



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Volume 3 — Dualità e semplice duale

Il problema duale, i teoremi della dualità debole e forte, gli esiti possibili della coppia primale-duale, gli scarti complementari; l'algoritmo del semplice duale, i certificati di inammissibilità e la riottimizzazione. Esempi svolti passo per passo ed esercizi con la soluzione completa in fondo a ogni capitolo.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Teoria della dualità	2
9.1	Problema duale di un problema LP in forma canonica di massimo	2
9.2	Problemi primale e duale: esiti possibili	16
9.3	Scarti complementari	22
9.4	Problema duale di un problema LP generico	31
10	Algoritmo del simplesso duale	34
10.1	Coppia di problemi primale e duale	34
10.2	Basi primali e duali ammissibili	37
10.3	Determinare una soluzione di base duale ammissibile iniziale	40
10.4	Operazioni di pivot duali	47
10.5	Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso duale	53
10.6	Risoluzione del problema duale con l'algoritmo del simplesso	59

Teoria della dualità

9.1 Problema duale di un problema LP in forma canonica di massimo

Definizione 9.1: problema duale di un problema LP in forma canonica di massimo

Dato un problema di programmazione lineare (LP) in forma canonica di massimo con n variabili non negative e m vincoli lineari di minore o uguale (detto **problema primale** e indicato con LP):

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (9.1a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (9.1b)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (9.1c)$$

il seguente problema LP con m variabili non negative e n vincoli lineari di maggiore o uguale

$$\min \sum_{i=1}^m b_i \pi_i \quad (9.2a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (9.2b)$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (9.2c)$$

si chiama **problema duale** e si indica con $D(LP)$.

Esempio 9.1: coppia di problemi primale e duale

Consideriamo il seguente problema primale LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale ([Esempio 9.1](#)):

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5 x_1 + 2 x_2 \\
 \text{soggetto a} \quad & - x_1 + 3 x_2 \leq 12 \\
 & x_1 + 2 x_2 \leq 12 \\
 & 3 x_1 - 2 x_2 \leq 8 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Il problema duale $D(LP)$, con $m = 3$ variabili non negative e $n = 2$ vincoli lineari di maggiore o uguale, è il seguente:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 12 \pi_1 + 12 \pi_2 + 8 \pi_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & - \pi_1 + \pi_2 + 3 \pi_3 \geq 5 \\
 & 3 \pi_1 + 2 \pi_2 - 2 \pi_3 \geq 2 \\
 & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Si ottengono upper bound sul valore ottimo $z(LP)$ del problema primale prendendo combinazioni lineari non negative dei vincoli, con i moltiplicatori scelti in modo che il coefficiente di ciascuna variabile nel membro sinistro risultante sia maggiore o uguale al suo coefficiente nella funzione obiettivo. Il membro destro della disuguaglianza risultante fornisce allora un upper bound su $z(LP)$.

Esempio 9.2: Calcolo di upper bound tramite combinazioni lineari dei vincoli

Consideriamo il problema primale dell'Esempio 9.1.

- Ad esempio, moltiplicando il secondo vincolo per 5, otteniamo:

$$5 x_1 + 10 x_2 \leq 60$$

Quindi, ogni soluzione ammissibile del problema primale soddisfa questa disuguaglianza, che è una sovrastima della funzione obiettivo, poiché abbiamo:

$$5 x_1 + 2 x_2 \leq 5 x_1 + 10 x_2 \leq 60$$

In particolare, queste disuguaglianze valgono per la soluzione ottima, quindi $z(LP) \leq 60$.

- Ad esempio, moltiplicando il secondo vincolo per $\frac{5}{2}$ e sommandolo poi al terzo vincolo, otteniamo:

$$\frac{5}{2} (x_1 + 2 x_2) + (3 x_1 - 2 x_2) \leq 12 \cdot \frac{5}{2} + 8 \Rightarrow \frac{11}{2} x_1 + 3 x_2 \leq 38$$

Quindi, ogni soluzione ammissibile del problema primale soddisfa questa disuguaglianza, che è una sovrastima della funzione obiettivo, poiché abbiamo:

$$5x_1 + 2x_2 \leq \frac{11}{2}x_1 + 3x_2 \leq 38$$

In particolare, queste disuguaglianze valgono per la soluzione ottima, quindi $z(LP) \leq 38$.

- Ad esempio, moltiplicando il primo, il secondo e il terzo vincolo rispettivamente per 2, 1 e 2, e poi sommandoli, otteniamo:

$$2(-x_1 + 3x_2) + (x_1 + 2x_2) + 2(3x_1 - 2x_2) \leq 12 \cdot 2 + 12 + 8 \cdot 2 \Rightarrow 5x_1 + 4x_2 \leq 52$$

Quindi, ogni soluzione ammissibile del problema primale soddisfa questa disuguaglianza, che è una sovrastima della funzione obiettivo, poiché abbiamo:

$$5x_1 + 2x_2 \leq 5x_1 + 4x_2 \leq 52$$

In particolare, queste disuguaglianze valgono per la soluzione ottima, quindi $z(LP) \leq 52$.

Esempio 9.3: Calcolo di upper bound tramite combinazioni lineari dei vincoli

Consideriamo il problema primale dell'Esempio 9.1.

Poiché abbiamo tre vincoli, introduciamo tre moltiplicatori: π_1 , π_2 e π_3 . Moltiplicando ciascun vincolo per il suo moltiplicatore, otteniamo:

$$(-x_1 + 3x_2)\pi_1 \leq 12\pi_1$$

$$(x_1 + 2x_2)\pi_2 \leq 12\pi_2$$

$$(3x_1 - 2x_2)\pi_3 \leq 8\pi_3$$

Sommando le tre disuguaglianze, otteniamo:

$$(-x_1 + 3x_2)\pi_1 + (x_1 + 2x_2)\pi_2 + (3x_1 - 2x_2)\pi_3 \leq 12\pi_1 + 12\pi_2 + 8\pi_3$$

Raggruppando per variabile, otteniamo:

$$(-\pi_1 + \pi_2 + 3\pi_3)x_1 + (3\pi_1 + 2\pi_2 - 2\pi_3)x_2 \leq 12\pi_1 + 12\pi_2 + 8\pi_3$$

Il membro destro di questa disuguaglianza fornisce un upper bound valido su $z(LP)$ se e solo se il coefficiente di ciascuna variabile è almeno pari al coefficiente corrispondente nella funzione obiettivo:

$$-\pi_1 + \pi_2 + 3\pi_3 \geq 5$$

$$3\pi_1 + 2\pi_2 - 2\pi_3 \geq 2$$

Ogni moltiplicatore deve essere non negativo:

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$$

altrimenti il verso della disuguaglianza corrispondente si invertirebbe. Poiché vogliamo ottenere il miglior upper bound possibile, cioè il più piccolo, dobbiamo minimizzare il membro destro della disuguaglianza che fornisce l'upper bound su $z(LP)$.

Il problema duale $D(LP)$ è il problema LP di trovare il miglior upper bound possibile sul valore ottimo $z(LP)$ del problema primale LP tramite combinazioni lineari dei vincoli.

- Una proprietà importante della trasformazione di dualità è che restituisce il problema di partenza se applicata due volte.

Osservazione 9.2

Il problema duale del problema duale (9.2) è il problema primale (9.1).

Dimostrazione. Partendo dal problema duale (9.2),

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^m b_i \pi_i \\ \text{soggetto a } & \sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \geq c_j, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ & \pi_i \geq 0, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned}$$

consideriamo il problema LP equivalente ottenuto moltiplicando per -1 la funzione obiettivo e ciascun vincolo:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^m (-b_i) \pi_i \\ \text{soggetto a } & \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) \pi_i \leq -c_j, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ & \pi_i \geq 0, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Questo problema è ora in forma canonica di massimo. Quindi, il suo duale è

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j \\ \text{soggetto a } & \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \geq -b_i, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & x_j \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Infine, moltiplicando per -1 la funzione obiettivo e ciascun vincolo, otteniamo il problema equivalente

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{soggetto a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

che è esattamente il problema primale (9.1). Pertanto, il duale del problema duale (9.2) è il problema primale (9.1). $\square$

9.1.1 Dualità debole

- Il seguente teorema, detto della **dualità debole**, afferma che il valore di qualunque soluzione ammissibile del problema primale (9.1) è minore o uguale al valore di qualunque soluzione ammissibile del problema duale (9.2).

Teorema 9.3: Dualità debole

Per ogni soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del problema primale (9.1) e ogni soluzione ammissibile $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ del problema duale (9.2), abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i. \quad (9.3)$$

- L'idea della dimostrazione è usare l'ammissibilità primale e duale delle due soluzioni per mostrare che il valore della soluzione primale è al più uguale al valore della soluzione duale.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j & \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \right) \bar{x}_j & \text{(per (9.2b) e (9.1c): } c_j \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i, \bar{x}_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}) \\ & = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{\pi}_i \\ & \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i & \text{(per (9.1b) e (9.2c): } \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \leq b_i, \bar{\pi}_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}) \end{aligned}$$

$\square$

- Il teorema della dualità debole afferma che il valore di qualunque soluzione ammissibile $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ di un problema duale (9.2) fornisce un **upper bound** valido sul valore ottimo $z(LP)$ del problema primale (9.1):

$$z(LP) \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i$$

Inoltre, il valore di qualunque soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ di un problema primale (9.1) fornisce un **lower bound** valido sul valore ottimo $z(D(LP))$ del problema duale (9.2):

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq z(D(LP))$$

Esempio 9.4: Soluzioni ammissibili primali e duali

Consideriamo la seguente coppia di problemi LP primale e duale:

$$\begin{array}{llllll} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 \leq 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 \leq 12 \\ & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 \leq 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \min & 12 & \pi_1 & + & 12 & \pi_2 + 8 & \pi_3 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & + & & \pi_2 + 3 & \pi_3 \geq 5 \\ & 3 & \pi_1 & + & 2 & \pi_2 - 2 & \pi_3 \geq 2 \\ & & \pi_1, & & \pi_2, & & \pi_3 \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione primale ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{12}{5}, \quad \bar{x}_2 = \frac{24}{5}$$

Essa fornisce il seguente lower bound sul valore ottimo:

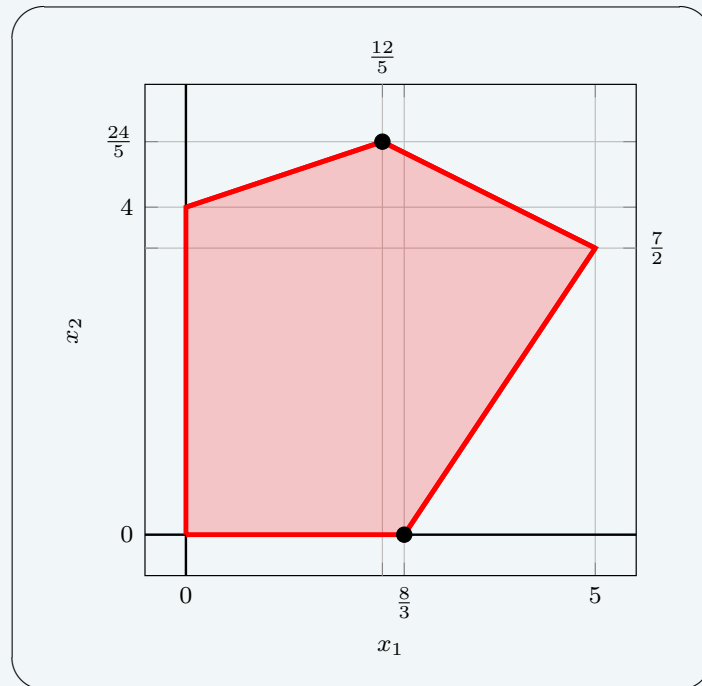
$$LB(\bar{x}) = 5 \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{108}{5}$$

Un'altra soluzione primale ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0$$

Essa fornisce il seguente lower bound sul valore ottimo:

$$LB(\bar{x}) = 5 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot 0 = \frac{40}{3}$$



Una soluzione duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 5, \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

Essa fornisce il seguente upper bound sul valore ottimo:

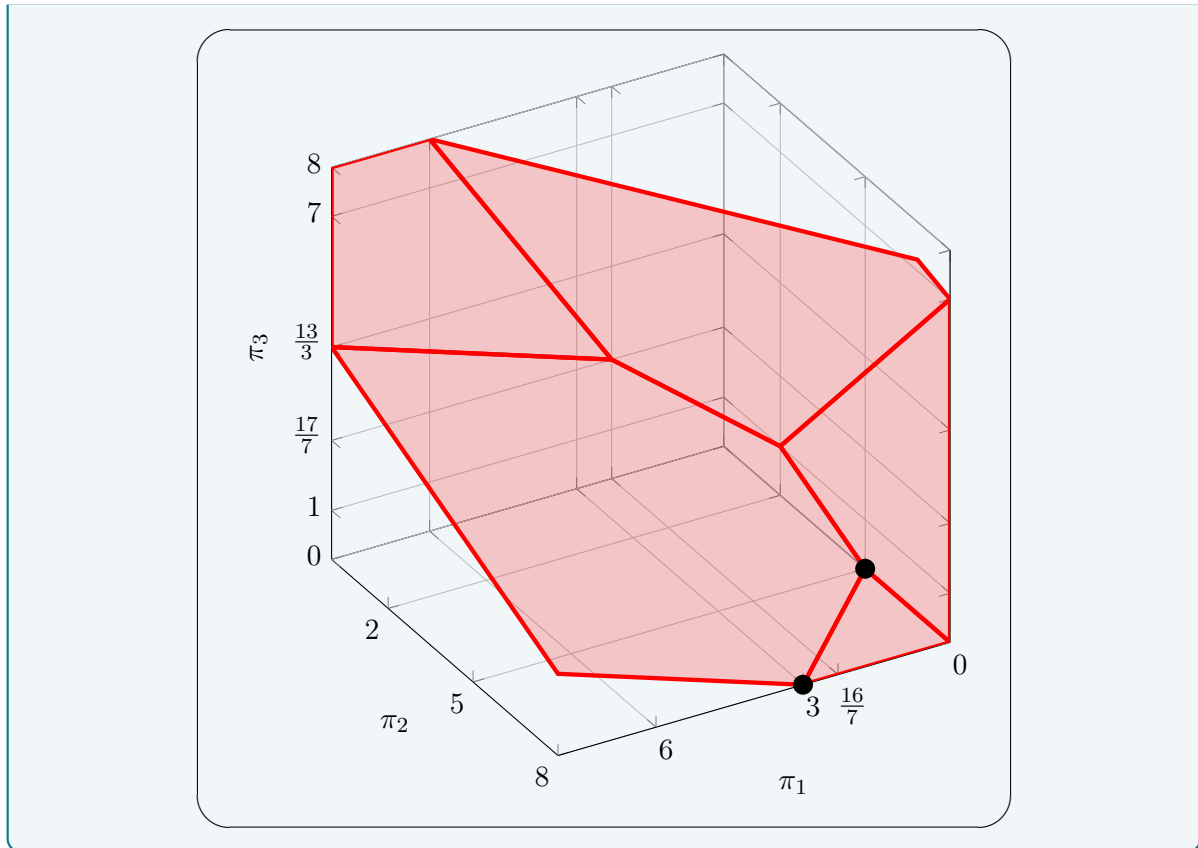
$$UB(\bar{\pi}) = 12 \cdot 0 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 0 = 60$$

Un'altra soluzione duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 3, \quad \bar{\pi}_2 = 8, \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

Essa fornisce il seguente upper bound sul valore ottimo:

$$UB(\bar{\pi}) = 12 \cdot 3 + 12 \cdot 8 + 8 \cdot 0 = 132$$



- Grazie alla dualità debole, possiamo mostrare che $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ è una soluzione ottima del problema primale (9.1) e $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ è una soluzione ottima del problema duale (9.2) se sono ammissibili per i rispettivi problemi e soddisfano

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i.$$

Ciò discende dalla dualità debole nel modo seguente:

- Per la dualità debole, per ogni soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del problema primale (9.1) e per la soluzione duale ammissibile $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$, abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i.$$

Se, inoltre,

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i,$$

allora

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j$$

per ogni soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del problema primale. Di conseguenza, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ è una soluzione ottima del problema primale (9.1).

