



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Esercizi 1 — Funzioni lineari, poliedri e problemi di programmazione lineare

Esercizi svolti su semispazi e poliedri, problemi di ottimizzazione lineare in una variabile, metodo grafico ed equivalenze.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

2	Semispazi e poliedri	2
2.1	Approfondimento: disegnare i poliedri con SageMath	18
3	Problemi di ottimizzazione lineare	20
4	Problemi di programmazione lineare	29
5	Esiti possibili e formulazioni equivalenti	46
5.1	Metodo grafico	46
5.2	Equivalenze	50



Semispazi e poliedri

Negli esercizi di questo capitolo il punto di intersezione di due iperpiani di supporto in $\mathbb{R}^2$ si calcola risolvendo un sistema di due equazioni lineari in due variabili, con la seguente formula:

Dati $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, se $(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \neq 0$, abbiamo:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.1 — Poliedri (P_2)

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} -4 x_1 + 10 x_2 &\leq 35 \\ 3 x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Domande

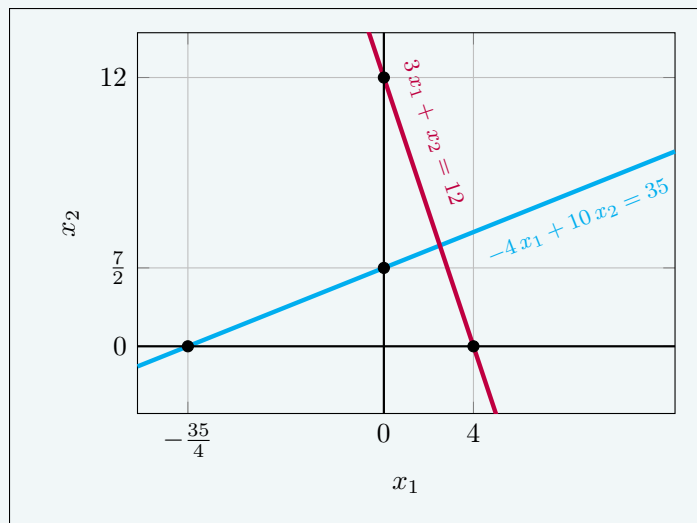
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?

Soluzione

1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{array}{rclcl}
 -4 x_1 & + & 10 x_2 & = & 35 & \begin{pmatrix} -\frac{35}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \\
 3 x_1 & + & x_2 & = & 12 & \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\
 x_1 & & & = & 0 \\
 & & x_2 & = & 0
 \end{array}$$

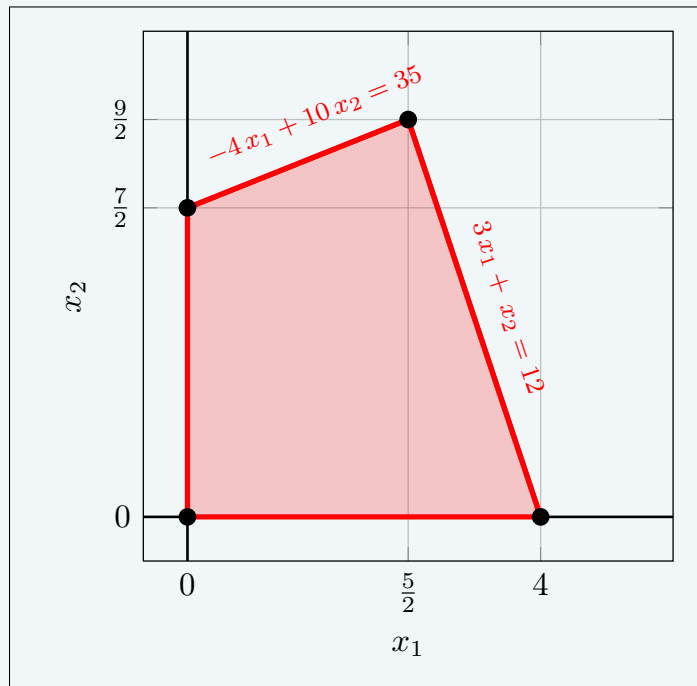
Il loro grafico è mostrato di seguito.



Calcoliamo il punto di intersezione:

$$\begin{cases} -4 x_1 + 10 x_2 = 35 \\ 3 x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35 \cdot 1 - 10 \cdot 12}{(-4) \cdot 1 - 10 \cdot 3} \\ \frac{(-4) \cdot 12 - 35 \cdot 3}{(-4) \cdot 1 - 10 \cdot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

2. Il poliedro, dato dall'intersezione dei semispazi, è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $\mathbf{x} \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P è limitato poiché per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in P$, abbiamo ad esempio:

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{9}{2}$$

Di conseguenza questo poliedro è anche un politopo.

Esercizio 2.2 — Poliedri (P_{10})

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 -x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\
 3x_1 - 2x_2 &\leq 8 \\
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Domande

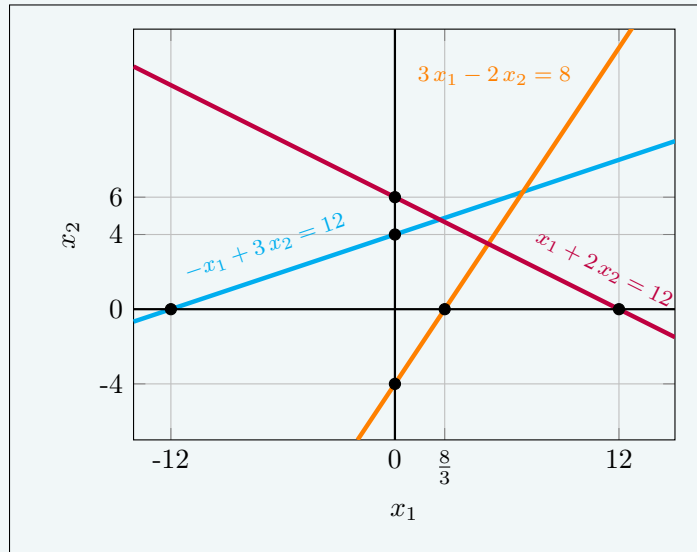
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?
3. Cosa succede se aggiungiamo al poliedro il vincolo $x_1 \geq 5$? E se aggiungiamo il vincolo $x_1 \leq 5$?

Soluzione

1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{aligned}
 -x_1 + 3x_2 &= 12 & \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 x_1 + 2x_2 &= 12 & \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 3x_1 - 2x_2 &= 8 & \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 x_1 &= 0 \\
 x_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Il loro grafico è mostrato di seguito.

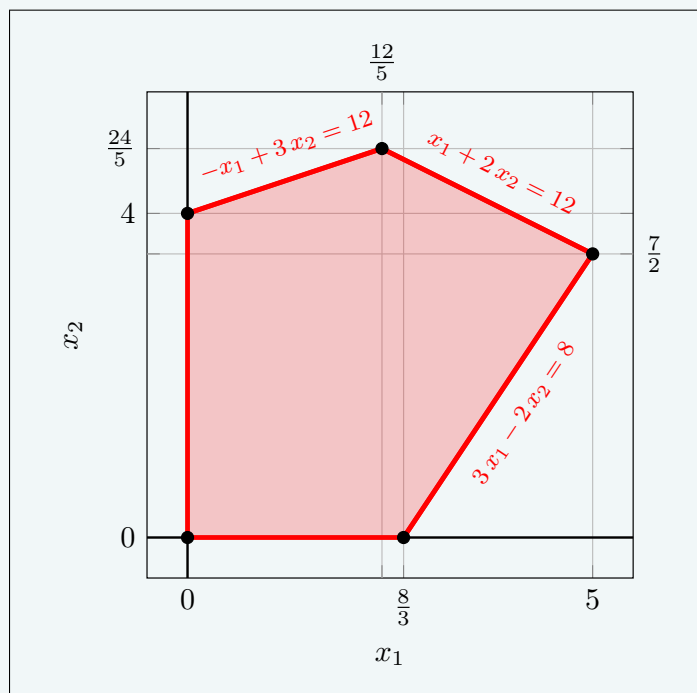


Calcoliamo i punti di intersezione:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12 \cdot 2 - 3 \cdot 12}{(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1} \\ \frac{(-1) \cdot 12 - 12 \cdot 1}{(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12 \cdot (-2) - 2 \cdot 8}{1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3} \\ \frac{1 \cdot 8 - 12 \cdot 3}{1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

2. Il poliedro, dato dall'intersezione dei semispazi, è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $x \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P è limitato poiché per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in P$, abbiamo ad esempio:

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{24}{5}$$

Di conseguenza questo poliedro è anche un politopo.

3. Se aggiungiamo il vincolo $x_1 \geq 5$ il poliedro si riduce al punto $(5, \frac{7}{2})$. Se aggiungiamo il vincolo $x_1 \leq 5$ il poliedro non cambia.

Esercizio 2.3 — Poliedri (P21)

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^2$:

$$-x_1 - x_2 \leq -2$$

$$4x_1 - 2x_2 \leq 7$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 21$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Domande

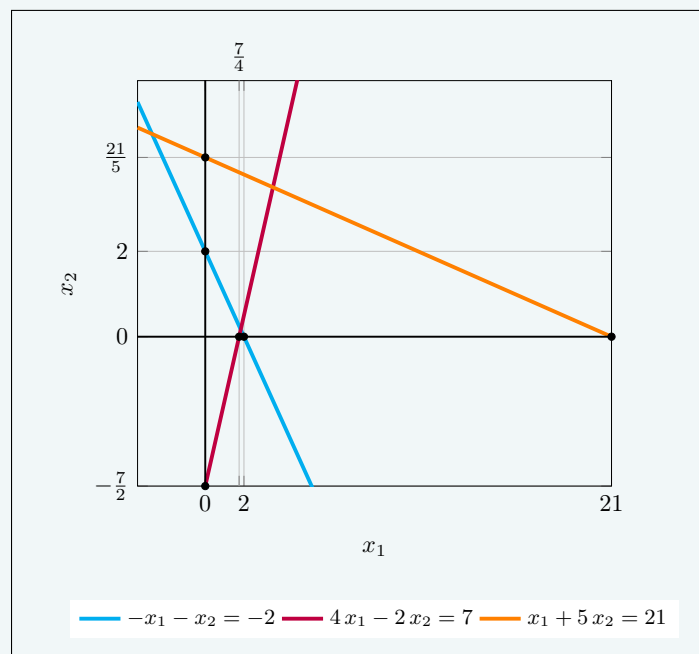
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?

Soluzione

1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{array}{rclcl}
 -x_1 & - & x_2 & = & -2 & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 4x_1 & - & 2x_2 & = & 7 & \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \\
 x_1 & + & 5x_2 & = & 21 & \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{21}{5} \end{pmatrix} \\
 x_1 & & & = & 0 \\
 & & x_2 & = & 0
 \end{array}$$

Il loro grafico è mostrato di seguito.

