



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Volume 4 — Metodi matriciali, sensitività e geometria

Il semplice rivisto primale e duale, il metodo primale-duale, l'analisi di sensitività, la geometria della programmazione lineare (facce, vertici e soluzioni di base). Esempi svolti passo per passo ed esercizi con la soluzione completa in fondo a ogni capitolo.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

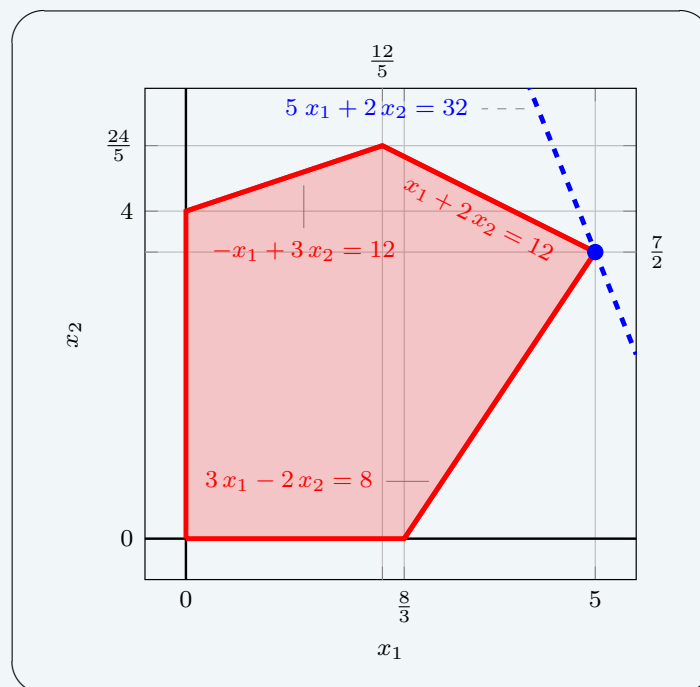
11	Algoritmo del simplesso rivisto	2
11.1	Operazioni di pivot con due sistemi di equazioni lineari	3
11.2	Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso rivisto	5
12	Algoritmo del simplesso duale rivisto	10
12.1	Operazioni di pivot con due sistemi di equazioni lineari	10
12.2	Aggiornamento dei costi ridotti	11
12.3	Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso duale rivisto	12
12.4	Esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto	13
13	Il metodo primale-duale	17
13.1	La coppia di riferimento: problema primale e duale	17
13.2	Il primale ristretto	18
13.3	Il passo duale	19
13.4	Pseudocodice del metodo primale-duale	20
13.5	Esecuzione del metodo primale-duale	21
13.6	Confronto con gli algoritmi del simplesso	24
14	Analisi di sensitività	25
14.1	Basi ottime e le loro due condizioni	25
14.2	Variazioni del vettore dei costi	27
14.3	Variazioni del vettore dei termini noti	29
14.4	Aggiunta di una nuova variabile	31
14.5	Aggiunta di un nuovo vincolo	32
14.6	Riepilogo	34
15	La geometria della programmazione lineare	35
15.1	La dimensione di un poliedro	35
15.2	Facce, faccette e vertici	36
15.3	Soluzioni di base ammissibili e vertici	39
15.4	Il Teorema Fondamentale, in chiave geometrica	42
15.5	Riepilogo	44

Algoritmo del simplesso rivisto

Esempio 11.1: un problema LP in forma canonica e la sua forma standard

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



La sua forma standard equivalente con $n + m = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli è:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & \\
 \text{soggetto a} & -x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & & = & 12 \\
 & x_1 & + & 2 & x_2 & & + & x_4 & = & 12 \\
 & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & & + & x_5 & = & 8 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Per questo problema LP in forma standard abbiamo:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Poiché $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ abbiamo la seguente soluzione di base ammissibile iniziale:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

11.1 Operazioni di pivot con due sistemi di equazioni lineari

- Data una base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$, tutte le informazioni necessarie per le operazioni di pivot si possono determinare risolvendo **due sistemi di equazioni lineari**.

1. Primo sistema di equazioni lineari

- I costi ridotti e il valore della soluzione di base ammissibile si possono determinare calcolando direttamente $\mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$ poiché:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$$

Ponendo $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, il vettore riga $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ di m colonne si può trovare risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \implies \boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \quad \text{dove} \quad \boldsymbol{\pi} = [\pi_j] \quad \text{con} \quad j \in \mathcal{B}$$

Negli esempi le componenti di $\boldsymbol{\pi}$ sono indicate con gli indici $j \in \mathcal{B}$ delle variabili in base, ma ogni componente di $\boldsymbol{\pi}$ corrisponde a un vincolo, cioè a una riga di $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$: la i -esima componente di $\boldsymbol{\pi}$ è associata all' i -esimo vincolo.

2. Secondo sistema di equazioni lineari

- Data una colonna pivot x_p con $p \in \mathcal{N}$, la riga pivot e l'aggiornamento della soluzione di base ammissibile corrente si possono ottenere calcolando direttamente $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p$ poiché:

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p x_p$$

Ponendo $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p$, il vettore colonna $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ di m righe (associate alle variabili in base) si può trovare risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_p \implies \mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p \quad \text{dove} \quad \mathbf{d} = [d_i] \quad \text{con} \quad i \in \mathcal{B}$$

Esempio 11.2: Sistemi di equazioni lineari

Per il problema LP dell'Esempio 11.1 con $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$, $\mathcal{N} = \{2, 5\}$ e x_2 come colonna pivot, abbiamo:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$, primo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_3 + 3\pi_4 = 5 \\ \pi_1 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{cases} \implies \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad \frac{5}{3})$$

Risolviamo $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_2$, secondo sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -d_1 + d_3 = 3 \\ d_1 + d_4 = 2 \\ 3d_1 = -2 \end{cases} \implies \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

L'algoritmo del simplesso rivisto non calcola mai la matrice inversa $\mathbf{A}_B^{-1}$: a ogni iterazione risolve due sistemi di equazioni lineari, uno per il vettore riga $\boldsymbol{\pi}$ e uno per il vettore colonna $\mathbf{d}$. Risolvere un sistema di m equazioni lineari costa meno, dal punto di vista computazionale, che invertire una matrice di dimensione m , e la matrice $\mathbf{A}_B$ dei due sistemi è la stessa.

11.2 Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso rivisto

Algoritmo

Passo 0: Inizializzazione

Trovare una soluzione di base ammissibile $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ del problema LP in forma standard di massimo. Andare al Passo 1.

Passo 1: Test di ottimalità

- Risolvere $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$
- Calcolare i costi ridotti e il valore della soluzione di base ammissibile:

$$\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \underbrace{\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}}_{=\boldsymbol{\pi}} \mathbf{A}_N \quad \bar{z} = \underbrace{\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}}_{=\boldsymbol{\pi}} \mathbf{b}$$

Se $\bar{\mathbf{c}}' \leq \mathbf{0}$ allora la soluzione di base ammissibile $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ è una soluzione ottima e $\bar{z}$ è il valore ottimo, **altrimenti** andare al Passo 2.

Passo 2: Operazioni di pivot

La **colonna pivot** è una variabile fuori base x_p con $p \in N$ tale che:

$$c_p > \underbrace{\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}}_{=\boldsymbol{\pi}} \mathbf{A}_p$$

- Risolvere $\mathbf{A}_B \mathbf{d} = \mathbf{A}_p$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p$
- Se $\mathbf{d} \leq \mathbf{0}$, allora il problema LP è **illimitato**. STOP.
- Trovare il valore massimo di t (indicato con t_m) tale che:

$$\bar{\mathbf{b}} - t \underbrace{\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p}_{=\mathbf{d}} \geq \mathbf{0} \quad \implies \quad t_m \leftarrow \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{d_i} : i \in B, d_i > 0 \right\}$$

La **riga pivot** è una variabile in base x_r con $r \in B$ tale che:

$$\bar{b}_r - t_m \underbrace{\bar{a}_{rp}}_{=d_r} = 0$$

- Aggiornare la base con la nuova partizione degli indici delle variabili:

$$B \leftarrow (B \setminus \{r\}) \cup \{p\} \quad \text{e} \quad N \leftarrow (N \setminus \{p\}) \cup \{r\}$$

- Aggiornare la soluzione di base ammissibile (nuovo vettore $\bar{\mathbf{b}}$):

$$x_i = \bar{b}_i - t_m \underbrace{\bar{a}_{ip}}_{=d_i}, \quad \forall i \in B \setminus \{p\}, \quad x_p = t_m \quad \text{e} \quad x_i = 0, \quad \forall i \in N$$

Andare al Passo 1.

Esempio 11.3: algoritmo del simplesso rivisto – prima iterazione

Inizializzazione

Nel problema LP dell'Esempio 11.1, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione di base

ammissibile con $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Test di ottimalità

Con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$.

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\text{quindi} \quad \begin{cases} \pi_3 & & = & 0 \\ & \pi_4 & & = & 0 \\ & & \pi_5 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$.

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (5 \quad 2) - (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{(5 \quad 2)}_{c_1 \quad c_2} - \underbrace{(0 \quad 0)}_{\pi \mathbf{A}_1 \quad \pi \mathbf{A}_2} = \underbrace{(5 \quad 2)}_{\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2}$$

Operazione di pivot

Poiché $c_1 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_1$, x_1 è la colonna pivot. Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_1$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_1$.

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi} \quad \begin{cases} d_3 & & = & -1 \\ & d_4 & & = & 1 \\ & & d_5 & = & 3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{12 - t \cdot (-1)}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{12 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{8 - t \cdot 3}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -12 \\ t \leq 12 \\ t \leq \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{8}{3}$$

Il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_1 = \frac{8}{3}$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_3 = 12 - \frac{8}{3} \cdot (-1) = \frac{44}{3}, \quad x_4 = 12 - \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{28}{3} \quad \text{e quindi} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{44}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$$

La nuova partizione degli indici delle variabili è $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$.

Esempio 11.4: algoritmo del simplesso rivisto – seconda iterazione

Test di ottimalità

Con $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$, risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}}$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$.

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} = (5 \quad 0 \quad 0)$$

$$\text{quindi} \quad \begin{cases} -\pi_1 + \pi_3 + 3\pi_4 = 5 \\ \pi_1 = 0 \\ \pi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 0 \quad \frac{5}{3})$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad \frac{5}{3}) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{40}{3}$.

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (2 \quad 0) - (0 \quad 0 \quad \frac{5}{3}) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(2 \quad 0)}_{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}} - \underbrace{(\frac{-10}{3} \quad \frac{5}{3})}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}} = \underbrace{(\frac{16}{3} \quad -\frac{5}{3})}_{\bar{\mathbf{c}}'}$$

Operazione di pivot

Poiché $c_2 > \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_2$, x_2 è la colonna pivot. Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ per calcolare $\mathbf{d} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_2$.

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi} \quad \begin{cases} -d_1 + d_3 = 3 \\ d_1 + d_4 = 2 \\ 3d_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \mathbf{d} \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{8}{3} - t \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{44}{3} - t \cdot \frac{7}{3}}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{\frac{28}{3} - t \cdot \frac{8}{3}}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -4 \\ t \leq \frac{44}{7} \\ t \leq \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{7}{2}$$

Il valore della colonna pivot diventa t_m , cioè $x_2 = \frac{7}{2}$. Il valore di x_4 diventa zero e x_4 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \mathbf{d}$, quindi abbiamo:

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 5, \quad x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{13}{2} \quad \text{e quindi} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

La nuova partizione degli indici delle variabili è $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$.