2. Per la dualità debole, per ogni soluzione ammissibile $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ del problema duale (9.2) e per la soluzione primale ammissibile $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$, abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i.$$

Se, inoltre,

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i,$$

allora

$$\sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i$$

per ogni soluzione ammissibile $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ del problema duale. Di conseguenza, $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ è una soluzione ottima del problema duale (9.2).

Esempio 9.5: Soluzioni ottime primali e duali

Consideriamo la seguente coppia di problemi LP primale e duale:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 12\pi_1 + 12\pi_2 + 8\pi_3 \\ \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 + \pi_2 + 3\pi_3 \geq 5 \\ & 3\pi_1 + 2\pi_2 - 2\pi_3 \geq 2 \\ & \pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Per mostrare che

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

è una soluzione ottima del problema primale (9.1), e che

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2, \quad \tilde{\pi}_3 = 1$$

è una soluzione ottima del problema duale (9.2), possiamo procedere come segue.

Innanzitutto, verifichiamo di avere una soluzione ammissibile per il problema primale:

$$-\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = -5 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{11}{2} \leq 12,$$

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 12 \leq 12,$$

$$3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 8 \leq 8,$$

$$\tilde{x}_1 = 5 \geq 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2} \geq 0.$$

In secondo luogo, verifichiamo di avere una soluzione ammissibile per il problema duale:

$$-\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + 3\tilde{\pi}_3 = -0 + 2 + 3 \cdot 1 = 5 \geq 5,$$

$$3\tilde{\pi}_1 + 2\tilde{\pi}_2 - 2\tilde{\pi}_3 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 \geq 2,$$

$$\tilde{\pi}_1 = 0 \geq 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2 \geq 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 1 \geq 0.$$

Infine, calcoliamo i valori della funzione obiettivo:

$$5\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 25 + 7 = 32,$$

e

$$12\tilde{\pi}_1 + 12\tilde{\pi}_2 + 8\tilde{\pi}_3 = 12 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 24 + 8 = 32.$$

Poiché entrambe le soluzioni sono ammissibili per i rispettivi problemi e i loro valori obiettivo sono uguali, per la dualità debole sono entrambe ottime.

9.1.2 Dualità forte

- Il seguente teorema, detto della **dualità forte**, afferma che il problema primale (9.1) ha una soluzione ottima se e solo se il problema duale (9.2) ha una soluzione ottima, e in tal caso i valori ottimi dei due problemi coincidono.

Teorema 9.4: Dualità forte

Il problema primale (9.1) ha una soluzione ottima $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ se e solo se il problema duale (9.2) ha una soluzione ottima $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$, e in tal caso

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i. \quad (9.4)$$

- L'esistenza di una soluzione ottima non ne implica l'unicità. Il teorema afferma soltanto che esiste almeno una soluzione ottima del problema primale se e solo se esiste almeno una soluzione ottima del problema duale (possono esserci più soluzioni ottime da una parte o da entrambe, ma i valori ottimi coincidono).

- La dualità forte implica che

il problema primale ha una soluzione ottima



il problema duale ha una soluzione ottima

quindi “il problema primale ha una soluzione ottima” è condizione necessaria e sufficiente per “il problema duale ha una soluzione ottima” e viceversa.

- I passi principali della dimostrazione del teorema della dualità forte sono i seguenti:

1. Mostriamo prima che, se il problema primale ha una soluzione ottima, allora il problema duale ha una soluzione ottima e i valori ottimi dei due problemi coincidono.

Per farlo si usa un dizionario ottimo del problema primale, prodotto dall’algoritmo del simplesso, per costruire una soluzione ammissibile del problema duale che soddisfa (9.4).

Per la dualità debole, tale soluzione duale è necessariamente ottima, il che dimostra un’implicazione.

2. L’implicazione inversa si ottiene applicando il ragionamento precedente al problema duale (equivalentemente, scambiando i ruoli di primale e duale, poiché il duale del duale è il problema primale).

Dimostrazione. Supponiamo che il problema primale (9.1) abbia una soluzione ottima e consideriamo un dizionario ottimo prodotto dall’algoritmo del simplesso. La sua ultima riga si può scrivere come

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \bar{z} + \sum_{j=1}^{n+m} \hat{c}_j x_j, \quad \text{dove} \quad \hat{c}_j = \begin{cases} \bar{c}_j & \text{se } j \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi $\hat{c}_j$ è uguale al costo ridotto della variabile x_j se $j \in \mathcal{N}$ (l’insieme degli indici delle variabili fuori base), ed è uguale a 0 altrimenti.

Riordinando i termini, otteniamo

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \bar{z} + \sum_{j=1}^n \hat{c}_j x_j + \sum_{i=1}^m \hat{c}_{n+i} x_{n+i},$$

dove la somma è stata suddivisa nelle variabili originali e nelle variabili di scarto. Ricordiamo che, per le variabili di scarto, abbiamo

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Sostituendo queste espressioni nell'identità precedente, otteniamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n c_j x_j &= \bar{z} + \sum_{j=1}^n \hat{c}_j x_j + \sum_{i=1}^m \hat{c}_{n+i} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \\
 &= \bar{z} + \sum_{j=1}^n \hat{c}_j x_j + \sum_{i=1}^m b_i \hat{c}_{n+i} - \sum_{i=1}^m \hat{c}_{n+i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\
 &= \bar{z} + \sum_{j=1}^n \hat{c}_j x_j + \sum_{i=1}^m b_i \hat{c}_{n+i} - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{c}_{n+i} \right) x_j \\
 &= \bar{z} + \sum_{i=1}^m b_i \hat{c}_{n+i} + \sum_{j=1}^n \left(\hat{c}_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{c}_{n+i} \right) x_j. \tag{A}
 \end{aligned}$$

Poiché (A) è un'identità nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, vale per ogni scelta di queste variabili. Pertanto i termini costanti dei due membri devono coincidere, e devono coincidere anche i coefficienti di ciascuna variabile. Quindi

$$\bar{z} + \sum_{i=1}^m b_i \hat{c}_{n+i} = 0 \quad \implies \quad \bar{z} = - \sum_{i=1}^m b_i \hat{c}_{n+i}, \tag{B}$$

e

$$c_j = \hat{c}_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{c}_{n+i}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{C}$$

Definiamo ora

$$\tilde{\pi}_i = -\hat{c}_{n+i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \tag{D}$$

e mostriamo che $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ è una soluzione ottima del problema duale (9.2) che soddisfa (9.4).

Poiché il dizionario è ottimo, abbiamo $\hat{c}_j \leq 0$ per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n+m\}$. Quindi da (D) otteniamo

$$\tilde{\pi}_i = -\hat{c}_{n+i} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

e da (C) otteniamo

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \tilde{\pi}_i = c_j - \hat{c}_j \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pertanto $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ è ammissibile per il problema duale (9.2).

Inoltre, poiché $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ è una soluzione ottima del problema primale (9.1), il suo valore obiettivo è uguale al valore ottimo $\bar{z}$ del problema primale (9.1). Quindi, per (B), abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j = \bar{z} = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i.$$

Quindi la soluzione duale ammissibile $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ soddisfa (9.4).

Infine, la dualità debole implica che, per ogni soluzione duale ammissibile $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$,

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i.$$

Poiché per la soluzione duale ammissibile $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i,$$

ne segue che

$$\sum_{i=1}^m b_i \tilde{\pi}_i \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i$$

per ogni soluzione duale ammissibile $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$. Quindi $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ è una soluzione ottima del problema duale (9.2).

L'implicazione inversa si ottiene applicando il ragionamento precedente al problema duale (dopo averlo riscritto nella corrispondente forma canonica, se necessario). Poiché il duale del problema duale è il problema primale, ne segue che se il problema duale (9.2) ha una soluzione ottima, allora anche il problema primale (9.1) ha una soluzione ottima. $\square$

- La figura seguente illustra la relazione tra bound primali e duali per un problema LP in forma di **massimo**. A titolo di esempio, la figura considera quattro soluzioni primali ammissibili

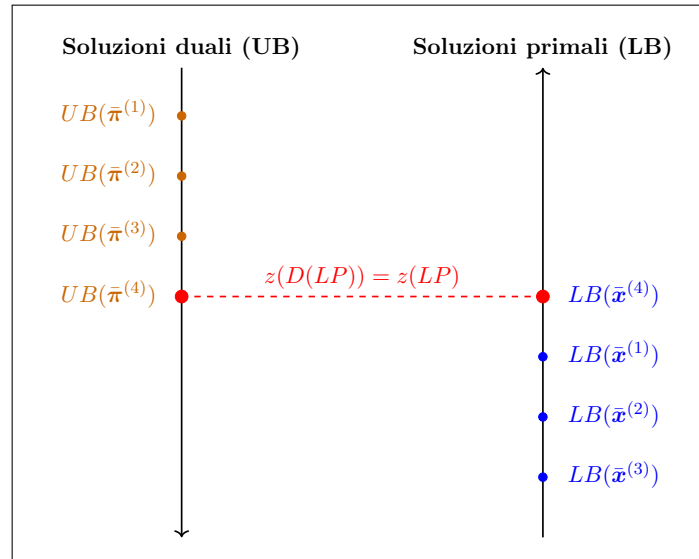
$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \bar{x}^{(4)},$$

e quattro soluzioni duali ammissibili

$$\bar{\pi}^{(1)}, \bar{\pi}^{(2)}, \bar{\pi}^{(3)}, \bar{\pi}^{(4)}.$$

Le soluzioni primali ammissibili forniscono **lower bound** sul valore ottimo, mentre le soluzioni duali ammissibili forniscono **upper bound** sul valore ottimo per il teorema della dualità debole (9.3).

La quarta soluzione di ciascuna sequenza raggiunge il valore ottimo e, per il teorema della dualità forte (9.4), i due bound coincidono: $z(LP) = z(D(LP))$.



Esempio 9.6: soluzioni duali ottime dai dizionari primali ottimi

Consideriamo il problema primale dell'Esempio 9.1 (con $n = 2$ e $m = 3$). La forma standard del problema primale è

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\
 & & x_1 & + & 2 & x_2 & & + & x_4 & = & 12 \\
 & & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & & + & x_5 & = & 8 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

dove x_3 , x_4 e x_5 sono le variabili di scarto associate ai tre vincoli. Un dizionario ottimo è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = 5 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_5 \\
 x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \\
 x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8} x_4 - \frac{5}{8} x_5 \\
 z = 32 - 2 x_4 - x_5
 \end{array} \right.$$

dove le variabili in base sono x_1 , x_2 e x_3 , e le variabili fuori base sono x_4 e x_5 . La soluzione primale ottima è $\tilde{x}_1 = 5$, $\tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$, $\tilde{x}_3 = \frac{13}{2}$, $\tilde{x}_4 = 0$ e $\tilde{x}_5 = 0$, e il valore ottimo è 32.

Il problema duale è

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 12 \pi_1 + 12 \pi_2 + 8 \pi_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 + \pi_2 + 3 \pi_3 \geq 5 \\
 & 3 \pi_1 + 2 \pi_2 - 2 \pi_3 \geq 2 \\
 & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

I valori $\hat{c}_j$ con $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ usati nella dimostrazione del teorema della dualità forte sono:

$$\hat{c}_1 = 0, \hat{c}_2 = 0, \hat{c}_3 = 0, \hat{c}_4 = -2, \hat{c}_5 = -1$$

La soluzione duale ottima si ottiene assegnando alle variabili duali corrispondenti i valori $\hat{c}_j$ cambiati di segno, come in (D), ed è la seguente:

$$\tilde{\pi}_1 = -\hat{c}_3 = 0, \tilde{\pi}_2 = -\hat{c}_4 = 2, \tilde{\pi}_3 = -\hat{c}_5 = 1$$

La soluzione è ammissibile per il problema duale, poiché $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ e $\tilde{\pi}_3$ sono non negative e

$$-\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + 3\tilde{\pi}_3 = -0 + 2 + 3 \cdot 1 = 5 \geq 5, \quad 3\tilde{\pi}_1 + 2\tilde{\pi}_2 - 2\tilde{\pi}_3 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 \geq 2.$$

Il valore della funzione obiettivo di questa soluzione è:

$$12 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 32$$

9.2 Problemi primale e duale: esiti possibili

- I teoremi della dualità debole e della dualità forte mettono in relazione i valori ottimi del problema primale (9.1) e del problema duale (9.2) ogni volta che entrambi ammettono una soluzione ottima. Descriviamo ora cosa succede quando uno dei due problemi è inammissibile o illimitato.

Corollario 9.5: problemi illimitati e problemi inammissibili

Per una coppia di problemi primale (9.1) e duale (9.2):

1. se il problema primale è **illimitato**, allora il problema duale è **inammissibile**;
2. se il problema duale è **illimitato**, allora il problema primale è **inammissibile**.

- L'idea della dimostrazione è che una sola soluzione ammissibile di uno dei due problemi limiterebbe il valore obiettivo dell'altro, per la dualità debole.