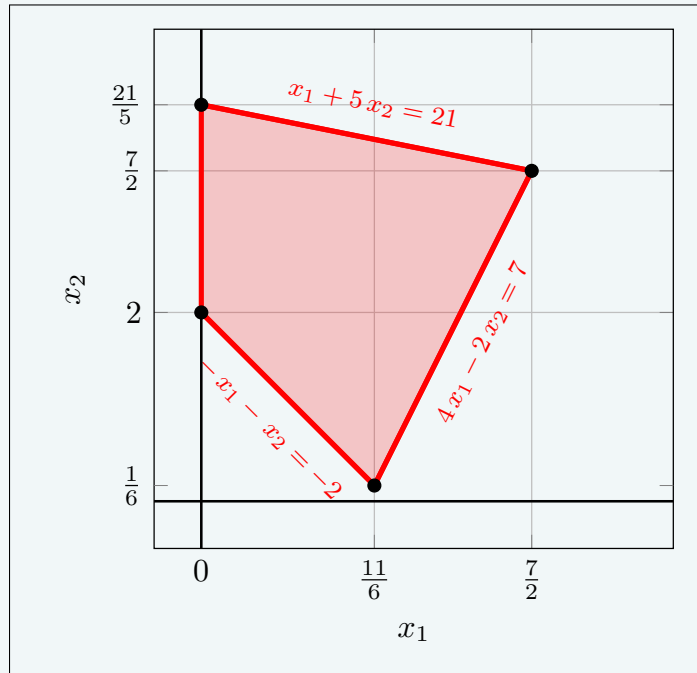


Calcoliamo i punti di intersezione:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 21 \\ 4x_1 - 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21 \cdot (-2) - 5 \cdot 7}{1 \cdot (-2) - 5 \cdot 4} \\ \frac{1 \cdot 7 - 21 \cdot 4}{1 \cdot (-2) - 5 \cdot 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-2) \cdot (-2) - (-1) \cdot 7}{(-1) \cdot (-2) - (-1) \cdot 4} \\ \frac{(-1) \cdot 7 - (-2) \cdot 4}{(-1) \cdot (-2) - (-1) \cdot 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2. Il poliedro, dato dall'intersezione dei semispazi, è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $x \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P è limitato poiché per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in P$, abbiamo ad esempio:

$$0 \leq x_1 \leq \frac{7}{2}$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{21}{5}$$

Di conseguenza questo poliedro è anche un politopo.

Esercizio 2.4 — Poliedri (P_{41})

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\
 x_2 &\leq 2 \\
 x_3 &\leq 3 \\
 3x_1 + x_3 &\leq 6 \\
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 0 \\
 x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Domande

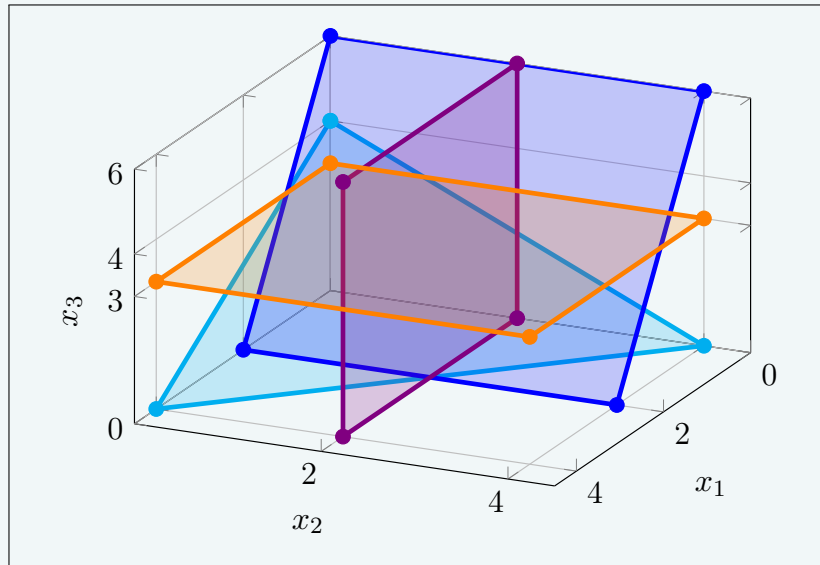
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?

Soluzione

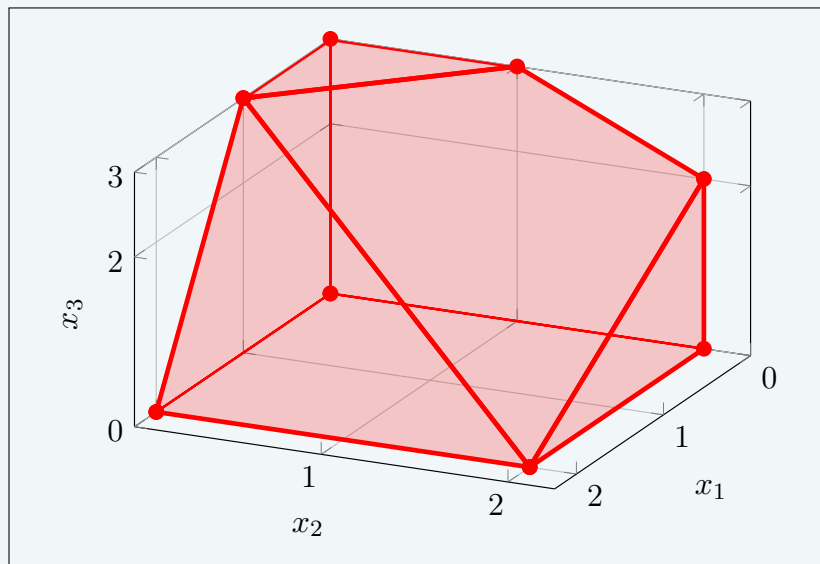
1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &= 4 & \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 x_2 &= 2 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 x_3 &= 3 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 3x_1 + x_3 &= 6 & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 x_1 &= 0 & & \\
 x_2 &= 0 & & \\
 x_3 &= 0 & &
 \end{aligned}$$

Il loro grafico è mostrato di seguito.



2. Il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi in $\mathbb{R}^3$ è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $x \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P è limitato poiché per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in P$, abbiamo ad esempio:

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_3 \leq 3$$

Di conseguenza questo poliedro è anche un politopo.

Esercizio 2.5 — Poliedri (P42)

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Domande

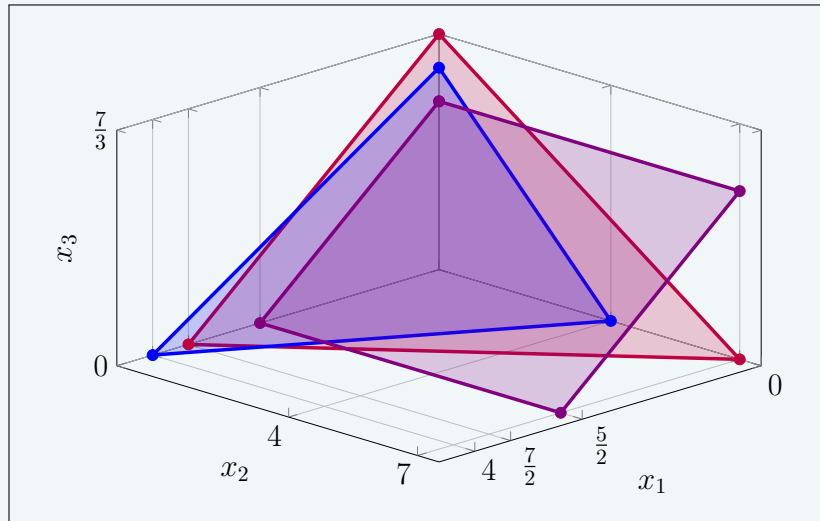
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?

Soluzione

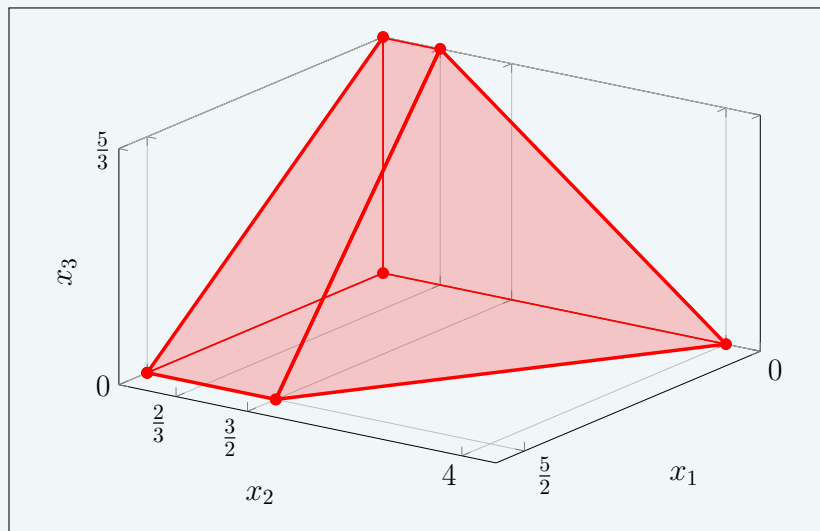
1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 & \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 2x_1 + 3x_3 &= 5 & \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 & \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Il loro grafico è mostrato di seguito.



2. Il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi in $\mathbb{R}^3$ è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $x \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P è limitato poiché per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in P$, abbiamo ad esempio:

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

Di conseguenza questo poliedro è anche un politopo.

Esercizio 2.6 — Poliedri (P44)

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Domande

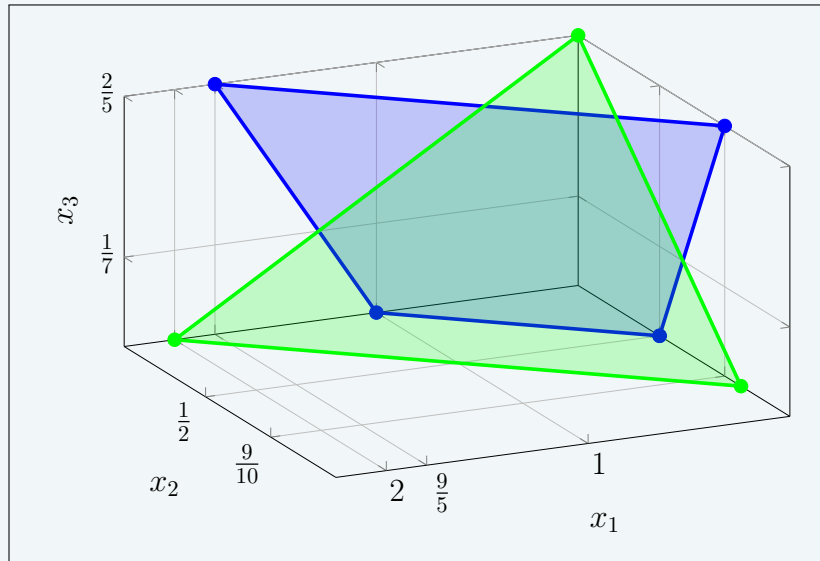
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?

Soluzione

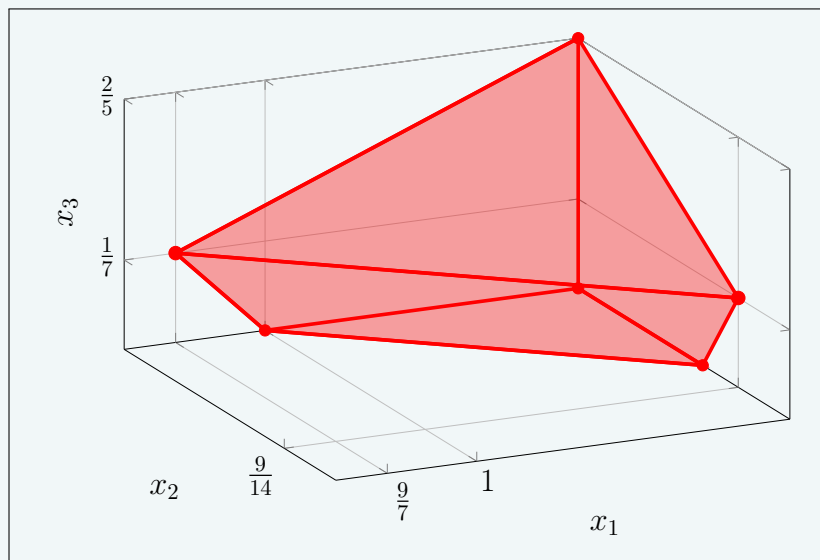
1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Il loro grafico è mostrato di seguito.