Esempio 11.5: algoritmo del simplesso rivisto – terza iterazione

Test di ottimalità

Con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$, risolviamo $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B$ per calcolare $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$.

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}'_B = (5 \quad 2 \quad 0)$$

$$\text{quindi} \quad \begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 + 3\pi_3 = 5 \\ 3\pi_1 + 2\pi_2 - 2\pi_3 = 2 \\ \pi_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = (0 \quad 2 \quad 1)$$

Calcoliamo il valore della soluzione di base ammissibile $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 32$

Calcoliamo i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathbf{c}}' = (0 \ 0) - (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(0 \ 0)}_{c_4 \ c_5} - \underbrace{(2 \ 1)}_{\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_4 \ \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_5} = \underbrace{(-2 \ -1)}_{\bar{c}_4 \ \bar{c}_5}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, quindi la soluzione di base ammissibile

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima del problema LP e $\bar{z} = 32$ è il valore ottimo.

Algoritmo del simplesso duale rivisto

12.1 Operazioni di pivot con due sistemi di equazioni lineari

- Consideriamo un problema LP in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza:

$$\max \quad \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (12.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (12.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (12.1c)$$

- L'algoritmo del simplesso duale parte da una base **duale ammissibile**, cioè una base il cui dizionario soddisfa $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$, ed esegue operazioni di pivot duali finché la soluzione di base non diventa ammissibile.
- Come l'algoritmo del simplesso rivisto rispetto all'algoritmo del simplesso, anche l'**algoritmo del simplesso duale rivisto** non calcola mai la matrice inversa $\mathbf{A}_B^{-1}$ e non aggiorna mai l'intero dizionario: a ogni iterazione determina tutte le informazioni necessarie a un'operazione di pivot duale risolvendo **due sistemi di equazioni lineari**, entrambi con la stessa matrice $\mathbf{A}_B$.

1. Primo sistema di equazioni lineari

- L'algoritmo del simplesso duale ha bisogno dei valori delle variabili in base, per determinare la riga pivot. Sono le componenti del vettore colonna $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$, che si trova risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\mathbf{A}_B \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \implies \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \quad \text{dove} \quad \bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_i)_{i \in \mathcal{B}}.$$

2. Secondo sistema di equazioni lineari

- Una volta determinata la riga pivot x_r con $r \in \mathcal{B}$, il test dei rapporti ha bisogno della riga della matrice $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_r , cioè dei valori $\bar{a}_{rj}$ per $j \in \mathcal{N}$. Questa riga si ottiene dal vettore riga $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, che si trova risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}'_r \implies \mathbf{u} = \mathbf{e}'_r \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1},$$

dove $\mathbf{e}_r$ è il vettore colonna di m componenti, tutte uguali a 0 tranne quella associata alla variabile in base x_r , che è uguale a 1. La riga cercata è quindi

$$\bar{a}_{rj} = \mathbf{u} \mathbf{A}_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

I due sistemi di equazioni lineari hanno la stessa matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$: il primo la ha a sinistra del vettore incognito, il secondo alla sua destra. Il vettore $\mathbf{u}$ seleziona la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata alla riga pivot, senza calcolare l'intera matrice $\bar{\mathbf{A}}$.

12.2 Aggiornamento dei costi ridotti

- Il test dei rapporti ha bisogno dei costi ridotti $\bar{c}_j$ con $j \in \mathcal{N}$. Questi non vengono ricalcolati a ogni iterazione: vengono **aggiornati**, esattamente come l'algoritmo del simplesso rivisto aggiorna i valori delle variabili in base, e l'aggiornamento usa solo la riga $\bar{a}_{rj}$ già determinata dal secondo sistema.
- Alla prima iterazione la base è quella delle m variabili di scarto, e quindi $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$, da cui

$$\bar{c}_j = c_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Dopo un'operazione di pivot duale con riga pivot x_r e colonna pivot x_p , i costi ridotti vengono aggiornati come segue:

$$\bar{c}_j \longleftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} \bar{a}_{rj}, \quad \forall j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}, \quad \text{e} \quad \bar{c}_r \longleftarrow -\frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}},$$

dove $\bar{c}_r$ è il costo ridotto della variabile x_r , che esce dalla base e diventa fuori base.

- La quantità $\frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}}$ è esattamente il minimo del test dei rapporti, che è già stato calcolato per determinare la colonna pivot. L'aggiornamento è quindi una sola moltiplicazione per uno scalare della riga $\bar{a}_{rj}$, e costa n operazioni.
- Poiché $\frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} \leq \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}}$ per ogni $j \in \mathcal{N}$ con $\bar{a}_{rj} < 0$, i costi ridotti aggiornati restano non positivi: la base resta **duale ammissibile**, come richiesto.

I due algoritmi rivisti sono perfettamente simmetrici: ciascuno risolve **due** sistemi di equazioni lineari per iterazione, uno con $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ a destra del vettore incognito e uno con $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ alla sua sinistra, e **aggiorna** l'altro vettore invece di ricalcolarlo.

	simpleso rivisto	simpleso duale rivisto
primo sistema	$\pi A_B = c'_B$	$A_B \bar{b} = b$
fornisce	i costi ridotti $\bar{c}$	i valori in base $\bar{b}$
serve a scegliere	la <u>colonna</u> pivot	la <u>riga</u> pivot
secondo sistema	$A_B d = A_p$	$u A_B = e'_r$
fornisce	la <u>colonna</u> $\bar{A}_p$	la <u>riga</u> $\bar{a}_r$.
serve per	il test dei rapporti	il test dei rapporti
aggiornato, non ricalcolato	$\bar{b}$	$\bar{c}$

12.3 Pseudocodice dell'algoritmo del simpleso duale rivisto

Algoritmo

Input

Un problema LP (12.1) ottenuto da un problema LP in forma canonica di massimo con $c \leq 0$ aggiungendo le m variabili di scarto, in modo che la base delle variabili di scarto sia **duale ammissibile**.

Output

Una soluzione ottima del problema LP (12.1), se esiste; altrimenti, un certificato che il problema LP è inammissibile.

Passo 0: Inizializzazione

Considerare la base delle m variabili di scarto, per la quale $A_B = I$ e $\bar{c}_j = c_j \leq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, cioè la base è duale ammissibile. Andare al Passo 1.

Passo 1: Test di ammissibilità

a. Risolvere $A_B \bar{b} = b$ per calcolare $\bar{b} = A_B^{-1} b$.

Se $\bar{b} \geq 0$, allora la soluzione di base ammissibile $x_B = \bar{b}$ e $x_N = 0$ è una soluzione ottima, di valore ottimo $\bar{z} = c'_B \bar{b}$. STOP. Altrimenti andare al Passo 2.

Passo 2: Operazioni di pivot duali

La **riga pivot** è la variabile in base x_r con l'indice minimo $r \in \mathcal{B}$ tra quelle con $\bar{b}_r < 0$.

a. Risolvere $u A_B = e'_r$ e calcolare $\bar{a}_{rj} = u A_j$ per ogni $j \in \mathcal{N}$.

b. Se $\bar{a}_{rj} \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, allora il problema LP (12.1) è **inammissibile**. STOP.

c. Determinare la **colonna pivot**, cioè una variabile fuori base x_p con $p \in \mathcal{N}$ tale che

$$\frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} : j \in \mathcal{N}, \bar{a}_{rj} < 0 \right\};$$

in caso di pareggio, si sceglie la variabile fuori base con l'indice minimo.

d. Aggiornare i costi ridotti:

$$\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} \bar{a}_{rj}, \quad \forall j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}, \quad \text{e} \quad \bar{c}_r \leftarrow -\frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}}.$$

e. Aggiornare la base con la nuova partizione degli indici delle variabili:

$$\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{p\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} \leftarrow (\mathcal{N} \setminus \{p\}) \cup \{r\}.$$

Andare al Passo 1.

L'algoritmo del simplesso duale rivisto non aggiorna il dizionario: a ogni iterazione aggiorna solo la partizione $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ e i costi ridotti $\bar{c}$, e ricalcola $\bar{b}$ e la riga $\bar{a}_r$, risolvendo i due sistemi di equazioni lineari.

12.4 Esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale rivisto

- Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale, che viene risolto negli esempi di questa sezione:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 - 2x_2 \leq -6 \\ & x_1 - 4x_2 \leq -6 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Aggiungendo $m = 3$ variabili di scarto otteniamo la sua forma standard di massimo, con

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è **duale ammissibile**, con costi ridotti $\bar{c}_1 = c_1 = -1$ e $\bar{c}_2 = c_2 = -3$.

Esempio 12.1: algoritmo del simplesso duale rivisto – prima iterazione

Con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ abbiamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$, e i costi ridotti sono $\bar{c}_1 = -1$ e $\bar{c}_2 = -3$.

Primo sistema. Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poiché $\bar{b}_3 = -6 < 0$, la base non è primale ammissibile. Tra x_3 e x_4 , entrambe con valore -6 , scegliamo quella con l'indice minimo, x_3 , come **riga pivot**.

Secondo sistema. La variabile in base x_3 è la prima di $\mathcal{B}$, e quindi $\mathbf{e}_3 = (1 \ 0 \ 0)'$. Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_3'$ e otteniamo $\mathbf{u} = (1 \ 0 \ 0)$. La riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_3 è quindi

$$\bar{a}_{31} = \mathbf{u} \mathbf{A}_1 = -1 \quad \text{e} \quad \bar{a}_{32} = \mathbf{u} \mathbf{A}_2 = -2,$$

entrambi negativi, e quindi il problema LP non risulta inammissibile.

Test dei rapporti. Entrambe le variabili fuori base sono candidate:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-3}{-2}}_{=\frac{3}{2}} \right\} = 1,$$

e quindi la **colonna pivot** è x_1 .

Aggiornamento dei costi ridotti. Con $\frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_{31}} = 1$ otteniamo

$$\bar{c}_2 \leftarrow \bar{c}_2 - 1 \cdot \bar{a}_{32} = -3 - 1 \cdot (-2) = -1 \quad \text{e} \quad \bar{c}_3 \leftarrow -1 = -1.$$

La nuova partizione è $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$.

Esempio 12.2: algoritmo del simplesso duale rivisto – seconda iterazione

Con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$ abbiamo

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e i costi ridotti, aggiornati all'iterazione precedente, sono $\bar{c}_2 = -1$ e $\bar{c}_3 = -1$.

Primo sistema. Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, cioè

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 = -6 \\ \bar{b}_1 + \bar{b}_4 = -6 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_5 = 3 \end{cases} \implies \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Due variabili in base hanno valore negativo. Scegliamo quella con l'indice minimo, x_4 , come **riga pivot**.