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto; il secondo si ottiene scambiando i ruoli dei due problemi.

Supponiamo, per assurdo, che il problema primale (9.1) sia illimitato e che il problema duale (9.2) ammetta una soluzione ammissibile $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$. Per la dualità debole (9.3), per ogni soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del problema primale

abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \underbrace{\sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i}_{=M},$$

dove M è un numero reale fissato, poiché la soluzione duale ammissibile è fissata. Di conseguenza, nessuna soluzione ammissibile del problema primale ha valore obiettivo maggiore di M , il che contraddice l'ipotesi che il problema primale sia illimitato. $\square$

Teorema 9.6: esiti possibili di una coppia di problemi primale e duale

Per una coppia di problemi primale (9.1) e duale (9.2), si verifica esattamente uno dei quattro casi seguenti:

1. entrambi i problemi ammettono una **soluzione ottima**, e i due valori ottimi coincidono;
2. il problema primale è **illimitato** e il problema duale è **inammissibile**;
3. il problema primale è **inammissibile** e il problema duale è **illimitato**;
4. entrambi i problemi sono **inammissibili**.

Dimostrazione. Per il Teorema Fondamentale della programmazione lineare, ciascuno dei due problemi è inammissibile, è illimitato, oppure ammette una soluzione ottima, e quindi ci sono nove combinazioni possibili. Mostriamo che cinque di esse non possono verificarsi.

1. Se il problema primale ammette una soluzione ottima, allora per la dualità forte (9.4) il problema duale ammette anch'esso una soluzione ottima. Questo esclude le due combinazioni in cui il problema primale ammette una soluzione ottima e il problema duale è illimitato o inammissibile. Simmetricamente, sono escluse anche le due combinazioni in cui il problema duale ammette una soluzione ottima e il problema primale è illimitato o inammissibile.
2. Se il problema primale è illimitato, allora per il Corollario 9.5 il problema duale è inammissibile. Questo esclude la combinazione in cui entrambi i problemi sono illimitati.

Le quattro combinazioni rimanenti sono quelle dell'enunciato. $\square$

Gli esiti possibili di una coppia di problemi primale e duale sono riassunti nella tabella seguente, dove i quattro casi del Teorema 9.6 sono marcati con $\checkmark$:

problema primale LP	problema duale $D(LP)$		
	soluzione ottima	illimitato	inammissibile
soluzione ottima	✓		
illimitato			✓
inammissibile		✓	✓

In particolare, il duale di un problema primale inammissibile può essere illimitato oppure inammissibile: l'inammissibilità del problema primale, da sola, non determina l'esito del problema duale.

Esempio 9.7: problema primale illimitato e problema duale inammissibile

Consideriamo la seguente coppia di problemi primale e duale, con $n = 2$ e $m = 2$ (detta [Esempio 9.7](#)):

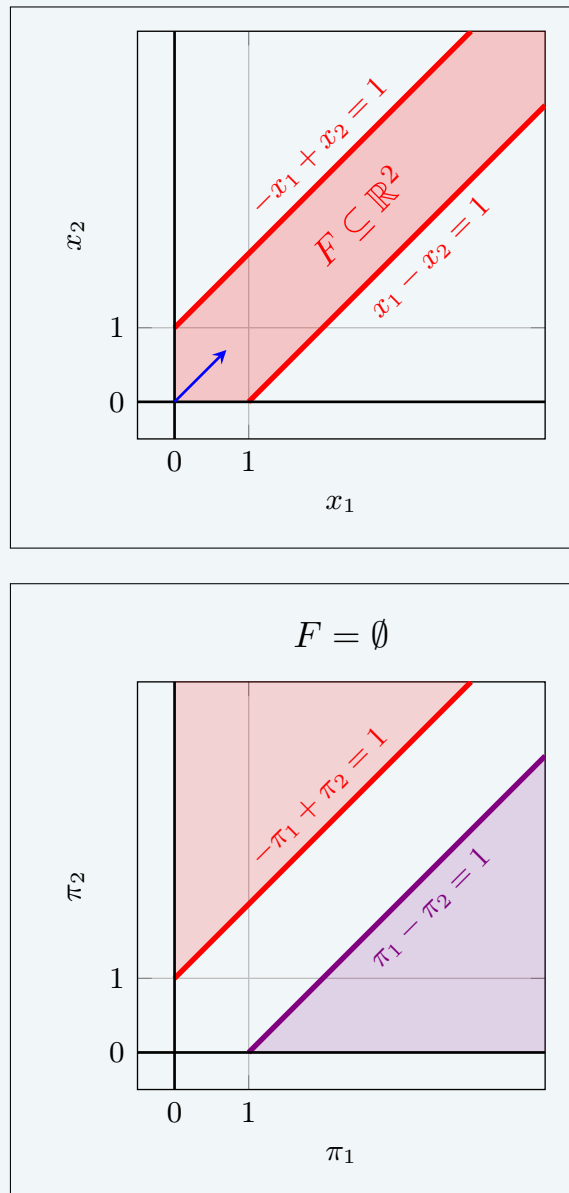
$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & + & x_2 & & \\
 \text{soggetto a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
 \\
 \min & \pi_1 & + & \pi_2 & & \\
 \text{soggetto a} & -\pi_1 & + & \pi_2 & \geq & 1 \\
 & \pi_1 & - & \pi_2 & \geq & 1 \\
 & \pi_1, & & \pi_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il problema primale è **illimitato**: per ogni valore $t \geq 0$, il punto $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = t$ è una soluzione ammissibile di valore obiettivo $2t$.

Il problema duale è **inammissibile**: sommando i suoi due vincoli otteniamo

$$\underbrace{(-\pi_1 + \pi_2)}_{\geq 1} + \underbrace{(\pi_1 - \pi_2)}_{\geq 1} = 0 \geq 2,$$

che non è mai soddisfatta.



Nella prima figura la regione ammissibile del problema primale, nella seconda i due semipiani definiti dai vincoli duali, la cui intersezione è vuota.

Esempio 9.8: problema primale inammissibile e problema duale illimitato

Consideriamo la seguente coppia di problemi primale e duale, con $n = 2$ e $m = 2$ (detta [Esempio 9.8](#)):

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

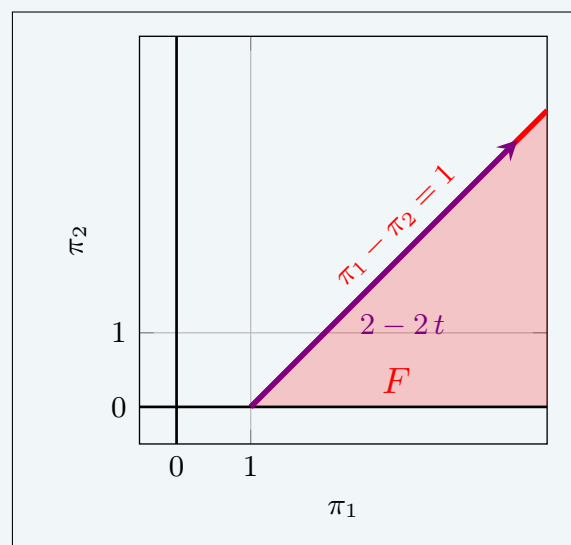
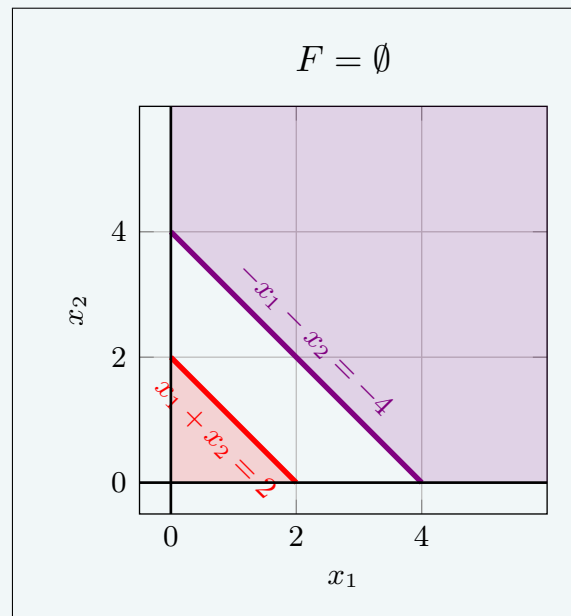
$$\begin{array}{llllll}
 \min & 2 & \pi_1 & - & 4 & \pi_2 \\
 \text{soggetto a} & & \pi_1 & - & & \pi_2 \geq 1 \\
 & & \pi_1 & - & & \pi_2 \geq 1 \\
 & & \pi_1, & & \pi_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Il problema primale è **inammissibile**: il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \leq 2$ e il secondo impone $x_1 + x_2 \geq 4$.

Il problema duale è **illimitato**: per ogni valore $t \geq 0$, il punto $\bar{\pi}_1 = 1 + t$ e $\bar{\pi}_2 = t$ è una soluzione ammissibile, poiché $\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 = 1 \geq 1$, e il suo valore obiettivo è

$$2(1+t) - 4t = 2 - 2t,$$

che tende a $-\infty$ al crescere di t . Poiché il problema duale è in forma di minimo, esso è illimitato.



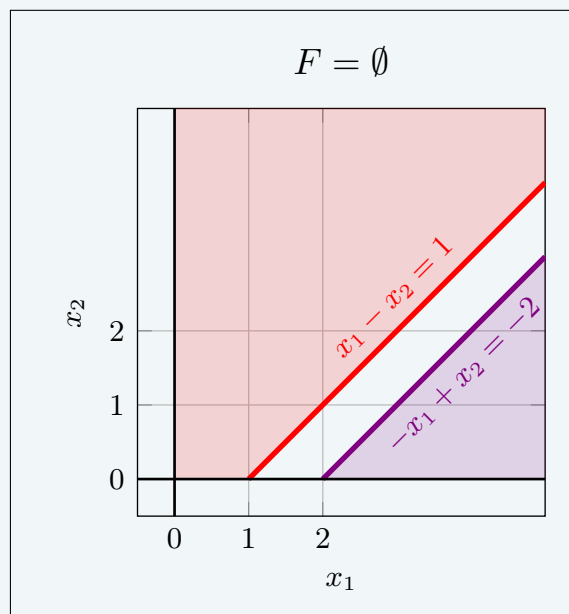
Nella prima figura i due semipiani definiti dai vincoli primali, la cui intersezione è vuota; nella seconda la regione ammissibile del problema duale e, in viola, la famiglia di soluzioni ammissibili lungo la quale il suo valore obiettivo tende a $-\infty$.

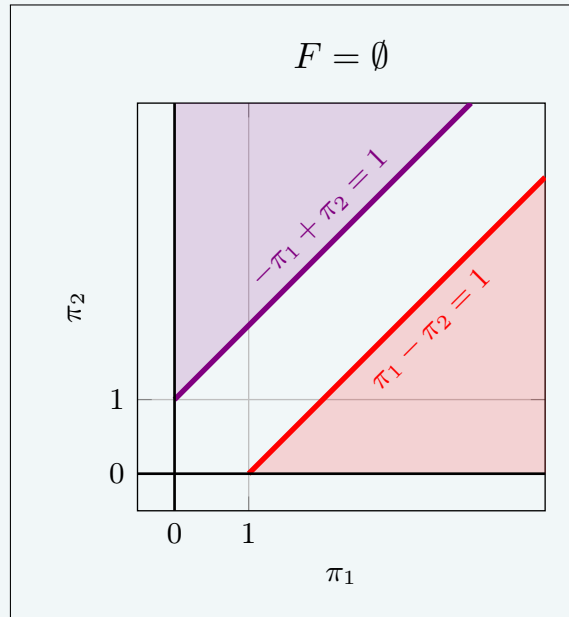
Esempio 9.9: problema primale inammissibile e problema duale inammissibile

Consideriamo la seguente coppia di problemi primale e duale, con $n = 2$ e $m = 2$ (detta [Esempio 9.9](#)):

$$\begin{array}{llllll}
 \max & x_1 & + & x_2 & & \\
 \text{soggetto a} & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & - & x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
 \\
 \min & \pi_1 & - & 2\pi_2 & & \\
 \text{soggetto a} & \pi_1 & - & \pi_2 & \geq & 1 \\
 & - & \pi_1 & + & \pi_2 & \geq 1 \\
 & \pi_1, & & \pi_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il problema primale è **inammissibile**: i due vincoli impongono $x_1 - x_2 \leq 1$ e $x_1 - x_2 \geq 2$. Anche il problema duale è **inammissibile**: sommando i suoi due vincoli otteniamo $0 \geq 2$, che non è mai soddisfatta.





Nella prima figura il problema primale e nella seconda il problema duale: entrambe le regioni ammissibili sono vuote.

Il Teorema 9.6 si può usare per **certificare** l'esito di un problema LP:

1. una soluzione ammissibile del problema duale dimostra che il problema primale non è illimitato;
2. una soluzione ammissibile del problema primale dimostra che il problema duale non è illimitato;
3. una soluzione ammissibile di ciascuno dei due problemi dimostra che entrambi ammettono una soluzione ottima.

9.3 Scarti complementari

- Il seguente teorema, detto degli **scarti complementari**, afferma che una soluzione ammissibile del problema primale (9.1) e una soluzione ammissibile del problema duale (9.2) sono entrambe ottime se e solo se valgono le condizioni degli scarti complementari.

Teorema 9.7: Scarti complementari

Una soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del problema primale (9.1) e una soluzione ammissibile $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ del problema duale (9.2) sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi se e solo se valgono le condizioni seguenti:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \quad \text{oppure} \quad \bar{\pi}_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (9.5a)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{oppure} \quad \bar{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (9.5b)$$

- In (9.5a) e (9.5b), la congiunzione “oppure” è inclusiva, cioè entrambe le condizioni possono valere simultaneamente.

Definizione 9.8: Condizioni degli scarti complementari

Le condizioni (9.5a) e (9.5b) si chiamano **condizioni degli scarti complementari** e si possono riscrivere in modo equivalente come:

$$\bar{\pi}_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j - b_i \right) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (9.6a)$$

$$\bar{x}_j \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \right) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (9.6b)$$

- Gli scarti complementari implicano che

due soluzioni ammissibili primale e duale sono ottime



valgono le condizioni degli scarti complementari

quindi “valgono le condizioni degli scarti complementari” è condizione necessaria e sufficiente per “due soluzioni ammissibili primale e duale sono ottime” e viceversa.

