



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Volume 5 — Modellazione

Le tecniche per scrivere un modello di programmazione lineare a partire dalla descrizione di un problema (produzione, miscelazione, trasporto, pianificazione multi-periodo, linearizzazioni), con esempi svolti. I modelli completi sono nell'eserciziario 5.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

16	Tecniche di modellazione per la programmazione lineare	2
16.1	Dalla descrizione di un problema a un modello LP	2
16.2	Pianificazione della produzione	3
16.3	Miscelazione	4
16.4	Trasporto	5
16.5	Pianificazione multi-periodo	6
16.6	Tecniche di linearizzazione	7
16.7	Che cosa non si può modellare con la programmazione lineare	8
16.8	Esempi di modelli	9

Tecniche di modellazione per la programmazione lineare

16.1 Dalla descrizione di un problema a un modello LP

- Un **modello** di un problema di ottimizzazione è una descrizione matematica delle sue soluzioni ammissibili e della quantità da ottimizzare. Scrivere un modello richiede tre passi, sempre in questo ordine.

1. **Variabili decisionali.** Individuare le decisioni da prendere e associare una variabile a ciascuna di esse. Per ogni variabile, indicare la sua unità di misura e il suo dominio.
2. **Funzione obiettivo.** Scrivere, come funzione lineare delle variabili decisionali, la quantità da massimizzare o minimizzare.
3. **Vincoli.** Scrivere, come uguaglianze o disuguaglianze lineari, ogni requisito che una soluzione ammissibile deve soddisfare.

- Il modello si scrive con **dati simbolici**, in modo che descriva il problema per ogni istanza, e non soltanto per una di esse. Usiamo le seguenti convenzioni:
 1. le dimensioni dell'istanza sono numeri interi, per esempio $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$;
 2. i dati numerici sono numeri razionali, per esempio $a_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ e $w_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$;
 3. gli insiemi di indici si scrivono esplicitamente, per esempio $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
- Un modello è un modello di **programmazione lineare** se la sua funzione obiettivo e tutti i suoi vincoli sono lineari, e se tutte le sue variabili sono continue. In questo caso il modello si può risolvere con l'algoritmo del simplesso.

I tre errori più frequenti nello scrivere un modello LP sono:

1. dimenticare i **vincoli di non negatività** delle variabili;
2. scrivere vincoli non dimensionalmente coerenti, cioè che sommano quantità con unità di misura diverse;

- usare una variabile nella funzione obiettivo senza averla definita tra le variabili decisionali.

16.2 Pianificazione della produzione

- Un'azienda produce $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ prodotti diversi usando $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ risorse limitate. Per ogni prodotto $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $c_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il profitto di un'unità di prodotto; per ogni risorsa $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il valore $b_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la quantità disponibile, e $a_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la quantità di risorsa i consumata da un'unità di prodotto j . L'azienda vuole determinare un piano di produzione di profitto massimo.

- Introduciamo le seguenti r variabili non negative:

$$x_j = \text{unità di prodotto } j \text{ prodotte,} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

$$\max \sum_{j=1}^r c_j x_j \quad (16.1a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.1b)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (16.1c)$$

- La funzione obiettivo (16.1a) è il profitto totale. I vincoli (16.1b) impongono che il consumo di ogni risorsa non superi la sua disponibilità. Si tratta di un problema LP in **forma canonica di massimo**.

Esempio 16.1: pianificazione della produzione

Consideriamo un'istanza con $r = 2$ prodotti e $s = 3$ risorse:

	$j = 1$	$j = 2$	
c_j	3	5	b_1 b_2 b_3
a_{1j}	1	0	4 12 18
a_{2j}	0	2	
a_{3j}	3	2	

Il modello LP per questa istanza è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima è $\tilde{x}_1 = 2$ e $\tilde{x}_2 = 6$, con valore ottimo $z(LP) = 36$.

16.3 Miscelazione

- Una quantità $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ di un prodotto finale deve essere ottenuta miscelando $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ materie prime. Per ogni materia prima $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $c_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il costo di un'unità. Il prodotto finale deve contenere almeno una quantità $q_k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ di ciascuno degli $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ componenti, e $p_{kj} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la quantità di componente k contenuta in un'unità di materia prima j . L'azienda vuole determinare una miscela di costo minimo.
- Introduciamo le seguenti r variabili non negative:

$x_j =$ unità di materia prima j usate nella miscela, $\forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

$$\min \sum_{j=1}^r c_j x_j \quad (16.2a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j=1}^r x_j = d, \quad (16.2b)$$

$$\sum_{j=1}^r p_{kj} x_j \geq q_k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.2c)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (16.2d)$$

- Il vincolo (16.2b) impone che la quantità totale prodotta sia d , e i vincoli (16.2c) impongono la quantità minima di ciascun componente.
- Un requisito della forma “la materia prima j deve essere almeno una frazione α della miscela” non si scrive come $\frac{x_j}{\sum_{\ell} x_{\ell}} \geq \alpha$, che non è un vincolo lineare. Si scrive invece moltiplicando entrambi i membri per il denominatore, che è positivo:

$$x_j \geq \alpha \sum_{\ell=1}^r x_{\ell} \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - \alpha) x_j - \alpha \sum_{\ell \neq j} x_{\ell} \geq 0.$$

Esempio 16.2: miscelazione

Un'azienda deve produrre $d = 100$ chilogrammi di mangime miscelando $r = 3$ materie prime, i cui costi al chilogrammo sono $c_1 = 0.80$, $c_2 = 0.50$ e $c_3 = 0.30$ euro. Il mangime deve contenere almeno $q_1 = 8$ chilogrammi di proteine, e un chilogrammo di ciascuna materia prima contiene, rispettivamente, $p_{11} = 0.12$, $p_{12} = 0.08$ e $p_{13} = 0.03$ chilogrammi di proteine. Inoltre, la prima materia prima deve essere almeno il 20% della miscela.

Il modello LP per questa istanza è il seguente:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 0.80 x_1 + 0.50 x_2 + 0.30 x_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\
 & 0.12 x_1 + 0.08 x_2 + 0.03 x_3 \geq 8 \\
 & 0.80 x_1 - 0.20 x_2 - 0.20 x_3 \geq 0 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

dove il terzo vincolo è il requisito di proporzione $x_1 \geq 0.20 (x_1 + x_2 + x_3)$, riscritto come vincolo lineare.

Una soluzione ottima è $\tilde{x}_1 = 20$, $\tilde{x}_2 = 64$ e $\tilde{x}_3 = 16$, con valore ottimo

$$z(LP) = 0.80 \cdot 20 + 0.50 \cdot 64 + 0.30 \cdot 16 = 52.80 \text{ euro.}$$

16.4 Trasporto

- Un'azienda ha $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ magazzini e deve servire $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ clienti. Per ogni magazzino $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il valore $a_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la quantità di prodotto disponibile; per ogni cliente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $d_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la domanda, e $c_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è il costo per trasportare un'unità di prodotto dal magazzino i al cliente j . L'azienda vuole determinare un piano di trasporto di costo minimo.
- Introduciamo le seguenti $s \cdot r$ variabili non negative:

$$\begin{aligned}
 x_{ij} = & \text{unità trasportate dal magazzino } i \text{ al cliente } j, \\
 & \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}.
 \end{aligned}$$

$$\min \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r c_{ij} x_{ij} \quad (16.3a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^r x_{ij} \leq a_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.3b)$$

$$\sum_{i=1}^s x_{ij} \geq d_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.3c)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (16.3d)$$

- I vincoli (16.3b) impongono che nessun magazzino spedisca più della sua disponibilità, e i vincoli (16.3c) impongono che ogni cliente riceva almeno la sua domanda. Il modello è ammissibile se e solo se $\sum_i a_i \geq \sum_j d_j$.