2. Il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi in $\mathbb{R}^3$ è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $x \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P è limitato poiché per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in P$, abbiamo ad esempio:

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

Di conseguenza questo poliedro è anche un politopo.

Esercizio 2.7 — Poliedri (P51)

Consideriamo i seguenti semispazi in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &\leq -5 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq -2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Domande

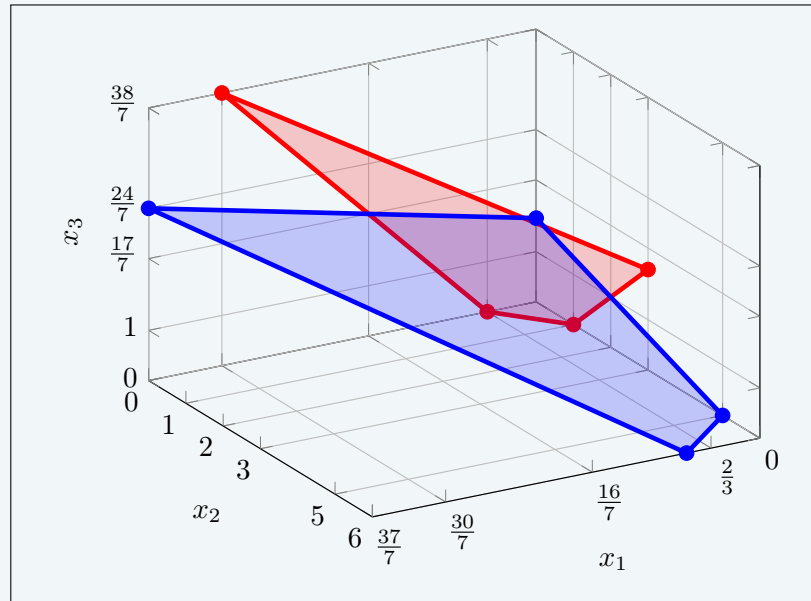
1. Disegnare i loro iperpiani di supporto.
2. Disegnare il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi. È un politopo?

Soluzione

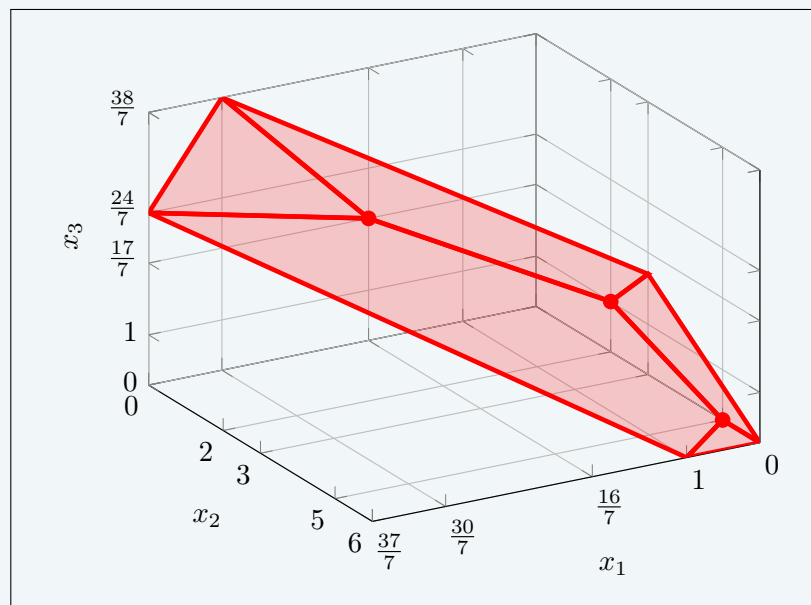
1. Gli iperpiani di supporto associati ai semispazi e i loro punti di intersezione con gli assi sono:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 & \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -2 & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Il loro grafico è mostrato di seguito.



2. Il poliedro dato dall'intersezione dei semispazi in $\mathbb{R}^3$ è:



Un poliedro è un **politopo** se è limitato (definizioni di poliedro limitato e di politopo nel capitolo «Semispazi e poliedri»); equivalentemente, se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tali che $\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j$ per ogni $x \in P$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Questo poliedro P non è limitato, di conseguenza non è un politopo.

2.1 Approfondimento: disegnare i poliedri con SageMath

- I poliedri degli esercizi si possono disegnare con SageMath, utilizzabile online all'indirizzo <https://sagecell.sagemath.org/>, senza installare nulla.
- Un poliedro è dato dall'elenco dei suoi semispazi (la **H-rappresentazione**). SageMath scrive ogni semispazio nella forma

$$b + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq 0$$

e lo descrive con la tupla $(b, a_1, a_2, \dots, a_n)$. Un vincolo $\mathbf{a}'\mathbf{x} \leq b$ viene prima scritto come $b - \mathbf{a}'\mathbf{x} \geq 0$, quindi la sua tupla è $(b, -a_1, \dots, -a_n)$; un vincolo di non negatività $x_j \geq 0$ ha la tupla con 0 in prima posizione e 1 in posizione $j + 1$.

- Il metodo `Hrepresentation()` elenca i semispazi, `Vrepresentation()` elenca i punti estremi e i raggi estremi, e `plot()` disegna il poliedro (in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$).

Esempio in $\mathbb{R}^2$ (esercizio con il poliedro $P2$).

Codice SageMath: un poliedro in $\mathbb{R}^2$

```
# Define the polyhedron using inequalities (Hyperplane Representation)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (35, 4, -10),      # ( 4, -10) x + 35 >= 0
    (12, -3, -1),      # (-3, -1) x + 12 >= 0
    (0, 1, 0),         # ( 1, 0) x + 0 >= 0
    (0, 0, 1)          # ( 0, 1) x + 0 >= 0
])

# Display the inequalities of the polyhedron
p.Hrepresentation()

# Display the extreme points and extreme rays of the polyhedron
p.Vrepresentation()

# Plot the polyhedron (2D)
p.plot()
```

Esempio in $\mathbb{R}^3$ (esercizio con il poliedro $P41$).

Codice SageMath: un poliedro in $\mathbb{R}^3$

```
# Define the polyhedron using inequalities (Hyperplane Representation)
p = Polyhedron(ieqs=[
    (4, -1, -1, -1),   # (-1, -1, -1) x + 4 >= 0
    (2, 0, -1, 0),     # (0, -1, 0) x + 2 >= 0
    (3, 0, 0, -1),     # (0, 0, -1) x + 3 >= 0
    (6, -3, 0, -1),    # (-3, 0, -1) x + 6 >= 0
])
```

```

(0, 1, 0, 0), # (1, 0, 0) x + 0 >= 0
(0, 0, 1, 0), # (0, 1, 0) x + 0 >= 0
(0, 0, 0, 1) # (0, 0, 1) x + 0 >= 0
])

# Display the inequalities of the polyhedron
p.Hrepresentation()

# Display the extreme points and extreme rays of the polyhedron
p.Vrepresentation()

# Plot the polyhedron (3D)
p.plot()

```

Gli altri poliedri di questo capitolo si disegnano allo stesso modo, cambiando l'elenco delle tuple.

Problemi di ottimizzazione lineare

Esercizio 3.1 — Problema di ottimizzazione lineare (E1)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto 3x - 2 \quad \text{e} \quad F = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \right\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right].$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

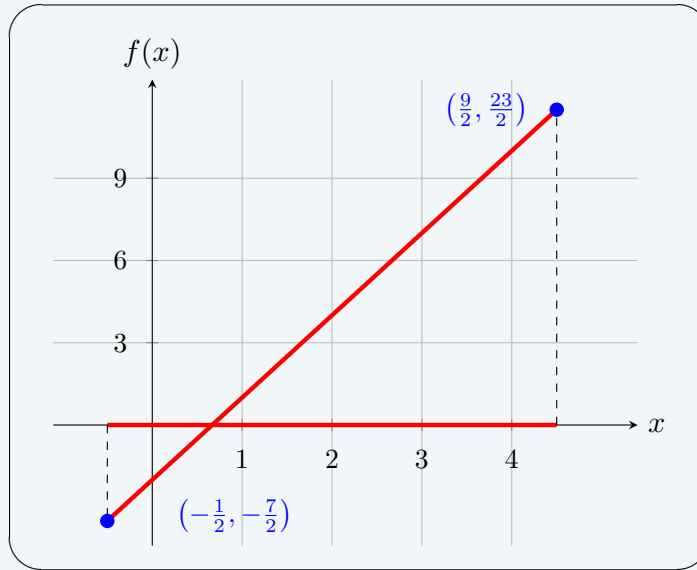
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ 3x - 2 \text{ soggetto a } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \right\}$$

$$\max \left\{ 3x - 2 \text{ soggetto a } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono segnate in blu.



3. La regione ammissibile è l'intervallo $F = [-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ e la funzione lineare f è strettamente crescente: se x aumenta di 1, $f(x)$ aumenta di 3.

- Per la forma di minimo, poiché per ogni x ammissibile abbiamo $x \geq -\frac{1}{2}$ e quindi $f(x) = 3x - 2 \geq -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} = f(-\frac{1}{2})$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(LP) = \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{7}{2}.$$

- Per la forma di massimo, poiché per ogni x ammissibile abbiamo $x \leq \frac{9}{2}$ e quindi $f(x) = 3x - 2 \leq \frac{27}{2} - 2 = \frac{23}{2} = f(\frac{9}{2})$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(LP) = \left(\frac{9}{2}\right) \quad \text{e} \quad z(LP) = \frac{23}{2}.$$

Esercizio 3.2 — Problema di ottimizzazione lineare (E2)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: x \mapsto 3 - \frac{1}{2}x \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\} = [-2, +\infty).$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

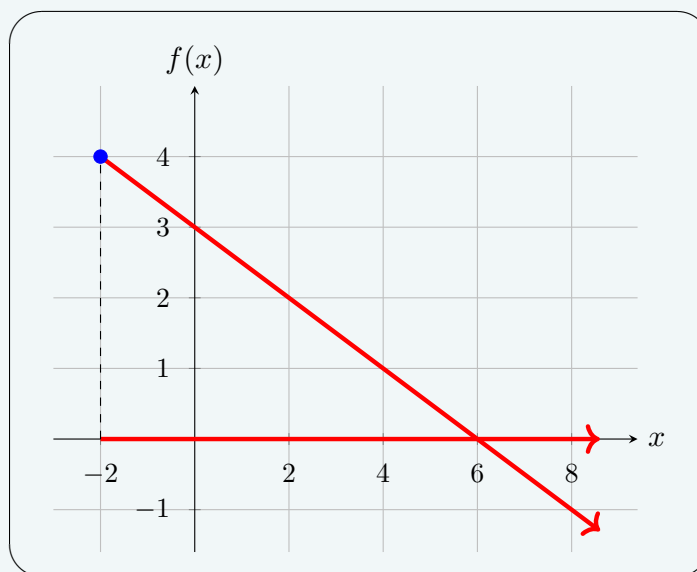
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ 3 - \frac{1}{2}x \text{ soggetto a } x \geq -2 \right\}$$

$$\max \left\{ 3 - \frac{1}{2}x \text{ soggetto a } x \geq -2 \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono segnate in blu. La regione ammissibile è una semiretta: le frecce indicano che il grafico e la regione ammissibile proseguono verso destra.



3. La regione ammissibile è la semiretta $F = [-2, +\infty)$ e la funzione lineare f è strettamente decrescente: se x aumenta di 2, $f(x)$ diminuisce di 1.

