_{x_0 \geq 0} \\ \underbrace{2 - 2x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min\{2, 1\} = 1$, il valore di x_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 2 - 2x_1 + x_3 \quad \text{allora} \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 - \left(1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 + x_3 = 1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ z &= -2 + \left(1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) + x_2 - x_3 = -1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = 1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ z = -1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = 1, \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -1$$

• **Iterazione 2**

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 1 - x_2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - x_2 \geq 0}_{x_0 \geq 0} \\ \underbrace{x_1 = 1 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

Aumentando il valore di x_2 fino a 1, il valore di x_0 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_0 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_0 = 1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad \text{allora} \quad x_2 = 1 - x_0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

Sostituendo nell'altra equazione del dizionario, otteniamo:

$$z = -1 + \left(1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_0\right) - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -x_0$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima del problema ausiliario (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 & + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 1 - x_0 & + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ z = 0 - x_0 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Attenzione

Dato un dizionario ottimo del problema ausiliario con valore ottimo zero, possiamo costruire un dizionario del problema LP originale che corrisponde a una soluzione ammissibile del problema LP originale.

Eliminando la variabile ausiliaria x_0 , otteniamo:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

Sostituendo nella funzione obiettivo del problema originale, possiamo esprimerla in funzione delle variabili fuori base x_3 e x_4 :

$$z = -2x_1 - 4x_2 = -2\left(1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 4\left(1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) = -6 - 3x_3 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = & 1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = & 1 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\ z = & -6 & - & 3x_3 & - & x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

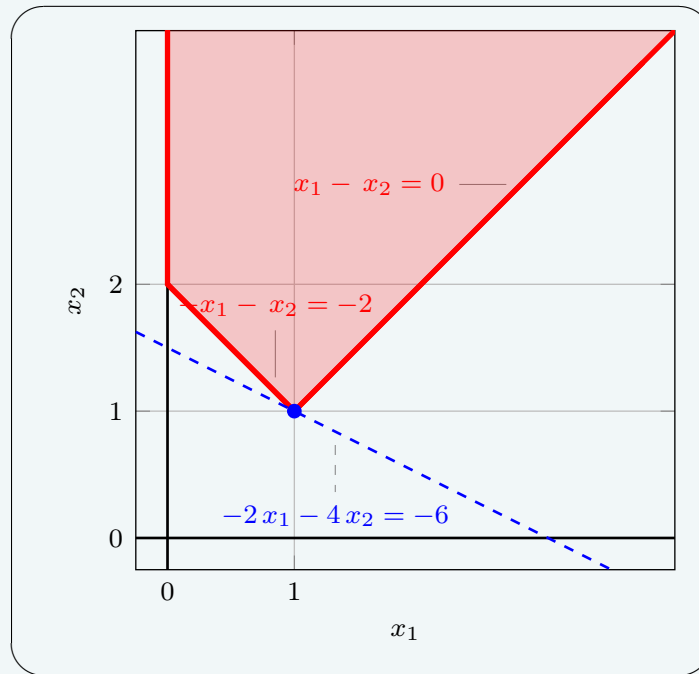
$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6$$

2. Seconda fase dell'algoritmo del simplesso

Un dizionario ottimo e una soluzione ottima del problema LP sono stati determinati nella prima fase dell'algoritmo del simplesso, quindi la seconda fase non viene eseguita.

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo $z(LP)$ è -6 .

In blu il vertice ottimo ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del simplesso. In blu tratteggiato, la curva di livello della funzione obiettivo associata al valore assunto nel vertice.

Esercizio 8.2 — Fase zero dell'algoritmo del simplesso (P21)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & x_1 & + & 2 x_2 \\
 \text{soggetto a} & - x_1 & - & x_2 \leq -2 \\
 & 4 x_1 & - & 2 x_2 \leq 7 \\
 & x_1 & + & 5 x_2 \leq 21 \\
 & x_1, & & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Domande

1. Eseguire la fase zero dell'algoritmo del simplesso per ottenere una soluzione ammissibile e il dizionario associato del problema LP.
2. A partire dal dizionario ottenuto, eseguire l'algoritmo del simplesso per risolvere il problema LP.