Esempio 16.3: trasporto

Consideriamo un'istanza con $s = 2$ magazzini, di disponibilità $a_1 = 50$ e $a_2 = 60$, e $r = 2$ clienti, di domande $d_1 = 30$ e $d_2 = 80$. I costi di trasporto sono:

c_{ij}	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	4	6
$i = 2$	5	3

Una soluzione ottima è

$$\tilde{x}_{11} = 30, \quad \tilde{x}_{12} = 20, \quad \tilde{x}_{21} = 0, \quad \tilde{x}_{22} = 60,$$

con valore ottimo

$$z(LP) = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 60 = 420.$$

16.5 Pianificazione multi-periodo

- Un'azienda deve soddisfare la domanda di un prodotto su un orizzonte temporale di $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ periodi. Per ogni periodo $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, il valore $d_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la domanda, $p_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ è la produzione massima, $c_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ è il costo unitario di produzione e $h_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ è il costo unitario per immagazzinare un'unità dal periodo t al periodo $t + 1$.
- Introduciamo le seguenti $2n$ variabili non negative:

$$\begin{cases} x_t = & \text{unità prodotte nel periodo } t \\ y_t = & \text{unità in magazzino alla fine del periodo } t \end{cases} \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$\min \sum_{t=1}^n c_t x_t + \sum_{t=1}^n h_t y_t \quad (16.4a)$$

$$\text{soggetto a } y_{t-1} + x_t - y_t = d_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.4b)$$

$$x_t \leq p_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.4c)$$

$$x_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.4d)$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.4e)$$

con $y_0 = 0$.

- I vincoli (16.4b) sono i **vincoli di bilanciamento delle scorte**: in ogni periodo, ciò che era in magazzino alla fine del periodo precedente più ciò che si produce è uguale alla domanda più ciò che resta in magazzino. Sono la chiave di ogni modello multi-periodo, e collegano periodi consecutivi.

16.6 Tecniche di linearizzazione

- Alcuni requisiti non sono lineari così come sono scritti, ma si possono riscrivere come vincoli lineari, eventualmente con l'aiuto di variabili aggiuntive. Presentiamo i tre casi più frequenti.

16.6.1 Funzioni obiettivo min-max e max-min

Una funzione obiettivo della forma

$$\min \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}$$

si linearizza introducendo una variabile libera aggiuntiva w e scrivendo

$$\min w \quad \text{soggetto a} \quad w \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

- Gli m vincoli impongono che w non sia minore di ciascuna delle m funzioni lineari, cioè che w non sia minore del loro massimo. Poiché w viene minimizzata, in una soluzione ottima è esattamente uguale a tale massimo.
- Simmetricamente, una funzione obiettivo **max-min** si linearizza introducendo una variabile libera aggiuntiva w , massimizzandola e imponendo $w \leq \sum_j a_{ij} x_j$ per ogni i .
- La linearizzazione funziona solo in queste due direzioni: la massimizzazione di un massimo, o la minimizzazione di un minimo, non si può linearizzare in questo modo.

16.6.2 Valori assoluti

Un termine $\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$ che compare con coefficiente positivo in una funzione obiettivo da minimizzare si linearizza introducendo una variabile non negativa aggiuntiva w_i e scrivendo

$$w_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{e} \quad w_i \geq - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

- I due vincoli impongono $w_i \geq \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|$, e la minimizzazione rende la disuguaglianza soddisfatta all'uguaglianza in una soluzione ottima.
- In alternativa, sotto la stessa condizione (coefficiente positivo in una funzione obiettivo da minimizzare, o coefficiente negativo in una da massimizzare), lo stesso termine si linearizza scrivendo $\sum_j a_{ij} x_j = w_i^+ - w_i^-$ con $w_i^+, w_i^- \geq 0$, e sostituendo il valore assoluto con $w_i^+ + w_i^-$. L'ottimizzazione rende almeno una tra w_i^+ e w_i^- uguale a 0 in una soluzione ottima, e allora $w_i^+ + w_i^- = \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|$; senza quella condizione, entrambe le variabili potrebbero essere positive e il modello sarebbe sbagliato.

16.6.3 Rapporti e percentuali

Un vincolo della forma

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_j x_j}{\sum_{j=1}^n e_j x_j} \leq \gamma, \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^n e_j x_j > 0,$$

si linearizza moltiplicando entrambi i membri per il denominatore, che è positivo:

$$\sum_{j=1}^n (a_j - \gamma e_j) x_j \leq 0.$$

- La stessa tecnica si applica ai requisiti percentuali dei modelli di miscelazione. È corretta solo quando il denominatore è sicuramente positivo per ogni soluzione ammissibile: altrimenti moltiplicare per esso cambierebbe il verso della disuguaglianza.

16.7 Che cosa non si può modellare con la programmazione lineare

I seguenti requisiti non si possono scrivere come vincoli lineari su variabili continue, e richiedono variabili **interi**:

1. **quantità indivisibili**, per esempio il numero di macchine da acquistare o di veicoli da usare;
2. **decisioni sì/no**, per esempio se aprire o no un magazzino;
3. **costi fissi**, cioè un costo che si paga solo se l'attività associata viene svolta;
4. **vincoli disgiuntivi**, cioè requisiti di cui almeno uno su due deve valere;
5. **quantità minime positive**, per esempio “*o non produrre nulla, o produrre almeno q unità*”.

Questi requisiti sono l'oggetto della **programmazione lineare intera**.

- Un errore frequente è scrivere un costo fisso come termine non lineare della funzione obiettivo, oppure imporre una quantità minima positiva con il vincolo $x_j \geq q$: quest'ultimo esclude la soluzione $x_j = 0$, che invece deve restare ammissibile.
- Ogni volta che i requisiti di un problema sono del tipo elencato sopra, il modello LP ottenuto ignorandoli resta utile: è un **rilassamento** del modello corretto, e quindi il suo valore ottimo è un upper bound sul valore ottimo del modello corretto, per un problema di massimo, e un lower bound per un problema di minimo.

16.8 Esempi di modelli

16.8.1 Modelli simbolici

Esempio 16.4 — Produzione in orario ordinario e in straordinario

Un'azienda produce $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ prodotti diversi. Per ogni prodotto $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $w_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ è la quantità massima producibile del prodotto, in litri al giorno. Ogni prodotto può essere ulteriormente trattato e venduto a un prezzo più alto. La quantità massima giornaliera di prodotti, complessivamente, che si può trattare è di $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ litri in orario ordinario e di $e \in \mathbb{Q}_{>0}$ litri in straordinario. Per ogni prodotto $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $a_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ è il profitto in euro di un litro di prodotto non trattato; i valori $b_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ e $c_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ sono i profitti in euro di un litro di prodotto trattato, rispettivamente, in orario ordinario e in straordinario. L'azienda vuole determinare un piano di produzione giornaliero di profitto massimo che rispetti i vincoli descritti sopra.

Domande

1. Scrivere un modello di *programmazione lineare* (LP) per il problema. Individuare le decisioni da prendere e le corrispondenti variabili decisionali. Individuare e commentare la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?
2. Consideriamo ora un'istanza del problema con $r = 3$ prodotti. Gli altri dati sono:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$		
w_i	35	30	25	d	e
a_i	3	2	2	30	20
b_i	6	4	4		
c_i	5	3	3		

Scrivere il modello LP per questa istanza.

3. Trovare una soluzione ammissibile del modello LP dell'istanza e, di conseguenza, un lower bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.
4. Scrivere il modello duale del modello LP e il modello duale per l'istanza. Trovare una soluzione ammissibile del modello duale dell'istanza e, di conseguenza, un upper bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.