Secondo sistema. La variabile in base x_4 è la seconda di $\mathcal{B}$, e quindi $\mathbf{e}_4 = (0 \ 1 \ 0)'$. Risolviamo $\mathbf{u} \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}'_4$, cioè

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \implies \mathbf{u} = (1 \ 1 \ 0),$$

e la riga di $\bar{\mathbf{A}}$ associata a x_4 è

$$\bar{a}_{42} = \mathbf{u} \mathbf{A}_2 = -2 - 4 = -6 \quad \text{e} \quad \bar{a}_{43} = \mathbf{u} \mathbf{A}_3 = 1.$$

Test dei rapporti. L'unica candidata è x_2 , poiché $\bar{a}_{42} = -6 < 0$ mentre $\bar{a}_{43} = 1 \geq 0$:

$$\frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{42}} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6},$$

e quindi la **colonna pivot** è x_2 .

Aggiornamento dei costi ridotti. Con $\frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{42}} = \frac{1}{6}$ otteniamo

$$\bar{c}_3 \leftarrow \bar{c}_3 - \frac{1}{6} \cdot \bar{a}_{43} = -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \quad \text{e} \quad \bar{c}_4 \leftarrow -\frac{1}{6}.$$

La nuova partizione è $\mathcal{B} = \{1, \ 2, \ 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, \ 4\}$.

Esempio 12.3: algoritmo del simplesso duale rivisto – terza iterazione

Con $\mathcal{B} = \{1, \ 2, \ 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, \ 4\}$ abbiamo

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

e i costi ridotti sono $\bar{c}_3 = -\frac{7}{6}$ e $\bar{c}_4 = -\frac{1}{6}$.

Primo sistema. Risolviamo $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, cioè

$$\begin{cases} -\bar{b}_1 - 2\bar{b}_2 = -6 \\ \bar{b}_1 - 4\bar{b}_2 = -6 \\ 2\bar{b}_1 - 2\bar{b}_2 + \bar{b}_5 = 3 \end{cases} \implies \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ora $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$: la base è primale ammissibile e duale ammissibile, e quindi è **ottima**. Non serve risolvere altri sistemi: il valore ottimo è il prodotto scalare

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}} = (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -8.$$

Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e il valore ottimo è $z(LP) = -8$.

Se è richiesta anche la soluzione ottima del **problema duale**, la si ottiene con un ulteriore sistema di equazioni lineari, risolto una sola volta alla fine e non a ogni iterazione:

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_B = \mathbf{c}'_B \quad \implies \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix},$$

cioè $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(D(LP)) = (\frac{7}{6} \ \frac{1}{6} \ 0)'$, il cui valore obiettivo è $\mathbf{b}'\tilde{\boldsymbol{\pi}} = -8 = z(LP)$, in accordo con il teorema della dualità forte.

Il metodo primale-duale

13.1 La coppia di riferimento: problema primale e duale

- L'algoritmo del simplesso mantiene una base **primale ammissibile** e procede verso una base anche duale ammissibile; l'algoritmo del simplesso duale mantiene una base **duale ammissibile** e procede verso una base anche primale ammissibile. Il **metodo primale-duale** procede in modo diverso: mantiene una soluzione duale ammissibile, che non deve essere necessariamente una soluzione di base, e la usa per decidere quali variabili primali possono assumere un valore positivo.
- Il metodo è formulato in modo naturale per un problema LP in **forma standard di minimo** con vettore dei termini noti non negativo, e per il suo duale:

$$\min \quad \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (13.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (13.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (13.1c)$$

$$\max \quad \mathbf{b}' \boldsymbol{\pi} \quad (13.2a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A}' \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c}, \quad (13.2b)$$

$$\boldsymbol{\pi} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \mathbf{0} \quad (13.2c)$$

con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Gli n vincoli duali (13.2b) si scrivono $\mathbf{A}'_j \boldsymbol{\pi} \leq c_j$ per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, dove $\mathbf{A}'_j$ è la j -esima colonna della matrice dei vincoli, e le m variabili duali sono libere, perché i vincoli primali (13.1b) sono uguaglianze.

- Ogni problema LP si può portare nella forma (13.1): una funzione obiettivo di massimo si sostituisce con la sua opposta, ai vincoli di disuguaglianza si aggiungono variabili di scarto o di surplus, le variabili non positive e libere si sostituiscono come di consueto, e ogni vincolo con termine noto negativo si moltiplica per -1 .

Definizione 13.1: insieme amnesso

Data una soluzione ammissibile π del problema duale (13.2), l'**insieme amnesso** è l'insieme degli indici dei vincoli duali soddisfatti con uguaglianza:

$$\mathcal{J}(\pi) = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathbf{A}'_j \pi = c_j\}.$$

Per il teorema degli scarti complementari, una soluzione ammissibile x del problema primale (13.1) e una soluzione ammissibile π del problema duale (13.2) sono entrambe ottime se e solo se

$$x_j = 0, \quad \forall j \notin \mathcal{J}(\pi),$$

cioè se e solo se solo le variabili ammesse assumono un valore positivo.

- Questa è l'idea del metodo: data una π duale ammissibile, cerchiamo una soluzione primale ammissibile che usi solo le variabili di $\mathcal{J}(\pi)$. Se tale soluzione esiste, la coppia è ottima; se non esiste, il tentativo stesso ci dice come migliorare π .

13.2 Il primale ristretto

- Data una soluzione duale ammissibile π con insieme amnesso $\mathcal{J}$, cerchiamo una soluzione primale ammissibile che usi solo le variabili con indice in $\mathcal{J}$. Per farlo risolviamo un problema ausiliario con m variabili artificiali, esattamente come nella Fase 0 dell'algoritmo del simplesso.

Definizione 13.2: primale ristretto

Data una soluzione ammissibile π del problema duale (13.2) con insieme amnesso $\mathcal{J}$, il **primale ristretto** $RP(\mathcal{J})$ è:

$$\xi(\mathcal{J}) = \min \sum_{i=1}^m a_i \quad (13.3a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} \mathbf{A}_j x_j + \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (13.3b)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (13.3c)$$

$$\mathbf{a} \geq \mathbf{0}. \quad (13.3d)$$

- Il primale ristretto non è mai inammissibile, poiché $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ammette la soluzione di base ammissibile $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ e $x_j = 0$ per ogni $j \in \mathcal{J}$, e non è mai illimitato, poiché il suo valore obiettivo è non negativo.

1. Se $\xi(\mathcal{J}) = 0$, allora la soluzione ottima di $RP(\mathcal{J})$, completata con $x_j = 0$ per ogni $j \notin \mathcal{J}$, è una **soluzione ammissibile del problema primale** (13.1) che soddisfa le condizioni degli scarti complementari insieme a π : la coppia è **ottima** e il metodo si arresta.
2. Se $\xi(\mathcal{J}) > 0$, allora nessuna soluzione primale ammissibile usa solo le variabili ammesse, e la soluzione duale π deve essere migliorata.

Definizione 13.3: duale del primale ristretto

Il problema duale del primale ristretto $RP(\mathcal{J})$, detto **duale del primale ristretto** $DRP(\mathcal{J})$, è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}' \mathbf{y} \\ \text{soggetto a} \quad & \mathbf{A}'_j \mathbf{y} \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \\ & y_i \leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

- La sua soluzione ottima $\mathbf{y}$ è prodotta dall'algoritmo del simplesso insieme alla soluzione ottima di $RP(\mathcal{J})$, e per la dualità forte abbiamo $\mathbf{b}' \mathbf{y} = \xi(\mathcal{J}) > 0$.

Il vettore $\mathbf{y}$ è la **direzione** lungo la quale si migliora la soluzione duale:

$$\pi \longleftarrow \pi + \theta \mathbf{y},$$

poiché il valore obiettivo duale aumenta, per ogni $\theta > 0$, di

$$\mathbf{b}'(\pi + \theta \mathbf{y}) - \mathbf{b}'\pi = \theta \underbrace{\mathbf{b}'\mathbf{y}}_{=\xi(\mathcal{J}) > 0} > 0.$$

13.3 Il passo duale

- La lunghezza del passo θ è il massimo valore per cui la nuova soluzione duale resta ammissibile. Per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ deve valere

$$\mathbf{A}'_j(\pi + \theta \mathbf{y}) \leq c_j \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \mathbf{A}'_j \mathbf{y} \leq \underbrace{c_j - \mathbf{A}'_j \pi}_{\text{scarto duale } s_j \geq 0}.$$

- Per $j \in \mathcal{J}$ il vincolo è soddisfatto per ogni $\theta \geq 0$, perché $s_j = 0$ e $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} \leq 0$ per definizione di $DRP(\mathcal{J})$. Per $j \notin \mathcal{J}$ abbiamo $s_j > 0$, e il vincolo limita θ solo quando $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0$.

La lunghezza del passo è

$$\theta = \min \left\{ \frac{s_j}{\mathbf{A}'_j \mathbf{y}} : j \notin \mathcal{J}, \mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0 \right\}, \quad \text{con} \quad s_j = c_j - \mathbf{A}'_j \pi.$$

Se $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} \leq 0$ per ogni $j \notin \mathcal{J}$, allora θ può crescere senza limite: il problema duale (13.2) è **illimitato** e, per il teorema sui possibili esiti di una coppia di problemi primale e duale, il problema primale (13.1) è **inammissibile**.

- L'indice j^* che realizza il minimo entra nell'insieme ammesso: dopo il passo, il suo scarto duale si annulla. Inoltre, ogni indice j di una variabile in base della soluzione ottima di $RP(\mathcal{J})$ resta nell'insieme ammesso, perché $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} = 0$ per le condizioni degli scarti complementari tra $RP(\mathcal{J})$ e $DRP(\mathcal{J})$. Solo gli indici $j \in \mathcal{J}$ con $\mathbf{A}'_j \mathbf{y} < 0$ possono uscire dall'insieme ammesso, perché il loro scarto duale diventa $-\theta \mathbf{A}'_j \mathbf{y} > 0$.

La soluzione duale ammissibile iniziale è spesso immediata. Se $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, allora $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ è ammissibile, con $\mathcal{J} = \{j : c_j = 0\}$. Altrimenti, una soluzione duale ammissibile deve essere determinata in precedenza.

13.4 Pseudocodice del metodo primale-duale

Algoritmo

Input

Un problema LP (13.1) con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ e una soluzione ammissibile $\boldsymbol{\pi}$ del suo problema duale (13.2).

Output

Una soluzione ottima del problema LP (13.1) e una soluzione ottima del suo problema duale, se esistono; altrimenti, un certificato di inammissibilità del problema LP (13.1).

Passo 0: Inizializzazione

Considerare la soluzione duale ammissibile data $\boldsymbol{\pi}$. Andare al Passo 1.

Passo 1: Insieme ammesso

Calcolare gli scarti duali $s_j = c_j - \mathbf{A}'_j \boldsymbol{\pi}$ per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e l'insieme ammesso $\mathcal{J} = \{j : s_j = 0\}$.

Passo 2: Primale ristretto

Risolvere $RP(\mathcal{J})$ con l'algoritmo del simplesso, ottenendo il suo valore ottimo $\xi(\mathcal{J})$, una soluzione ottima x_j con $j \in \mathcal{J}$ e una soluzione ottima $\mathbf{y}$ di $DRP(\mathcal{J})$.