Definizione 9.9: vincoli attivi

Un vincolo primale o duale si dice:

1. **attivo** se è soddisfatto all’uguaglianza da una data soluzione (non c’è scarto);
2. **non attivo** se non è soddisfatto all’uguaglianza da una data soluzione (c’è uno scarto).

- La condizione (9.5a) (o, equivalentemente, (9.6a)) implica che se un vincolo primale non è attivo, cioè c’è uno scarto, la corrispondente variabile duale deve essere nulla.
- La condizione (9.5b) (o, equivalentemente, (9.6b)) implica che se un vincolo duale non è attivo, cioè c’è uno scarto, la corrispondente variabile primale deve essere nulla.

Esempio 9.10: Scarti complementari

Consideriamo la seguente coppia di problemi LP primale e duale:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad 5 \ x_1 + 2 \ x_2 \\
 & \text{soggetto a} \quad - \ x_1 + 3 \ x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 2 \ x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad \quad 3 \ x_1 - 2 \ x_2 \leq 8 \\
 & \quad \quad \quad x_1, \quad \quad \quad x_2 \geq 0 \\
 \\
 & \min \quad 12 \ \pi_1 + 12 \ \pi_2 + 8 \ \pi_3 \\
 & \text{soggetto a} \quad - \ \pi_1 + \quad \quad \pi_2 + 3 \ \pi_3 \geq 5 \\
 & \quad \quad \quad 3 \ \pi_1 + 2 \ \pi_2 - 2 \ \pi_3 \geq 2 \\
 & \quad \quad \quad \pi_1, \quad \quad \quad \pi_2, \quad \quad \quad \pi_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima primale è

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}.$$

Scarti primali:

$$\begin{aligned}
 12 - (-\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2) &= 12 - \left(-5 + 3 \cdot \frac{7}{2}\right) = \frac{13}{2} > 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_1 = 0, \\
 12 - (\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2) &= 12 - (5 + 7) = 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_2 \text{ può essere } > 0, \\
 8 - (3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2) &= 8 - (15 - 7) = 0 \Rightarrow \tilde{\pi}_3 \text{ può essere } > 0.
 \end{aligned}$$

Il primo vincolo primale non è attivo, cioè c'è uno scarto. Quindi la variabile duale corrispondente $\tilde{\pi}_1$ deve essere nulla.

Il secondo e il terzo vincolo primale sono attivi, cioè non ci sono scarti. Quindi le variabili duali corrispondenti $\tilde{\pi}_2$ e $\tilde{\pi}_3$ possono essere positive.

Una soluzione ottima duale è

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 2, \quad \tilde{\pi}_3 = 1.$$

Scarti duali:

$$\begin{aligned}
 (-\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + 3\tilde{\pi}_3) - 5 &= (-0 + 2 + 3 \cdot 1) - 5 = 0 \Rightarrow \tilde{x}_1 \text{ può essere } > 0, \\
 (3\tilde{\pi}_1 + 2\tilde{\pi}_2 - 2\tilde{\pi}_3) - 2 &= (3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) - 2 = 0 \Rightarrow \tilde{x}_2 \text{ può essere } > 0.
 \end{aligned}$$

Tutti i vincoli duali sono attivi, cioè non ci sono scarti. Quindi le variabili primali corrispondenti $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ possono essere positive.

- Dal punto di vista geometrico, le condizioni degli scarti complementari significano che, data una soluzione ottima $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ di un problema primale (9.1) e una soluzione ottima $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_m)$ del suo problema duale (9.2), abbiamo due coppie di vettori perpendicolari:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\pi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\pi}_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\tilde{x}_j - b_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}\tilde{x}_j - b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}\tilde{x}_j - b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 - \sum_{i=1}^m a_{i1}\tilde{\pi}_i \\ c_2 - \sum_{i=1}^m a_{i2}\tilde{\pi}_i \\ \vdots \\ c_n - \sum_{i=1}^m a_{in}\tilde{\pi}_i \end{pmatrix}$$

Esempio 9.11: Scarti complementari

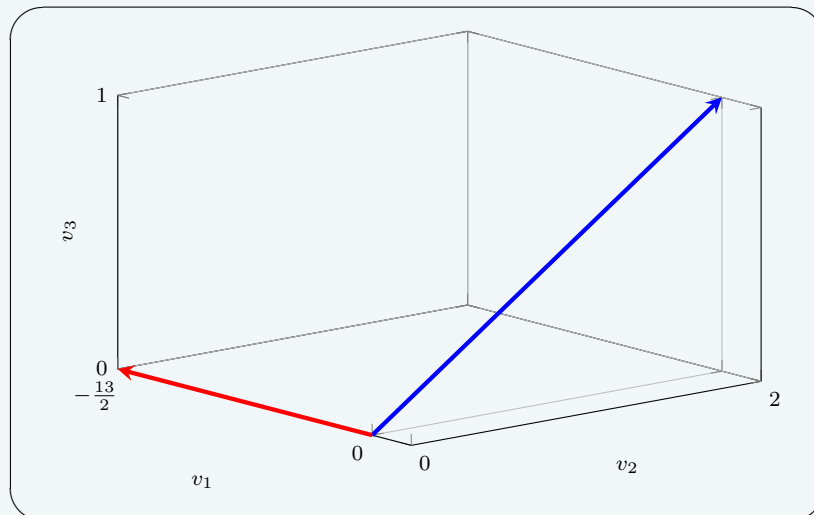
Consideriamo di nuovo la coppia di problemi LP primale e duale precedente e le loro soluzioni ottime.

La prima coppia di vettori perpendicolari (caso non nullo) è

$$\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\pi}_2 \\ \tilde{\pi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - 12 \\ \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 12 \\ 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica dell'ortogonalità:

$$(0 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \left(-\frac{13}{2}\right) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$



I due vettori sono disegnati nello stesso spazio $\mathbb{R}^3$ con coordinate generiche (v_1, v_2, v_3) : in blu la soluzione duale ottima $\tilde{\pi}$, in rosso il vettore dei valori dei vincoli primali meno i termini noti, $(-\frac{13}{2}, 0, 0)$.

La seconda coppia di vettori perpendicolari è

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 5 - (-\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + 3\tilde{\pi}_3) \\ 2 - (3\tilde{\pi}_1 + 2\tilde{\pi}_2 - 2\tilde{\pi}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - (-0 + 2 + 3 \cdot 1) \\ 2 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica dell'ortogonalità:

$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Dimostrazione. Poiché $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ è una soluzione ammissibile del problema primale (9.1) e $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ è una soluzione ammissibile del problema duale (9.2), con lo stesso argomento usato nella dimostrazione della dualità debole abbiamo

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \right) \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{\pi}_i \leq \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i. \quad (\text{A})$$

La prima disuguaglianza di (A) si può riscrivere come

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i - c_j \right) \bar{x}_j,$$

e, per l'ammissibilità duale e l'ammissibilità primale, per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ abbiamo

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i - c_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{x}_j \geq 0.$$

Una somma di termini non negativi è uguale a zero se e solo se ogni termine è zero. Pertanto, nella prima disuguaglianza di (A) vale l'uguaglianza se e solo se

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{oppure} \quad \bar{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

cioè se e solo se vale la condizione (9.5b).

Analogamente, la seconda disuguaglianza di (A) si può riscrivere come

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{\pi}_i,$$

e, per l'ammissibilità primale e l'ammissibilità duale, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ abbiamo

$$b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{\pi}_i \geq 0.$$

Una somma di termini non negativi è uguale a zero se e solo se ogni termine è zero. Pertanto, nella seconda disuguaglianza di (A) vale l'uguaglianza se e solo se

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \quad \text{oppure} \quad \bar{\pi}_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

cioè se e solo se vale la condizione (9.5a).

Supponiamo prima che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ e $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ siano soluzioni ottime dei rispettivi problemi. Allora, per la dualità forte,

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i.$$

Pertanto, entrambe le disuguaglianze in (A) devono valere con uguaglianza, e quindi valgono le condizioni (9.5a) e (9.5b).

Viceversa, supponiamo che valgano le condizioni (9.5a) e (9.5b). Allora entrambe le disuguaglianze in (A) valgono con uguaglianza, e quindi

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \bar{\pi}_i.$$

Poiché $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ e $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ sono soluzioni ammissibili, la dualità debole implica che sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi. $\square$

- Il seguente teorema (derivato dal precedente) permette di verificare se una soluzione ammissibile di un problema primale (9.1) è ottima costruendo (se possibile) una soluzione ammissibile del problema duale (9.2) con lo stesso valore della funzione obiettivo, cioè è un test di ottimalità.

Corollario 9.10

Una soluzione ammissibile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ del problema primale (9.1) è ottima se e solo se esiste $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ tale che:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (9.7a)$$

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (9.7b)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (9.7c)$$

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (9.7d)$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ sia una soluzione ottima del problema (9.1).

Per la dualità forte esiste una soluzione ottima $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ del problema duale (9.2). Poiché $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ è ammissibile per il problema duale, soddisfa (9.7c) e (9.7d). Inoltre, poiché le soluzioni primale e duale sono entrambe ottime, per il teorema degli scarti complementari soddisfano (9.7a) e (9.7b).

Quindi esiste $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ che soddisfa (9.7a)–(9.7d).

Viceversa, supponiamo che esista $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ che soddisfa (9.7a)–(9.7d).

Poiché $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ è ammissibile per il problema primale per ipotesi, e (9.7c)–(9.7d) implicano che $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_m)$ è ammissibile per il problema duale, entrambi i vettori sono ammissibili per i rispettivi problemi. Inoltre, (9.7a) implica la condizione (9.5b). Infine, l'ammissibilità primale insieme a (9.7b) implica la condizione (9.5a).

Pertanto le soluzioni ammissibili primale e duale soddisfano le condizioni degli scarti complementari e, per il teorema degli scarti complementari, sono ottime per i rispettivi problemi. $\square$

Esempio 9.12: Scarti complementari

Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}$$

del problema LP dell'Esempio 9.1 è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$-\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 3\bar{\pi}_3 = 5 \quad (\bar{x}_1 = 5 > 0)$$

$$3\bar{\pi}_1 + 2\bar{\pi}_2 - 2\bar{\pi}_3 = 2 \quad (\bar{x}_2 = \frac{7}{2} > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$-1 \cdot 5 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{11}{2} < 12 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_1 = 0$$

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 12 \not< 12$$

$$3 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 8 \not< 8$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 2, \quad \bar{\pi}_3 = 1$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$-1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5 \geq 5$$

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 \geq 2$$

4. Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

e poiché

$$\bar{\pi}_1 = 0 \geq 0, \quad \bar{\pi}_2 = 2 \geq 0, \quad \bar{\pi}_3 = 1 \geq 0$$

la soluzione è ottima.

Esempio 9.13: Scarti complementari

Verifichiamo se la soluzione ammissibile

$$\bar{x}_1 = \frac{12}{5}, \quad \bar{x}_2 = \frac{24}{5}$$

del problema LP dell'Esempio 9.1 è ottima.

1. Poiché

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i = c_j \quad \text{se} \quad \bar{x}_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

costruiamo il seguente sistema di due equazioni lineari in tre variabili:

$$- \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + 3 \bar{\pi}_3 = 5 \quad (\bar{x}_1 = \frac{12}{5} > 0)$$

$$3 \bar{\pi}_1 + 2 \bar{\pi}_2 - 2 \bar{\pi}_3 = 2 \quad (\bar{x}_2 = \frac{24}{5} > 0)$$

2. Poiché

$$\bar{\pi}_i = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

calcoliamo:

$$-1 \cdot \frac{12}{5} + 3 \cdot \frac{24}{5} = 12 \not< 12$$

$$1 \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot \frac{24}{5} = 12 \not< 12$$

$$3 \cdot \frac{12}{5} - 2 \cdot \frac{24}{5} = -\frac{12}{5} < 8 \quad \text{quindi} \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

Risolviamo quindi il sistema precedente di due equazioni in due variabili e otteniamo:

$$\bar{\pi}_1 = -\frac{8}{5}, \quad \bar{\pi}_2 = \frac{17}{5}, \quad \bar{\pi}_3 = 0$$

3. Dobbiamo verificare

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{\pi}_i \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi calcoliamo:

$$-1 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) + 1 \cdot \frac{17}{5} + 3 \cdot 0 = 5 \geq 5$$

$$3 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) + 2 \cdot \frac{17}{5} - 2 \cdot 0 = 2 \geq 2$$

4. Dobbiamo verificare

$$\bar{\pi}_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

ma poiché

$$\bar{\pi}_1 = -\frac{8}{5} < 0$$

la soluzione non è ottima.