Soluzione

1. Introduciamo le seguenti 3 r variabili non negative:

$$\begin{cases} x_i = & \text{litri di prodotto } i \text{ non trattati al giorno} \\ y_i = & \text{litri di prodotto } i \text{ trattati in orario ordinario al giorno} \\ z_i = & \text{litri di prodotto } i \text{ trattati in straordinario al giorno} \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Con queste variabili, un modello LP per il problema è il seguente:

$$\max \sum_{i=1}^r a_i x_i + \sum_{i=1}^r b_i y_i + \sum_{i=1}^r c_i z_i \quad (16.5a)$$

$$\text{soggetto a } x_i + y_i + z_i \leq w_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.5b)$$

$$\sum_{i=1}^r y_i \leq d, \quad (16.5c)$$

$$\sum_{i=1}^r z_i \leq e, \quad (16.5d)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.5e)$$

$$y_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.5f)$$

$$z_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (16.5g)$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare (16.5a) massimizza il profitto totale del piano di produzione;
- i vincoli lineari (16.5b) garantiscono che, per ogni prodotto, la produzione totale non superi la capacità disponibile (r vincoli lineari);
- il vincolo lineare (16.5c) garantisce che la quantità totale di prodotti trattati in orario ordinario non superi la capacità disponibile (un vincolo lineare);
- il vincolo lineare (16.5d) garantisce che la quantità totale di prodotti trattati in straordinario non superi la capacità disponibile (un vincolo lineare);
- i vincoli lineari (16.5e), (16.5f) e (16.5g) definiscono le variabili del modello LP.

Il modello LP si può risolvere all'ottimo, per esempio, con l'algoritmo del simplesso.

2. Il modello LP (16.5) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 5z_1 + 3z_2 + 3z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + y_1 + z_1 \leq 35 \\ & x_2 + y_2 + z_2 \leq 30 \\ & x_3 + y_3 + z_3 \leq 25 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \leq 30 \\ & z_1 + z_2 + z_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Per esempio, ponendo:

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 30, \quad \bar{x}_3 = 25, \quad \bar{y}_1 = 30, \quad \bar{y}_2 = 0, \quad \bar{y}_3 = 0, \quad \bar{z}_1 = 0, \quad \bar{z}_2 = 0, \quad \bar{z}_3 = 0$$

otteniamo una soluzione ammissibile. Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione ammissibile è:

$$\sum_{i=1}^r a_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^r b_i \bar{y}_i + \sum_{i=1}^r c_i \bar{z}_i = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 305$$

di conseguenza 305 è un lower bound sul valore ottimo del modello LP (16.5). Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$305 \leq z(LP)$$

4. Usando

- una variabile duale non negativa λ_i per ogni vincolo (16.5b) ($i \in \{1, 2, \dots, r\}$)
- una variabile duale non negativa π per il vincolo (16.5c)
- una variabile duale non negativa ϱ per il vincolo (16.5d)

il duale del modello LP (16.5) è il seguente:

$$\min \sum_{i=1}^r w_i \lambda_i + d \pi + e \varrho \quad (16.6a)$$

$$\text{soggetto a } \lambda_i \geq a_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.6b)$$

$$\lambda_i + \pi \geq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.6c)$$

$$\lambda_i + \varrho \geq c_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.6d)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.6e)$$

$$\pi \geq 0, \quad (16.6f)$$

$$\varrho \geq 0. \quad (16.6g)$$

Il modello duale (16.6) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & 35 \lambda_1 + 30 \lambda_2 + 25 \lambda_3 + 30 \pi + 20 \varrho & & & & \\
 \text{soggetto a} & \lambda_1 & & & & \geq 3 \\
 & & \lambda_2 & & & \geq 2 \\
 & & & \lambda_3 & & \geq 2 \\
 & \lambda_1 & & + & \pi & \geq 6 \\
 & & \lambda_2 & & + & \pi & \geq 4 \\
 & & & \lambda_3 & + & \pi & \geq 4 \\
 & \lambda_1 & & & & + & \varrho \geq 5 \\
 & & \lambda_2 & & & + & \varrho \geq 3 \\
 & & & \lambda_3 & & + & \varrho \geq 3 \\
 & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \pi, & \varrho & \geq 0
 \end{array}$$

Per esempio, ponendo:

$$\bar{\pi} = 0, \quad \bar{\varrho} = 0,$$

e ponendo:

$$\bar{\lambda}_1 = \max\{3, 6, 5\} = 6, \quad \bar{\lambda}_2 = \max\{2, 4, 3\} = 4, \quad \bar{\lambda}_3 = \max\{2, 4, 3\} = 4$$

otteniamo una soluzione duale ammissibile.

Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione duale ammissibile è:

$$\sum_{i=1}^r w_i \bar{\lambda}_i + d \bar{\pi} + e \bar{\varrho} = 35 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + 25 \cdot 4 + 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 430$$

Di conseguenza 430 è un upper bound sul valore ottimo del modello. Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$305 \leq z(LP) \leq 430$$

Esempio 16.5 — Trasporto dai magazzini ai clienti

Un'azienda ha $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ magazzini e trasporta il suo prodotto a $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ clienti. Per ogni magazzino $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il valore $d_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ rappresenta la capacità massima, in litri di prodotto alla settimana, che si può trasportare da quel magazzino ai clienti. Per ogni cliente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $e_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ indica la domanda di quel cliente, in litri di prodotto alla settimana. Per ogni magazzino $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ e ogni cliente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $f_{ij} \in \mathbb{Q}_{>0}$ rappresenta il costo in euro per trasportare un litro di prodotto dal magazzino i al cliente j . L'azienda vuole determinare un piano settimanale di trasporto del prodotto dai magazzini ai clienti, di costo minimo, che rispetti i vincoli descritti sopra.

Domande

1. Scrivere un modello di *programmazione lineare* (LP) per il problema. Individuare le decisioni da prendere e le corrispondenti variabili decisionali. Individuare e commentare la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?
2. Consideriamo ora un'istanza del problema con $s = 2$ magazzini e $r = 3$ clienti. Gli altri dati sono:

f_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$		$i = 1$	$i = 2$
$i = 1$	3	2	1	d_i	120	110
$i = 2$	2	4	1			

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
e_j	50	60	100

Scrivere il modello LP per questa istanza.

3. Trovare una soluzione ammissibile del modello LP dell'istanza e, di conseguenza, un upper bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.
4. Scrivere il modello duale del modello LP e il modello duale per l'istanza. Trovare una soluzione ammissibile del modello duale dell'istanza e, di conseguenza, un lower bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.

Soluzione

1. Introduciamo le seguenti $r \times s$ variabili non negative:

$$x_{ij} = \text{litri di prodotto trasportati dal magazzino } i \text{ al cliente } j,$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Con queste variabili, un modello LP per il problema è il seguente:

$$\min \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r f_{ij} x_{ij} \quad (16.7a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j=1}^r x_{ij} \leq d_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.7b)$$

$$\sum_{i=1}^s x_{ij} = e_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.7c)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (16.7d)$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare (16.7a) minimizza il costo totale di trasporto;

- i vincoli lineari (16.7b) garantiscono che la quantità totale di prodotto trasportata da ogni magazzino non superi la sua capacità disponibile (s vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.7c) garantiscono che ogni cliente riceva esattamente la quantità di prodotto richiesta (r vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.7d) definiscono le variabili del modello LP.

Il modello LP si può risolvere all'ottimo, per esempio, con l'algoritmo del simplesso.

2. Il modello LP (16.7) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{array}{ll}
 \min & 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + x_{23} \\
 \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 120 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 110 \\
 & x_{11} + x_{21} = 50 \\
 & x_{12} + x_{22} = 60 \\
 & x_{13} + x_{23} = 100 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0
 \end{array}$$

3. Per esempio, ponendo:

$$\bar{x}_{11} = 50, \bar{x}_{12} = 60, \bar{x}_{13} = 10, \bar{x}_{21} = 0, \bar{x}_{22} = 0, \bar{x}_{23} = 90$$

otteniamo una soluzione ammissibile. Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione ammissibile è:

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r f_{ij} \bar{x}_{ij} = 3 \cdot 50 + 2 \cdot 60 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 90 = 370$$

di conseguenza 370 è un upper bound sul valore ottimo del modello LP (16.7). Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$z(LP) \leq 370$$

4. Usando

- una variabile duale non positiva μ_i per ogni vincolo (16.7b) ($i \in \{1, 2, \dots, s\}$)
- una variabile duale libera π_j per ogni vincolo (16.7c) ($j \in \{1, 2, \dots, r\}$)

il modello duale del modello LP (16.7) è il seguente:

$$\max \sum_{i=1}^s d_i \mu_i + \sum_{j=1}^r e_j \pi_j \quad (16.8a)$$

$$\text{soggetto a } \mu_i + \pi_j \leq f_{ij}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.8b)$$

$$\mu_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.8c)$$

$$\pi_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (16.8d)$$

Il modello duale (16.8) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 120 \mu_1 + 110 \mu_2 + 50 \pi_1 + 60 \pi_2 + 100 \pi_3 \\ \text{soggetto a} \quad & \mu_1 + \pi_1 \leq 3 \\ & \mu_1 + \pi_2 \leq 2 \\ & \mu_1 + \pi_3 \leq 1 \\ & \mu_2 + \pi_1 \leq 2 \\ & \mu_2 + \pi_2 \leq 4 \\ & \mu_2 + \pi_3 \leq 1 \\ & \mu_1, \mu_2 \leq 0 \\ & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Per esempio, ponendo:

$$\bar{\mu}_1 = 0, \quad \bar{\mu}_2 = 0$$

e ponendo:

$$\bar{\pi}_1 = \min\{3, 2\} = 2, \quad \bar{\pi}_2 = \min\{2, 4\} = 2, \quad \bar{\pi}_3 = \min\{1, 1\} = 1$$

otteniamo una soluzione duale ammissibile.

Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione duale ammissibile è:

$$\sum_{i=1}^s d_i \bar{\mu}_i + \sum_{j=1}^r e_j \bar{\pi}_j = 120 \cdot 0 + 110 \cdot 0 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 + 100 \cdot 1 = 320$$

Di conseguenza 320 è un lower bound sul valore ottimo del modello. Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$320 \leq z(LP) \leq 370$$

Esempio 16.6 — Pianificazione della dieta

Una mensa scolastica deve determinare la dieta mensile per i suoi studenti. Sta considerando $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ possibili tipi di alimento (per esempio latte, riso, pane, patate, ecc.), ciascuno contenente $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ nutrienti (per esempio ferro, sodio, calcio, ecc.). Per ogni alimento $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il valore $w_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ rappresenta il costo in euro al chilogrammo di quell'alimento. Per ogni alimento $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ e ogni nutriente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $g_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ indica i grammi di nutriente j forniti da un chilogrammo di alimento i . Per ogni nutriente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, la dieta deve contenere almeno $a_j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ grammi e al più $b_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ grammi di quel nutriente al mese. Inoltre, per ogni alimento $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, la dieta deve includere almeno $c_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ chilogrammi e al più $d_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ chilogrammi di quell'alimento al mese. La mensa scolastica vuole determinare una dieta mensile di costo minimo che rispetti i vincoli descritti sopra.

Domande

1. Scrivere un modello di *programmazione lineare* (LP) per il problema. Individuare le decisioni da prendere e le corrispondenti variabili decisionali. Individuare e commentare la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?
2. Consideriamo ora un'istanza del problema con $s = 4$ tipi di alimento e $r = 3$ nutrienti. Gli altri dati sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
a_j	10	20	10	w_i	5	8	2	2
b_j	40	60	50	c_i	1	1	0	1
				d_i	10	15	20	10

g_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	2	4	2
$i = 2$	1	1	1
$i = 3$	4	6	4
$i = 4$	4	6	2

Scrivere il modello LP per questa istanza.

3. Trovare una soluzione ammissibile del modello LP dell'istanza e, di conseguenza, un upper bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.
4. Scrivere il modello duale del modello LP e il modello duale per l'istanza. Trovare una soluzione ammissibile del modello duale dell'istanza e, di conseguenza, un lower bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.

Soluzione

1. Introduciamo le seguenti s variabili non negative:

$$x_i = \text{chilogrammi di alimento } i \text{ nella dieta al mese, } \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Con queste variabili, un modello LP per il problema è il seguente:

$$\min \sum_{i=1}^s w_i x_i \quad (16.9a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{i=1}^s g_{ij} x_i \geq a_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.9b)$$

$$\sum_{i=1}^s g_{ij} x_i \leq b_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.9c)$$

$$x_i \geq c_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.9d)$$

$$x_i \leq d_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.9e)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}. \quad (16.9f)$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare (16.9a) minimizza il costo totale della dieta;
- i vincoli lineari (16.9b) garantiscono che la quantità totale di ciascun nutriente fornita dagli alimenti scelti sia almeno pari al suo fabbisogno minimo (r vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.9c) garantiscono che la quantità totale di ciascun nutriente fornita dagli alimenti scelti non superi il suo limite massimo (r vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.9d) garantiscono che ogni tipo di alimento incluso nella dieta rispetti la sua quantità minima (s vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.9e) garantiscono che ogni tipo di alimento incluso nella dieta non superi la sua quantità massima (s vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.9f) definiscono le variabili del modello LP.

Il modello LP si può risolvere all'ottimo, per esempio, con l'algoritmo del semplice.

2. Il modello LP (16.9) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{array}{ll}
 \min & 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\
 \text{soggetto a} & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10 \\
 & 4x_1 + x_2 + 6x_3 + 6x_4 \geq 20 \\
 & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 10 \\
 & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 40 \\
 & 4x_1 + x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 60 \\
 & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 50 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 1 \\
 & x_3 \geq 0 \\
 & x_4 \geq 1 \\
 & x_1 \leq 10 \\
 & x_2 \leq 15 \\
 & x_3 \leq 20 \\
 & x_4 \leq 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

3. Per esempio, ponendo:

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 1$$

otteniamo una soluzione ammissibile. Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione ammissibile è:

$$\sum_{i=1}^s w_i \bar{x}_i = 5 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 35$$

di conseguenza 35 è un upper bound sul valore ottimo del modello LP (16.9). Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$z(LP) \leq 35$$

4. Usando

- una variabile non negativa α_j per ogni vincolo (16.9b) ($j \in \{1, 2, \dots, r\}$)
- una variabile non positiva β_j per ogni vincolo (16.9c) ($j \in \{1, 2, \dots, r\}$)
- una variabile non negativa γ_i per ogni vincolo (16.9d) ($i \in \{1, 2, \dots, s\}$)
- una variabile non positiva δ_i per ogni vincolo (16.9e) ($i \in \{1, 2, \dots, s\}$)

il duale del modello LP (16.9) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^r a_j \alpha_j + \sum_{j=1}^r b_j \beta_j \\ & + \sum_{i=1}^s c_i \gamma_i + \sum_{i=1}^s d_i \delta_i \end{aligned} \quad (16.10a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^r g_{ij} \alpha_j + \sum_{j=1}^r g_{ij} \beta_j + \gamma_i + \delta_i \leq w_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.10b)$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.10c)$$

$$\beta_j \leq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.10d)$$

$$\gamma_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.10e)$$

$$\delta_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}. \quad (16.10f)$$

Il modello duale (16.10) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10 \alpha_1 + 20 \alpha_2 + 10 \alpha_3 + 40 \beta_1 + 60 \beta_2 + 50 \beta_3 \\ & + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 + 10 \delta_1 + 15 \delta_2 + 20 \delta_3 + 10 \delta_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 \alpha_1 + 4 \alpha_2 + 2 \alpha_3 + 2 \beta_1 + 4 \beta_2 + 2 \beta_3 \\ & + \gamma_1 + \delta_1 \leq 5 \\ & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ & + \gamma_2 + \delta_2 \leq 8 \\ & 4 \alpha_1 + 6 \alpha_2 + 4 \alpha_3 + 4 \beta_1 + 6 \beta_2 + 4 \beta_3 \\ & + \gamma_3 + \delta_3 \leq 2 \\ & 4 \alpha_1 + 6 \alpha_2 + 2 \alpha_3 + 4 \beta_1 + 6 \beta_2 + 2 \beta_3 \\ & + \gamma_4 + \delta_4 \leq 2 \\ & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \\ & \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \geq 0 \\ & \beta_1, \beta_2, \beta_3, \\ & \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Per esempio, ponendo:

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_3 = \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_4 = 0$$

e ponendo:

$$\bar{\gamma}_1 = 5, \quad \bar{\gamma}_2 = 8, \quad \bar{\gamma}_3 = 2, \quad \bar{\gamma}_4 = 2$$

otteniamo una soluzione duale ammissibile.

Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione duale ammissibile è:

$$\sum_{j=1}^r a_j \bar{\alpha}_j + \sum_{j=1}^r b_j \bar{\beta}_j + \sum_{i=1}^s c_i \bar{\gamma}_i + \sum_{i=1}^s d_i \bar{\delta}_i =$$

$$= 10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 15$$

Di conseguenza 15 è un lower bound sul valore ottimo del modello. Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$15 \leq z(LP) \leq 35$$

Esempio 16.7 — Pianificazione della dieta per più classi

Una mensa scolastica deve determinare $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ diete mensili per le sue classi di studenti. Sta considerando $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ possibili tipi di alimento (per esempio latte, riso, pane, ecc.), ciascuno contenente $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ nutrienti (per esempio ferro, sodio, ecc.). Per ogni alimento $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, il valore $w_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ rappresenta il costo in euro al chilogrammo di quell'alimento. Per ogni alimento $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ e ogni nutriente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, il valore $g_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ indica i grammi di nutriente j forniti da un chilogrammo di alimento i . Per ogni dieta $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ e ogni nutriente $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, la dieta deve contenere almeno $a_{kj} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ grammi e al più $b_{kj} \in \mathbb{Q}_{>0}$ grammi di quel nutriente al mese. Inoltre, per ogni alimento $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, le diete, complessivamente, devono includere almeno $c_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ chilogrammi e al più $d_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ chilogrammi di quell'alimento al mese. La mensa scolastica vuole determinare le diete mensili per tutte le classi di studenti, di costo minimo, che rispettino i vincoli descritti sopra.

Domande

1. Scrivere un modello di *programmazione lineare* (LP) per il problema. Individuare le decisioni da prendere e le corrispondenti variabili decisionali. Individuare e commentare la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?
2. Consideriamo ora un'istanza del problema con $n = 2$ diete, $s = 3$ tipi di alimento e $r = 2$ nutrienti. Gli altri dati sono:

a_{kj}	$j = 1$	$j = 2$
$k = 1$	20	10
$k = 2$	10	20

b_{kj}	$j = 1$	$j = 2$
$k = 1$	40	20
$k = 2$	20	40

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
w_i	5	8	6
c_i	1	1	0
d_i	5	4	10

g_{ij}	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	6	2
$i = 2$	2	1
$i = 3$	2	6

Scrivere il modello LP per questa istanza.

3. Trovare una soluzione ammissibile del modello LP dell'istanza e, di conseguenza, un upper bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.
4. Scrivere il modello duale del modello LP e il modello duale per l'istanza. Trovare una soluzione ammissibile del modello duale dell'istanza e, di conseguenza, un lower bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.

Soluzione

1. Introduciamo le seguenti $s \cdot n$ variabili non negative:

x_{ik} = chilogrammi di alimento i nella dieta k al mese,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Con queste variabili, un modello LP per il problema è il seguente:

$$\min \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^n w_i x_{ik} \quad (16.11a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{i=1}^s g_{ij} x_{ik} \geq a_{kj}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.11b)$$

$$\sum_{i=1}^s g_{ij} x_{ik} \leq b_{kj}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.11c)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} \geq c_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.11d)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} \leq d_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.11e)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (16.11f)$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare (16.11a) minimizza il costo totale delle diete per tutte le classi di studenti.
- i vincoli lineari (16.11b) garantiscono che, per ogni dieta e ogni nutriente, la quantità totale del nutriente fornita dagli alimenti inclusi in quella dieta rispetti il fabbisogno minimo ($n \cdot r$ vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.11c) garantiscono che, per ogni dieta e ogni nutriente, la quantità totale del nutriente fornita dagli alimenti inclusi in quella dieta non superi il limite massimo ($n \cdot r$ vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.11d) garantiscono che, per ogni alimento, la quantità totale distribuita fra tutte le diete rispetti la quantità minima (s vincoli lineari);

- i vincoli lineari (16.11e) garantiscono che, per ogni alimento, la quantità totale distribuita fra tutte le diete non superi la quantità massima (s vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.11f) definiscono le variabili del modello LP.

Il modello LP si può risolvere all'ottimo, per esempio, con l'algoritmo del simplesso.

2. Il modello LP (16.11) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & 5x_{11} + 5x_{12} + 8x_{21} + 8x_{22} + 6x_{31} + 6x_{32} \\
 \text{soggetto a} & 6x_{11} & & + 2x_{21} & & + 2x_{31} & & \geq 20 \\
 & 2x_{11} & & + & x_{21} & & + 6x_{31} & \geq 10 \\
 & & 6x_{12} & & + 2x_{22} & & + 2x_{32} & \geq 10 \\
 & & 2x_{12} & & + & x_{22} & & + 6x_{32} \geq 20 \\
 & 6x_{11} & & + 2x_{21} & & + 2x_{31} & & \leq 40 \\
 & 2x_{11} & & + & x_{21} & & + 6x_{31} & \leq 20 \\
 & & 6x_{12} & & + 2x_{22} & & + 2x_{32} & \leq 20 \\
 & & 2x_{12} & & + & x_{22} & & + 6x_{32} \leq 40 \\
 & x_{11} + & x_{12} & & & & & \geq 1 \\
 & & & & x_{21} + & x_{22} & & \geq 1 \\
 & & & & & & x_{31} + & x_{32} \geq 0 \\
 & x_{11} + & x_{12} & & & & & \leq 5 \\
 & & & & x_{21} + & x_{22} & & \leq 4 \\
 & & & & & & x_{31} + & x_{32} \leq 10 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{31}, & x_{32} & \geq 0
 \end{array}$$

3. Per esempio, ponendo:

$$\bar{x}_{11} = 4, \quad \bar{x}_{12} = 1, \quad \bar{x}_{21} = 2, \quad \bar{x}_{22} = 1, \quad \bar{x}_{31} = 0, \quad \bar{x}_{32} = 3$$

otteniamo una soluzione ammissibile. Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione ammissibile è:

$$\sum_{i=1}^s w_i \sum_{k=1}^n \bar{x}_{ik} = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 67$$

di conseguenza 67 è un upper bound sul valore ottimo del modello LP (16.11). Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$z(LP) \leq 67$$

4. Usando

- una variabile non negativa α_{kj} per ogni vincolo (16.11b) ($k \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$)
- una variabile non positiva β_{kj} per ogni vincolo (16.11c) ($k \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, r\}$)
- una variabile non negativa γ_i per ogni vincolo (16.11d) ($i \in \{1, 2, \dots, s\}$)
- una variabile non positiva δ_i per ogni vincolo (16.11e) ($i \in \{1, 2, \dots, s\}$)

il duale del modello LP (16.11) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r a_{kj} \alpha_{kj} \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r b_{kj} \beta_{kj} \\ & + \sum_{i=1}^s c_i \gamma_i + \sum_{i=1}^s d_i \delta_i \end{aligned} \quad (16.12a)$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & \sum_{j=1}^r g_{ij} \alpha_{kj} \\ & + \sum_{j=1}^r g_{ij} \beta_{kj} + \gamma_i + \delta_i \leq w_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (16.12b)$$

$$\alpha_{kj} \geq 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.12c)$$

$$\beta_{kj} \leq 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (16.12d)$$

$$\gamma_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad (16.12e)$$

$$\delta_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}. \quad (16.12f)$$