Se $\xi(\mathcal{J}) = 0$, allora il punto

$$\tilde{x}_j = x_j, \forall j \in \mathcal{J}, \quad \tilde{x}_j = 0, \forall j \notin \mathcal{J},$$

è una soluzione ottima del problema LP (13.1), $\boldsymbol{\pi}$ è una soluzione ottima del suo problema duale, e $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}$. STOP.

Passo 3: Passo duale

a. Se $A'_j \mathbf{y} \leq 0$ per ogni $j \notin \mathcal{J}$, allora il problema LP (13.1) è **inammissibile**. STOP.

b. Calcolare

$$\theta \leftarrow \min \left\{ \frac{s_j}{A'_j \mathbf{y}} : j \notin \mathcal{J}, A'_j \mathbf{y} > 0 \right\}.$$

c. Aggiornare la soluzione duale: $\boldsymbol{\pi} \leftarrow \boldsymbol{\pi} + \theta \mathbf{y}$.

Andare al Passo 1.

A ogni iterazione il valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}$ aumenta strettamente. La finitezza del metodo segue invece dai primali ristretti: la base ottima di $RP(\mathcal{J})$ è ancora una base ammissibile del primale ristretto successivo, perché i suoi indici restano ammessi, e la nuova variabile ammessa x_{j^*} ha costo ridotto negativo rispetto a essa. Di conseguenza, il primale ristretto successivo si può risolvere partendo da quella base, e i valori ottimi $\xi(\mathcal{J})$ non aumentano mai da un'iterazione alla successiva. Essi diminuiscono strettamente se l'operazione di pivot su x_{j^*} è non degenera, e in generale il metodo termina dopo un numero finito di iterazioni quando si usa una **regola anti-ciclaggio** (per esempio, la regola di Bland) nell'algoritmo del simplesso applicato ai primali ristretti.

13.5 Esecuzione del metodo primale-duale

- Consideriamo il seguente problema LP in forma standard di minimo con $n = 4$ variabili non negative variabili e $m = 2$ vincoli lineari di uguaglianza, che viene risolto negli esempi di questa sezione:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 3 & x_4 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & 2 & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ & x_1 & + & 2 & x_2 & + & x_3 & + & 3 & x_4 & = & 4 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Il suo vettore dei termini noti è non negativo e il suo vettore dei costi è non negativo, quindi $\boldsymbol{\pi} = (0 \ 0)'$ è una soluzione ammissibile del problema duale.

Esempio 13.1: metodo primale-duale – prima iterazione

Con $\boldsymbol{\pi} = (0 \ 0)'$ gli scarti duali sono

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 5, \quad s_4 = 3,$$

quindi l'insieme ammesso è $\mathcal{J} = \emptyset$: nessuna variabile primale può essere positiva.

Il primale ristretto ha solo le due variabili artificiali, il suo valore ottimo è

$$\xi(\emptyset) = a_1 + a_2 = 6 + 4 = 10 > 0,$$

e la soluzione ottima di $DRP(\emptyset)$ è $\mathbf{y} = (1 \ 1)'$.

La lunghezza del passo è determinata dalle quattro colonne non ammesse:

$$\mathbf{A}'_1 \mathbf{y} = 2, \quad \mathbf{A}'_2 \mathbf{y} = 3, \quad \mathbf{A}'_3 \mathbf{y} = 3, \quad \mathbf{A}'_4 \mathbf{y} = 4,$$

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{2}{2}}_{=1}, \underbrace{\frac{2}{3}}_{=\frac{2}{3}}, \underbrace{\frac{5}{3}}_{=\frac{5}{3}}, \underbrace{\frac{3}{4}}_{=\frac{3}{4}} \right\} = \frac{2}{3},$$

realizzato da $j^* = 2$. La nuova soluzione duale è

$$\boldsymbol{\pi} \leftarrow (0 \ 0)' + \frac{2}{3} (1 \ 1)' = \left(\frac{2}{3} \ \frac{2}{3} \right)',$$

con valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} = \frac{20}{3}$.

Esempio 13.2: metodo primale-duale – seconda iterazione

Con $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{2}{3} \ \frac{2}{3} \right)'$ gli scarti duali sono

$$s_1 = \frac{2}{3}, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = \frac{1}{3},$$

quindi $\mathcal{J} = \{2\}$.

Il primale ristretto $RP(\{2\})$ ha la variabile x_2 e le due variabili artificiali. La sua soluzione ottima è $x_2 = 2$, con

$$\xi(\{2\}) = 4 > 0,$$

e la soluzione ottima di $DRP(\{2\})$ è $\mathbf{y} = \left(1 \ -\frac{1}{2} \right)'$.

Per le colonne non ammesse abbiamo

$$\mathbf{A}'_1 \mathbf{y} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{A}'_3 \mathbf{y} = \frac{3}{2}, \quad \mathbf{A}'_4 \mathbf{y} = -\frac{1}{2},$$

e solo le prime due sono positive:

$$\theta = \min \left\{ \underbrace{\frac{2/3}{1/2}}_{=\frac{4}{3}}, \underbrace{\frac{3}{3/2}}_{=2} \right\} = \frac{4}{3},$$

realizzato da $j^* = 1$. La nuova soluzione duale è

$$\boldsymbol{\pi} \leftarrow \left(\frac{2}{3} \ \frac{2}{3} \right)' + \frac{4}{3} \left(1 \ -\frac{1}{2} \right)' = (2 \ 0)',$$

con valore obiettivo duale $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} = 12$.

Esempio 13.3: metodo primale-duale – terza iterazione

Con $\pi = (2 \ 0)'$ gli scarti duali sono

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 1,$$

quindi $\mathcal{J} = \{1, 2\}$.

Il primale ristretto $RP(\{1, 2\})$ ha le variabili x_1 e x_2 e le due variabili artificiali. La sua soluzione ottima è $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$, con

$$\xi(\{1, 2\}) = 2 > 0,$$

e la soluzione ottima di $DRP(\{1, 2\})$ è $y = (1 \ -1)'$.

Per le colonne non ammesse abbiamo

$$A'_3 y = 1 \quad \text{e} \quad A'_4 y = -2,$$

quindi

$$\theta = \frac{s_3}{A'_3 y} = \frac{1}{1} = 1,$$

realizzato da $j^* = 3$. La nuova soluzione duale è

$$\pi \leftarrow (2 \ 0)' + 1 \cdot (1 \ -1)' = (3 \ -1)',$$

con valore obiettivo duale $b' \pi = 14$. La seconda variabile è diventata negativa: ciò è consentito, perché le variabili duali di (13.2) sono libere.

Esempio 13.4: metodo primale-duale – quarta iterazione

Con $\pi = (3 \ -1)'$ gli scarti duali sono

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 3,$$

quindi $\mathcal{J} = \{1, 3\}$.

Il primale ristretto $RP(\{1, 3\})$ ha le variabili x_1 e x_3 e le due variabili artificiali. La sua soluzione ottima è $x_1 = 2$ e $x_3 = 2$, con

$$\xi(\{1, 3\}) = 0.$$

Il valore ottimo del primale ristretto è 0, quindi il metodo si arresta. Una soluzione ottima di questo problema LP è

$$\tilde{x}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

una soluzione ottima del suo problema duale è $\tilde{\pi}(D(LP)) = (3 \ -1)'$, e i due valori ottimi coincidono:

$$c' \tilde{x} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 14 \quad \text{e} \quad b' \tilde{\pi} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 14,$$

in accordo con il teorema della dualità forte.

Il valore obiettivo duale è aumentato a ogni iterazione,

$$0 \rightarrow \frac{20}{3} \rightarrow 12 \rightarrow 14,$$

e l'insieme amnesso è cambiato di conseguenza,

$$\emptyset \rightarrow \{2\} \rightarrow \{1, 2\} \rightarrow \{1, 3\},$$

finché non ha contenuto abbastanza variabili per costruire una soluzione primale ammissibile. L'insieme amnesso non cresce necessariamente: alla quarta iterazione l'indice 2 ne è uscito, perché $A'_2 y = -1 < 0$ alla terza iterazione.

13.6 Confronto con gli algoritmi del simplesso

	mantiene	procede verso
simplesso	base primale ammissibile	ammissibilità duale
simplesso duale	base duale ammissibile	ammissibilità primale
metodo primale-duale	<u>soluzione</u> duale ammissibile	ammissibilità primale

La differenza tra l'algoritmo del simplesso duale e il metodo primale-duale è che il primo mantiene una **base** duale ammissibile, mentre il secondo mantiene una **soluzione** duale ammissibile, che non deve essere di base. Per questo motivo il metodo primale-duale può partire da qualunque soluzione duale ammissibile, anche una suggerita dalla struttura del problema.

- L'interesse pratico del metodo primale-duale è che il primale ristretto (13.3) è spesso molto più facile del problema LP originale: ha meno variabili e, per diversi problemi di **ottimizzazione combinatoria** risulta essere un problema con un algoritmo combinatorio noto, come un problema di cammino minimo o di flusso massimo. In questi casi il metodo primale-duale diventa un algoritmo puramente combinatorio, ed è all'origine di molti algoritmi classici e di diversi algoritmi di approssimazione.

Analisi di sensitività

14.1 Basi ottime e le loro due condizioni

- I dati di un problema LP sono raramente noti con esattezza: le componenti del vettore dei costi $\mathbf{c}$ e del vettore dei termini noti $\mathbf{b}$ sono stime, e possono cambiare dopo che il problema LP è stato risolto. L'**analisi di sensitività** studia come cambiano una soluzione ottima e il valore ottimo quando cambiano i dati.
- Consideriamo un problema LP in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza, ottenuto da un problema LP in forma canonica di massimo aggiungendo m variabili di scarto:

$$\max \quad \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (14.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (14.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (14.1c)$$

Definizione 14.1: base ottima

Una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (14.1) si chiama **base ottima** se soddisfa le due condizioni seguenti, e allora la sua soluzione di base ammissibile è una soluzione ottima:

1. **ammissibilità primale:** $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$;
2. **ammissibilità duale:** $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \leq \mathbf{0}$, dove $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$.

Le due condizioni sono sufficienti per l'ottimalità; in presenza di degenerazione, una soluzione di base ammissibile ottima può essere associata anche a una base che non è duale ammissibile. Una variazione dei dati preserva l'ottimalità della base finché entrambe le condizioni continuano a valere.

- Le due condizioni coinvolgono i dati in due modi diversi:

1. il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$ compare solo nella condizione di ammissibilità primale;
2. il vettore dei costi $\mathbf{c}$ compare solo nella condizione di ammissibilità duale.

Di conseguenza, una variazione di $\mathbf{b}$ può distruggere solo l'ammissibilità primale della base, e una variazione di $\mathbf{c}$ può distruggere solo la sua ammissibilità duale.

Esempio 14.1: base ottima

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{rcll} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 12 \\ & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

La sua forma standard di massimo ha $n + m = 5$ variabili non negative, e la base ottima determinata dall'algoritmo del simplesso è

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{4, 5\}.$$

Il dizionario associato è:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & = & 5 & - & \frac{1}{4} x_4 & - & \frac{1}{4} x_5 \\ x_2 & = & \frac{7}{2} & - & \frac{3}{8} x_4 & + & \frac{1}{8} x_5 \\ x_3 & = & \frac{13}{2} & + & \frac{7}{8} x_4 & - & \frac{5}{8} x_5 \\ z & = & 32 & - & 2 x_4 & - & x_5 \end{array} \right.$$

e abbiamo:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 1 & -\frac{7}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} = (0 \ 2 \ 1).$$

Una soluzione ottima è $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ e il valore ottimo è $z(LP) = 32$.