- Per la forma di minimo, la funzione obiettivo decresce indefinitamente sulla regione ammissibile: per ogni $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ il punto $x = 2k$ è ammissibile e $f(2k) = 3 - k$. Il problema è **illimitato**, non esiste soluzione ottima e

$$\arg \min \left\{ 3 - \frac{1}{2}x \text{ soggetto a } x \geq -2 \right\} = \emptyset \quad \text{e} \quad z(LP) = -\infty.$$

- Per la forma di massimo, poiché per ogni x ammissibile abbiamo $x \geq -2$ e quindi $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x \leq 3 + 1 = 4 = f(-2)$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(LP) = (-2) \quad \text{e} \quad z(LP) = 4.$$

Esercizio 3.3 — Problema di ottimizzazione lineare (E3)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto 2x + 1 \quad \text{e} \quad F = \mathbb{R}.$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

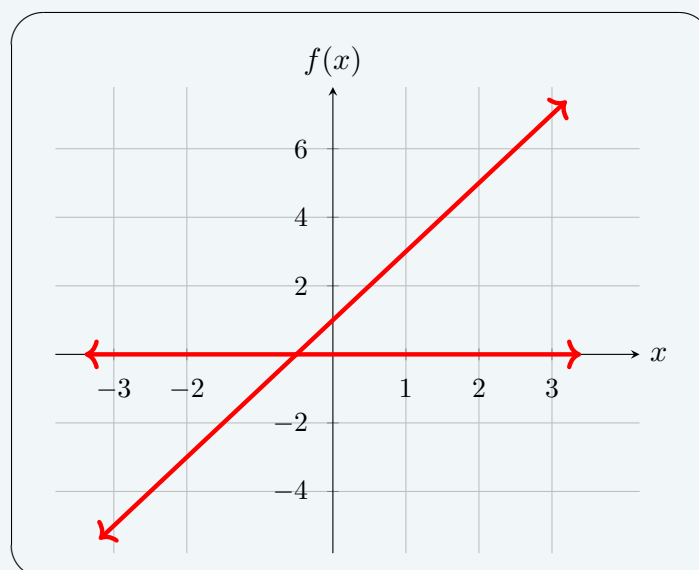
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ 2x + 1 \text{ soggetto a } x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\max \left\{ 2x + 1 \text{ soggetto a } x \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è l'intero asse x (rosso). Le frecce indicano che il grafico e la regione ammissibile proseguono in entrambe le direzioni.



3. La regione ammissibile è l'intera retta $F = \mathbb{R}$ e la funzione lineare f è strettamente crescente: se x aumenta di 1, $f(x)$ aumenta di 2.

- Per la forma di minimo, la funzione obiettivo decresce indefinitamente sulla regione ammissibile: per ogni $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ il punto $x = -k$ è ammissibile e $f(-k) = 1 - 2k$. Il problema è **illimitato**, non esiste soluzione ottima e

$$\arg \min \{ 2x + 1 \text{ soggetto a } x \in \mathbb{R} \} = \emptyset \quad \text{e} \quad z(LP) = -\infty.$$

- Per la forma di massimo, la funzione obiettivo cresce indefinitamente sulla regione ammissibile: per ogni $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ il punto $x = k$ è ammissibile e $f(k) = 2k + 1$. Il problema è **illimitato**, non esiste soluzione ottima e

$$\arg \max \{ 2x + 1 \text{ soggetto a } x \in \mathbb{R} \} = \emptyset \quad \text{e} \quad z(LP) = +\infty.$$

Esercizio 3.4 — Problema di ottimizzazione lineare (E4)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 3 \quad \text{e} \quad F = \{ x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4 \} = [1, 4].$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

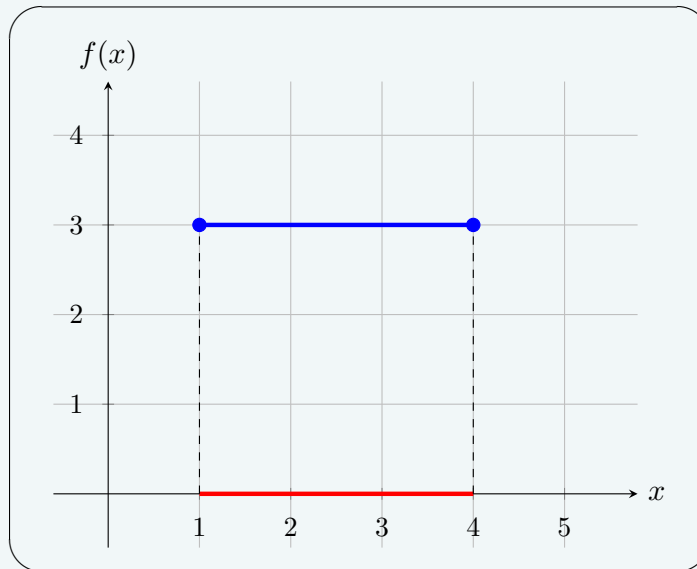
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ 3 \text{ soggetto a } 1 \leq x \leq 4 \right\}$$

$$\max \left\{ 3 \text{ soggetto a } 1 \leq x \leq 4 \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è un segmento orizzontale, blu perché ogni punto ammissibile è una soluzione ottima; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x .



3. La regione ammissibile è l'intervallo $F = [1, 4]$ e la funzione obiettivo è costante: $f(x) = 3$ per ogni $x \in F$ (una funzione lineare il cui coefficiente di x è 0).

- Per la forma di minimo, poiché $f(x) = 3 \leq 3 = f(y)$ per ogni $x, y \in F$, ogni soluzione ammissibile è ottima: il problema ha **infinite** soluzioni ottime e

$$\arg \min \{ 3 \text{ soggetto a } 1 \leq x \leq 4 \} = [1, 4] \quad \text{e} \quad z(LP) = 3.$$

- Per la forma di massimo, poiché $f(x) = 3 \geq 3 = f(y)$ per ogni $x, y \in F$, ogni soluzione ammissibile è ottima: il problema ha **infinite** soluzioni ottime e

$$\arg \max \{ 3 \text{ soggetto a } 1 \leq x \leq 4 \} = [1, 4] \quad \text{e} \quad z(LP) = 3.$$

- Ogni punto di $[1, 4]$ è allo stesso tempo un punto di minimo e un punto di massimo di f in F , e il minimo e il massimo di f in F coincidono.

Esercizio 3.5 — Problema di ottimizzazione lineare (E5)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto -1 \quad \text{e} \quad F = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \} = [2, +\infty).$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

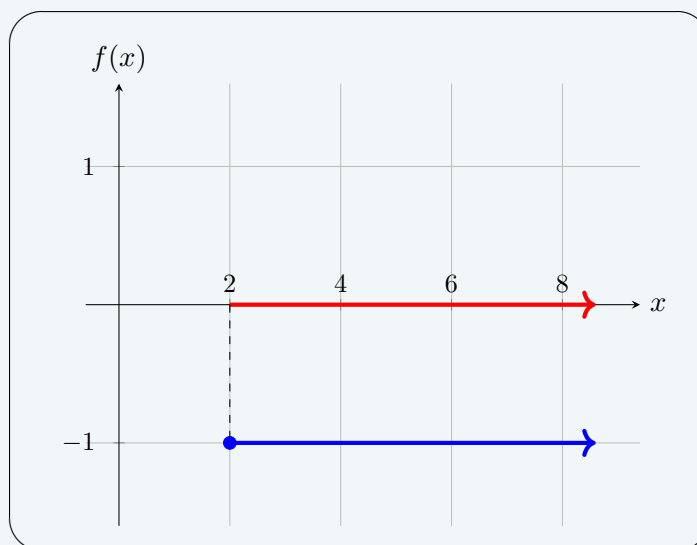
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ -1 \text{ soggetto a } x \geq 2 \right\}$$

$$\max \left\{ -1 \text{ soggetto a } x \geq 2 \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è una semiretta orizzontale, blu perché ogni punto ammissibile è una soluzione ottima; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x . Le frecce indicano che il grafico e la regione ammissibile proseguono verso destra.



3. La regione ammissibile è la semiretta $F = [2, +\infty)$ e la funzione obiettivo è costante: $f(x) = -1$ per ogni $x \in F$. Sebbene la regione ammissibile sia illimitata, la funzione obiettivo non decresce né cresce indefinitamente.

- Per la forma di minimo, poiché $f(x) = -1 \leq -1 = f(y)$ per ogni $x, y \in F$, ogni soluzione ammissibile è ottima: il problema ha **infinite** soluzioni ottime e

$$\arg \min \left\{ -1 \text{ soggetto a } x \geq 2 \right\} = [2, +\infty) \quad \text{e} \quad z(LP) = -1.$$

- Per la forma di massimo, poiché $f(x) = -1 \geq -1 = f(y)$ per ogni $x, y \in F$, ogni soluzione ammissibile è ottima: il problema ha **infinite** soluzioni ottime e

$$\arg \max \left\{ -1 \text{ soggetto a } x \geq 2 \right\} = [2, +\infty) \quad \text{e} \quad z(LP) = -1.$$

- Lo stesso vale con la regione ammissibile $F = \mathbb{R}$: ogni $x \in \mathbb{R}$ è ottimo in entrambe le forme e $z(LP) = -1$. Confrontiamo con i due esercizi precedenti, in cui una funzione obiettivo lineare non costante su una semiretta o su tutta la retta rende il problema illimitato.

Esercizio 3.6 — Problema di ottimizzazione lineare (E6)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x + 1 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \text{ e } x \leq 1\}.$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

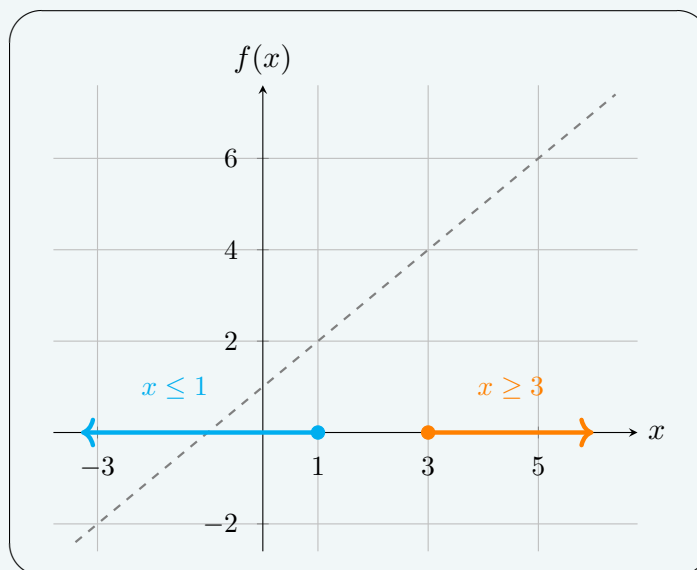
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ x + 1 \text{ soggetto a } x \geq 3, x \leq 1 \right\}$$

$$\max \left\{ x + 1 \text{ soggetto a } x \geq 3, x \leq 1 \right\}$$

2. I due vincoli definiscono le semirette $[3, +\infty)$ (arancione) e $(-\infty, 1]$ (azzurro) sull'asse x : non hanno punti in comune, quindi la regione ammissibile è vuota e anche il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è vuoto. La linea tratteggiata è il grafico di f su tutta la retta, che nessun punto ammissibile raggiunge.



3. La regione ammissibile è vuota: nessun $x \in \mathbb{R}$ soddisfa contemporaneamente $x \geq 3$ e $x \leq 1$ (si avrebbe $3 \leq x \leq 1$). Quindi $F = \emptyset$.