Soluzione

1. Prima fase dell'algoritmo del simplesso

Scriviamo il problema ausiliario in forma standard:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & - & x_0 \\
 \text{soggetto a} & - & x_0 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & = & -2 \\
 & & - & x_0 & + & 4 x_1 & - & 2 x_2 & & + & x_4 & & = & 7 \\
 & & - & x_0 & + & x_1 & + & 5 x_2 & & & + & x_5 & = & 21 \\
 & & x_0, & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

e il suo dizionario iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_3 = -2 + x_0 + x_1 + x_2 \\
 x_4 = 7 + x_0 - 4x_1 + 2x_2 \\
 x_5 = 21 + x_0 - x_1 - 5x_2 \\
 z = 0 - x_0
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$. La soluzione di base **non ammissibile** è:

$$\bar{x}_3 = -2, \quad \bar{x}_4 = 7, \quad \bar{x}_5 = 21, \quad \bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- **Inizializzazione**

Per ottenere una soluzione ammissibile del problema ausiliario aumentiamo il valore di x_0 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = -2 + x_0 \\ x_4 = 7 + x_0 \\ x_5 = 21 + x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{-2 + x_0}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{7 + x_0}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{21 + x_0}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 \geq 2 \\ x_0 \geq -7 \\ x_0 \geq -21 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_0 fino a 2, il valore di x_3 sale a 0, quindi x_3 esce dalla base.

Abbiamo:

$$x_3 = -2 + x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{allora} \quad x_0 = 2 - x_1 - x_2 + x_3$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_4 = 7 + (2 - x_1 - x_2 + x_3) - 4x_1 + 2x_2 = 9 - 5x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_5 = 21 + (2 - x_1 - x_2 + x_3) - x_1 - 5x_2 = 23 - 2x_1 - 6x_2 + x_3$$

$$z = -(2 - x_1 - x_2 + x_3) = -2 + x_1 + x_2 - x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_1 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 9 - 5x_1 + x_2 + x_3 \\ x_5 = 23 - 2x_1 - 6x_2 + x_3 \\ z = -2 + x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = 2, \quad \bar{x}_4 = 9, \quad \bar{x}_5 = 23, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

• **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_1 \\ x_4 = 9 - 5x_1 \\ x_5 = 23 - 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - x_1 \geq 0}_{x_0 \geq 0} \\ \underbrace{9 - 5x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{23 - 2x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_1 \leq \frac{9}{5} \\ x_1 \leq \frac{23}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \left\{ 2, \frac{9}{5}, \frac{23}{2} \right\} = \frac{9}{5}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = 9 - 5x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{allora} \quad x_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 - \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \right) - x_2 + x_3 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_5 &= 23 - 2 \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \right) - 6x_2 + x_3 = \frac{97}{5} - \frac{32}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ z &= -2 + \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \right) + x_2 - x_3 = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_5 = \frac{97}{5} - \frac{32}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ z = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{5}, \quad \bar{x}_1 = \frac{9}{5}, \quad \bar{x}_5 = \frac{97}{5}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -\frac{1}{5}$$

• **Iterazione 2**

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}x_2 \\ x_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2 \\ x_5 = \frac{97}{5} - \frac{32}{5}x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{6}{5}x_2}_{x_0 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_2}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{97}{5} - \frac{32}{5}x_2}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{1}{6} \\ x_2 \geq -9 \\ x_2 \leq \frac{97}{32} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ \frac{1}{6}, \frac{97}{32} \right\} = \frac{1}{6}$, il valore di x_0 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_0 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_0 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \quad \text{allora} \quad x_2 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right) + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}x_0 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4$$

$$x_5 = \frac{97}{5} - \frac{32}{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right) + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{55}{3} + \frac{16}{3}x_0 - \frac{11}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

$$z = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \right) - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = -x_0$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima del problema ausiliario (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}x_0 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}x_0 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 = \frac{55}{3} + \frac{16}{3}x_0 - \frac{11}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ z = 0 - x_0 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{11}{6}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{55}{3}, \quad \tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Attenzione

Dato un dizionario ottimo del problema ausiliario con valore ottimo zero, possiamo costruire un dizionario del problema LP originale che corrisponde a una soluzione ammissibile del problema LP originale.