Il modello duale (16.12) per l'istanza è il seguente:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 20 \alpha_{11} + 10 \alpha_{12} + 10 \alpha_{21} + 20 \alpha_{22} + 40 \beta_{11} + 20 \beta_{12} + 20 \beta_{21} + 40 \beta_{22} \\
 & + \gamma_1 + \gamma_2 + 5 \delta_1 + 4 \delta_2 + 10 \delta_3 \\
 \text{soggetto a} & 6 \alpha_{11} + 2 \alpha_{12} + 6 \beta_{11} + 2 \beta_{12} \leq 5 \\
 & + \gamma_1 + \delta_1 \\
 & 6 \alpha_{21} + 2 \alpha_{22} + 6 \beta_{21} + 2 \beta_{22} \leq 5 \\
 & + \gamma_1 + \delta_1 \\
 & 2 \alpha_{11} + \alpha_{12} + 2 \beta_{11} + \beta_{12} \leq 8 \\
 & + \gamma_2 + \delta_2 \\
 & 2 \alpha_{21} + \alpha_{22} + 2 \beta_{21} + \beta_{22} \leq 8 \\
 & + \gamma_2 + \delta_2 \\
 & 2 \alpha_{11} + 6 \alpha_{12} + 2 \beta_{11} + 6 \beta_{12} \leq 6 \\
 & + \gamma_3 + \delta_3 \\
 & 2 \alpha_{21} + 6 \alpha_{22} + 2 \beta_{21} + 6 \beta_{22} \leq 6 \\
 & + \gamma_3 + \delta_3 \\
 & \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0 \\
 & \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0
 \end{array}$$

Per esempio, ponendo:

$$\bar{\alpha}_{11} = \bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{21} = \bar{\alpha}_{22} = \bar{\beta}_{11} = \bar{\beta}_{12} = \bar{\beta}_{21} = \bar{\beta}_{22} = \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0$$

e ponendo:

$$\bar{\gamma}_1 = \min\{5, 5\} = 5, \quad \bar{\gamma}_2 = \min\{8, 8\} = 8, \quad \bar{\gamma}_3 = \min\{6, 6\} = 6$$

otteniamo una soluzione duale ammissibile.

Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione duale ammissibile è:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r a_{kj} \bar{\alpha}_{kj} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r b_{kj} \bar{\beta}_{kj} + \sum_{i=1}^s c_i \bar{\gamma}_i + \sum_{i=1}^s d_i \bar{\delta}_i = \\
 & = 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 13
 \end{aligned}$$

Di conseguenza 13 è un lower bound sul valore ottimo del modello. Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$13 \leq z(LP) \leq 67$$

Esempio 16.8 — Produzione su più periodi con acquisti e stoccaggio

Un'azienda deve soddisfare la domanda prevista di un prodotto chimico su un orizzonte temporale di $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ giorni. Per ogni giorno $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, la quantità $d_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ è la domanda prevista, in litri di prodotto. In ogni giorno $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'azienda può produrre fino a $m_t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ litri a un costo di $p_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ euro al litro, acquistare dal mercato a un costo di $u_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ euro al litro, e immagazzinare prodotto alla fine del giorno in un magazzino a un costo di mantenimento di $h_t \in \mathbb{Q}_{> 0}$ euro al litro. La scorta iniziale nel magazzino è di $\ell_0 \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ litri, mentre alla fine dell'orizzonte temporale è richiesta una scorta di sicurezza di $\ell_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ litri. Le capacità di stoccaggio e di acquisto si assumono illimitate. L'azienda vuole determinare un piano di costo minimo che soddisfi la domanda e rispetti i vincoli descritti sopra.

Domande

1. Scrivere un modello di programmazione lineare (LP) per il problema. Individuare le decisioni da prendere e le corrispondenti variabili decisionali. Individuare e commentare la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?
2. Consideriamo ora un'istanza del problema con 4 giorni ($n = 4$) e i seguenti dati:

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
d_t	45	60	75	75
p_t	10	10	10	10
u_t	15	15	15	15
h_t	2	2	2	2
m_t	40	50	150	40

Inoltre $\ell_0 = 10$ e $\ell_n = 5$. Scrivere il modello LP per questa istanza.

3. Trovare una soluzione ammissibile del modello LP dell'istanza e, di conseguenza, un upper bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.
4. Scrivere il modello duale del modello LP e il modello duale per l'istanza. Trovare una soluzione ammissibile del modello duale dell'istanza e, di conseguenza, un lower bound sul valore ottimo del modello LP per l'istanza.

Soluzione

1. Introduciamo le seguenti $2n + n - 1$ variabili non negative:

$$\begin{cases} x_t = & \text{litri prodotti nel giorno } t \\ b_t = & \text{litri acquistati dal mercato nel giorno } t \end{cases} \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$s_t = \text{litri in magazzino alla fine del giorno } t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Con queste variabili, un modello LP per il problema è il seguente:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{h_n \ell_n}_{\text{termine costante}} + \min \quad & \sum_{t=1}^n p_t x_t \\
 & + \sum_{t=1}^n u_t b_t \\
 & + \sum_{t=1}^{n-1} h_t s_t
 \end{aligned} \tag{16.13a}$$

$$\text{soggetto a } x_1 + b_1 - s_1 = d_1 - \ell_0, \tag{16.13b}$$

$$x_t + b_t + s_{t-1} - s_t = d_t, \quad \forall t \in \{2, 3, \dots, n-1\}, \tag{16.13c}$$

$$x_n + b_n + s_{n-1} = d_n + \ell_n, \tag{16.13d}$$

$$x_t \leq m_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{16.13e}$$

$$x_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{16.13f}$$

$$b_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{16.13g}$$

$$s_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \tag{16.13h}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare (16.13a) minimizza il costo totale di produzione, di acquisto sul mercato e di mantenimento delle scorte sull'orizzonte di pianificazione. Il termine costante $h_n \ell_n$ rappresenta il costo di mantenimento della scorta di sicurezza finale, ed è scritto fuori dalla minimizzazione perché non dipende dalle variabili decisionali.
- il vincolo lineare (16.13b) garantisce che la domanda del primo giorno sia soddisfatta con la produzione, gli acquisti e la scorta iniziale, tenendo conto della scorta immagazzinata alla fine del primo giorno (un vincolo lineare);
- i vincoli lineari (16.13c) garantiscono che, nei giorni intermedi, la domanda sia soddisfatta con la produzione giornaliera, gli acquisti e la scorta proveniente dal giorno precedente ($n-2$ vincoli lineari);
- il vincolo lineare (16.13d) garantisce che la domanda dell'ultimo giorno sia soddisfatta e che la scorta di sicurezza richiesta resti in magazzino alla fine dell'orizzonte di pianificazione (un vincolo lineare);
- i vincoli lineari (16.13e) garantiscono che la produzione giornaliera non superi la capacità produttiva disponibile (n vincoli lineari);
- i vincoli lineari (16.13f), (16.13g) e (16.13h) definiscono le variabili del modello LP.

Il modello LP si può risolvere all'ottimo, per esempio, con l'algoritmo del semplice.

2. Il modello LP (16.13) per l'istanza (senza il termine costante) è il seguente:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 15b_1 + 15b_2 + 15b_3 + 15b_4 \\
 & + 2s_1 + 2s_2 + 2s_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & x_1 + b_1 = 35 \\
 & -s_1 + x_2 + b_2 = 60 \\
 & +s_1 -s_2 + x_3 + b_3 = 75 \\
 & +s_2 -s_3 + x_4 + b_4 = 80 \\
 & x_1 \leq 40 \\
 & x_2 \leq 50 \\
 & x_3 \leq 150 \\
 & x_4 \leq 40 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, b_1, b_2, b_3, b_4, \\
 & s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

3. Per esempio, ponendo:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= 35, \quad \bar{x}_2 = 50, \quad \bar{x}_3 = 75, \quad \bar{x}_4 = 40, \\
 \bar{b}_1 &= 0, \quad \bar{b}_2 = 10, \quad \bar{b}_3 = 0, \quad \bar{b}_4 = 40, \\
 \bar{s}_1 &= 0, \quad \bar{s}_2 = 0, \quad \bar{s}_3 = 0
 \end{aligned}$$

otteniamo una soluzione ammissibile. Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione ammissibile è:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{h_n \ell_n}_{\text{termine costante}} + \sum_{t=1}^n p_t \bar{x}_t + \sum_{t=1}^n u_t \bar{b}_t + \sum_{t=1}^{n-1} h_t \bar{s}_t &= 2 \cdot 5 + \\
 &+ 10 \cdot 35 + 10 \cdot 50 + 10 \cdot 75 + 10 \cdot 40 + \\
 &+ 15 \cdot 0 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 0 + 15 \cdot 40 + \\
 &+ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\
 &= 2760
 \end{aligned}$$

di conseguenza 2760 è un upper bound sul valore ottimo del modello LP (16.13). Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$z(LP) \leq 2760$$