9.3.1 Problema duale in notazione matriciale

- I dati di un problema LP in forma canonica di massimo con n variabili e m vincoli di minore o uguale si possono rappresentare in notazione matriciale con un **vettore dei costi** $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ di n righe, con un **vettore dei termini noti** $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ di m righe e con una **matrice dei vincoli** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di m righe e n colonne:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Le n variabili primali si possono rappresentare con un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ di n righe che contiene le n variabili, e le m variabili duali con un vettore colonna $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ di m righe che contiene le m variabili:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix}$$

- In notazione matriciale, un problema primale in forma canonica di massimo e il suo problema duale si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}' \mathbf{x} \\ \text{soggetto a} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}' \boldsymbol{\pi} \\ \text{soggetto a} \quad & \mathbf{A}' \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{c}, \\ & \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Esempio 9.14: notazione matriciale

Per il problema LP dell'Esempio 9.1, con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli, i dati sono:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

e le variabili sono:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$$

9.4 Problema duale di un problema LP generico

Definizione 9.11: problema duale di un problema LP generico

Consideriamo il seguente problema LP generico:

$$\max \sum_{j \in N} c_j x_j \tag{9.8a}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in M_{\leq}, \tag{9.8b}$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall i \in M_{=}, \tag{9.8c}$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \forall i \in M_{\geq}, \tag{9.8d}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in N_{\geq 0}, \quad (9.8e)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in N_{\geq 0}, \quad (9.8f)$$

$$x_j \leq 0, \quad \forall j \in N_{\leq 0}, \quad (9.8g)$$

dove

1. $N_{\geq 0}$, $N_{\geq 0}$ e $N_{\leq 0}$ sono i sottoinsiemi disgiunti degli indici delle variabili rispettivamente non negative, libere e non positive, e $N = N_{\geq 0} \cup N_{\geq 0} \cup N_{\leq 0}$;
2. $M_{\leq}$, $M_{=}$ e $M_{\geq}$ sono i sottoinsiemi disgiunti degli indici dei vincoli rispettivamente di minore o uguale, di uguaglianza e di maggiore o uguale, e $M = M_{\leq} \cup M_{=} \cup M_{\geq}$.

il **problema duale** $D(LP)$ del problema LP (9.8) è il seguente problema LP:

$$\min \sum_{i \in M} b_i \pi_i \quad (9.9a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{i \in M} a_{ij} \pi_i \geq c_j, \quad \forall j \in N_{\geq 0}, \quad (9.9b)$$

$$\sum_{i \in M} a_{ij} \pi_i = c_j, \quad \forall j \in N_{\geq 0}, \quad (9.9c)$$

$$\sum_{i \in M} a_{ij} \pi_i \leq c_j, \quad \forall j \in N_{\leq 0}, \quad (9.9d)$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in M_{\leq}, \quad (9.9e)$$

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i \in M_{=}, \quad (9.9f)$$

$$\pi_i \leq 0, \quad \forall i \in M_{\geq}. \quad (9.9g)$$

Esempio 9.15: problema duale di un problema LP generico

Consideriamo il seguente problema LP generico:

$$\begin{array}{rcll} \max & 4 & x_1 & + & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 3 & x_4 \\ \text{soggetto a} & & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3 & x_4 & \leq & 1 \\ & 5 & x_1 & + & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 8 & x_4 & = & 55 \\ & - & x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & - & 5 & x_4 & \geq & 3 \\ & & x_1 & + & 3 & x_2 & - & 2 & x_3 & + & 2 & x_4 & \geq & 6 \\ & & x_1, & & x_2 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & & x_3 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & & & & & x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

Per quanto riguarda gli indici delle variabili, abbiamo:

$$N_{\geq 0} = \{1, 2\}, \quad N_{\geq 0} = \{3\}, \quad N_{\leq 0} = \{4\}, \quad N = \{1, 2, 3, 4\}$$

Per quanto riguarda gli indici dei vincoli, abbiamo:

$$M_{\leq} = \{1\}, \quad M_{=} = \{2\}, \quad M_{\geq} = \{3, 4\}, \quad M = \{1, 2, 3, 4\}$$

Il problema duale $D(LP)$ del problema LP è:

$$\begin{array}{llllllll} \min & \pi_1 & + & 55 & \pi_2 & + & 3 & \pi_3 & + & 6 & \pi_4 \\ \text{soggetto a} & \pi_1 & + & 5 & \pi_2 & - & & \pi_3 & + & & \pi_4 & \geq & 4 \\ & - & \pi_1 & + & & \pi_2 & + & 2 & \pi_3 & + & 3 & \pi_4 & \geq & 1 \\ & - & \pi_1 & + & 3 & \pi_2 & + & 3 & \pi_3 & - & 2 & \pi_4 & = & 5 \\ & 3 & \pi_1 & + & 8 & \pi_2 & - & 5 & \pi_3 & + & 2 & \pi_4 & \leq & 3 \\ & & \pi_1 & & & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & & \pi_2 & & & & & & & \leq & 0 \\ & & & & & & \pi_3 & & & & & \leq & 0 \\ & & & & & & & & \pi_4 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Poiché da un problema LP in forma generica di massimo si può ottenere un problema LP equivalente in forma canonica di massimo, la dualità debole, la dualità forte e il teorema degli scarti complementari valgono anche nel caso generico.

Algoritmo del simplesso duale

10.1 Coppia di problemi primale e duale

- Consideriamo la forma standard di massimo del problema duale, ottenuta aggiungendo n variabili di surplus non negative a un problema LP duale con m variabili non negative e n vincoli lineari di maggiore o uguale:

$$\max \quad -\mathbf{b}' \boldsymbol{\pi} \quad (10.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A}' \boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}, \quad (10.1b)$$

$$\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}. \quad (10.1c)$$

Le n variabili di surplus non negative si aggiungono *prima* delle m variabili duali, in modo da traslare di n gli indici delle variabili duali e ottenere la seguente corrispondenza tra indici:

- le n variabili di surplus $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ del problema duale si possono associare alle n variabili primali $x_1, \dots, x_n$;
- le m variabili duali $\pi_{n+1}, \pi_{n+2}, \dots, \pi_{n+m}$ del problema duale si possono associare alle m variabili di scarto $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ del problema primale.

I dati del problema duale sono:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \\ \vdots \\ b_{n+m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & a'_{1(n+1)} & a'_{1(n+2)} & \cdots & a'_{1(n+m)} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & a'_{2(n+1)} & a'_{2(n+2)} & \cdots & a'_{2(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & a'_{n(n+1)} & a'_{n(n+2)} & \cdots & a'_{n(n+m)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Le $n + m$ variabili duali non negative si possono scrivere come un vettore colonna $\boldsymbol{\pi}$ di $n + m$ righe.

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \\ \pi_{n+1} \\ \pi_{n+2} \\ \vdots \\ \pi_{n+m} \end{pmatrix}$$

Poiché il problema duale (10.1) si ottiene aggiungendo n variabili di surplus a un problema LP duale con n vincoli di maggiore o uguale, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

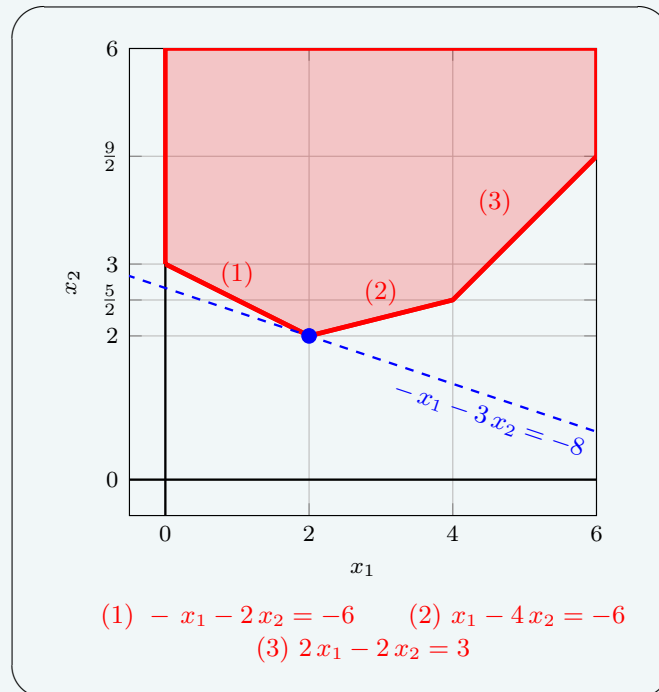
che è l'opposta della matrice identità $-\mathbf{I}$ di ordine n . Inoltre, per lo stesso motivo, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 10.1: coppia di problemi primale e duale

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & - & x_1 & - & 3 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & -6 \\ & & x_1 & - & 4 & x_2 & \leq & -6 \\ & & 2 & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

e il valore ottimo è:

$$z(LP) = -8$$

Chiamiamo questo problema LP [Esempio 10.1](#).

Esempio 10.2: coppia di problemi primale e duale

Aggiungendo $m = 3$ variabili di scarto, la forma standard del problema LP dell'[Esempio 10.1](#) con $n + m = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli è la seguente:

$$\begin{array}{rclclcl}
 \max & - & x_1 & - & 3 & x_2 & & & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & - & 2 & x_2 & + & x_3 & & = & -6 \\
 & & x_1 & - & 4 & x_2 & & + & x_4 & & = & -6 \\
 & & 2 & x_1 & - & 2 & x_2 & & + & x_5 & = & 3 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Il problema duale del problema LP dell'[Esempio 10.1](#) è il seguente problema LP in forma canonica di minimo con $m = 3$ variabili e $n = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \min \quad & -6 \pi_1 - 6 \pi_2 + 3 \pi_3 \\ \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 + \pi_2 + 2 \pi_3 \geq -1 \\ & -2 \pi_1 - 4 \pi_2 - 2 \pi_3 \geq -3 \\ & \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Traslando di $n = 2$ gli indici delle variabili duali e aggiungendo $n = 2$ variabili di surplus, otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6 \pi_3 + 6 \pi_4 - 3 \pi_5 \\ \text{soggetto a} \quad & -\pi_1 - \pi_3 + \pi_4 + 2 \pi_5 = -1 \\ & -\pi_2 - 2 \pi_3 - 4 \pi_4 - 2 \pi_5 = -3 \\ & \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5 \geq 0 \end{aligned}$$

In questo problema duale in forma standard, abbiamo:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(D(LP))$ di questo problema LP è: $\tilde{\pi}_1 = 0$, $\tilde{\pi}_2 = 0$, $\tilde{\pi}_3 = \frac{7}{6}$, $\tilde{\pi}_4 = \frac{1}{6}$, $\tilde{\pi}_5 = 0$.

10.2 Basi primali e duali ammissibili

- L'algoritmo del simplesso parte da una base associata a una **soluzione di base ammissibile**, cioè da una base con $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$, ed esegue operazioni di pivot finché tutti i costi ridotti diventano non positivi. Durante tutta l'esecuzione, la soluzione di base è sempre ammissibile per il problema primale e il valore obiettivo non diminuisce mai.
- L'**algoritmo del simplesso duale** fa il contrario: parte da una base i cui costi ridotti sono tutti non positivi, ed esegue operazioni di pivot finché la soluzione di base diventa ammissibile.

Definizione 10.1: basi primali ammissibili e duali ammissibili

Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP in forma standard di massimo e il dizionario associato, la base si chiama:

1. **primale ammissibile** se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$;
2. **duale ammissibile** se $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$.

Se una base è sia primale ammissibile sia duale ammissibile, cioè

$$\bar{b} \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{c} \leq 0,$$

allora la soluzione di base ammissibile associata è una **soluzione ottima**. Viceversa, se il problema LP ha una soluzione ottima, allora esiste una base che è sia primale ammissibile sia duale ammissibile. Una soluzione di base ottima degenerare può essere associata anche a una base che non è duale ammissibile, cioè con qualche $\bar{c}_j > 0$.

10.2.1 La soluzione duale associata a una base

- Il nome “duale ammissibile” si giustifica come segue. Data una base A_B del problema LP in forma standard di massimo, le associamo il vettore riga di m componenti

$$\pi = c'_B A_B^{-1}, \quad (10.2)$$

che è esattamente il vettore che compare nella definizione dei costi ridotti e del valore obiettivo del dizionario:

$$\bar{c}_j = c_j - \underbrace{c'_B A_B^{-1}}_{=\pi} A_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}, \quad \text{e} \quad \bar{z} = \underbrace{c'_B A_B^{-1}}_{=\pi} b = \pi b.$$

- Le m componenti di π sono i valori delle m variabili duali originali, cioè delle variabili $\pi_{n+1}, \pi_{n+2}, \dots, \pi_{n+m}$ del problema duale (10.1). Mostriamo ora che π è una soluzione ammissibile del problema duale se e solo se la base è duale ammissibile.
- **I costi ridotti delle variabili in base sono nulli.** Infatti, per definizione di π abbiamo

$$\pi A_B = c'_B \underbrace{A_B^{-1} A_B}_{=I} = c'_B,$$

cioè $\pi A_i = c_i$ per ogni $i \in \mathcal{B}$, e quindi $\bar{c}_i = 0$ per ogni $i \in \mathcal{B}$.

- **I costi ridotti delle variabili fuori base sono gli scarti duali.** Per ogni $j \in \mathcal{N}$ abbiamo

$$\bar{c}_j \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_j - \pi A_j \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi A_j \geq c_j.$$

Mettendo insieme i due punti precedenti, la condizione $\bar{c} \leq 0$ equivale a

$$\pi A_j \geq c_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n+m\},$$

che è proprio l'insieme dei vincoli del problema duale scritti per tutte le colonne del problema LP in forma standard di massimo.

- **La non negatività di π è contenuta in queste disuguaglianze.** Le ultime m colonne del problema LP in forma standard di massimo sono le colonne delle variabili di scarto, cioè $A_{n+i} = e_i$ con $c_{n+i} = 0$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Di conseguenza, la disuguaglianza scritta per la colonna $n+i$ diventa

$$\pi e_i \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_i \geq 0.$$

Una base $\mathbf{A}_B$ è **duale ammissibile** se e solo se il vettore associato

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1}$$

è una **soluzione ammissibile del problema duale**. In questo caso, per il teorema di dualità debole, il valore

$$\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b}$$

è un **upper bound** sul valore ottimo del problema LP.

- Questa è l'esatta immagine speculare di ciò che accade nell'algoritmo del simplesso: lì, ogni base visitata è primale ammissibile e quindi $\bar{z}$ è il valore di una soluzione ammissibile del problema LP, cioè un lower bound sul valore ottimo, e l'algoritmo lo aumenta finché non diventa anche un upper bound. Qui, ogni base visitata è duale ammissibile e quindi $\bar{z}$ è un upper bound sul valore ottimo, e l'algoritmo lo diminuisce finché non diventa anche un lower bound.
- Di conseguenza, i due algoritmi si possono descrivere come segue:

	algoritmo del simplesso	algoritmo del simplesso duale
parte da una base che è	primale ammissibile	duale ammissibile
mantiene a ogni iterazione	l'ammissibilità primale	l'ammissibilità duale
termina quando la base è anche	duale ammissibile	primale ammissibile
oppure quando rileva che il problema è	illimitato	inammissibile
il valore $\bar{z}$ è	un lower bound	un upper bound
e lungo l'esecuzione è	non decrescente	non crescente

Esempio 10.3: le soluzioni duali associate a tre basi

Per il problema LP dell'Esempio 10.1 in forma standard di massimo, consideriamo la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ delle variabili di scarto. Abbiamo:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_B^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}'_B = (0 \ 0 \ 0) \quad \implies \quad \boldsymbol{\pi} = (0 \ 0 \ 0)$$

che è una soluzione ammissibile del problema duale, e $\bar{z} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = 0$ è un upper bound sul valore ottimo. Coerentemente, i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} = (-1 \ -3)$ sono tutti non positivi.

Dopo la prima operazione di pivot duale otteniamo $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, con

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}'_B = (-1 \ 0 \ 0),$$

e quindi

$$\pi = c'_B A_B^{-1} = (1 \ 0 \ 0) \quad \text{e} \quad \bar{z} = \pi b = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -6.$$

Dopo la seconda operazione di pivot duale otteniamo $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, con

$$\pi = \left(\frac{7}{6} \ \frac{1}{6} \ 0\right) \quad \text{e} \quad \bar{z} = \pi b = -8.$$

I tre upper bound $0 \rightarrow -6 \rightarrow -8$ sono non crescenti, e l'ultimo è raggiunto da una soluzione primale ammissibile: è quindi il valore ottimo.