14.2 Variazioni del vettore dei costi

- Sostituiamo una componente c_k del vettore dei costi con $c_k + \delta$, dove $\delta \in \mathbb{R}$, e cerchiamo i valori di δ per cui la base ottima resta ottima. Poiché $\mathbf{b}$ non cambia, la condizione di ammissibilità primale continua a valere, e va verificata solo la condizione di ammissibilità duale.

14.2.1 Coefficiente di costo di una variabile fuori base

Se $k \in \mathcal{N}$, allora $\mathbf{c}_B$ non cambia, e quindi neanche $\boldsymbol{\pi}$. Cambia solo il costo ridotto di x_k :

$$\bar{c}_k \longrightarrow \bar{c}_k + \delta,$$

e la base ottima resta ottima se e solo se

$$\delta \leq -\bar{c}_k.$$

- La soluzione ottima e il valore ottimo non cambiano per questi valori di δ : il dizionario è lo stesso, tranne un costo ridotto.

14.2.2 Coefficiente di costo di una variabile in base

Se $k \in \mathcal{B}$, allora $\mathbf{c}_B$ cambia, e quindi cambiano tutti i costi ridotti. Indicando con $\bar{a}_{kj}$ l'elemento della matrice $\bar{\mathbf{A}}$ nella riga di x_k e nella colonna di x_j , abbiamo

$$\bar{c}_j \longrightarrow \bar{c}_j - \delta \bar{a}_{kj}, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

e la base ottima resta ottima se e solo se $\bar{c}_j - \delta \bar{a}_{kj} \leq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, cioè se e solo se

$$\max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{kj}} : j \in \mathcal{N}, \bar{a}_{kj} > 0 \right\} \leq \delta \leq \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{kj}} : j \in \mathcal{N}, \bar{a}_{kj} < 0 \right\}.$$

- La soluzione ottima non cambia per questi valori di δ , perché $\bar{\mathbf{b}}$ resta invariato, ma il valore ottimo diventa

$$z(LP) + \delta \tilde{x}_k.$$

Esempio 14.2: variazioni del vettore dei costi

Consideriamo la base ottima dell'Esempio 14.1, con $\mathcal{N} = \{4, 5\}$, $\bar{c}_4 = -2$, $\bar{c}_5 = -1$ e

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Coefficiente della variabile in base x_1 . Sostituiamo $c_1 = 5$ con $5 + \delta$. La riga di x_1 in $\bar{\mathbf{A}}$ è $(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$, i cui due elementi sono entrambi positivi, quindi entrambi danno un lower

bound su δ :

$$\delta \geq \max \left\{ \underbrace{\frac{-2}{1/4}}_{=-8}, \underbrace{\frac{-1}{1/4}}_{=-4} \right\} = -4,$$

e non c'è alcun upper bound, perché nessun elemento della riga è negativo. Di conseguenza,

$$\delta \geq -4 \quad \Rightarrow \quad c_1 \in [1, +\infty).$$

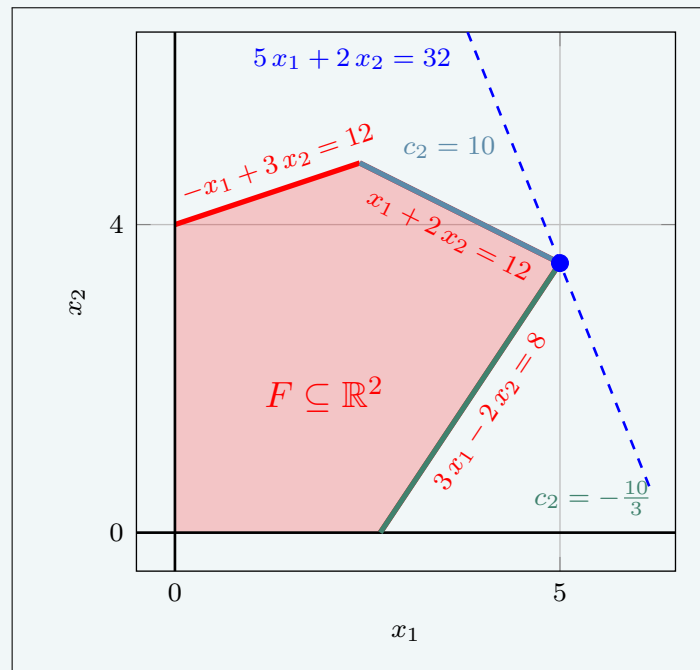
Coefficiente della variabile in base x_2 . Sostituiamo $c_2 = 2$ con $2 + \delta$. La riga di x_2 in $\bar{A}$ è $(\frac{3}{8} \quad -\frac{1}{8})$, con un elemento positivo, che dà un lower bound, e un elemento negativo, che dà un upper bound:

$$\underbrace{\frac{-2}{3/8}}_{=-\frac{16}{3}} \leq \delta \leq \underbrace{\frac{-1}{-1/8}}_{=8},$$

cioè

$$-\frac{16}{3} \leq \delta \leq 8 \quad \Rightarrow \quad c_2 \in \left[-\frac{10}{3}, 10 \right].$$

Per ogni valore di c_2 in questo intervallo, la soluzione ottima resta $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7/2 \end{pmatrix}$, mentre il valore ottimo diventa $32 + \delta \cdot \frac{7}{2}$.



Gli insiemi di livello della funzione obiettivo **ruotano** al variare di c_2 , mentre la soluzione ottima resta il vertice $\begin{pmatrix} 5 \\ 7/2 \end{pmatrix}$. I due estremi dell'intervallo hanno un preciso significato geometrico: sono i valori di c_2 per cui gli insiemi di livello diventano paralleli a uno dei due spigoli

che si incontrano in quel vertice. Per $c_2 = 10$ sono paralleli allo spigolo su $x_1 + 2x_2 = 12$, disegnato in blu, e per $c_2 = -\frac{10}{3}$ sono paralleli allo spigolo su $3x_1 - 2x_2 = 8$, disegnato in verde. Oltre questi valori la soluzione ottima si sposta in un vertice adiacente.

14.3 Variazioni del vettore dei termini noti

- Sostituiamo una componente b_k del vettore dei termini noti con $b_k + \delta$, dove $\delta \in \mathbb{R}$. Poiché $\mathbf{c}$ non cambia, la condizione di ammissibilità duale continua a valere, e va verificata solo la condizione di ammissibilità primale.

I valori delle variabili in base diventano

$$\bar{\mathbf{b}} \rightarrow \mathbf{A}_B^{-1} (\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_k) = \bar{\mathbf{b}} + \delta \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_k,$$

dove $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_k$ è la k -esima colonna della matrice $\mathbf{A}_B^{-1}$, i cui elementi indichiamo con β_{ik} . La base ottima resta ottima se e solo se

$$\max \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\beta_{ik}} : i \in \mathcal{B}, \beta_{ik} > 0 \right\} \leq \delta \leq \min \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\beta_{ik}} : i \in \mathcal{B}, \beta_{ik} < 0 \right\}.$$

Definizione 14.2: prezzi ombra

Data una base ottima $\mathbf{A}_B$ del problema LP (14.1), le componenti del vettore riga

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$$

si chiamano **prezzi ombra** degli m vincoli lineari.

Finché la base ottima resta ottima, il valore ottimo varia linearmente con δ :

$$z(LP) \rightarrow z(LP) + \delta \pi_k.$$

Il prezzo ombra π_k è quindi il **valore marginale** del k -esimo vincolo: misura l'aumento del valore ottimo per ogni aumento unitario di b_k .

- Per il teorema della dualità forte, il vettore $\boldsymbol{\pi}$ dei prezzi ombra è una soluzione ottima del problema duale, e quindi

$$z(LP) = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \pi_i b_i.$$

- Se il k -esimo vincolo non è attivo nella soluzione ottima, cioè se la sua variabile è in base con valore strettamente positivo, allora $\pi_k = 0$: una piccola variazione di b_k non cambia il valore ottimo.

Esempio 14.3: variazioni del vettore dei termini noti

Consideriamo la base ottima dell'Esempio 14.1, con $\bar{b} = (5 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{13}{2})'$ e $\pi = (0 \quad 2 \quad 1)$.

Primo vincolo. Il suo prezzo ombra è $\pi_1 = 0$, perché la sua variabile di scarto x_3 è in base con valore $\frac{13}{2} > 0$: il primo vincolo non è attivo nella soluzione ottima, e una piccola variazione di b_1 non cambia il valore ottimo. La prima colonna di A_B^{-1} è $(0 \quad 0 \quad 1)'$, quindi cambia solo il valore di x_3 , e si ottiene

$$\frac{13}{2} + \delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \geq -\frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad b_1 \in \left[\frac{11}{2}, +\infty \right).$$

Secondo vincolo. Il suo prezzo ombra è $\pi_2 = 2$. La seconda colonna di A_B^{-1} è $(\frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad -\frac{7}{8})'$, quindi

$$\begin{cases} 5 + \frac{1}{4}\delta \geq 0 \\ \frac{7}{2} + \frac{3}{8}\delta \geq 0 \\ \frac{13}{2} - \frac{7}{8}\delta \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta \geq -20 \\ \delta \geq -\frac{28}{3} \\ \delta \leq \frac{52}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{28}{3} \leq \delta \leq \frac{52}{7},$$

cioè

$$b_2 \in \left[\frac{8}{3}, \frac{136}{7} \right].$$

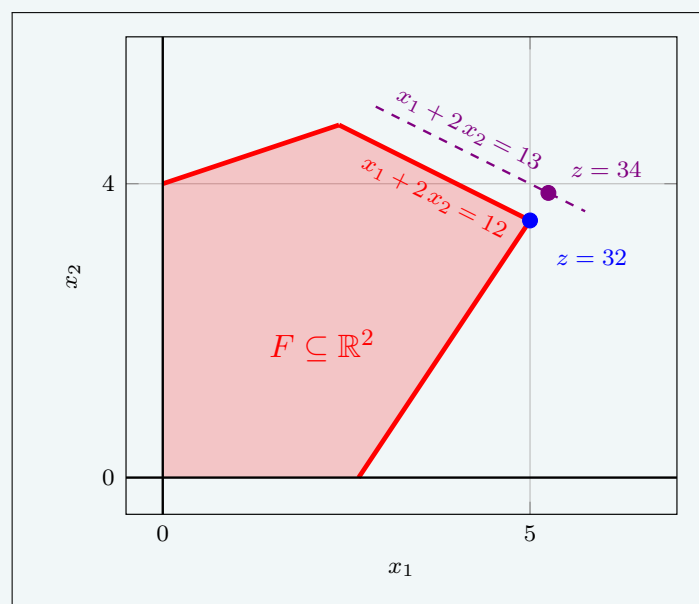
Per ogni valore di b_2 in questo intervallo, il valore ottimo è

$$z(LP) = 32 + 2\delta.$$

Per esempio, con $b_2 = 13$ abbiamo $\delta = 1$ e il valore ottimo diventa 34; con $b_2 = 11$ abbiamo $\delta = -1$ e il valore ottimo diventa 30.