4. Usando

- una variabile duale libera μ_1 per il vincolo (16.13b)
- una variabile duale libera μ_t per ogni vincolo (16.13c) ($t \in \{2, 3, \dots, n-1\}$)
- una variabile duale libera μ_n per il vincolo (16.13d)
- una variabile duale non positiva π_t per ogni vincolo (16.13e) ($t \in \{1, 2, \dots, n\}$)

il duale del modello LP (16.13) (senza il termine costante) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & (d_1 - \ell_0) \mu_1 + \sum_{t=2}^{n-1} d_t \mu_t \\ & + (d_n + \ell_n) \mu_n + \sum_{t=1}^n m_t \pi_t \end{aligned} \quad (16.14a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_t + \pi_t \leq p_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.14b)$$

$$\mu_t \leq u_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.14c)$$

$$-\mu_t + \mu_{t+1} \leq h_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad (16.14d)$$

$$\mu_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (16.14e)$$

$$\pi_t \leq 0, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (16.14f)$$

Il modello duale (16.14) per l'istanza (senza il termine costante) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 35 \mu_1 + 60 \mu_2 + 75 \mu_3 + 80 \mu_4 + 40 \pi_1 + 50 \pi_2 + 150 \pi_3 + 40 \pi_4 \\ \text{soggetto a} \quad & \mu_1 + \pi_1 \leq 10 \\ & \mu_2 + \pi_2 \leq 10 \\ & \mu_3 + \pi_3 \leq 10 \\ & \mu_4 + \pi_4 \leq 10 \\ & \mu_1 \leq 15 \\ & \mu_2 \leq 15 \\ & \mu_3 \leq 15 \\ & \mu_4 \leq 15 \\ & -\mu_1 + \mu_2 \leq 2 \\ & -\mu_2 + \mu_3 \leq 2 \\ & -\mu_3 + \mu_4 \leq 2 \\ & \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \\ & \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Per esempio, ponendo:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0$$

e ponendo:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= \min\{10, 15\} = 10, & \bar{\mu}_2 &= \min\{10, 15\} = 10, \\ \bar{\mu}_3 &= \min\{10, 15\} = 10, & \bar{\mu}_4 &= \min\{10, 15\} = 10\end{aligned}$$

otteniamo una soluzione duale ammissibile.

Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione duale ammissibile è:

$$\begin{aligned}& \underbrace{h_n \ell_n}_{\text{termine costante}} + (d_1 - \ell_0) \bar{\mu}_1 + \sum_{t=2}^{n-1} d_t \bar{\mu}_t + (d_n + \ell_n) \bar{\mu}_n + \\ & + \sum_{t=1}^n m_t \bar{\pi}_t = 2 \cdot 5 + \\ & + 35 \cdot 10 + 60 \cdot 10 + 75 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + \\ & + 40 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 150 \cdot 0 + 40 \cdot 0 \\ & = 2510\end{aligned}$$

Di conseguenza, 2510 è un lower bound sul valore ottimo del modello LP primale. Quindi, per questa istanza, abbiamo:

$$2510 \leq z(LP) \leq 2760$$

16.8.2 Modelli numerici

Esempio 16.9 — Scelta dei dolci

Una persona vuole stabilire quali dolci mangiare e in quali quantità il giorno seguente. I dolci disponibili sono torta di frutta e gelato. Secondo le etichette nutrizionali, ogni porzione di torta di frutta pesa 50 grammi, fornisce 120 calorie e contiene 5 grammi di grassi. Ogni porzione di gelato pesa 75 grammi, fornisce 160 calorie e contiene 10 grammi di grassi. La persona vuole consumare almeno 120 grammi di dolci, senza superare 450 calorie e 25 grammi di grassi. Inoltre, a ogni grammo di dolce è assegnato un punteggio di gradimento personale su una scala da 0 (meno gradito) a 10 (più gradito): 8 per la torta di frutta e 9 per il gelato. L'obiettivo della persona è determinare le quantità di dolci da consumare che soddisfino tutti i vincoli nutrizionali e massimizzino il punteggio di gradimento totale.

Domande

1. Scrivere un modello di ottimizzazione di programmazione lineare per il problema. Individuare le decisioni da prendere e definire le corrispondenti variabili decisionali. Descrivere la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?

Soluzione

Attenzione

Assumiamo che la persona possa consumare porzioni frazionarie qualsiasi di ciascun dolce.

1. Introduciamo le seguenti due variabili decisionali non negative:

$$\begin{cases} x_1 = \text{numero di porzioni di torta di frutta} \\ x_2 = \text{numero di porzioni di gelato} \end{cases}$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare (LP) per il problema è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & \overbrace{(8 \cdot 50)}^{=400} x_1 + \overbrace{(9 \cdot 75)}^{=675} x_2 \\ \text{soggetto a} & 120 x_1 + 160 x_2 \leq 450 \\ & 5 x_1 + 10 x_2 \leq 25 \\ & 50 x_1 + 75 x_2 \geq 120 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare massimizza il punteggio di gradimento totale;
- il primo vincolo lineare garantisce che l'apporto calorico totale delle porzioni scelte non superi il limite indicato;
- il secondo vincolo lineare limita l'apporto totale di grassi al massimo indicato;
- il terzo vincolo lineare garantisce che la persona consumi almeno il numero indicato di grammi di dolci al giorno;
- l'ultimo vincolo definisce le variabili del modello.

Esempio 16.10 — Produzione e stoccaggio di torte di frutta

Una pasticceria deve pianificare la produzione di torte di frutta per i prossimi quattro giorni, per soddisfare domande giornaliere di 10, 20, 30 e 20 chilogrammi. Parte con 5 chilogrammi in magazzino. La produzione giornaliera è limitata a 30 chilogrammi, e la capacità di

stoccaggio alla fine di ogni giorno è di 10 chilogrammi. I costi di produzione al chilogrammo sono, rispettivamente, 10, 20, 30 e 40 euro. Tenere un chilogrammo in magazzino alla fine di un giorno costa il 10% del suo costo di produzione. La pasticceria vuole minimizzare i costi totali di produzione e di mantenimento delle scorte, soddisfacendo tutte le domande e rispettando i vincoli di capacità.

Domande

1. Scrivere un modello di ottimizzazione di programmazione lineare per il problema. Individuare le decisioni da prendere e definire le corrispondenti variabili decisionali. Descrivere la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?

Soluzione

Attenzione

Assumiamo che la pasticceria possa produrre una quantità frazionaria qualsiasi di torta di frutta.

1. Introduciamo le seguenti sette variabili decisionali non negative:

$$\begin{cases} x_t = \text{chilogrammi di torta di frutta prodotti nel giorno } t, & \forall t \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ s_t = \text{chilogrammi di torta di frutta in magazzino alla fine del giorno } t, & \forall t \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare (LP) per il problema è il seguente:

$$\begin{array}{llllllll} \min & 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 40x_4 + s_1 + 2s_2 + 3s_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & & -s_1 & & = 10 - 5 \\ & & x_2 & & & +s_1 - s_2 & & = 20 \\ & & & x_3 & & & +s_2 - s_3 & = 30 \\ & & & & x_4 & & +s_3 & = 20 \\ & x_1 & & & & & & \leq 30 \\ & & x_2 & & & & & \leq 30 \\ & & & x_3 & & & & \leq 30 \\ & & & & x_4 & & & \leq 30 \\ & & & & & s_1 & & \leq 10 \\ & & & & & & s_2 & \leq 10 \\ & & & & & & & s_3 \leq 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & s_1, & s_2, & s_3 \geq 0 \end{array}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare minimizza i costi totali di produzione e di mantenimento delle scorte sull'orizzonte di pianificazione di 4 giorni;
- i primi quattro vincoli lineari garantiscono che, in ogni giorno, la quantità di torta di frutta disponibile, data dalla scorta iniziale e da quanto prodotto durante il giorno, sia pari alla domanda giornaliera dei clienti, tenuto conto di ciò che resta in magazzino alla fine del giorno;
- gli otto vincoli lineari successivi impongono i limiti giornalieri di capacità produttiva e di stoccaggio;
- gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello di ottimizzazione.