10.3 Determinare una soluzione di base duale ammissibile iniziale

- L'algoritmo del simplesso duale richiede in input una **base duale ammissibile**, cioè una base il cui dizionario soddisfa $\bar{c} \leq 0$. È l'immagine speculare del requisito dell'algoritmo del simplesso, che richiede in input una base primale ammissibile e, quando non ne è immediatamente disponibile alcuna, ricorre alla Fase 0.
- In questa sezione descriviamo prima le situazioni in cui una base duale ammissibile è disponibile **gratuitamente**, cioè senza alcun calcolo, e poi cosa si può fare nel caso generale.

10.3.1 Quando una base duale ammissibile è disponibile gratuitamente

- **Primo caso: un vettore dei costi non positivo.** Per un problema LP in forma canonica di massimo con $c \leq 0$, la partizione delle variabili di scarto è duale ammissibile. Infatti, con

$$\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \dots, n+m\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$$

abbiamo $A_B = I$ e $c_B = 0$, e quindi

$$\pi = c'_B A_B^{-1} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{c}' = c'_N - \underbrace{c'_B A_B^{-1}}_{=0} A_N = c' \leq 0.$$

Per un problema LP in forma canonica di massimo, se

$$c \leq 0 \quad \text{e} \quad b_i < 0 \text{ per qualche } i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

allora la partizione $\mathcal{B} = \{n+1, \dots, n+m\}$ e $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ delle variabili di scarto è **duale ammissibile ma non primale ammissibile**: l'algoritmo del simplesso duale si può applicare direttamente, mentre l'algoritmo del simplesso richiederebbe la Fase 0.

- **Secondo caso: riottimizzazione dopo una modifica del vettore dei termini noti.** Supponiamo che sia nota una base ottima $\mathbf{A}_B$ di un problema LP e che il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$ sia sostituito da un nuovo vettore $\hat{\mathbf{b}}$. I costi ridotti

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_j, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

non dipendono da $\mathbf{b}$, e quindi restano tutti non positivi: la base **resta duale ammissibile**. Al contrario, i valori delle variabili in base

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \hat{\mathbf{b}}$$

cambiano e possono diventare negativi: la base può perdere l'ammissibilità primale. L'algoritmo del semplice duale può allora partire dalla vecchia base ottima e tipicamente ripristina l'ottimalità in pochissime iterazioni.

- **Terzo caso: aggiunta di un vincolo a una base ottima.** Supponiamo che sia nota una base ottima $\mathbf{A}_B$ di un problema LP, con soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$, e che un nuovo vincolo

$$\mathbf{a}' \mathbf{x} \leq \beta$$

sia aggiunto al problema, insieme alla sua variabile di scarto x_{n+m+1} . Consideriamo la nuova partizione

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{n+m+1\} \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{N}} = \mathcal{N}.$$

- La nuova matrice di base e la sua inversa sono

$$\mathbf{A}_{\hat{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}'_B & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_{\hat{\mathcal{B}}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}'_B \mathbf{A}_B^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\mathbf{a}'_B$ raccoglie le componenti di $\mathbf{a}'$ associate alle variabili in base. In particolare, $\mathbf{A}_{\hat{\mathcal{B}}}$ è invertibile e quindi è una base.

- Poiché la nuova variabile di scarto ha coefficiente nullo nella funzione obiettivo, abbiamo $\mathbf{c}'_{\hat{\mathcal{B}}} = (\mathbf{c}'_B \quad 0)$ e quindi

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{c}'_{\hat{\mathcal{B}}} \mathbf{A}_{\hat{\mathcal{B}}}^{-1} = (\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \quad 0) = (\boldsymbol{\pi} \quad 0),$$

cioè la variabile duale del nuovo vincolo vale zero e tutte le altre variabili duali restano invariate. Di conseguenza, per ogni $j \in \hat{\mathcal{N}}$,

$$\hat{c}_j = c_j - (\boldsymbol{\pi} \quad 0) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_j \\ a_j \end{pmatrix} = c_j - \boldsymbol{\pi} \mathbf{A}_j = \bar{c}_j \leq 0:$$

i costi ridotti sono invariati e la nuova base è **duale ammissibile**.

- Il valore della nuova variabile in base è

$$\bar{b}_{n+m+1} = \beta - \mathbf{a}' \tilde{\mathbf{x}},$$

che è negativo se e solo se la vecchia soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ viola il nuovo vincolo. In questo caso l'algoritmo del semplice duale parte da $\hat{\mathcal{B}}$.

- **Quarto caso: branch-and-bound e piani di taglio.** Il terzo caso è esattamente ciò che accade quando si risolve un problema di programmazione lineare intera: a ogni nodo dell'albero di branch-and-bound un vincolo come

$$x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor \quad \text{oppure} \quad x_j \geq \lceil \tilde{x}_j \rceil$$

viene aggiunto al rilassamento LP risolto nel nodo padre, e lo stesso accade ogni volta che si aggiunge un piano di taglio. La base ottima del nodo padre è duale ammissibile per il nodo figlio, e l'algoritmo del simplesso duale la riottimizza con poche operazioni di pivot invece di risolvere il nuovo problema LP da zero. È uno dei motivi principali per cui l'algoritmo del simplesso duale è tra gli algoritmi più usati nei moderni solutori LP, e quello usato tipicamente per riottimizzare all'interno del branch-and-bound.

Esempio 10.4: riottimizzazione dopo una modifica di b

Consideriamo il problema LP dell'Esempio 10.1 e la sua base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, con il dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 = 3 - x_3 + x_4 \\ z = -8 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \end{cases}$$

Supponiamo ora che il termine noto del primo vincolo passi da -6 a -12 , cioè che

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

I costi ridotti non dipendono dal vettore dei termini noti, e quindi $\bar{\mathbf{c}}' = (-\frac{7}{6} \quad -\frac{1}{6})$ è invariato e la base resta **duale ammissibile**. I valori delle variabili in base, invece, diventano

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

e il dizionario diventa:

$$\begin{cases} x_1 = 6 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = 3 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 = -3 - x_3 + x_4 \\ z = -15 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \end{cases}$$

La base non è più primale ammissibile, poiché $\bar{b}_5 = -3 < 0$. Eseguiamo quindi un'operazione di pivot duale con riga pivot x_5 . I valori della sua riga sono $\bar{a}_{53} = 1 \geq 0$ e $\bar{a}_{54} = -1 < 0$, e quindi x_4 è l'unico candidato ed è la colonna pivot, con

$$s_m = \frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{54}} = \frac{-\frac{1}{6}}{-1} = \frac{1}{6}.$$

Aggiornando il dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = 3 + x_3 + x_5 \\ z = -\frac{31}{2} - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \end{cases}$$

Ora $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$: dopo una sola operazione di pivot duale la nuova soluzione ottima è

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z(LP) = -\frac{31}{2}.$$

Esempio 10.5: aggiunta di un vincolo a una base ottima

Consideriamo di nuovo il problema LP dell'Esempio 10.1 con la sua base ottima $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e la sua soluzione ottima $\tilde{x}_1 = 2$ e $\tilde{x}_2 = 2$, e aggiungiamo il nuovo vincolo

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

insieme alla sua variabile di scarto x_6 . La nuova base è $\hat{\mathcal{B}} = \{1, 2, 5, 6\}$ e $\hat{\mathcal{N}} = \{3, 4\}$.

I costi ridotti sono invariati, e quindi la nuova base è duale ammissibile. Il valore della nuova variabile in base è

$$\bar{b}_6 = 3 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = 3 - 4 = -1 < 0,$$

poiché la vecchia soluzione ottima viola il nuovo vincolo. L'equazione di x_6 nel nuovo dizionario si ottiene sostituendo le equazioni di x_1 e x_2 :

$$x_6 = 3 - x_1 - x_2 = 3 - \left(2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4\right) - \left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4\right) = -1 - \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4,$$

e il nuovo dizionario è:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & = & 2 & + & \frac{2}{3} x_3 & - & \frac{1}{3} x_4 \\ x_2 & = & 2 & + & \frac{1}{6} x_3 & + & \frac{1}{6} x_4 \\ x_5 & = & 3 & - & x_3 & + & x_4 \\ x_6 & = & -1 & - & \frac{5}{6} x_3 & + & \frac{1}{6} x_4 \\ z & = & -8 & - & \frac{7}{6} x_3 & - & \frac{1}{6} x_4 \end{array} \right.$$

Eseguiamo un'operazione di pivot duale con riga pivot x_6 . I valori della sua riga sono $\bar{a}_{63} = \frac{5}{6} \geq 0$ e $\bar{a}_{64} = -\frac{1}{6} < 0$, e quindi x_4 è la colonna pivot, con

$$s_m = \frac{\bar{c}_4}{\bar{a}_{64}} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = 1.$$

Aggiornando il dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$, otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & = & 0 & - & x_3 & - & 2x_6 \\ x_2 & = & 3 & + & x_3 & + & x_6 \\ x_4 & = & 6 & + & 5x_3 & + & 6x_6 \\ x_5 & = & 9 & + & 4x_3 & + & 6x_6 \\ z & = & -9 & - & 2x_3 & - & x_6 \end{array} \right.$$

Di nuovo una sola operazione di pivot duale ripristina l'ottimalità, e la nuova soluzione ottima è

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z(LP) = -9.$$

Il nuovo valore ottimo -9 non è maggiore del vecchio -8 , come deve essere, poiché aggiungere un vincolo a un problema di massimo può solo ridurre il valore ottimo.

10.3.2 Il caso generale

- Quando né $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ né $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la partizione delle variabili di scarto non è né primale ammissibile né duale ammissibile, e nessuna base è disponibile gratuitamente. Oltre alla Fase 0, l'algoritmo del simplesso duale offre la seguente alternativa.

Determinare una base primale ammissibile con l'algoritmo del simplesso duale.

- Sostituire il vettore dei costi $\mathbf{c}$ con un qualsiasi vettore $\hat{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$, per esempio $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ oppure $\hat{c}_j = \min\{c_j, 0\}$. La regione ammissibile è invariata.
- La partizione delle variabili di scarto è duale ammissibile per il problema modificato. Eseguire su di essa l'algoritmo del simplesso duale, con la regola dell'indice minimo (regola di Bland) della Sezione 10.4.3.
- Se termina con il certificato di inammissibilità, il problema modificato è inammissibile e quindi anche il problema originale è inammissibile, poiché hanno la stessa regione ammissibile. **STOP**.
- Altrimenti termina con una base $\mathcal{B}$ che è primale ammissibile per il problema modificato, e quindi anche per il problema originale.
- Ripristinare il vettore originale $\mathbf{c}$, ricalcolare i costi ridotti $\bar{\mathbf{c}}$ e il valore $\bar{z}$ della base $\mathcal{B}$, ed eseguire l'algoritmo del simplesso a partire da essa.

- È una vera alternativa alla Fase 0: svolge esattamente lo stesso ruolo, cioè fornisce una base primale ammissibile iniziale oppure una prova che non ne esiste alcuna, ma lo fa senza introdurre la variabile ausiliaria x_0 e senza risolvere un problema ausiliario.
- Con $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ tutti i costi ridotti sono nulli a ogni iterazione, tutti i rapporti del test dei rapporti sono nulli e la colonna pivot è sempre scelta dal solo criterio di spareggio della regola di Bland, cioè come il candidato con indice minimo. Poiché la regola di Bland impedisce il ciclaggio, la procedura termina.

Esempio 10.6: determinare una base primale ammissibile con l'algoritmo del simplesso duale

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale (detto [Esempio 10.6](#)):

$$\begin{array}{rcllcl} \max & 3 & x_1 & + & x_2 & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 & \leq -2 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 \leq 8 \\ & 2 & x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Qui $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \not\geq \mathbf{0}$: la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ delle variabili di scarto non

è né primale ammissibile né duale ammissibile.

Passo a. Sostituiamo il vettore dei costi con $\hat{c} = \mathbf{0}$. Il dizionario del problema modificato è:

$$\begin{cases} x_3 = -2 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 10 - 2x_1 - x_2 \\ \hat{z} = 0 + 0x_1 + 0x_2 \end{cases}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, e quindi la base è duale ammissibile.

Passo b. La riga pivot è x_3 , poiché $\bar{b}_3 = -2 < 0$. I valori della sua riga sono $\bar{a}_{31} = -1 < 0$ e $\bar{a}_{32} = -1 < 0$, e quindi entrambe le variabili fuori base sono candidate:

$$s_m = \min \left\{ \underbrace{\frac{0}{-1}}_{=0}, \underbrace{\frac{0}{-1}}_{=0} \right\} = 0,$$

e i due rapporti sono uguali. Per la regola di Bland scegliamo l'indice minimo, cioè x_1 è la colonna pivot. Aggiornando il dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 6 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 6 + x_2 - 2x_3 \\ \hat{z} = 0 + 0x_2 + 0x_3 \end{cases}$$

Passo d. Ora $\bar{b} = (2 \ 6 \ 6)' \geq \mathbf{0}$: la base $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ è **primale ammissibile**, sia per il problema modificato sia per quello originale.

Passo e. Ripristiniamo la funzione obiettivo originale e ricalcoliamo la riga della funzione obiettivo sostituendo l'equazione di x_1 :

$$z = 3x_1 + x_2 = 3(2 - x_2 + x_3) + x_2 = 6 - 2x_2 + 3x_3,$$

che fornisce il dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 6 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 6 + x_2 - 2x_3 \\ z = 6 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Il costo ridotto è $\bar{c}_3 = 3 > 0$, e quindi eseguiamo un'operazione di pivot (primale) con colonna pivot x_3 . Troviamo il massimo t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \bar{\mathbf{A}}_3 \geq \mathbf{0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{2 - t \cdot (-1)}_{x_1 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{6 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{6 - t \cdot 2}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} t \geq -2 \\ t \leq 6 \\ t \leq 3 \end{array} \right. \quad \text{quindi} \quad t_m = 3$$

e la riga pivot è x_5 . Aggiornando il dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$, otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 5 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 & = & 3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 & = & 3 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 \\ z & = & 15 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_5 \end{array} \right.$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi: la base è ottima e

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z(LP) = 15.$$

10.4 Operazioni di pivot duali

- Data una base duale ammissibile $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ del problema LP in forma standard di massimo, se nel dizionario associato esiste $r \in \mathcal{B}$ tale che $\bar{b}_r < 0$ (un valore di base negativo), è necessario eseguire un'operazione di pivot duale.
- L'algoritmo del simplesso duale lavora sul dizionario primale, esattamente lo stesso oggetto usato dall'algoritmo del simplesso. Ciò che cambia è l'**ordine** delle due scelte.