- Per la forma di minimo, il problema è **inammissibile**: non esistono soluzioni ammissibili, quindi nemmeno soluzioni ottime, e

$$\arg \min \{ x + 1 \text{ soggetto a } x \geq 3, x \leq 1 \} = \emptyset \quad \text{e} \quad z(LP) \text{ non è definito.}$$

- Per la forma di massimo, il problema è **inammissibile**: non esistono soluzioni ammissibili, quindi nemmeno soluzioni ottime, e

$$\arg \max \{ x + 1 \text{ soggetto a } x \geq 3, x \leq 1 \} = \emptyset \quad \text{e} \quad z(LP) \text{ non è definito.}$$

Problemi di programmazione lineare

Esercizio 4.1 — Metodo grafico (P_0)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 + 4x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

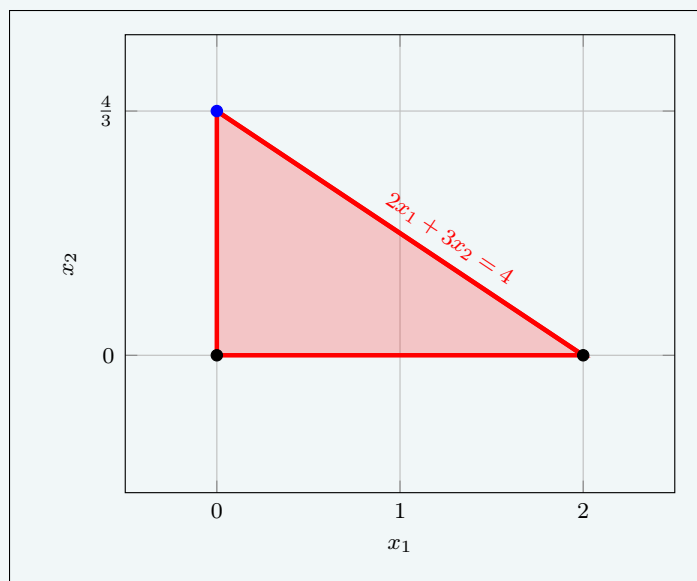
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 3x_2 \leq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

È un poliedro limitato poiché, per esempio, abbiamo:

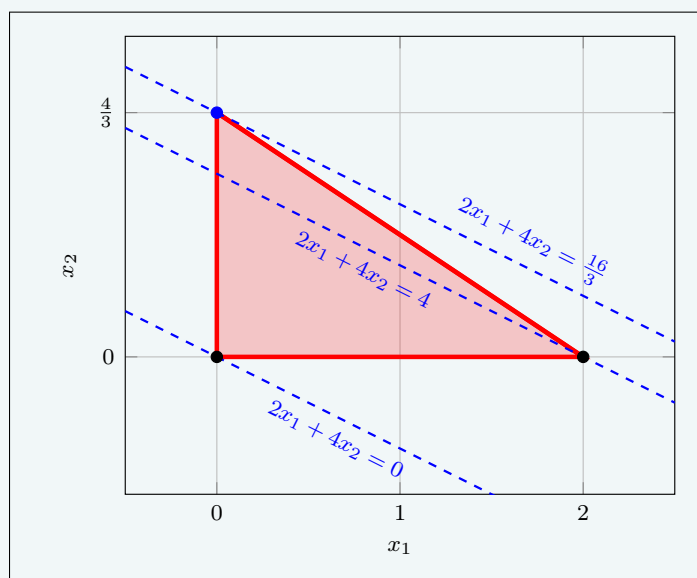
$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 2, \quad \forall \mathbf{x} \in F \\ 0 \leq x_2 \leq \frac{4}{3}, \quad \forall \mathbf{x} \in F \end{aligned}$$

quindi è anche un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima del problema LP $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{16}{3}$.

Esercizio 4.2 — Metodo grafico (P2)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & -4 & x_1 & + & 10 & x_2 \leq 35 \\ & & 3 & x_1 & + & x_2 \leq 12 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 3x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -4x_1 + 10x_2 \leq 35, \quad 3x_1 + x_2 \leq 12, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

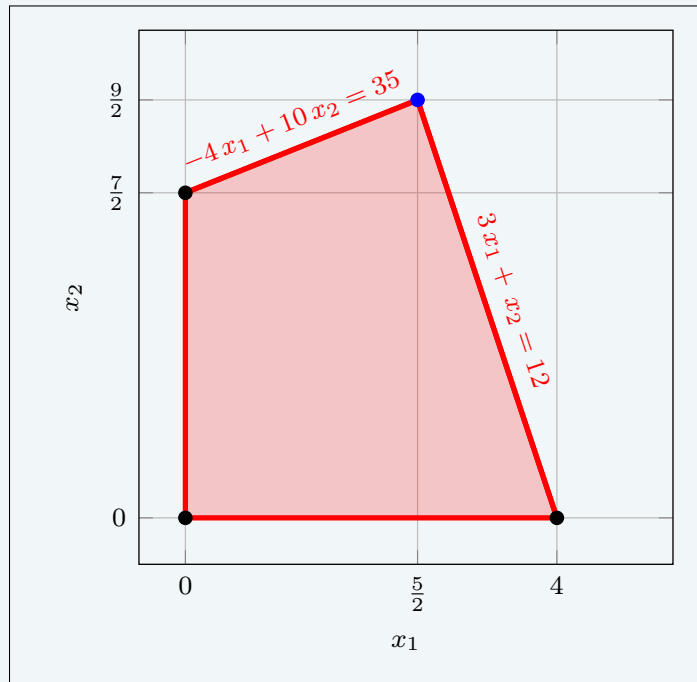
È un poliedro limitato poiché, per esempio, abbiamo:

$$0 \leq x_1 \leq 4, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

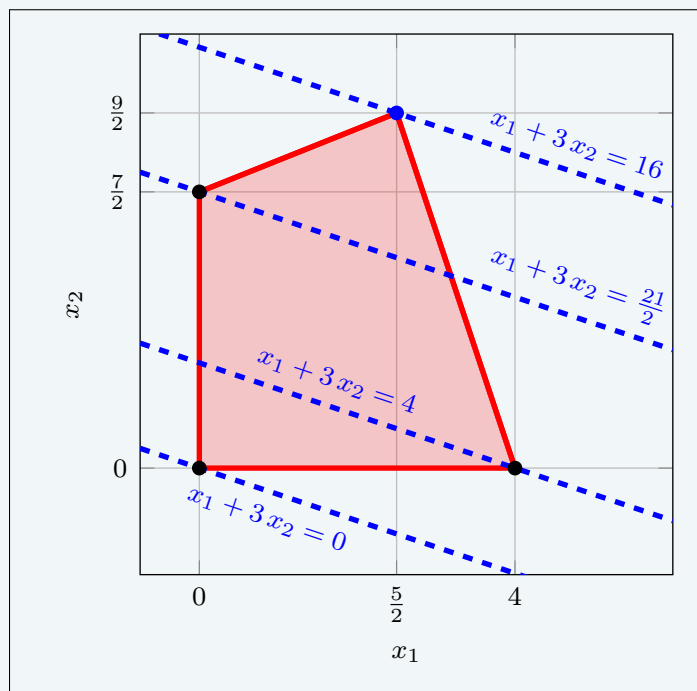
$$0 \leq x_2 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

quindi è anche un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 16.

Esercizio 4.3 — Metodo grafico ($P3$)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 + 4x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 2, \quad 8x_1 + 2x_2 \leq 19, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

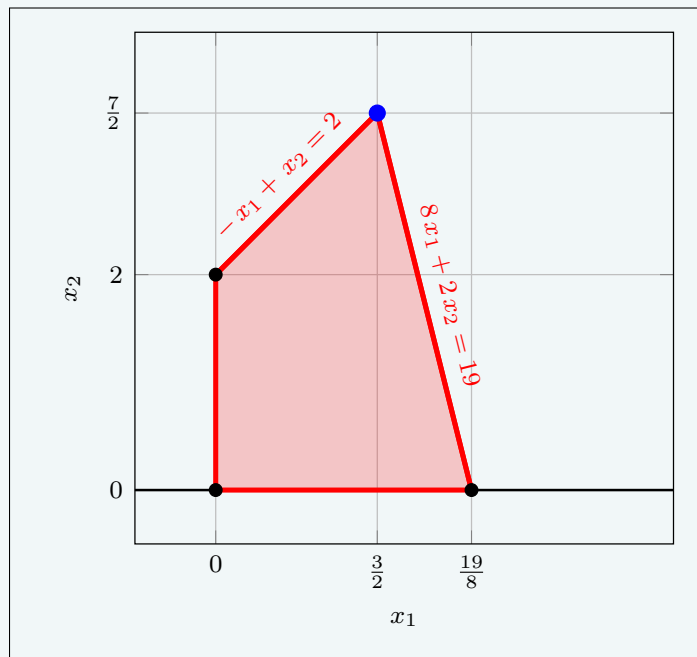
È un poliedro limitato poiché, per esempio, abbiamo:

$$0 \leq x_1 \leq 4, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

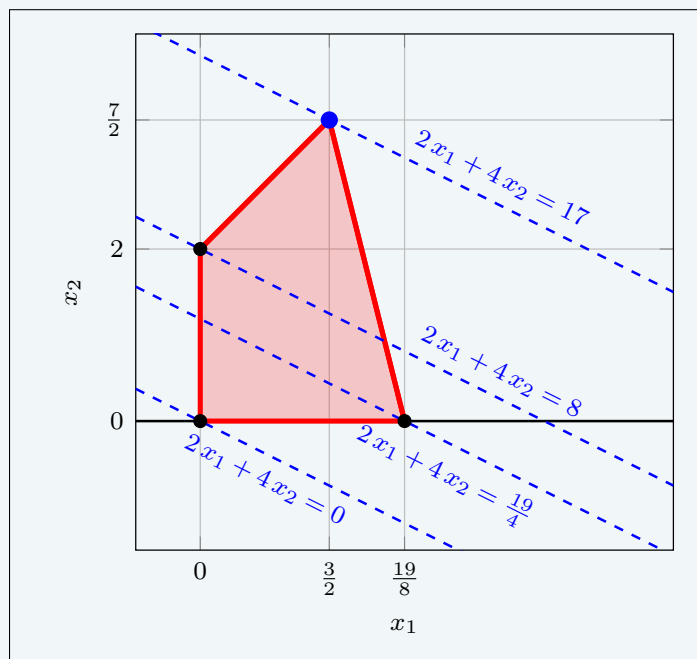
$$0 \leq x_2 \leq 4, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

quindi è anche un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima del problema LP $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 17.