Terzo vincolo. Il suo prezzo ombra è $\pi_3 = 1$, e la sua colonna è $(\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{5}{8})'$, che dà

$$b_3 \in \left[-\frac{12}{5}, 36 \right].$$



Aumentando b_2 da 12 a 13, il secondo vincolo trasla verso l'esterno, la soluzione ottima si sposta da $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 21 \\ 4 \\ 31 \\ 8 \end{pmatrix}$ e il valore ottimo aumenta di $\pi_2 = 2$.

14.4 Aggiunta di una nuova variabile

- Aggiungiamo una variabile non negativa x_* al problema LP (14.1), con coefficiente di costo c_* e colonna $\mathbf{A}_* \in \mathbb{R}^m$. La base ottima del problema LP originale è ancora una base di quello nuovo, ed è ancora primale ammissibile, perché né $\mathbf{A}_B$ né $\mathbf{b}$ sono cambiati.

La nuova variabile x_* è fuori base, e il suo costo ridotto è

$$\bar{c}_* = c_* - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_*.$$

1. Se $\bar{c}_* \leq 0$, allora la base è ancora duale ammissibile e la soluzione ottima non cambia: la nuova variabile assume il valore $\tilde{x}_* = 0$.
2. Se $\bar{c}_* > 0$, allora la base non è più duale ammissibile: l'**algoritmo del simplesso** riparte da essa, con x_* come prima colonna pivot.

Esempio 14.4: aggiunta di una nuova variabile

Consideriamo il problema LP dell'[Esempio 14.1](#) e aggiungiamo una nuova variabile non negativa x_* con coefficiente di costo $c_* = 4$ e colonna $\mathbf{A}_* = (1 \ 1 \ 1)'$, cioè il problema LP diventa:

$$\begin{array}{rcll} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 4 & x_* \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & + & & x_* & \leq & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & + & & x_* & \leq & 12 \\ & & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & + & & x_* & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2, & & & & x_* & \geq & 0 \end{array}$$

Il costo ridotto della nuova variabile è

$$\bar{c}_* = c_* - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_* = 4 - (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 > 0,$$

quindi la base $\mathcal{B} = \{1, \ 2, \ 3\}$ non è più duale ammissibile: conviene produrre la nuova variabile.

Facciamo ripartire l'algoritmo del simplesso da questa base, con x_* come colonna pivot. La sua colonna nel dizionario è

$$\bar{\mathbf{A}}_* = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 1 & -\frac{7}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

e il test dei rapporti dà

$$t_m = \min \left\{ \frac{5}{1/2}, \frac{7/2}{1/4}, \frac{13/2}{3/4} \right\} = \min \left\{ 10, 14, \frac{26}{3} \right\} = \frac{26}{3},$$

realizzato dalla variabile in base x_3 , che esce dalla base. Dopo questa sola operazione di pivot tutti i costi ridotti diventano non positivi, e la nuova soluzione ottima è

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_\star = \frac{26}{3},$$

con valore ottimo

$$z(LP) = 5 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{26}{3} = \frac{122}{3}.$$

14.5 Aggiunta di un nuovo vincolo

- Aggiungiamo un vincolo lineare

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{\star j} x_j \leq b_\star$$

al problema LP (14.1), insieme alla sua variabile di scarto $x_{n+m+1} \geq 0$. La base ottima del problema LP originale, estesa con x_{n+m+1} , è una base del nuovo problema LP.

La base estesa è ancora duale ammissibile, perché i costi ridotti non cambiano e il costo ridotto della nuova variabile di scarto è 0. La sua ammissibilità primale, invece, dipende dalla soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ del problema LP originale:

1. se $\tilde{x}(LP)$ **soddisfa** il nuovo vincolo, allora la base resta ottima e la soluzione ottima non cambia;
2. se $\tilde{x}(LP)$ **viola** il nuovo vincolo, allora la nuova variabile di scarto assume un valore negativo e l'**algoritmo del semplice duale** riparte dalla base estesa, con x_{n+m+1} come prima riga pivot.

Esempio 14.5: aggiunta di un nuovo vincolo

Consideriamo il problema LP dell'Esempio 14.1 e aggiungiamo il nuovo vincolo lineare

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

con la sua variabile di scarto x_6 . La soluzione ottima del problema LP originale lo viola, perché

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 5 + \frac{7}{2} = \frac{17}{2} > 6,$$

e quindi il valore della nuova variabile di scarto è

$$\bar{b}_6 = 6 - \frac{17}{2} = -\frac{5}{2} < 0.$$

La base estesa $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ è duale ammissibile, perché i costi ridotti sono ancora $\bar{c}_4 = -2$ e $\bar{c}_5 = -1$, ma non è primale ammissibile. Applichiamo l'**algoritmo del simplesso duale**, con x_6 come riga pivot. La riga di x_6 nel dizionario si ottiene sostituendo le equazioni di x_1 e x_2 nel nuovo vincolo:

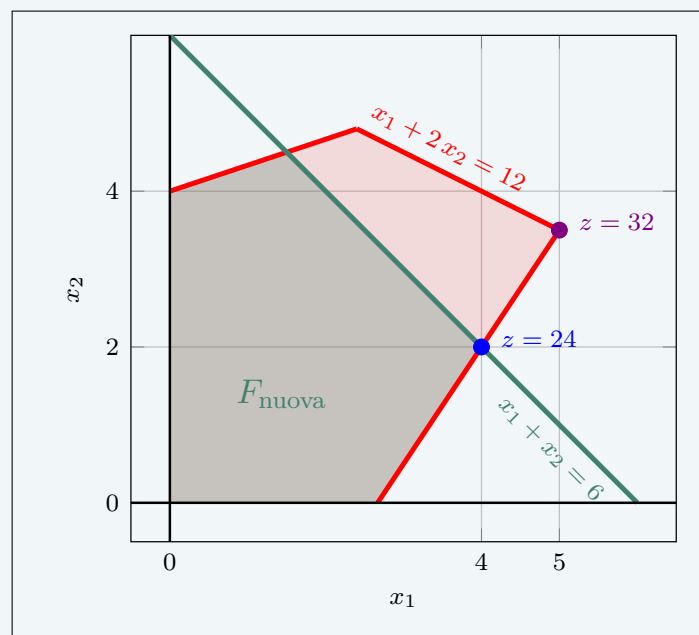
$$x_6 = 6 - x_1 - x_2 = 6 - \left(5 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5\right) - \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5,$$

cioè $\bar{a}_{64} = -\frac{5}{8}$ e $\bar{a}_{65} = -\frac{1}{8}$. Il test dei rapporti dà

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-2}{-5/8}}_{=\frac{16}{5}}, \underbrace{\frac{-1}{-1/8}}_{=8} \right\} = \frac{16}{5},$$

quindi la colonna pivot è x_4 . Dopo questa sola operazione di pivot duale la base diventa primale ammissibile, e la nuova soluzione ottima è

$$\tilde{x}(LP) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad z(LP) = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 24.$$



In viola la soluzione ottima del problema LP originale, che viola il nuovo vincolo, e in blu la soluzione ottima del nuovo problema LP, raggiunta con una sola operazione di pivot duale.

14.6 Riepilogo

Data una base ottima A_B di un problema LP, una variazione dei suoi dati si gestisce come segue:

variazione	condizione da verificare	come ripartire
c_k con $k \in \mathcal{N}$	ammissibilità duale	algoritmo del simplesso
c_k con $k \in \mathcal{B}$	ammissibilità duale	algoritmo del simplesso
b_k	ammissibilità primale	algoritmo del simplesso duale
nuova variabile x_*	ammissibilità duale	algoritmo del simplesso
nuovo vincolo	ammissibilità primale	algoritmo del simplesso duale

In tutti i casi la precedente base ottima viene usata come **avvio a caldo**: i due algoritmi ripartono da essa, e di solito poche operazioni di pivot bastano a ripristinare l'ottimalità.

La geometria della programmazione lineare

15.1 La dimensione di un poliedro

- La regione ammissibile di un problema LP è un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Finora l'abbiamo descritta attraverso i suoi vincoli lineari; in questo documento ne descriviamo la struttura **geometrica**, e la mettiamo in relazione con le nozioni algebriche di base e di soluzione di base ammissibile.

Definizione 15.1: inviluppo affine e dimensione

Dato un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$, il suo **inviluppo affine** $\text{aff}(F)$ è il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ che contiene F . La **dimensione** di F , indicata con $\dim(F)$, è la dimensione di $\text{aff}(F)$.

In modo equivalente, $\dim(F) = k$ se e solo se F contiene $k+1$ punti $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ tali che i k vettori $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(0)}$ sono linearmente indipendenti, e non contiene $k+2$ punti con questa proprietà.

Definizione 15.2: poliedro a dimensione piena

Un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **a dimensione piena** se $\dim(F) = n$. Per convenzione, $\dim(\emptyset) = -1$, e un poliedro costituito da un solo punto ha dimensione 0.

- La dimensione di un poliedro non è il numero di variabili: è il numero di direzioni indipendenti lungo le quali ci si può muovere all'interno del poliedro. Ogni vincolo di uguaglianza soddisfatto da tutti i punti di F , e linearmente indipendente dagli altri, ne riduce la dimensione di uno.

La regione ammissibile di un problema LP in **forma standard di massimo**,

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \},$$

non è mai a dimensione piena quando $F \neq \emptyset$ e $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq 1$: tutti i suoi punti soddisfano gli m vincoli di uguaglianza, e quindi

$$\dim(F) \leq n - \text{rank}(\mathbf{A}).$$

La regione ammissibile di un problema LP in **forma canonica di massimo** è invece a dimensione piena ogni volta che contiene un punto che soddisfa tutti i vincoli in senso stretto.

Esempio 15.1: dimensione di un poliedro

- La regione ammissibile del problema LP in forma canonica di massimo

$$\begin{array}{rcll} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 12 \\ & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

è a **dimensione piena**: $\dim(F) = 2$, perché per esempio il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa tutti e cinque i vincoli in senso stretto, e quindi un piccolo disco centrato in esso è contenuto in F .

- La regione ammissibile del problema LP in forma standard di massimo

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

ha dimensione $\dim(F) = 2$, e quindi non è a dimensione piena: tutti i suoi punti giacciono sul piano $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$. Qui $n = 3$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$ e infatti $\dim(F) = 2 = n - \text{rank}(\mathbf{A})$.

15.2 Facce, faccette e vertici

Definizione 15.3: disuguaglianza valida

Una disuguaglianza lineare $\mathbf{a}'\mathbf{x} \leq \beta$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$, è **valida** per un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se è soddisfatta da tutti i suoi punti:

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} \leq \beta, \quad \forall \mathbf{x} \in F.$$

Definizione 15.4: faccia

Dati un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e una disuguaglianza valida $\mathbf{a}'\mathbf{x} \leq \beta$ per F , l'insieme

$$G = \{ \mathbf{x} \in F : \mathbf{a}'\mathbf{x} = \beta \}$$

si chiama **faccia** di F . Una faccia è **propria** se $G \neq \emptyset$ e $G \neq F$.