Definizione 10.2: operazione di pivot duale

Un'operazione di pivot duale consiste nel determinare una **nuova base duale ammissibile** con lo scopo di ripristinare la non negatività di una variabile in base, scambiando una variabile in base e una variabile fuori base.

- La variabile in base che esce dalla base si chiama **riga pivot**, e si sceglie per prima;
- La variabile fuori base che entra in base si chiama **colonna pivot**, e si sceglie per seconda.

- L'ordine delle due scelte è il contrario di quello dell'algoritmo del simplesso.

10.4.1 Determinare la riga pivot

La riga pivot è una variabile in base con valore negativo, cioè una variabile in base

$$x_r \text{ con } r \in \mathcal{B} \text{ tale che } \bar{b}_r < 0.$$

- La variabile x_r esce dalla base e diventa fuori base, e quindi assume il valore 0: è proprio questo che ne ripristina la non negatività. Se più variabili in base hanno valore negativo, una qualsiasi di esse preserva l'ammissibilità duale. In queste note scegliamo sempre quella con **indice minimo**:

$$r = \min \{ i \in \mathcal{B} : \bar{b}_i < 0 \}.$$

I solutori LP scelgono spesso invece il valore $\bar{b}_r$ più negativo, o criteri più raffinati; la scelta dell'indice minimo fa parte della regola di Bland (Sezione 10.4.3), che garantisce che l'algoritmo termini.

10.4.2 Determinare la colonna pivot

- La colonna pivot si sceglie in modo che l'ammissibilità duale sia preservata, cioè in modo che tutti i costi ridotti restino non positivi dopo l'operazione di pivot duale. Ricaviamo ora la regola.
- L'equazione della riga pivot nel dizionario e l'equazione della funzione obiettivo sono

$$x_r = \bar{b}_r - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{rj} x_j \quad \text{e} \quad z = \bar{z} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j.$$

La prima si può riscrivere come l'identità

$$0 = \bar{b}_r - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{rj} x_j - x_r,$$

che vale per ogni punto che soddisfa i vincoli di uguaglianza. Di conseguenza, per ogni valore $s \in \mathbb{R}$, possiamo sommare s volte questa identità all'equazione della funzione obiettivo senza modificarla:

$$z = \underbrace{\bar{z} + s \bar{b}_r}_{\text{nuovo } \bar{z}} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \underbrace{(\bar{c}_j - s \bar{a}_{rj})}_{\text{nuovo } \bar{c}_j} x_j + \underbrace{(-s)}_{\text{nuovo } \bar{c}_r} x_r. \quad (10.3)$$

- Questi $|\mathcal{N}| + 1$ coefficienti sono i costi ridotti del nuovo dizionario, in cui x_r è diventata fuori base. **Il valore di s si aumenta il più possibile mantenendo allo stesso tempo non positivi tutti i costi ridotti.** In questo modo si determina una nuova base duale ammissibile. Imponendo la non positività di tutti i coefficienti di (10.3), otteniamo:

$$\begin{cases} -s \leq 0 \\ \bar{c}_j - s \bar{a}_{rj} \leq 0, & \forall j \in \mathcal{N} \end{cases} \quad \begin{cases} s \geq 0 \\ s \leq \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}}, & \forall j \in \mathcal{N} \text{ con } \bar{a}_{rj} < 0 \end{cases}$$

dove le disuguaglianze con $\bar{a}_{rj} > 0$ sono soddisfatte per ogni $s \geq 0$, poiché $\bar{c}_j \leq 0$, e quelle con $\bar{a}_{rj} = 0$ si riducono a $\bar{c}_j \leq 0$, che vale per ipotesi. Il verso della disuguaglianza si

inverte dividendo per $\bar{a}_{rj} < 0$. Di conseguenza, il valore di s diventa il valore massimo, chiamato s_m , tale che:

$$s_m = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} : j \in \mathcal{N}, \bar{a}_{rj} < 0 \right\} \geq 0.$$

- Con questo valore di s , il nuovo costo ridotto della variabile x_p che realizza il minimo diventa

$$\bar{c}_p - s_m \bar{a}_{rp} = \bar{c}_p - \frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} \bar{a}_{rp} = 0,$$

e una variabile con costo ridotto nullo può entrare in base: x_p è la colonna pivot.

La colonna pivot è una variabile fuori base il cui costo ridotto si annulla ponendo il passo duale pari a s_m , cioè una variabile fuori base

$$x_p \text{ con } p \in \mathcal{N} \text{ tale che } \frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} = s_m = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} : j \in \mathcal{N}, \bar{a}_{rj} < 0 \right\},$$

dove $\bar{a}_{rp}$ è il valore della riga $\bar{\mathbf{a}}_r$ associato alla colonna pivot x_p .

- Dati s_m e la riga $\bar{\mathbf{a}}_r$, **i nuovi costi ridotti** (che determinano il nuovo vettore $\bar{\mathbf{c}}$) e **il nuovo valore obiettivo** si ottengono segue:

$$\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - s_m \bar{a}_{rj}, \quad \forall j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}, \quad \bar{c}_r \leftarrow -s_m, \quad \bar{c}_p \leftarrow 0, \quad \bar{z} \leftarrow \bar{z} + s_m \bar{b}_r. \quad (10.4)$$

- Poiché $s_m \geq 0$ e $\bar{b}_r < 0$, abbiamo

$$\bar{z} + s_m \bar{b}_r \leq \bar{z} :$$

il valore obiettivo non aumenta mai, che è l'immagine speculare di ciò che accade nell'algoritmo del simplesso, dove il valore obiettivo non diminuisce mai. Per la sezione precedente, $\bar{z}$ è a ogni iterazione un upper bound sul valore ottimo, e l'algoritmo del simplesso duale lo diminuisce.

- Date una riga pivot x_r con $r \in \mathcal{B}$ e una colonna pivot x_p con $p \in \mathcal{N}$, **la nuova partizione degli indici delle variabili** si aggiorna come segue:

$$\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{p\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} \leftarrow (\mathcal{N} \setminus \{p\}) \cup \{r\} \quad (10.5)$$

Per costruzione $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ resta una base, poiché $\bar{a}_{rp} \neq 0$.

10.4.3 La regola dell'indice minimo (regola di Bland)

- La riga pivot e la colonna pivot non sono sempre uniche: più variabili in base possono avere valore negativo, e più variabili fuori base possono realizzare il minimo s_m . Se $s_m = 0$ (un'operazione di pivot duale **degenere**) il valore $\bar{z}$ non cambia e, con una scelta arbitraria, l'algoritmo potrebbe ciclare. In queste note risolviamo sempre i pareggi come segue.

Regola di Bland per l'algoritmo del simplesso duale.

- a. La riga pivot è la variabile in base con valore negativo di **indice minimo**:

$$r = \min \{ i \in \mathcal{B} : \bar{b}_i < 0 \}.$$

- b. La colonna pivot è il candidato che realizza s_m di **indice minimo**:

$$p = \min \left\{ j \in \mathcal{N} : \bar{a}_{rj} < 0, \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} = s_m \right\}.$$

Per la corrispondenza $\pi_j \leftrightarrow x_j$, questa è esattamente la regola di Bland dell'algoritmo del simplesso applicata al problema duale, e quindi l'algoritmo del simplesso duale con questa regola termina sempre.

10.4.4 Certificato di inammissibilità

- Se $\bar{a}_{rj} \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, allora il test dei rapporti non ha candidati: il valore di s si può aumentare illimitatamente mantenendo non positivi tutti i costi ridotti. In questo caso il problema LP è inammissibile.

Certificato di inammissibilità. Data una base duale ammissibile $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$, se esiste una variabile in base x_r con $r \in \mathcal{B}$ tale che

$$\bar{b}_r < 0 \quad \text{e} \quad \bar{a}_{rj} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

allora il problema LP in forma standard di massimo è **inammissibile**.

- Prima dimostrazione (sul primale).** L'equazione della riga pivot nel dizionario è

$$x_r = \bar{b}_r - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{rj} x_j,$$

e ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_j \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$. Poiché $\bar{a}_{rj} \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, ogni termine della somma è non negativo e otteniamo

$$x_r \leq \bar{b}_r < 0,$$

che contraddice la non negatività di x_r . Di conseguenza, non esiste alcuna soluzione ammissibile.

- **Seconda dimostrazione (sul duale).** Per ogni valore $s \geq 0$, i coefficienti di (10.3) sono tutti non positivi, e quindi sono i costi ridotti di una soluzione duale ammissibile di valore

$$\bar{z} + s \bar{b}_r.$$

Poiché $\bar{b}_r < 0$, questo valore tende a $-\infty$ al crescere di s : il problema duale è **illimitato**. Per il teorema di dualità debole, il problema primale è quindi **inammissibile**. È l'esatta immagine speculare del certificato di illimitatezza dell'algoritmo del simplesso.

10.4.5 Aggiornamento del dizionario

Una volta determinate la riga pivot x_r con $r \in \mathcal{B}$ e la colonna pivot x_p con $p \in \mathcal{N}$, il nuovo dizionario si ottiene con **esattamente le stesse operazioni sulle righe dell'algoritmo del simplesso**.

- Siano x_p la variabile entrante e x_r la variabile uscente. Dall'equazione della riga pivot, abbiamo:

$$x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{rp}x_p - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \bar{a}_{rj}x_j.$$

Risolvendo rispetto a x_p si ottiene l'equazione della colonna pivot nel nuovo dizionario:

$$x_p = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}}x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}}x_r. \quad (10.6)$$

Per ogni altra variabile in base $i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}$, sostituendo con (10.6) si ottengono le sue equazioni nel nuovo dizionario, e sostituendo nell'equazione della funzione obiettivo si ottiene la nuova riga della funzione obiettivo, i cui coefficienti sono esattamente quelli di (10.4).

- Il nuovo valore della colonna pivot è

$$\bar{b}_p = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} \geq 0,$$

poiché $\bar{b}_r < 0$ e $\bar{a}_{rp} < 0$: la variabile che entra in base assume un valore non negativo. I valori delle altre variabili in base, invece, possono essere negativi, e sono quindi necessarie ulteriori operazioni di pivot duali.

Esempio 10.7: operazioni di pivot duali

Per il problema LP dell'Esempio 10.1, con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo il dizionario:

$$\begin{cases} x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \\ x_4 = -6 - x_1 + 4x_2 \\ x_5 = 3 - 2x_1 + 2x_2 \\ z = 0 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, e quindi la base è duale ammissibile. Due variabili in base hanno valore negativo, $\bar{b}_3 = -6 < 0$ e $\bar{b}_4 = -6 < 0$, e per la regola dell'indice minimo scegliamo x_3 come riga pivot.

Troviamo quindi il massimo s tale che tutti i costi ridotti di (10.3) restino non positivi:

$$\begin{cases} \underbrace{-s \leq 0}_{\bar{c}_3 \leq 0} \\ \underbrace{-1 - s \cdot (-1) \leq 0}_{\bar{c}_1 \leq 0} \\ \underbrace{-3 - s \cdot (-2) \leq 0}_{\bar{c}_2 \leq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} s \geq 0 \\ s \leq 1 \\ s \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad s_m = \min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-3}{-2}}_{=\frac{3}{2}} \right\} = 1$$

Il passo duale diventa $s_m = 1$, il costo ridotto di x_1 si annulla e x_1 è la colonna pivot. Gli altri costi ridotti e il valore obiettivo diventano $\bar{c}_j - s_m \bar{a}_{3j}$ e $\bar{z} + s_m \bar{b}_3$, quindi abbiamo:

$$\bar{c}_2 = -3 - 1 \cdot (-2) = -1, \quad \bar{c}_3 = -1, \quad \bar{z} = 0 + 1 \cdot (-6) = -6,$$

e di conseguenza

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La nuova partizione degli indici delle variabili è $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$.

Esempio 10.8: aggiornamento del dizionario

Per il problema LP dell'Esempio 10.1, eseguendo l'operazione di pivot duale dell'Esempio 10.7, con x_3 come riga pivot e x_1 come colonna pivot, abbiamo:

$$x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 6 - 2x_2 + x_3$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_4 = -6 - x_1 + 4x_2 = -6 - (6 - 2x_2 + x_3) + 4x_2 = -12 + 6x_2 - x_3$$

$$x_5 = 3 - 2x_1 + 2x_2 = 3 - 2(6 - 2x_2 + x_3) + 2x_2 = -9 + 6x_2 - 2x_3$$

$$z = -x_1 - 3x_2 = -(6 - 2x_2 + x_3) - 3x_2 = -6 - x_2 - x_3$$

e quindi il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -12 + 6x_2 - x_3 \\ x_5 = -9 + 6x_2 - 2x_3 \\ z = -6 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

I costi ridotti e il valore obiettivo coincidono con quelli calcolati nell'Esempio 10.7, come previsto, e il valore della variabile entrante è $\bar{b}_1 = \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{31}} = \frac{-6}{-1} = 6 \geq 0$.

10.5 Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso duale

Algoritmo

Input

Un problema LP in forma standard di massimo e una base **duale ammissibile**, cioè una base il cui dizionario soddisfa $\bar{c} \leq 0$.

Output

Una soluzione ottima del problema LP, se esiste; altrimenti, un certificato che il problema LP è inammissibile.

Passo 0: Inizializzazione

Considerare la base duale ammissibile data e il dizionario associato. Andare al Passo 1.

Passo 1: Test di ammissibilità

Rispetto al dizionario corrente, se

$$\bar{b}_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{B},$$

allora la base è primale ammissibile e duale ammissibile, la soluzione di base ammissibile $x_i = \bar{b}_i, \forall i \in \mathcal{B}$, e $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, è una soluzione ottima e $\bar{z}$ è il valore ottimo. In questo caso **STOP**.

Passo 2: Operazioni di pivot duali

La **riga pivot** è la variabile in base x_r con valore negativo di indice minimo:

$$r = \min \{ i \in \mathcal{B} : \bar{b}_i < 0 \}.$$

a. Se

$$\bar{a}_{rj} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

allora il problema LP è **inammissibile**. **STOP**.

b. Determinare la **colonna pivot**, cioè una variabile fuori base x_p con $p \in \mathcal{N}$ tale che

$$\frac{\bar{c}_p}{\bar{a}_{rp}} = s_m = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} : j \in \mathcal{N}, \bar{a}_{rj} < 0 \right\};$$

in caso di pareggio, scegliere il candidato con indice p minimo.

- c. Aggiornare il dizionario con le stesse operazioni sulle righe dell'algoritmo del simplesso. In particolare, $\bar{z} \leftarrow \bar{z} + s_m \bar{b}_r$.
- d. Aggiornare la base:

$$\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{p\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} \leftarrow (\mathcal{N} \setminus \{p\}) \cup \{r\}.$$

Andare al Passo 1.