Esercizio 4.4 — Metodo grafico (P10)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 5x_1 + 2x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad x_1 + 2x_2 \leq 12, \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

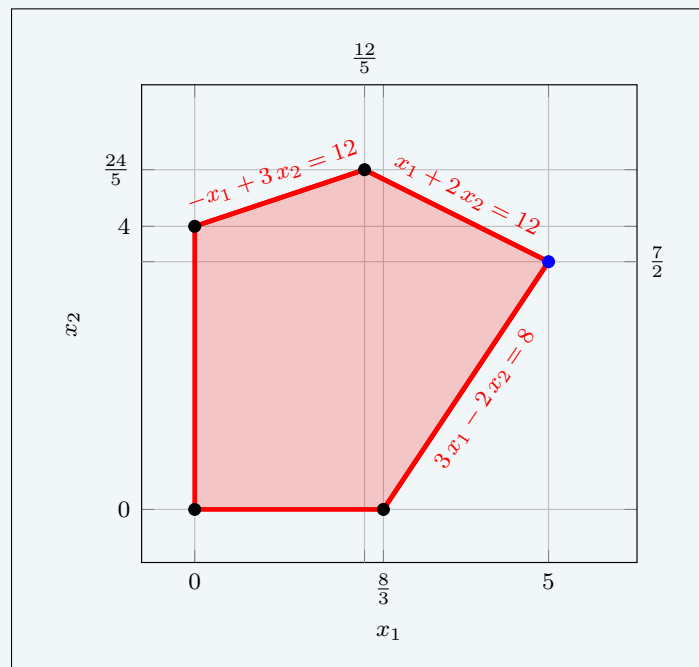
È un poliedro limitato poiché, per esempio, abbiamo:

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

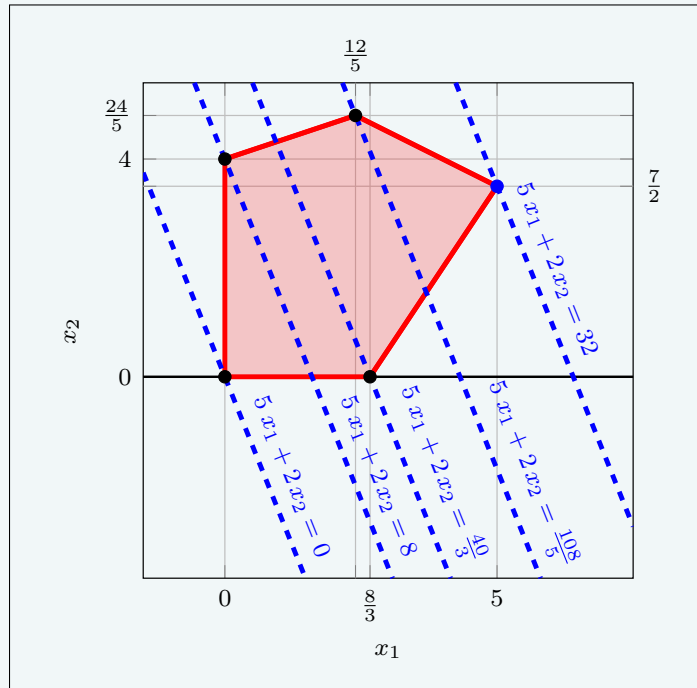
$$0 \leq x_2 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

quindi è anche un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima del problema LP $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 32.

Esercizio 4.5 — Metodo grafico (P11)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & \leq & -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 & \leq & 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.

2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.
4. Verificare che $\bar{x} = (1, 2)'$ è una soluzione ammissibile e calcolare il lower bound che essa fornisce sul valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

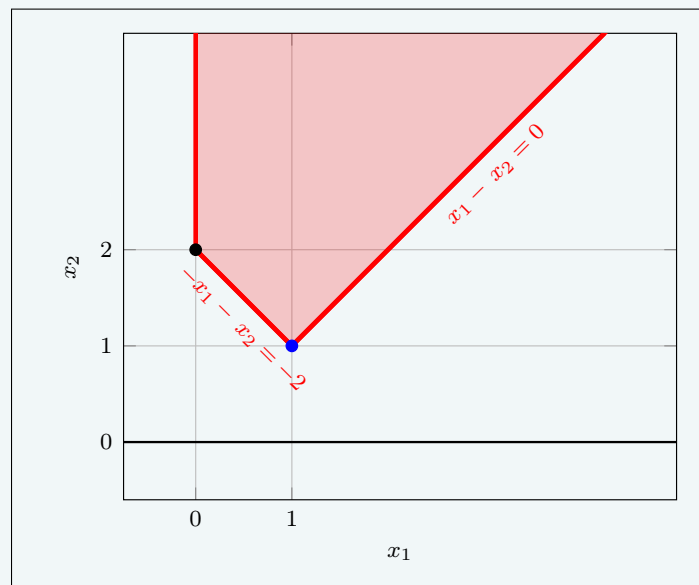
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -2x_1 - 4x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

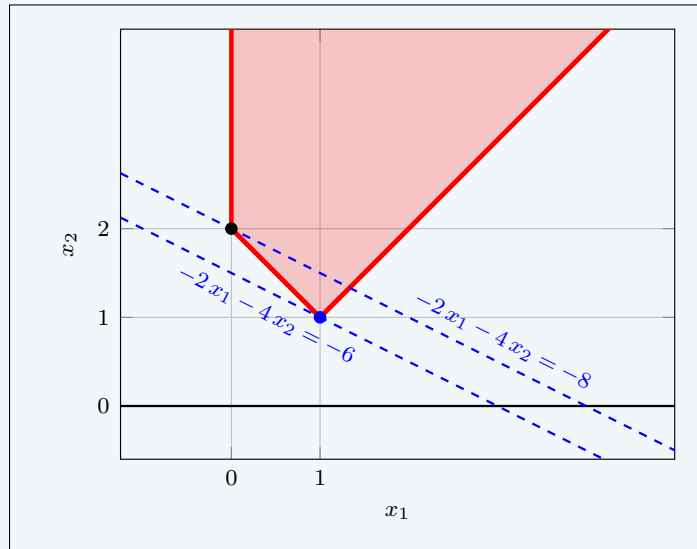
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - x_2 \leq -2, \quad x_1 - x_2 \leq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

Non è un poliedro limitato, quindi non è un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo $z(LP)$ è -6 .

- Il punto $\bar{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (dove $\bar{x}_1 = 1$ e $\bar{x}_2 = 2$) è una soluzione ammissibile, poiché:

$$-1 - 2 = -3 \leq -2, \quad 1 - 2 = -1 \leq 0, \quad 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad 2 \geq 0.$$

Di conseguenza, un lower bound $LB(\bar{\mathbf{x}})$ sul valore ottimo $z(LP)$ del problema LP è:

$$LB(\bar{\mathbf{x}}) = -2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -10 \leq z(LP) = -6.$$

Esercizio 4.6 — Metodo grafico (P12)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & - & x_1 & - & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & \leq & -3 \\ & & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & -1 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

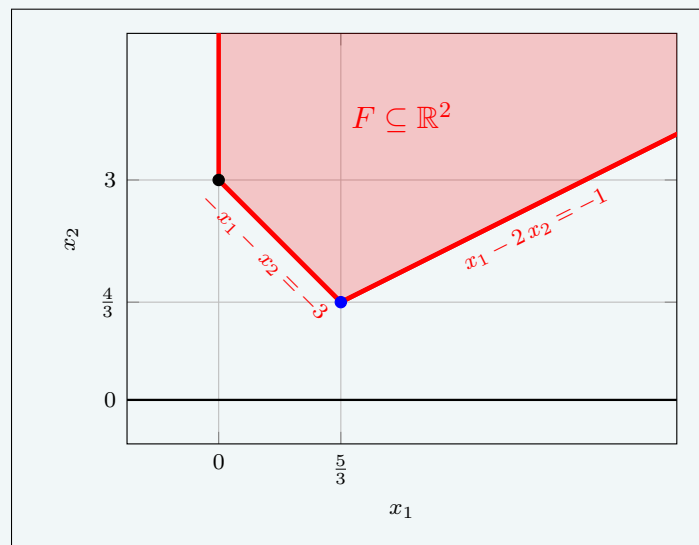
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -x_1 - 2x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

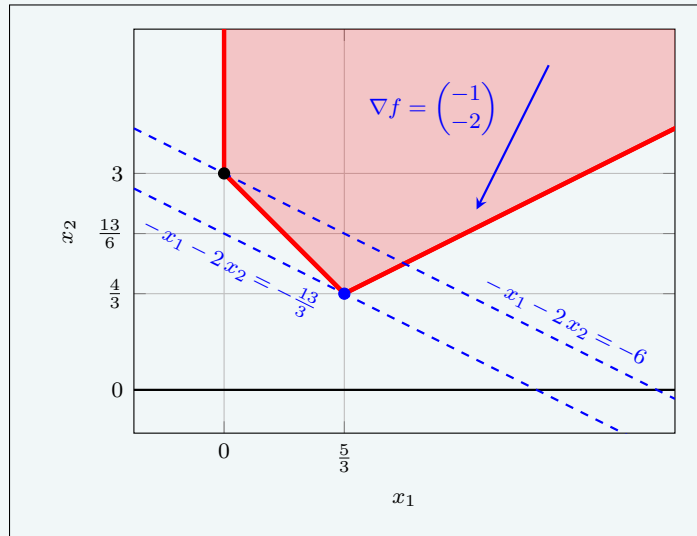
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - x_2 \leq -3, \quad x_1 - 2x_2 \leq -1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

Non è un poliedro limitato poiché, per esempio, i punti $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ appartengono a F per ogni valore $t \geq 3$, quindi non è un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Poiché $-x_1 - 2x_2 \leq 0$ lungo ogni direzione in cui F è illimitato, la funzione obiettivo raggiunge il suo massimo in un vertice di F . Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è:

$$z(LP) = -\frac{5}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{13}{3}.$$

Esercizio 4.7 — Metodo grafico (P21)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.

2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 2x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} -x_1 - x_2 \leq -2, \quad 4x_1 - 2x_2 \leq 7, \quad x_1 + 5x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

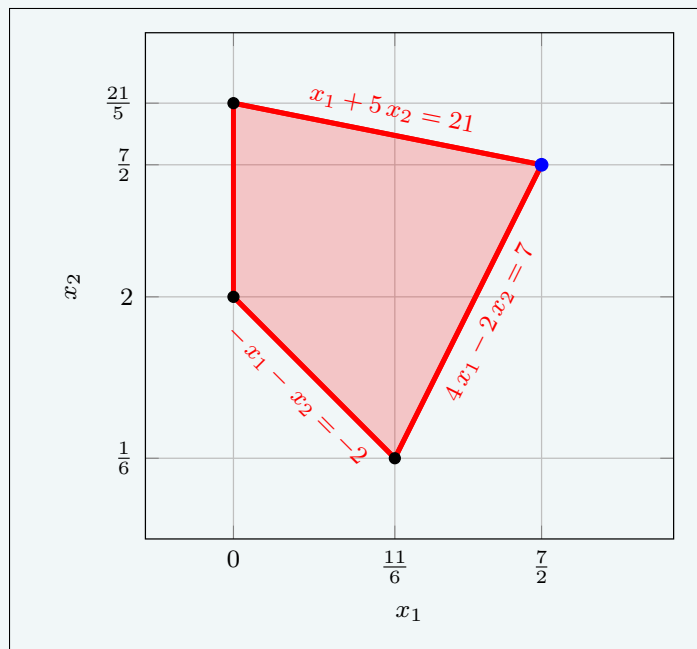
È un poliedro limitato poiché, per esempio, abbiamo:

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

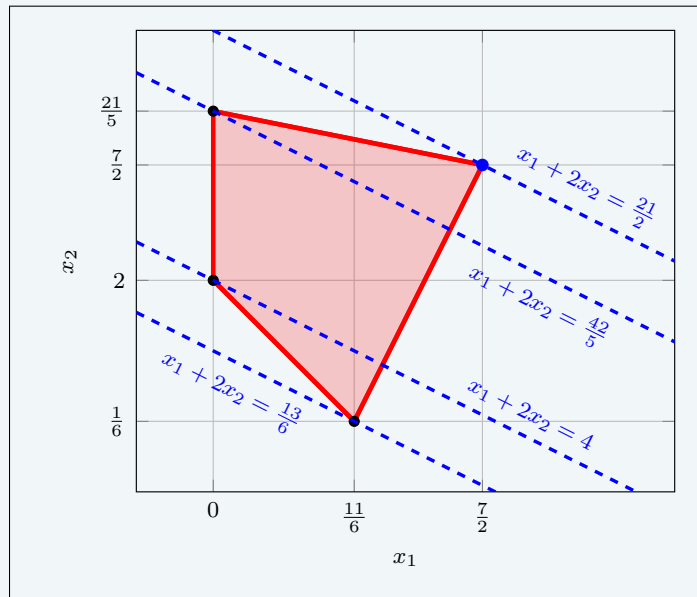
$$0 \leq x_2 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

quindi è anche un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo $z(LP)$ è $\frac{21}{2}$.