Esempio 16.11 — Miscelazione di petrolio greggio in una raffineria

Una raffineria dispone di 5000 barili di petrolio greggio di tipo 1 e di 10000 barili di petrolio greggio di tipo 2. La raffineria produce e vende due prodotti: benzina e gasolio da riscaldamento. Questi prodotti si ottengono miscelando i due tipi di greggio in proporzioni opportune. Ogni barile di greggio di tipo 1 ha un livello di qualità pari a 10, mentre ogni barile di tipo 2 ha un livello di qualità pari a 5. Per rispettare gli standard di mercato, la benzina deve avere un livello medio di qualità di almeno 8, e il gasolio da riscaldamento un livello medio di qualità di almeno 6. La benzina si vende a 25 dollari al barile, e il gasolio da riscaldamento a 20 dollari al barile. L'obiettivo della raffineria è determinare un piano di produzione che massimizzi il profitto totale rispettando tutti i vincoli.

Domande

1. Scrivere un modello di ottimizzazione di programmazione lineare per il problema. Individuare le decisioni da prendere e definire le corrispondenti variabili decisionali. Descrivere la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?

Soluzione

Attenzione

Assumiamo che la raffineria possa miscelare quantità frazionarie qualsiasi di greggio per produrre benzina e gasolio da riscaldamento.

1. Introduciamo le seguenti quattro variabili decisionali non negative:

$$\begin{cases} x_1 = \text{barili di greggio di tipo 1 usati per la benzina,} \\ x_2 = \text{barili di greggio di tipo 2 usati per la benzina,} \\ y_1 = \text{barili di greggio di tipo 1 usati per il gasolio da riscaldamento,} \\ y_2 = \text{barili di greggio di tipo 2 usati per il gasolio da riscaldamento.} \end{cases}$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare (LP) per il problema è il seguente:

$$\begin{array}{llllll} \max & 25x_1 & + & 25x_2 & + & 20y_1 & + & 20y_2 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + & y_1 & & \leq 5000 \\ & & & x_2 & & + & y_2 & \leq 10000 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & \geq 0 \\ & & & & & 4y_1 & - & y_2 \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & y_1, & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione obiettivo lineare massimizza il ricavo totale dalla vendita di benzina e gasolio da riscaldamento;
- i primi due vincoli lineari impongono i limiti di disponibilità sull'uso totale del greggio, rispettivamente, di tipo 1 e di tipo 2;
- il terzo vincolo lineare impone il requisito di qualità per la benzina. Garantisce che la qualità media della miscela di greggio usata per produrre benzina sia almeno pari al valore richiesto.

$$\frac{10x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2} \geq 8 \iff 10x_1 + 5x_2 \geq 8(x_1 + x_2) \iff 2x_1 - 3x_2 \geq 0$$

- il quarto vincolo lineare impone il requisito di qualità per il gasolio da riscaldamento. Garantisce che la qualità media della miscela di greggio usata per produrre gasolio da riscaldamento sia almeno pari al valore richiesto.

$$\frac{10y_1 + 5y_2}{y_1 + y_2} \geq 6 \iff 10y_1 + 5y_2 \geq 6(y_1 + y_2) \iff 4y_1 - y_2 \geq 0$$

- l'ultimo vincolo definisce le variabili del modello.

Esempio 16.12 — Produzione di tre farmaci

Un'azienda farmaceutica produce tre farmaci: farmaco 1, farmaco 2 e farmaco 3, venduti rispettivamente a prezzi unitari di 8 euro, 70 euro e 100 euro. La produzione di 1 unità di farmaco 1 richiede 1 ora di lavoro. La produzione di 1 unità di farmaco 2 richiede 2 ore di lavoro e consuma 2 unità di farmaco 1. La produzione di 1 unità di farmaco 3 richiede 3 ore di lavoro e consuma 1 unità di farmaco 2. Sono disponibili in totale 4000 ore di lavoro. L'obiettivo dell'azienda è determinare un piano di produzione che massimizzi il ricavo totale.

Domande

1. Scrivere un modello di ottimizzazione di programmazione lineare per il problema. Individuare le decisioni da prendere e definire le corrispondenti variabili decisionali. Descrivere la funzione obiettivo e i vincoli del modello. Quale algoritmo si può usare per trovare una soluzione ottima del modello?

Soluzione

Attenzione

Assumiamo che l'azienda possa produrre e vendere quantità frazionarie qualsiasi di ciascun farmaco.

1. Introduciamo le seguenti tre variabili decisionali non negative:

$$\begin{cases} y_1 = \text{unità di farmaco 1 vendute,} \\ y_2 = \text{unità di farmaco 2 vendute,} \\ y_3 = \text{unità di farmaco 3 vendute.} \end{cases}$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare (LP) per il problema è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & 8y_1 + 70y_2 + 100y_3 \\ \text{soggetto a} & y_1 + 4y_2 + 7y_3 \leq 4000 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0 \end{array}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli:

- la funzione obiettivo lineare massimizza il ricavo totale: il farmaco 1 rende 8 euro/unità, il farmaco 2 rende 70 euro/unità e il farmaco 3 rende 100 euro/unità.
- il vincolo lineare limita l'uso totale di lavoro. Ogni unità di farmaco 1 venduta richiede 1 ora di lavoro; ogni unità di farmaco 2 richiede 4 ore (2 unità di farmaco 1 + 1 unità di farmaco 2); e ogni unità di farmaco 3 richiede 7 ore (2 unità di farmaco 1 + 1 unità di farmaco 2 + 1 unità di farmaco 3).

- l'ultimo vincolo definisce le variabili del modello.

Un altro modello LP.

Introduciamo le seguenti tre variabili decisionali non negative:

$$\begin{cases} x_1 = \text{unità di farmaco 1 prodotte,} \\ x_2 = \text{unità di farmaco 2 prodotte,} \\ x_3 = \text{unità di farmaco 3 prodotte.} \end{cases}$$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare (LP) per il problema è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_1 + 54x_2 + 30x_3 \\ \text{soggetto a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4000 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ & \quad -x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello LP:

- la funzione lineare massimizza il ricavo totale generato dalla vendita dei tre farmaci, tenuto conto del consumo interno dei farmaci intermedi. I coefficienti di ciascuna variabile si calcolano considerando solo le unità effettivamente vendute sul mercato.

- la quantità di farmaco 1 venduta è uguale alla quantità prodotta, x_1 , meno la quantità usata per produrre il farmaco 2, che richiede 2 unità di farmaco 1 per ogni unità di farmaco 2 prodotta. Quindi, il contributo effettivo al ricavo del farmaco 1 è:

$$8(x_1 - 2x_2)$$

- la quantità di farmaco 2 venduta è uguale alla quantità prodotta, x_2 , meno la quantità usata per produrre il farmaco 3, che richiede 1 unità di farmaco 2 per ogni unità di farmaco 3 prodotta. Quindi, il contributo effettivo al ricavo del farmaco 2 è:

$$70(x_2 - x_3)$$

- tutte le unità di farmaco 3 si vendono direttamente, quindi il loro contributo al ricavo è semplicemente:

$$100x_3$$

Quindi, abbiamo:

$$\max 8(x_1 - 2x_2) + 70(x_2 - x_3) + 100x_3 \iff \max 8x_1 + 54x_2 + 30x_3$$

- il primo vincolo lineare limita l'uso totale di lavoro, garantendo che il tempo totale richiesto da tutte le attività di produzione non superi le ore disponibili;
- il secondo vincolo lineare garantisce che la produzione di farmaco 1 basti a sostenere la produzione di farmaco 2:

$$x_1 - 2x_2 \geq 0 \iff 2x_2 \leq x_1$$

- il terzo vincolo lineare garantisce che la produzione di farmaco 2 basti a sostenere la produzione di farmaco 3:

$$x_2 - x_3 \geq 0 \iff x_3 \leq x_2$$

- l'ultimo vincolo definisce le variabili del modello.