- Una faccia di un poliedro si ottiene richiedendo che una disuguaglianza valida sia soddisfatta all'uguaglianza, ed è essa stessa un poliedro. Sia F sia $\emptyset$ sono facce di F : la prima si ottiene con la disuguaglianza valida $\mathbf{0}'\mathbf{x} \leq 0$, la seconda con una qualsiasi disuguaglianza valida che non è mai soddisfatta all'uguaglianza.
- Ogni vincolo lineare $\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$ del problema LP è una disuguaglianza valida per la sua regione ammissibile, e quindi definisce una faccia: l'insieme delle soluzioni ammissibili per cui il vincolo è **attivo**. Insieme alle condizioni degli scarti complementari, questo è il legame tra la geometria di F e il problema duale.

Definizione 15.5: faccetta e vertice

Dati un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e una faccia non vuota G di F :

1. G è una **faccetta** di F se $\dim(G) = \dim(F) - 1$;
2. G è un **vertice** di F se $\dim(G) = 0$, cioè se G è costituita da un solo punto.

Una faccetta è sempre una faccia propria. Un vertice è una faccia propria, tranne quando F stesso è costituito da un solo punto: in tal caso $G = F$ è l'unico vertice di F .

Le faccette sono le facce proprie **più grandi** e, quando il poliedro ha almeno un vertice (come la regione ammissibile di un problema LP con variabili non negative), i vertici sono le facce non vuote **più piccole**. Le faccette sono importanti perché sono esattamente i vincoli che non si possono eliminare: un poliedro a dimensione piena è descritto dalle sue disuguaglianze che definiscono faccette, e solo da quelle. I vertici sono importanti perché, come mostriamo più avanti, sono esattamente le soluzioni di base ammissibili.

Definizione 15.6: punto estremo

Un punto $\mathbf{x} \in F$ è un **punto estremo** del poliedro F se non si può scrivere come combinazione convessa di due punti distinti di F , cioè se non esistono $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in F$ con $\mathbf{x}^{(1)} \neq \mathbf{x}^{(2)}$ e $\lambda \in (0, 1)$ tali che

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)}.$$

Teorema 15.7: vertici e punti estremi

Dati un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto $\mathbf{x} \in F$, le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. $\{\mathbf{x}\}$ è un vertice di F ;
2. $\mathbf{x}$ è un punto estremo di F .

Dimostrazione. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia $\{\mathbf{x}\}$ la faccia definita dalla disuguaglianza valida $\mathbf{a}'\mathbf{y} \leq \beta$, e supponiamo $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)}$ con $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in F$ e $\lambda \in (0, 1)$. Allora

$$\beta = \mathbf{a}'\mathbf{x} = \lambda \underbrace{\mathbf{a}'\mathbf{x}^{(1)}}_{\leq \beta} + (1 - \lambda) \underbrace{\mathbf{a}'\mathbf{x}^{(2)}}_{\leq \beta} \leq \beta,$$

e la disuguaglianza può valere con uguaglianza solo se $\mathbf{a}'\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{a}'\mathbf{x}^{(2)} = \beta$. Di conseguenza entrambi i punti appartengono alla faccia $\{\mathbf{x}\}$, e quindi $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}$: i due punti non sono distinti.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sia $\mathbf{x}$ un punto estremo e sia I l'insieme degli indici dei vincoli di F attivi in $\mathbf{x}$. Se le righe $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in I}$ non generassero $\mathbb{R}^n$, esisterebbe una direzione $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ con $\mathbf{a}_i'\mathbf{d} = 0$ per ogni $i \in I$, e quindi, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, entrambi i punti $\mathbf{x} \pm \varepsilon \mathbf{d}$ apparterrebbero a F , contraddicendo il fatto che $\mathbf{x}$ è un punto estremo, poiché $\mathbf{x}$ è il loro punto medio. Di conseguenza le righe attive generano $\mathbb{R}^n$, il sistema $\{\mathbf{a}_i'\mathbf{y} = b_i\}_{i \in I}$ ha $\mathbf{x}$ come unica soluzione, e la disuguaglianza valida ottenuta sommando i vincoli attivi definisce la faccia $\{\mathbf{x}\}$. $\square$

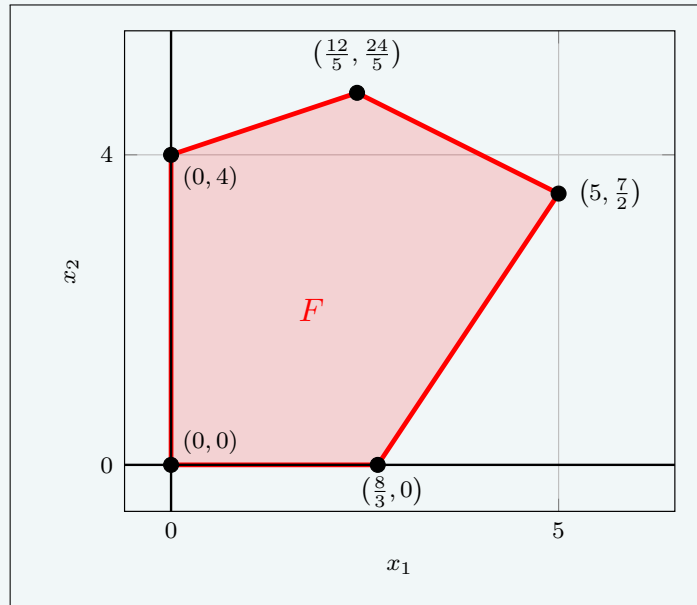
Esempio 15.2: facce, faccette e vertici

Consideriamo la regione ammissibile F del primo problema LP dell'Esempio 15.1. È a dimensione piena, $\dim(F) = 2$, e quindi:

1. le sue **faccette** sono le sue facce di dimensione 1, cioè i suoi cinque spigoli;
2. i suoi **vertici** sono le sue facce di dimensione 0, cioè i suoi cinque punti d'angolo.

Ciascuno dei cinque vincoli lineari definisce una faccetta, e quindi sono tutti necessari per descrivere F :

vincolo	faccetta che definisce	vertici che contiene
$-x_1 + 3x_2 \leq 12$	spigolo da $(0, 4)$ a $(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$	2
$x_1 + 2x_2 \leq 12$	spigolo da $(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$ a $(5, \frac{7}{2})$	2
$3x_1 - 2x_2 \leq 8$	spigolo da $(5, \frac{7}{2})$ a $(\frac{8}{3}, 0)$	2
$x_2 \geq 0$	spigolo da $(\frac{8}{3}, 0)$ a $(0, 0)$	2
$x_1 \geq 0$	spigolo da $(0, 0)$ a $(0, 4)$	2



I cinque punti segnati in nero sono i vertici di F , e i cinque segmenti rossi che li uniscono sono le sue faccette.

15.3 Soluzioni di base ammissibili e vertici

- Colleghiamo ora la nozione geometrica di vertice alla nozione algebrica di soluzione di base ammissibile, che è quella usata dall'algoritmo del simplesso. Consideriamo un problema LP in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza, con $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$.

Teorema 15.8: soluzioni di base ammissibili e vertici

Dati un problema LP in forma standard di massimo e un punto $\bar{\mathbf{x}} \in F$, le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. $\bar{\mathbf{x}}$ è una **soluzione di base ammissibile**, cioè esiste una base $\mathbf{A}_B$ tale che $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$;
2. $\bar{\mathbf{x}}$ è un **vertice** di F .

- L'idea della dimostrazione è che le colonne associate alle componenti strettamente positive di $\bar{\mathbf{x}}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\bar{\mathbf{x}}$ non si può spostare in due direzioni opposte restando in F .

Dimostrazione. Sia $P = \{j : \bar{x}_j > 0\}$.

(1 $\Rightarrow$ 2) Sia $\bar{\mathbf{x}}$ una soluzione di base ammissibile con base $\mathcal{B}$. Allora $P \subseteq \mathcal{B}$, e quindi le colonne $\{\mathbf{A}_j\}_{j \in P}$ sono linearmente indipendenti, essendo un sottoinsieme delle colonne della matrice invertibile $\mathbf{A}_B$. Supponiamo $\bar{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)}$ con $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in F$ e

$\lambda \in (0, 1)$. Per ogni $j \notin P$ abbiamo $\bar{x}_j = 0$ e, poiché entrambi i punti sono non negativi, $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$. Posto $\mathbf{d} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}$, otteniamo $d_j = 0$ per ogni $j \notin P$ e

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \sum_{j \in P} d_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}.$$

Per l'indipendenza lineare di $\{\mathbf{A}_j\}_{j \in P}$ otteniamo $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$. Di conseguenza $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto estremo e, per il Teorema 15.7, un vertice di F .

(2 $\Rightarrow$ 1) Sia $\bar{\mathbf{x}}$ un vertice di F e supponiamo, per assurdo, che le colonne $\{\mathbf{A}_j\}_{j \in P}$ siano linearmente dipendenti: esiste $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ con $d_j = 0$ per ogni $j \notin P$ e $\sum_{j \in P} d_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$. Poiché $\bar{x}_j > 0$ per ogni $j \in P$, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo entrambi i punti $\bar{\mathbf{x}} \pm \varepsilon \mathbf{d}$ sono non negativi, e soddisfano $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} \pm \varepsilon \mathbf{d}) = \mathbf{b}$: appartengono a F . Ma $\bar{\mathbf{x}}$ è il loro punto medio, il che contraddice il Teorema 15.7. Di conseguenza le colonne $\{\mathbf{A}_j\}_{j \in P}$ sono linearmente indipendenti; poiché $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, si possono completare a m colonne linearmente indipendenti, i cui indici formano una base $\mathcal{B} \supseteq P$. Rispetto a essa, $\bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}} = \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$: $\bar{\mathbf{x}}$ è una soluzione di base ammissibile. $\square$

La corrispondenza tra basi e vertici è **suriettiva** ma non necessariamente **biunivoca**: ogni soluzione di base ammissibile è un vertice, ma lo stesso vertice può essere associato a più basi diverse. Ciò accade solo se il vertice è **degenere**, cioè se qualche variabile in base assume il valore 0: un vertice non degenere è associato a esattamente una base, formata dagli indici delle sue componenti strettamente positive, mentre un vertice degenere è di solito, ma non sempre, associato a più basi.

Esempio 15.3: basi e vertici

Consideriamo il primo problema LP dell'Esempio 15.1 in forma standard di massimo, con $n + m = 5$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di uguaglianza. Una base è un sottoinsieme di 3 indici su 5, e ci sono $\binom{5}{3} = 10$ sottoinsiemi di questo tipo. Tutti danno una matrice invertibile $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$, e quindi sono tutti basi:

$\mathcal{B}$	$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{b}$	ammissibile	vertice (x_1, x_2)
$\{1, 2, 3\}$	$(5, \frac{7}{2}, \frac{13}{2})$	✓	$(5, \frac{7}{2})$
$\{1, 2, 4\}$	$(\frac{48}{7}, \frac{44}{7}, -\frac{52}{7})$		
$\{1, 2, 5\}$	$(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}, \frac{52}{5})$	✓	$(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$
$\{1, 3, 4\}$	$(\frac{8}{3}, \frac{44}{3}, \frac{28}{3})$	✓	$(\frac{8}{3}, 0)$
$\{1, 3, 5\}$	$(12, 24, -28)$		
$\{1, 4, 5\}$	$(-12, 24, 44)$		
$\{2, 3, 4\}$	$(-4, 24, 20)$		
$\{2, 3, 5\}$	$(6, -6, 20)$		
$\{2, 4, 5\}$	$(4, 4, 16)$	✓	$(0, 4)$
$\{3, 4, 5\}$	$(12, 12, 8)$	✓	$(0, 0)$

Esattamente 5 delle 10 basi sono ammissibili, e corrispondono ai 5 vertici di F determinati nell'esempio precedente. In questo problema LP la corrispondenza è **biunivoca**, poiché nessuna soluzione di base ammissibile è degenere: in ogni riga ammissibile della tabella tutte e tre le variabili in base sono strettamente positive.