Esercizio 4.8 — Metodo grafico (P22)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima di questo problema LP. Determinare il valore ottimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1 + x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq -1, \quad -x_1 - x_2 \leq -3, \quad 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

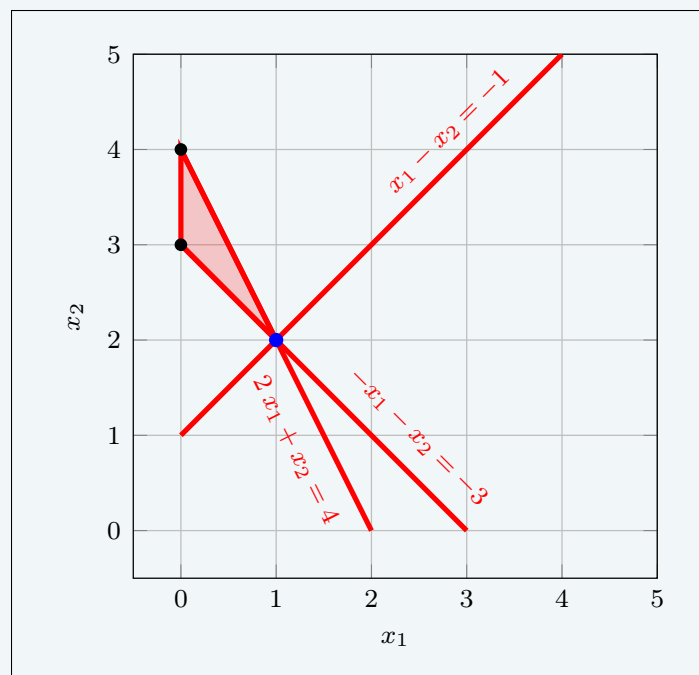
È un poliedro limitato poiché, per esempio, abbiamo:

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

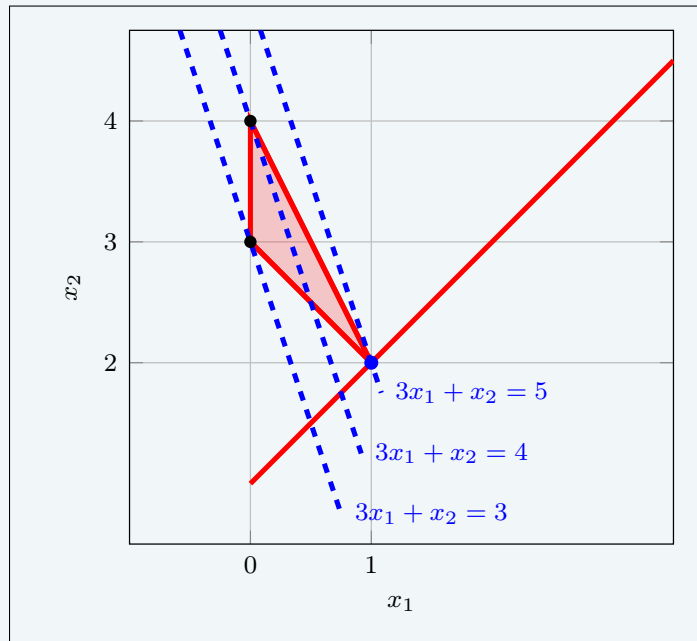
$$0 \leq x_2 \leq 5, \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

quindi è anche un politopo.

- Questo è il poliedro della regione ammissibile:



Queste sono le curve di livello passanti per i vertici del poliedro:



Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo $z(LP)$ è 5.

Esiti possibili e formulazioni equivalenti

5.1 Metodo grafico

Esercizio 5.1 — Metodo grafico (P31)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & & x_1 & + & x_2 & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ & & x_1 & - & x_2 & \leq 1 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Determinare graficamente se il problema LP ammette una soluzione ottima. In caso affermativo, trovare una soluzione ottima e il valore ottimo; altrimenti, stabilire se il problema LP è inammissibile o illimitato.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

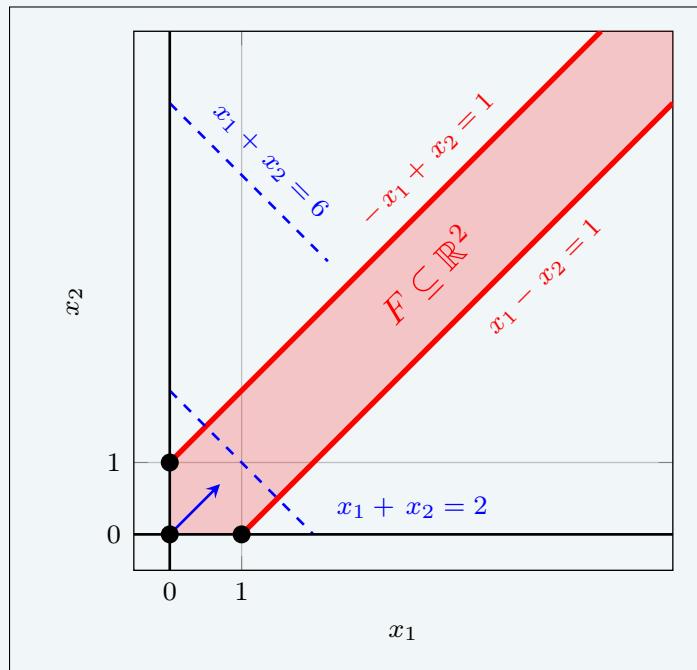
- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 - x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

- Per ogni valore $t \geq 0$, il punto $\bar{x}(LP) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ è una soluzione ammissibile, poiché

$$-t + t = 0 \leq 1, \quad t - t = 0 \leq 1, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad t \geq 0,$$

e il suo valore obiettivo è $LB(\bar{x}) = t + t = 2t$. Di conseguenza, per ogni valore $M \in \mathbb{R}$, la soluzione ammissibile ottenuta con $t > \frac{M}{2}$ ha un valore obiettivo maggiore di M , e quindi questo problema LP è **illimitato**.



Esercizio 5.2 — Metodo grafico (P33)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Determinare graficamente se il problema LP ammette una soluzione ottima. In caso affermativo, trovare una soluzione ottima e il valore ottimo; altrimenti, stabilire se il problema LP è inammissibile o illimitato.

Soluzione

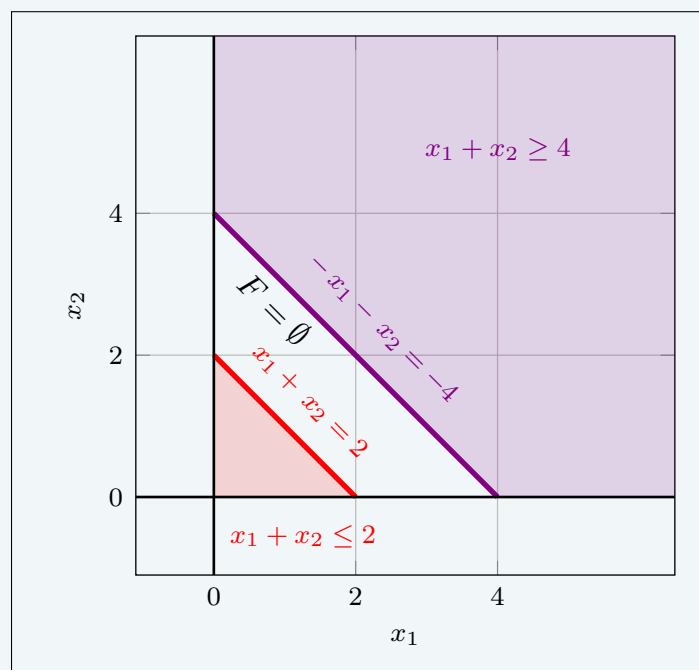
- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 2, \quad -x_1 - x_2 \leq -4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

- Il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \leq 2$, mentre il secondo, moltiplicato per -1 , impone $x_1 + x_2 \geq 4$. Nessun punto di $\mathbb{R}^2$ li soddisfa entrambi, e quindi abbiamo $F = \emptyset$: questo problema LP è **inammissibile**.



Esercizio 5.3 — Metodo grafico (P36)

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{llll} \max & - & x_1 & - & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & x_2 \leq 2 \\ & & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere la funzione obiettivo del problema LP e calcolarne il gradiente.
2. Scrivere la regione ammissibile del problema LP.
3. Determinare graficamente se il problema LP ammette una soluzione ottima. In caso affermativo, trovare una soluzione ottima e il valore ottimo; altrimenti, stabilire se il problema LP è inammissibile o illimitato.

Soluzione

- La funzione obiettivo del problema LP è la funzione lineare scalare:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -x_1 - x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

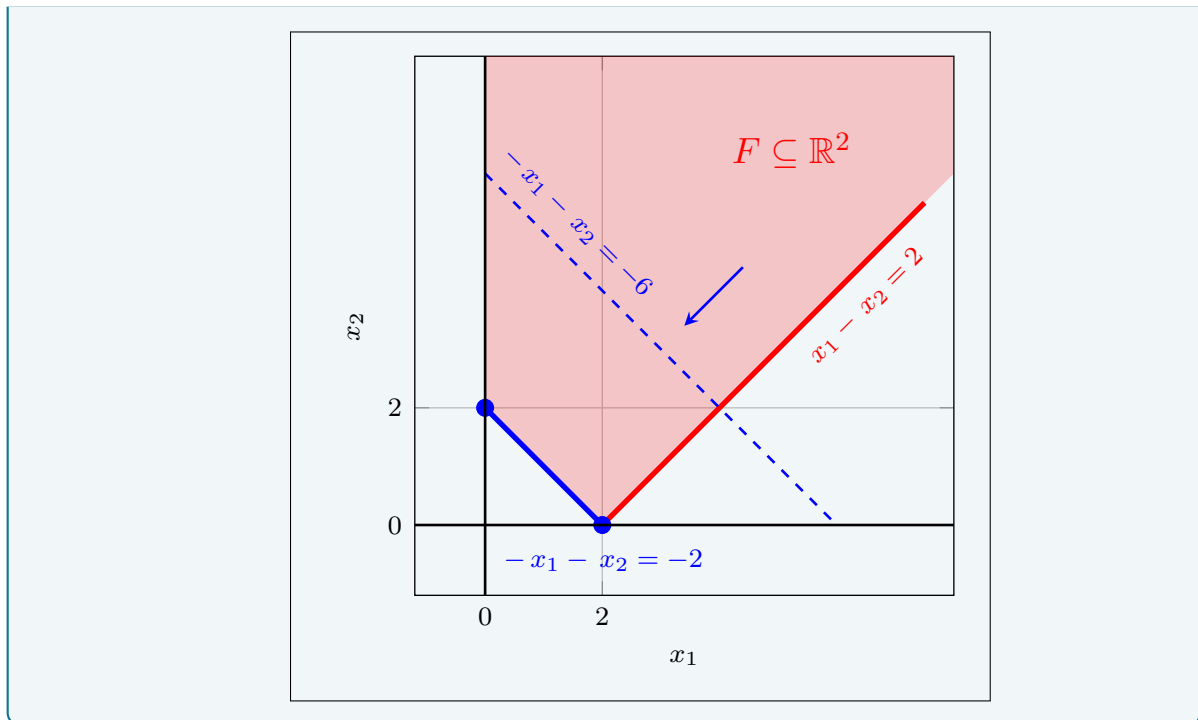
- La regione ammissibile del problema LP è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - x_2 \leq -2, \quad x_1 - x_2 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}.$$

- La regione ammissibile F è illimitata, ma il problema LP non è illimitato. Il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \geq 2$ per ogni soluzione ammissibile, e quindi

$$-x_1 - x_2 \leq -2, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in F.$$

Le due soluzioni ammissibili $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ raggiungono questo valore, e quindi sono due **soluzioni ottime** e il valore ottimo è $z(LP) = -2$. Inoltre, ogni punto del segmento che le congiunge è anch'esso una soluzione ottima, e quindi questo problema LP ammette **infinite soluzioni ottime**.