Eliminando la variabile ausiliaria x_0 , otteniamo:

$$x_1 = \frac{11}{6} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4$$

$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4$$

$$x_5 = \frac{55}{3} - \frac{11}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

Sostituendo nella funzione obiettivo del problema originale, possiamo esprimerla in funzione delle variabili fuori base x_3 e x_4 :

$$z = x_1 + 2x_2 = \frac{11}{6} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + 2\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4\right) = \frac{13}{6} + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo il seguente dizionario del problema LP originale:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 = \frac{55}{3} - \frac{11}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ z = \frac{13}{6} + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{11}{6}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{6}, \quad \bar{x}_5 = \frac{55}{3}, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{13}{6}$$

2. Seconda fase dell'algoritmo del simplesso

Eseguiamo l'algoritmo del simplesso per il problema LP originale.

- **Inizializzazione**

Partiamo dal dizionario ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del semplice.

- **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} + \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_5 = \frac{55}{3} - \frac{11}{3}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{\frac{11}{6} + \frac{1}{3}x_3 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_3 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{55}{3} - \frac{11}{3}x_3 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \geq -\frac{11}{3} \\ x_3 \geq -\frac{1}{4} \\ x_3 \leq 5 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a 5, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = \frac{55}{3} - \frac{11}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \quad \text{allora} \quad x_3 = 5 - \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = \frac{11}{6} + \frac{1}{3} \left(5 - \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_5 \right) - \frac{1}{6}x_4 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}x_4 - \frac{1}{11}x_5$$

$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \left(5 - \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_5 \right) + \frac{1}{6}x_4 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}x_4 - \frac{2}{11}x_5$$

$$z = \frac{13}{6} + \frac{5}{3} \left(5 - \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_5 \right) + \frac{1}{6}x_4 = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}x_4 - \frac{5}{11}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

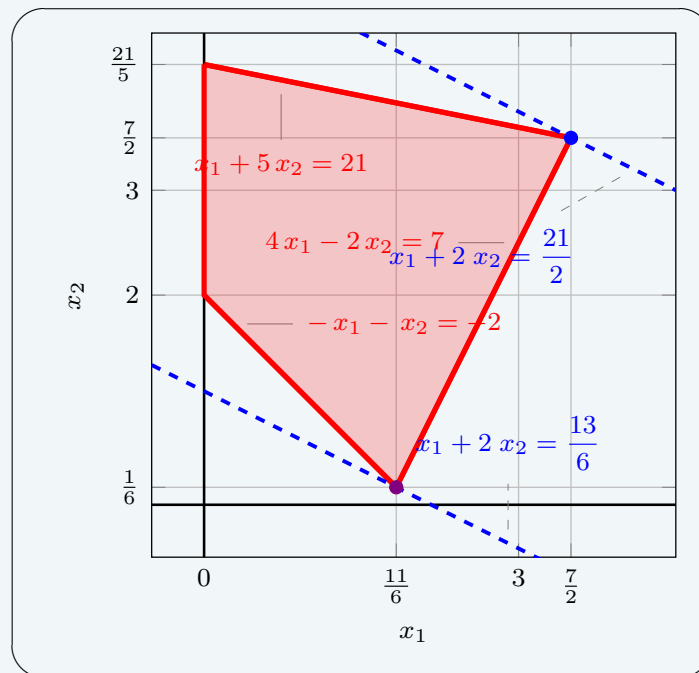
$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}x_4 - \frac{1}{11}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}x_4 - \frac{2}{11}x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11}x_4 - \frac{3}{11}x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}x_4 - \frac{5}{11}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_3 = 5, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{21}{2}$.

In viola il primo vertice ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del simplesso, in blu quello ottimo. In blu tratteggiato, le curve di livello della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei due vertici.