Esempio 15.4: un vertice degenere

Consideriamo invece il seguente problema LP in forma canonica di massimo, la cui regione ammissibile è costituita da un solo punto:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

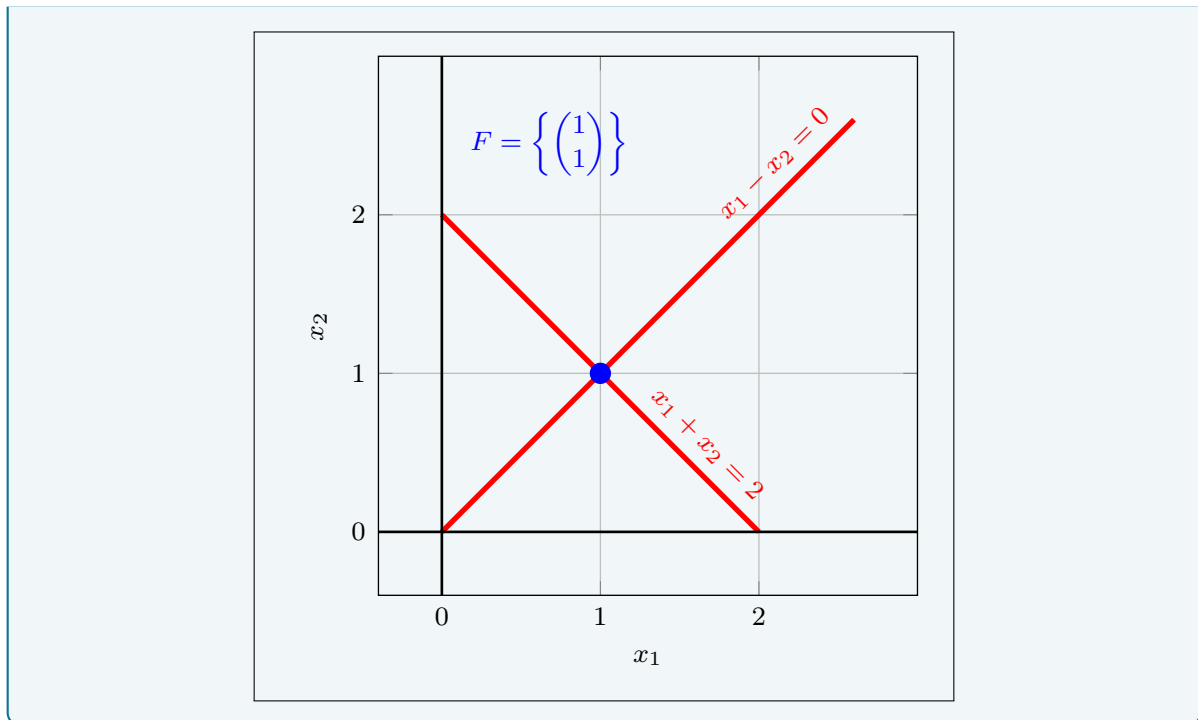
I primi due vincoli impongono $x_1 + x_2 = 2$ e gli ultimi due impongono $x_1 = x_2$, quindi

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(F) = 0.$$

In forma standard di massimo il problema ha 6 variabili e 4 vincoli, e l'unico vertice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è associato a **quattro** basi diverse,

$$\{1, 2, 3, 5\}, \quad \{1, 2, 3, 6\}, \quad \{1, 2, 4, 5\}, \quad \{1, 2, 4, 6\},$$

in ciascuna delle quali due variabili in base assumono il valore 0. Questo vertice è quindi **degenere**, e la corrispondenza tra basi e vertici non è biunivoca.



15.4 Il Teorema Fondamentale, in chiave geometrica

- Il Teorema Fondamentale della programmazione lineare afferma che, ogni volta che un problema LP ammette una soluzione ottima, ammette una soluzione di base ammissibile che è ottima. Per il Teorema 15.8, questo enunciato ha un'immediata lettura geometrica.

Corollario 15.9: vertici ottimi

Se un problema LP ammette una soluzione ottima, allora almeno un **vertice** della sua regione ammissibile è una soluzione ottima.

Questo è il risultato che giustifica il **metodo grafico**: per risolvere un problema LP con due variabili è sufficiente calcolare il valore obiettivo in ciascun vertice della regione ammissibile e tenere il migliore. È anche il risultato che rende possibile l'algoritmo del simplesso: la ricerca di una soluzione ottima, che a priori è una ricerca fra infiniti punti, diventa una ricerca fra i finiti vertici.

- L'insieme delle soluzioni ottime di un problema LP è esso stesso una **faccia** della regione ammissibile: è la faccia definita dalla disuguaglianza valida $\mathbf{c}'\mathbf{x} \leq z(LP)$. Di conseguenza:
 1. se tale faccia è un vertice, la soluzione ottima è unica;
 2. se tale faccia ha dimensione 1 o più, il problema LP ammette infinite soluzioni ottime, e fra di esse almeno un vertice.

- Un vertice è una soluzione ottima se e solo se nessuno spigolo che parte da esso, limitato o illimitato, migliora la funzione obiettivo. Il **test di ottimalità** dell'algoritmo del semplice si basa su questa proprietà: le variabili fuori base corrispondono alle direzioni che escono dal vertice, e il loro effetto sulla funzione obiettivo è misurato dai costi ridotti. Il test è una condizione sufficiente per l'ottimalità ma, in un vertice degenerare, non necessaria: un vertice degenerare può essere ottimo anche se qualche costo ridotto è positivo, poiché la direzione corrispondente può uscire immediatamente da F .

Definizione 15.10: vertici adiacenti

Due vertici di un poliedro si dicono **adiacenti** se il segmento che li congiunge è una faccia, cioè uno spigolo.

In termini di basi, due soluzioni di base ammissibili non degeneri sono adiacenti se e solo se le loro basi differiscono per esattamente un indice.

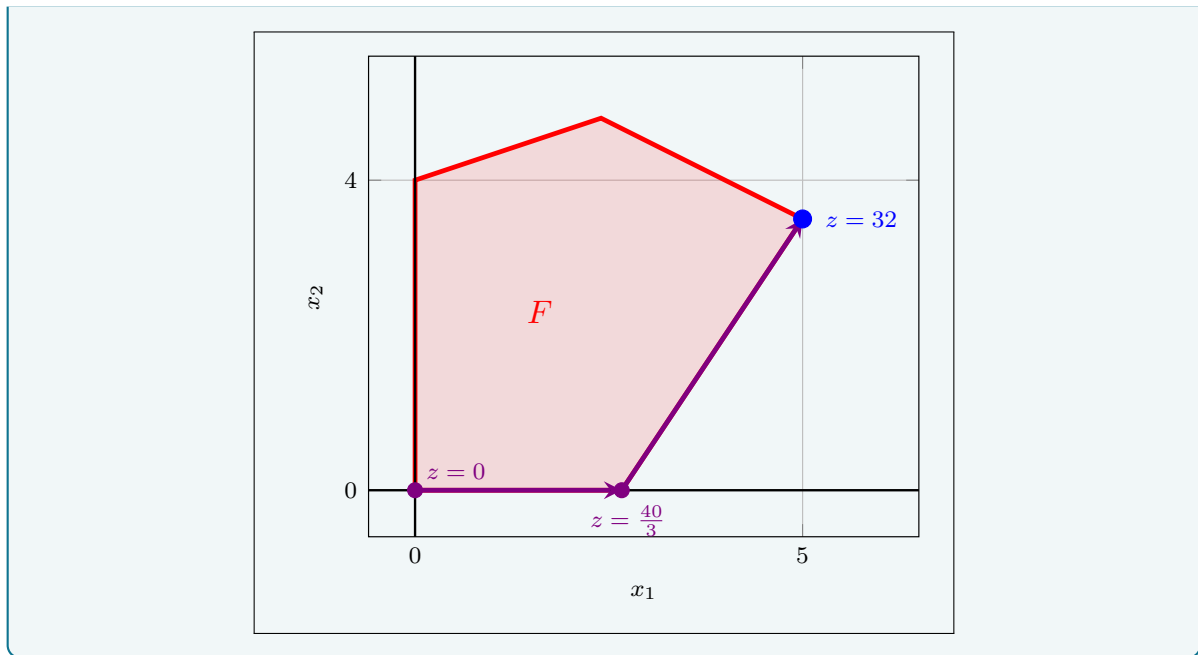
Un'**operazione di pivot** dell'algoritmo del semplice sostituisce un indice della base con un altro. Se è non degenerare, ci si sposta da un vertice a uno **adiacente**, lungo uno spigolo della regione ammissibile, aumentando strettamente il valore obiettivo; se è degenerare ($t_m = 0$), cambia la base ma resta nello stesso vertice. L'algoritmo del semplice è, geometricamente, un cammino sugli spigoli del poliedro.

Esempio 15.5: l'algoritmo del semplice come cammino sugli spigoli

L'esecuzione dell'algoritmo del semplice sul primo problema LP dell'[Esempio 15.1](#), partendo dalla base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, visita i seguenti vertici:

$$(0, 0) \longrightarrow \left(\frac{8}{3}, 0\right) \longrightarrow \left(5, \frac{7}{2}\right),$$

con valori obiettivo 0, $\frac{40}{3}$ e 32. Ogni passo si muove lungo uno spigolo di F , verso un vertice adiacente, e il valore obiettivo aumenta strettamente. Nella figura, in viola i due vertici visitati prima dell'ultimo, in blu il vertice ottimo.



15.5 Riepilogo

nozione geometrica	corrispondente algebrico
poliedro F	regione ammissibile del problema LP
$\dim(F)$	n meno le uguaglianze indipendenti valide in F
faccia	soluzioni in cui una disuguaglianza valida è attiva
faccetta	un vincolo che non si può eliminare
vertice = punto estremo	soluzione di base ammissibile
vertice degenere	più basi, un solo punto
spigolo tra due vertici	operazione di pivot
faccia ottima	insieme delle soluzioni ottime

- Il numero di vertici di un poliedro può essere **esponenziale** nel numero dei suoi vincoli e variabili: per un problema LP in forma standard di massimo è limitato da $\binom{n+m}{m}$. Per questo l'algoritmo del simplesso, che visita un vertice alla volta, non si può dimostrare efficiente semplicemente contando i vertici, e perché il suo comportamento pratico è molto migliore del suo caso peggiore.