5.2 Equivalenze

Esercizio 5.4 — Riformulazioni equivalenti (E1)

Consideriamo il seguente problema LP in forma di minimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di maggiore o uguale:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & + & 2 & x_2 \geq 4 \\ & & 3 & x_1 & + & x_2 \geq 6 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere un problema LP equivalente in forma canonica di massimo.
2. Scrivere un problema LP equivalente in forma standard di massimo.
3. Sapendo che una soluzione ottima del problema LP in forma canonica di massimo è $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, determinare il valore ottimo del problema LP originale in forma di minimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo è da minimizzare, e quindi massimizziamo la funzione obiettivo opposta. I due vincoli lineari sono vincoli di maggiore o uguale, e quindi moltiplichiamo ciascuno di essi per -1 . Otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{aligned} & - \max \quad -2 \ x_1 \quad - \quad 3 \ x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & - \ x_1 \quad - \quad 2 \ x_2 \leq -4 \\ & -3 \ x_1 \quad - \quad \quad x_2 \leq -6 \\ & \quad \quad \quad x_1, \quad \quad \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto x_3 e x_4 , otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma standard di massimo con $n + m = 4$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{aligned} & - \max \quad -2 \ x_1 \quad - \quad 3 \ x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & - \ x_1 \quad - \quad 2 \ x_2 \quad + \quad x_3 \quad \quad \quad = -4 \\ & -3 \ x_1 \quad - \quad \quad x_2 \quad \quad \quad + \quad x_4 \quad = -6 \\ & \quad \quad \quad x_1, \quad \quad \quad x_2, \quad \quad \quad x_3, \quad \quad \quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- I due problemi LP hanno le stesse soluzioni ottime, e i loro valori ottimi sono numeri opposti. Il valore ottimo del problema LP in forma canonica di massimo è:

$$z(LP_{\max}) = -2 \cdot \frac{8}{5} - 3 \cdot \frac{6}{5} = -\frac{16}{5} - \frac{18}{5} = -\frac{34}{5},$$

e quindi il valore ottimo del problema LP originale in forma di minimo è:

$$z(LP_{\min}) = -z(LP_{\max}) = \frac{34}{5}.$$

Esercizio 5.5 — Riformulazioni equivalenti (E2)

Consideriamo il seguente problema LP con $n = 2$ variabili non negative e tre vincoli lineari di tre tipi diversi:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 3 & x_1 & + & x_2 & \\
 \text{soggetto a} & & x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq 1 \\
 & 2 & x_1 & + & x_2 & = 8 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere un problema LP equivalente in forma canonica di massimo.
2. Scrivere un problema LP equivalente in forma standard di massimo.
3. Verificare che $\bar{x}(LP) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia una soluzione ammissibile del problema LP originale e calcolare i valori delle variabili di scarto e di surplus associate a essa nella forma standard di massimo.

Soluzione

- La funzione obiettivo è già da massimizzare e le variabili sono già non negative. Il primo vincolo è un vincolo di minore o uguale e resta invariato; il secondo è un vincolo di maggiore o uguale e lo moltiplichiamo per -1 ; il terzo è un vincolo di uguaglianza e lo sdoppiamo in due vincoli di minore o uguale. Otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 4$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 3 & x_1 & + & x_2 & \\
 \text{soggetto a} & & x_1 & + & x_2 & \leq 5 \\
 & & - & x_1 & + & x_2 \leq -1 \\
 & 2 & x_1 & + & x_2 & \leq 8 \\
 & -2 & x_1 & - & x_2 & \leq -8 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Partendo dal problema LP originale, aggiungiamo una variabile di scarto x_3 al primo vincolo, sottraiamo una variabile di surplus x_4 dal secondo vincolo, e lasciamo invariato il terzo vincolo. Otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma standard di massimo con 4 variabili non negative e 3 vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & 3 & x_1 & + & x_2 & & & \\
 \text{soggetto a} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
 & & x_1 & - & x_2 & & - & x_4 & = & 1 \\
 & 2 & x_1 & + & x_2 & & & & = & 8 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il vincolo di uguaglianza non richiede alcuna variabile aggiuntiva: la richiedono solo i vincoli di disuguaglianza.

- Il punto $\bar{x}(LP) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione ammissibile, poiché:

$$4 + 0 = 4 \leq 5, \quad 4 - 0 = 4 \geq 1, \quad 2 \cdot 4 + 0 = 8 = 8, \quad 4 \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \geq 0.$$

I valori della variabile di scarto x_3 e della variabile di surplus x_4 si ottengono dai due vincoli di uguaglianza della forma standard di massimo:

$$\bar{x}_3 = 5 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5 - 4 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad \bar{x}_4 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 1 = 4 - 0 - 1 = 3.$$

Esercizio 5.6 — Riformulazioni equivalenti (E3)

Consideriamo il seguente problema LP con una variabile non negativa $x_1 \geq 0$, una variabile non positiva $x_2 \leq 0$ e una variabile libera $x_3 \geq 0$:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & x_1 & - & 2 & x_2 & + & x_3 & \\
 \text{soggetto a} & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
 & x_1 & & & & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere un problema LP equivalente con sole variabili non negative.
2. Scrivere un problema LP equivalente in forma standard di massimo.

3. Verificare che $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = -1$, $\bar{x}_3 = 3$ sia una soluzione ammissibile del problema LP originale e calcolare la corrispondente soluzione ammissibile del problema LP della prima domanda.

Soluzione

- La variabile x_2 è non positiva, e quindi poniamo $x_2 = -x_2^+$ con $x_2^+ \geq 0$. La variabile x_3 è libera, e quindi poniamo $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ con $x_3^+, x_3^- \geq 0$. Effettuando queste sostituzioni nella funzione obiettivo e nei due vincoli lineari, otteniamo il seguente problema LP equivalente con sole variabili non negative:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & 2x_2^+ & + & x_3^+ & - & x_3^- \\ \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2^+ & + & x_3^+ & - & x_3^- & = & 3 \\ & x_1 & & & - & x_3^+ & + & x_3^- & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2^+, & & x_3^+, & & x_3^- & \geq & 0 \end{array}$$

- Il primo vincolo è già un vincolo di uguaglianza. Aggiungendo una variabile di scarto x_5 al secondo vincolo, otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma standard di massimo con 5 variabili non negative e 2 vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllllllll} \max & x_1 & + & 2x_2^+ & + & x_3^+ & - & x_3^- \\ \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2^+ & + & x_3^+ & - & x_3^- & & = & 3 \\ & x_1 & & & - & x_3^+ & + & x_3^- & + & x_5 & = & 2 \\ & x_1, & & x_2^+, & & x_3^+, & & x_3^-, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = -1$, $\bar{x}_3 = 3$ è una soluzione ammissibile del problema LP originale, poiché:

$$1 - 1 + 3 = 3 = 3, \quad 1 - 3 = -2 \leq 2, \quad 1 \geq 0, \quad -1 \leq 0.$$

La corrispondente soluzione ammissibile del problema LP con sole variabili non negative si ottiene ponendo:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2^+ = -\bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3^+ = 3, \quad \bar{x}_3^- = 0.$$

Le due soluzioni hanno lo stesso valore obiettivo:

$$1 - 2 \cdot (-1) + 3 = 6 \quad \text{e} \quad 1 + 2 \cdot 1 + 3 - 0 = 6.$$

I valori di x_3^+ e x_3^- non sono unici: ogni coppia di numeri non negativi la cui differenza è $\bar{x}_3 = 3$ dà una soluzione ammissibile con lo stesso valore obiettivo.

Esercizio 5.7 — Riformulazioni equivalenti (E4)

Consideriamo il seguente problema LP generico con una variabile non positiva $x_1 \leq 0$, una variabile non negativa $x_2 \geq 0$ e una variabile libera $x_3 \geq 0$:

$$\begin{array}{llllllll} \min & 4 & x_1 & - & x_2 & + & 2 & x_3 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & x_2 & & & \geq 2 \\ & 2 & x_1 & & & + & x_3 & = 5 \\ & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 8 \\ & & x_1 & & & & & \leq 0 \\ & & & & x_2 & & & \geq 0 \\ & & & & & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Domande

1. Scrivere un problema LP equivalente in forma canonica di massimo.
2. Scrivere un problema LP equivalente in forma standard di massimo.
3. Verificare che $\bar{x}_1 = -2$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 9$ sia una soluzione ammissibile del problema LP originale, calcolare la corrispondente soluzione ammissibile del problema LP in forma canonica di massimo e controllare che i due valori obiettivo siano numeri opposti.

Soluzione

- Applichiamo le trasformazioni una alla volta:
 1. la funzione obiettivo è da minimizzare, e quindi massimizziamo la funzione obiettivo opposta;
 2. la variabile x_1 è non positiva, e quindi poniamo $x_1 = -x_1^+$ con $x_1^+ \geq 0$;
 3. la variabile x_3 è libera, e quindi poniamo $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ con $x_3^+, x_3^- \geq 0$;
 4. il primo vincolo è un vincolo di maggiore o uguale, e quindi lo moltiplichiamo per -1 ;
 5. il secondo vincolo è un vincolo di uguaglianza, e quindi lo sdoppiamo in due vincoli di minore o uguale;
 6. il terzo vincolo è un vincolo di minore o uguale, e resta invariato.

Otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma canonica di massimo con $n = 4$ variabili non negative e $m = 4$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{aligned}
 & - \max \quad 4 x_1^+ + x_2 - 2 x_3^+ + 2 x_3^- \\
 \text{soggetto a} \quad & - x_1^+ - x_2 \leq -2 \\
 & -2 x_1^+ + x_3^+ - x_3^- \leq 5 \\
 & 2 x_1^+ - x_3^+ + x_3^- \leq -5 \\
 & - x_1^+ + x_2 + x_3^+ - x_3^- \leq 8 \\
 & x_1^+, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0
 \end{aligned}$$

- Aggiungendo $m = 4$ variabili di scarto x_5, x_6, x_7, x_8 , otteniamo un problema LP equivalente in forma standard di massimo con 8 variabili non negative e 4 vincoli lineari di uguaglianza:

$$\begin{aligned}
 & - \max \quad 4 x_1^+ + x_2 - 2 x_3^+ + 2 x_3^- \\
 \text{subject to} \quad & - x_1^+ - x_2 + x_5 = -2 \\
 & -2 x_1^+ + x_3^+ - x_3^- + x_6 = 5 \\
 & 2 x_1^+ - x_3^+ + x_3^- + x_7 = -5 \\
 & - x_1^+ + x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_8 = 8 \\
 & x_1^+, x_2, x_3^+, x_3^-, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Il punto $\bar{x}_1 = -2, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 9$ è una soluzione ammissibile del problema LP originale, poiché:

$$\begin{aligned}
 -(-2) + 0 &= 2 \geq 2, & 2 \cdot (-2) + 9 &= 5 = 5, & -2 + 0 + 9 &= 7 \leq 8, \\
 -2 &\leq 0, & 0 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

La corrispondente soluzione ammissibile del problema LP in forma canonica di massimo è:

$$\bar{x}_1^+ = -\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3^+ = 9, \quad \bar{x}_3^- = 0,$$

ed è ammissibile, poiché:

$$\begin{aligned}
 -2 - 0 &= -2 \leq -2, & -4 + 9 - 0 &= 5 \leq 5, \\
 4 - 9 + 0 &= -5 \leq -5, & -2 + 0 + 9 - 0 &= 7 \leq 8.
 \end{aligned}$$

Infine, i due valori obiettivo sono numeri opposti:

$$4 \cdot (-2) - 0 + 2 \cdot 9 = 10 \quad \text{e} \quad 4 \cdot 2 + 0 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 0 = -10.$$