Esercizio 8.3 — Fase zero dell'algoritmo del simplesso (P22)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
 \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Domande

1. Eseguire la fase zero dell'algoritmo del simplesso per ottenere una soluzione ammissibile e il dizionario associato del problema LP.
2. A partire dal dizionario ottenuto, eseguire l'algoritmo del simplesso per risolvere il problema LP.

Soluzione

1. Prima fase dell'algoritmo del simplesso

Scriviamo il problema ausiliario in forma standard:

$$\begin{array}{llllllllll}
 \max & - & x_0 & & & & & & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_0 & + & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\
 & - & x_0 & - & x_1 & - & x_2 & & + & x_4 & = & -3 \\
 & - & x_0 & + & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_5 & = & 4 \\
 & x_0, & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

e il suo dizionario iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_3 = -1 + x_0 - x_1 + x_2 \\
 x_4 = -3 + x_0 + x_1 + x_2 \\
 x_5 = 4 + x_0 - 2x_1 - x_2 \\
 z = 0 - x_0
 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$. La soluzione di base **non ammissibile** è:

$$\bar{x}_3 = -1, \quad \bar{x}_4 = -3, \quad \bar{x}_5 = 4, \quad \bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- Inizializzazione**

Per ottenere una soluzione ammissibile del problema ausiliario aumentiamo il valore di x_0 . Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = -1 + x_0 \\ x_4 = -3 + x_0 \\ x_5 = 4 + x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{-1 + x_0 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{-3 + x_0 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{4 + x_0 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 \geq 1 \\ x_0 \geq 3 \\ x_0 \geq -4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_0 fino a 3, il valore di x_4 sale a 0, quindi x_4 esce dalla base.

Abbiamo:

$$x_4 = -3 + x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{allora} \quad x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = -1 + (3 - x_1 - x_2 + x_4) - x_1 + x_2 = 2 - 2x_1 + x_4$$

$$x_5 = 4 + (3 - x_1 - x_2 + x_4) - 2x_1 - x_2 = 7 - 3x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$z = -(3 - x_1 - x_2 + x_4) = -3 + x_1 + x_2 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_4 \\ x_3 = 2 - 2x_1 + x_4 \\ x_5 = 7 - 3x_1 - 2x_2 + x_4 \\ z = -3 + x_1 + x_2 - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = 3, \quad \bar{x}_3 = 2, \quad \bar{x}_5 = 7, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -3$$

- Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 3 - x_1 \\ x_3 = 2 - 2x_1 \\ x_5 = 7 - 3x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{3 - x_1 \geq 0}_{x_0 \geq 0} \\ \underbrace{2 - 2x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{7 - 3x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \leq \frac{7}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a 1, il valore di x_3 scende a 0, quindi x_3 esce dalla base.

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_4 \quad \text{allora} \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_0 = 3 - \left(1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3\right) - x_2 + x_4 = 2 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_5 = 7 - 3\left(1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3\right) - 2x_2 + x_4 = 4 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -3 + \left(1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3\right) + x_2 - x_4 = -2 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 4 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ z = -2 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = 2, \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_5 = 4, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

• Iterazione 2

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_2 \\ x_5 = 4 - 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{2 - x_2 \geq 0}_{x_0 \geq 0} \\ \underbrace{4 - 2x_2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min\{2, 2\} = 2$, il valore sia di x_0 sia di x_5 scende a 0. Scegliamo x_0 come variabile uscente, in modo che la variabile ausiliaria esca dalla base (di conseguenza, x_5 resta in base con valore 0).

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_0 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_0 = 2 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad \text{allora} \quad x_2 = 2 - x_0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned} x_5 &= 4 - 2 \left(2 - x_0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \right) + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2x_0 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ z &= -2 + \left(2 - x_0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \right) - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -x_0 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima del problema ausiliario (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} x_1 & = & 1 & & -\frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 & = & 2 & - & x_0 & + & \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 & = & 0 & + & 2x_0 & + & \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ z & = & 0 & - & x_0 & & \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \text{di valore } 0$$

Attenzione

Dato un dizionario ottimo del problema ausiliario con valore ottimo zero, possiamo costruire un dizionario del problema LP originale che corrisponde a una soluzione ammissibile del problema LP originale.

Eliminando la variabile ausiliaria x_0 , mantenendo le variabili in base x_1, x_2, x_5 , otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= 2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{aligned}$$

Sostituendo nella funzione obiettivo del problema originale, possiamo esprimerla in funzione delle variabili fuori base x_3 e x_4 :

$$z = 3 \left(1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \right) + \left(2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \right) = 5 - x_3 + 2x_4$$

Di conseguenza, abbiamo il seguente dizionario del problema LP originale:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 0 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ z = 5 - x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 2, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore } 5$$

2. Seconda fase dell'algoritmo del simplesso

Eseguiamo l'algoritmo del simplesso per il problema LP originale.

- **Inizializzazione**

Partiamo dal dizionario ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del simplesso.

- **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_4 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = -\frac{3}{2}x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0}_{x_1 \geq 0} \\ \underbrace{2 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0}_{x_2 \geq 0} \\ \underbrace{-\frac{3}{2}x_4 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \geq -2 \\ x_4 \geq -4 \\ x_4 \leq 0 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_4 fino a 0 (un'operazione di pivot **degenere**, $t_m = 0$), il valore di x_5 resta 0: l'unico vincolo su x_4 proviene da $x_5 \geq 0$, quindi x_5 esce dalla base.

Abbiamo quindi che:

x_4 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \quad \text{allora} \quad x_4 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 \right) = 1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 \right) = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$$

$$z = 5 - x_3 + 2 \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 \right) = 5 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

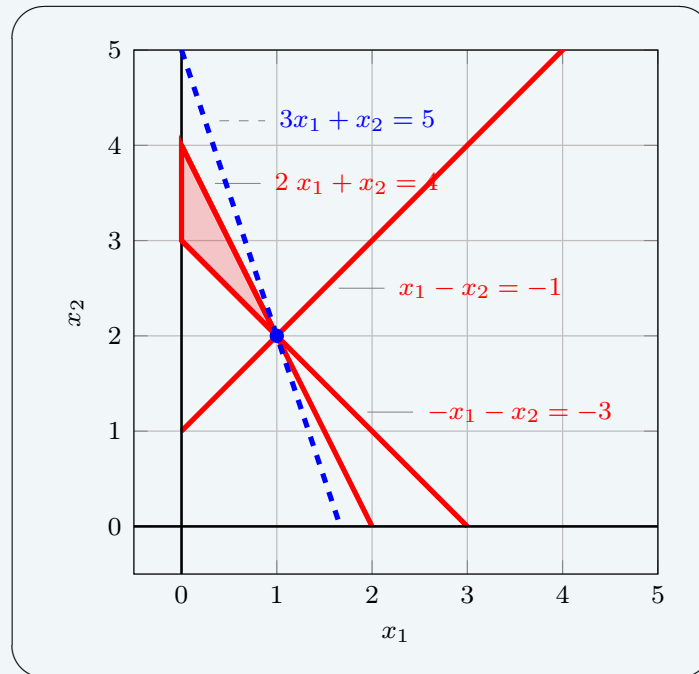
$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3} x_3 & - & \frac{1}{3} x_5 \\ x_2 & = & 2 & + & \frac{2}{3} x_3 & - & \frac{1}{3} x_5 \\ x_4 & = & 0 & + & \frac{1}{3} x_3 & - & \frac{2}{3} x_5 \\ z & = & 5 & - & \frac{1}{3} x_3 & - & \frac{4}{3} x_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore } 5$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 5.

In blu il vertice ottimo ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del simplesso. In blu tratteggiato, la curva di livello della funzione obiettivo associata al valore assunto nel vertice.

Esercizio 8.4 — Fase zero dell'algoritmo del simplesso (P51)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & - & 2x_1 & - & x_2 & & & \\ \text{soggetto a} & & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \leq -5 \\ & & -3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq -2 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Eseguire la fase zero dell'algoritmo del simplesso per ottenere una soluzione ammissibile e il dizionario associato del problema LP.
2. A partire dal dizionario ottenuto, eseguire l'algoritmo del simplesso per risolvere il problema LP.

Soluzione

1. Prima fase dell'algoritmo del simplesso

Scriviamo il problema ausiliario in forma standard:

$$\begin{array}{llllllllllll}
 \max & - & x_0 & & & & & & & & & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_0 & + & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & & = & -5 \\
 & & - & x_0 & - & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & + & x_5 & = & -2 \\
 & & & & x_0, & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

e il suo dizionario iniziale è:

$$\begin{cases}
 x_4 = -5 + x_0 - x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 x_5 = -2 + x_0 + 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\
 z = 0 - x_0
 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3\}$. La soluzione di base **non ammissibile** è:

$$\bar{x}_4 = -5, \quad \bar{x}_5 = -2 \quad \bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• Inizializzazione

Per ottenere una soluzione di base ammissibile del problema ausiliario aumentiamo il valore di x_0 . Abbiamo:

$$\begin{cases}
 x_4 = -5 + x_0 \\
 x_5 = -2 + x_0
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 \underbrace{-5 + x_0 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\
 \underbrace{-2 + x_0 \geq 0}_{x_5 \geq 0}
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 x_0 \geq 5 \\
 x_0 \geq 2
 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_0 fino a 5, il valore di x_4 sale a 0, quindi x_4 esce dalla base. Questa variabile è la variabile di scarto associata al termine noto negativo di valore assoluto maggiore. Abbiamo:

$$x_4 = -5 + x_0 - x_1 + x_2 + 3x_3 \quad \text{allora} \quad x_0 = 5 + x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = -2 + (5 + x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4) + 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 + 4x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$z = 0 - (5 + x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4) = -5 - x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_0 = 5 + x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \\ x_5 = 3 + 4x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 \\ z = -5 - x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_0 = 5, \quad \bar{x}_5 = 3, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -5$$

• Iterazione 1

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 5 - x_2 \\ x_5 = 3 + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{5 - x_2 \geq 0}_{x_0 \geq 0} \\ \underbrace{3 + x_2 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \leq 5 \\ x_2 \geq -3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a 5, il valore di x_0 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_0 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_0 = 5 + x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \quad \text{allora} \quad x_2 = 5 - x_0 + x_1 - 3x_3 + x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_5 = 3 + 4x_1 + (5 - x_0 + x_1 - 3x_3 + x_4) - 5x_3 + x_4 = 8 - x_0 + 5x_1 - 8x_3 + 2x_4$$

$$z = -5 - x_1 + (5 - x_0 + x_1 - 3x_3 + x_4) + 3x_3 - x_4 = -x_0$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima del problema ausiliario (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_0 + x_1 - 3x_3 + x_4 \\ x_5 = 8 - x_0 + 5x_1 - 8x_3 + 2x_4 \\ z = 0 - x_0 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 3, 4\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_2 = 5, \quad \tilde{x}_5 = 8, \quad \tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

Attenzione

Dato un dizionario ottimo del problema ausiliario con valore ottimo zero, possiamo costruire un dizionario del problema LP originale che corrisponde a una soluzione ammissibile del problema LP originale.

Eliminando la variabile ausiliaria x_0 , otteniamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 + x_1 - 3x_3 + x_4 \\ x_5 &= 8 + 5x_1 - 8x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

Sostituendo nella funzione obiettivo del problema originale, possiamo esprimerla in funzione delle variabili fuori base x_1, x_3 e x_4 :

$$z = -2x_1 - (5 + x_1 - 3x_3 + x_4) = -5 - 3x_1 + 3x_3 - x_4$$

Di conseguenza, abbiamo il seguente dizionario del problema LP originale:

$$\begin{cases} x_2 = 5 + x_1 - 3x_3 + x_4 \\ x_5 = 8 + 5x_1 - 8x_3 + 2x_4 \\ z = -5 - 3x_1 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3, 4\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = 5, \quad \bar{x}_5 = 8, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -5$$

2. Seconda fase dell'algoritmo del simplesso

Eseguiamo l'algoritmo del simplesso per il problema LP originale.

- **Inizializzazione**

Partiamo dal dizionario ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del simplesso.

- **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_3 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_2 = 5 - 3x_3 \\ x_5 = 8 - 8x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{5 - 3x_3 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{8 - 8x_3 \geq 0}_{x_3 \leq 1} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \leq \frac{5}{3} \\ x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_3 fino a 1, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_3 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = 8 + 5x_1 - 8x_3 + 2x_4 \quad \text{allora} \quad x_3 = 1 + \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_2 = 5 + x_1 - 3 \left(1 + \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}x_5 \right) + x_4 = 2 - \frac{7}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}x_5$$

$$z = -5 - 3x_1 + 3 \left(1 + \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}x_5 \right) - x_4 = -2 - \frac{9}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{8}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima (non è possibile alcun ulteriore miglioramento) e questo è un dizionario ottimo:

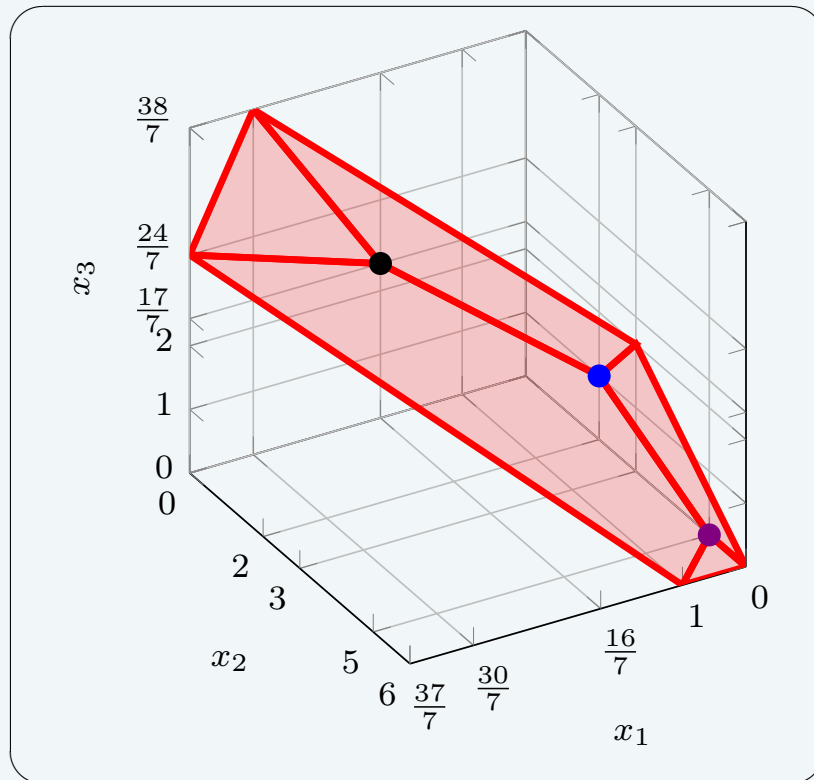
$$\begin{cases} x_2 = 2 - \frac{7}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}x_5 \\ x_3 = 1 + \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}x_5 \\ z = -2 - \frac{9}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{8}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base ottima è:

$$\tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad -2$$

Soluzione grafica:

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1$$

il valore ottimo $z(LP)$ è -2 .

In viola il primo vertice ottenuto dalla prima fase dell'algoritmo del simplesso, in blu quello ottimo.

SageMath Code: 3D Polyhedra (<https://sagecell.sagemath.org/>)

```
# Define the polyhedron using inequalities (Hyperplane Representation)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (-5, -1, 1, 3),      # (-1, 1, 3) x - 5 >= 0
    (-2, 3, 2, -2),      # (3, 2, -2) x - 2 >= 0
    (0, 1, 0, 0),        # (1, 0, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 1, 0),        # (0, 1, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 0, 1)         # (0, 0, 1) x + 0 >= 0
])

# Display the inequalities of the polyhedron
p.Hrepresentation()

# Display the extreme points and extreme rays of the polyhedron
p.Vrepresentation()

# Plot the polyhedron (3D)
p.plot()
```