Esempio 10.9: esecuzione dell'algoritmo del simplesso duale

Consideriamo il problema LP dell'Esempio 10.1 in forma standard di massimo. Il suo vettore dei costi soddisfa $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, e quindi la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ delle variabili di scarto è **duale ammissibile**. Il dizionario associato è:

$$\begin{cases} x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \\ x_4 = -6 - x_1 + 4x_2 \\ x_5 = 3 - 2x_1 + 2x_2 \\ z = 0 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, ma la soluzione di base non è ammissibile, poiché $\bar{b}_3 = -6 < 0$ e $\bar{b}_4 = -6 < 0$.

Prima operazione di pivot duale. La riga pivot è x_3 , la variabile in base con valore negativo di indice minimo. I valori della sua riga sono $\bar{a}_{31} = -1 < 0$ e $\bar{a}_{32} = -2 < 0$, e quindi entrambe le variabili fuori base sono candidate:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-1}{-1}}_{=1}, \underbrace{\frac{-3}{-2}}_{=\frac{3}{2}} \right\} = s_m = 1$$

e la colonna pivot è x_1 . Il nuovo valore obiettivo è $\bar{z} + s_m \bar{b}_3 = 0 + 1 \cdot (-6) = -6$. Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -12 + 6x_2 - x_3 \\ x_5 = -9 + 6x_2 - 2x_3 \\ z = -6 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

I costi ridotti sono ancora tutti non positivi, come previsto, ma la soluzione di base non è ancora ammissibile.

Seconda operazione di pivot duale. La riga pivot è x_4 , la variabile in base con valore negativo di indice minimo ($\bar{b}_4 = -12$, $\bar{b}_5 = -9$). L'unico valore negativo della sua riga è

$\bar{a}_{42} = -6$, e quindi la colonna pivot è x_2 , con passo duale $s_m = \frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{42}} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$ e nuovo valore obiettivo $\bar{z} + s_m \bar{b}_4 = -6 + \frac{1}{6} \cdot (-12) = -8$. Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 = 3 - x_3 + x_4 \\ z = -8 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \end{cases}$$

Ora $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$: la base è primale ammissibile e duale ammissibile, e quindi è ottima. Una soluzione ottima del problema LP dell'Esempio 10.1 è

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e il valore ottimo è $z(LP) = -8$, in accordo con l'esecuzione riportata nelle pagine pages.

Le tre basi visitate dall'algoritmo corrispondono a tre soluzioni ammissibili del problema **duale**, date da $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$:

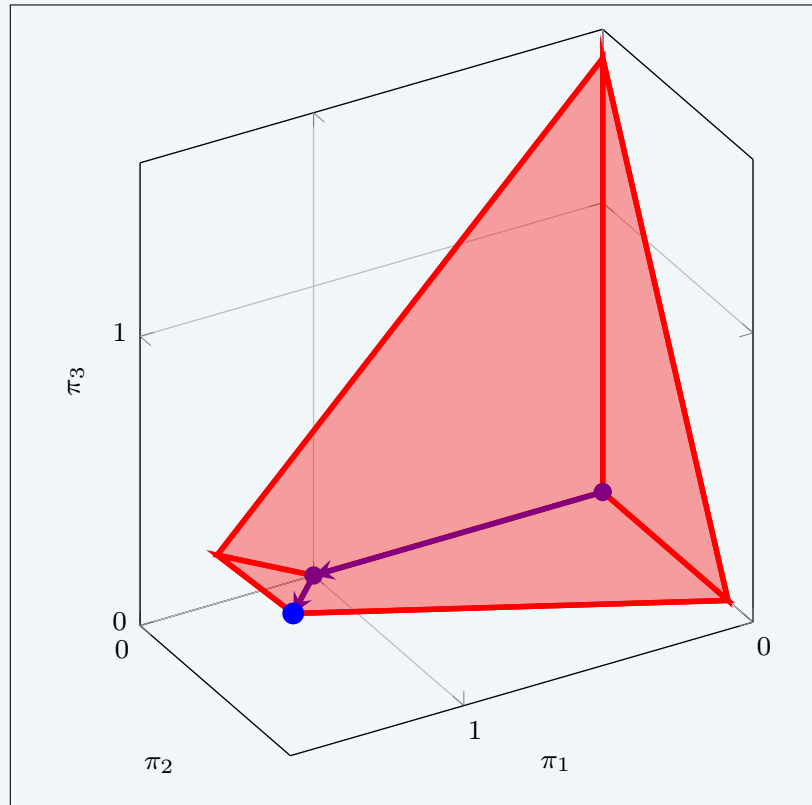
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix},$$

i cui valori obiettivo duali $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}$ sono

$$0 \rightarrow -6 \rightarrow -8,$$

non crescenti, come deve essere per un problema di minimo (qui decrescono addirittura strettamente, ma un'operazione di pivot duale degenera con $s_m = 0$ lascia il valore invariato). Sono vertici del poliedro duale, e l'algoritmo del simplesso duale si sposta da uno di essi a uno adiacente: è l'algoritmo del simplesso eseguito sul problema duale.

Nella figura seguente gli assi sono le tre variabili duali originali, chiamate π_1, π_2, π_3 nel problema duale dell'Esempio 10.1; ricordando che nella forma standard di massimo i loro indici sono traslati di $n = 2$, esse corrispondono a π_3, π_4, π_5 .



In viola i primi due vertici duali visitati dall'algoritmo, in blu quello ottimo. Le corrispondenti soluzioni di base primali invece non sono ammissibili fino all'ultima iterazione.

Esempio 10.10: certificato di inammissibilità

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale (detto [Esempio 10.10](#)):

$$\begin{array}{llllll}
 \max & -2 & x_1 & - & x_2 & \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & - & 2 & x_2 \leq -6 \\
 & -2 & x_1 & - & x_2 & \leq -6 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq 2 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Poiché $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ è duale ammissibile. Il dizionario iniziale è:

$$\begin{cases} x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \\ x_4 = -6 + 2x_1 + x_2 \\ x_5 = 2 - x_1 - x_2 \\ z = 0 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Prima operazione di pivot duale. Per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_3 , il cui valore è $\bar{b}_3 = -6 < 0$. I valori della sua riga sono $\bar{a}_{31} = -1 < 0$ e $\bar{a}_{32} = -2 < 0$, e quindi entrambe le variabili fuori base sono candidate:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-2}{-1}}_{=2}, \underbrace{\frac{-1}{-2}}_{=\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{2}$$

e la colonna pivot è x_2 . Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$, è:

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = -3 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_5 = -1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ z = -3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Seconda operazione di pivot duale. Due variabili in base hanno valore negativo, x_4 e x_5 : per la regola dell'indice minimo la riga pivot è x_4 . I valori della sua riga sono $\bar{a}_{41} = -\frac{3}{2} < 0$ e $\bar{a}_{43} = -\frac{1}{2} < 0$, e quindi entrambe le variabili fuori base sono candidate:

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}}_{=1}, \underbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}}_{=1} \right\} = 1.$$

I due rapporti sono uguali e, per la regola dell'indice minimo, la colonna pivot è x_1 . Abbiamo:

$$x_4 = -3 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4,$$

e, sostituendo nelle altre equazioni del dizionario:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \right) + \frac{1}{2}x_3 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 &= -1 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \right) - \frac{1}{2}x_3 = -2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ z &= -3 - \frac{3}{2} \left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \right) - \frac{1}{2}x_3 = -6 + 0x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 = -2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ z = -6 + 0x_3 - x_4 \end{cases}$$

A causa del pareggio nel test dei rapporti, anche il costo ridotto $\bar{c}_3$ diventa 0: è ancora non positivo e la base è ancora duale ammissibile, con $\bar{z} = -3 + 1 \cdot (-3) = -6$.

Terza operazione di pivot duale. L'unica variabile in base con valore negativo è x_5 , la cui riga ha valori

$$\bar{a}_{53} = \frac{1}{3} \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{a}_{54} = \frac{1}{3} \geq 0,$$

cioè tutti non negativi. Per il certificato di inammissibilità, il problema LP dell'Esempio 10.10 è **inammissibile**.

Infatti, l'equazione di x_5 in questo dizionario è

$$x_5 = -2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4,$$

e ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_3 \geq 0$ e $x_4 \geq 0$, da cui

$$x_5 \leq -2 < 0,$$

in contraddizione con la non negatività di x_5 . Di conseguenza, non esiste alcuna soluzione ammissibile.

Il certificato era già disponibile nel dizionario precedente, dove la riga di x_5 era $x_5 = -1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$ con valori $\bar{a}_{51}, \bar{a}_{53}$ tutti non negativi: la regola dell'indice minimo ha selezionato prima x_4 . Un certificato di inammissibilità si può leggere in qualsiasi riga con $\bar{b}_r < 0$ e $\bar{a}_{rj} \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$, anche se non è la riga pivot.

10.6 Risoluzione del problema duale con l'algoritmo del simplesso

- In questa sezione eseguiamo l'**algoritmo del simplesso sul problema duale** del problema LP dell'Esempio 10.1 e, in parallelo, riportiamo a ogni iterazione il corrispondente dizionario del problema primale. Le due esecuzioni sono due modi diversi di descrivere la stessa sequenza di basi: l'algoritmo del simplesso duale applicato al problema primale è esattamente l'algoritmo del simplesso applicato al problema duale.

Esempio 10.11: l'algoritmo del simplesso sul problema duale

• Inizializzazione

Trasliamo gli indici delle variabili duali originali di $n = 2$ e aggiungiamo in testa $n = 2$ variabili di surplus. Otteniamo quindi la seguente forma standard di massimo:

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & & & & 6 & \pi_3 & + & 6 & \pi_4 & - & 3 & \pi_5 \\ \text{soggetto a} & - & \pi_1 & & & & - & \pi_3 & + & \pi_4 & + & 2 & \pi_5 & = & -1 \\ & & & - & \pi_2 & - & 2 & \pi_3 & - & 4 & \pi_4 & - & 2 & \pi_5 & = & -3 \\ & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario duale iniziale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 + 2 \pi_5 \\ \pi_2 = 3 - 2 \pi_3 - 4 \pi_4 - 2 \pi_5 \\ -w = 0 + 6 \pi_3 + 6 \pi_4 - 3 \pi_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 1, \quad \bar{\pi}_2 = 3, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0$$

con $-w = 0$, cioè $w = 0$.

Dopo aver aggiunto le variabili di scarto al problema primale, otteniamo la seguente forma standard:

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & - & x_1 & - & 3 & x_2 & & & & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & 2 & x_2 & + & x_3 & & & = & -6 \\ & & x_1 & - & 4 & x_2 & & & + & x_4 & = & -6 \\ & & 2 & x_1 & - & 2 & x_2 & & & + & x_5 & = & 3 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Il dizionario primale iniziale è:

$$\begin{cases} x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \\ x_4 = -6 - x_1 + 4x_2 \\ x_5 = 3 - 2x_1 + 2x_2 \\ z = 0 - x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = -6, \quad \bar{x}_4 = -6, \quad \bar{x}_5 = 3, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

• **Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile π_3 , possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 1 - \pi_3 \\ \pi_2 = 3 - 2\pi_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - \pi_3 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{3 - 2\pi_3 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_3 \leq 1 \\ \pi_3 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_3 fino a 1, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_3 entra nella base duale e, di conseguenza, x_3 esce dalla base primale;
 π_1 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_1 entra nella base primale.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_1 = 1 - \pi_3 + \pi_4 + 2\pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_3 = 1 - \pi_1 + \pi_4 + 2\pi_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= 3 - 2(1 - \pi_1 + \pi_4 + 2\pi_5) - 4\pi_4 - 2\pi_5 = 1 + 2\pi_1 - 6\pi_4 - 6\pi_5 \\ -w &= 0 + 6(1 - \pi_1 + \pi_4 + 2\pi_5) + 6\pi_4 - 3\pi_5 = 6 - 6\pi_1 + 12\pi_4 + 9\pi_5 \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 + 2\pi_1 - 6\pi_4 - 6\pi_5 \\ \pi_3 = 1 - \pi_1 + \pi_4 + 2\pi_5 \\ -w = 6 - 6\pi_1 + 12\pi_4 + 9\pi_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 1, \quad \bar{\pi}_3 = 1, \quad \bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad -w = 6, \quad w = -6.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_3 = -6 + x_1 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = 6 - 2x_2 + x_3.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_4 = -6 - (6 - 2x_2 + x_3) + 4x_2 = -12 + 6x_2 - x_3$$

$$x_5 = 3 - 2(6 - 2x_2 + x_3) + 2x_2 = -9 + 6x_2 - 2x_3$$

$$z = 0 - (6 - 2x_2 + x_3) - 3x_2 = -6 - x_2 - x_3$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -12 + 6x_2 - x_3 \\ x_5 = -9 + 6x_2 - 2x_3 \\ z = -6 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 6, \quad \bar{x}_4 = -12, \quad \bar{x}_5 = -9, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad -6$$

• Iterazione 2

Se aumentiamo il valore della variabile π_4 , possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 = 1 - 6\pi_4 \\ \pi_3 = 1 + \pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{1 - 6\pi_4}_{\pi_2 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{1 + \pi_4}_{\pi_3 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_4 \leq \frac{1}{6} \\ \pi_4 \geq -1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_4 fino a $\frac{1}{6}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 entra nella base duale e, di conseguenza, x_4 esce dalla base primale;

π_2 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_2 entra nella base primale.

– Per il problema LP duale, abbiamo:

$$\pi_2 = 1 + 2\pi_1 - 6\pi_4 - 6\pi_5 \quad \text{quindi} \quad \pi_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario duale, otteniamo:

$$\begin{aligned}\pi_3 &= 1 - \pi_1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5\right) + 2\pi_5 = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 + \pi_5 \\ -w &= 6 - 6\pi_1 + 12\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5\right) + 9\pi_5 = 8 - 2\pi_1 - 2\pi_2 - 3\pi_5.\end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario duale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_3 = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 + \pi_5 \\ \pi_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_2 - \pi_5 \\ -w = 8 - 2\pi_1 - 2\pi_2 - 3\pi_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 5\}$. La soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{7}{6}, \quad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad -w = 8, \quad w = -8.$$

– Per il problema LP primale, abbiamo:

$$x_4 = -12 + 6x_2 - x_3 \quad \text{quindi} \quad x_2 = 2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 - 2\left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4\right) + x_3 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 &= -9 + 6\left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4\right) - 2x_3 = 3 - x_3 + x_4 \\ z &= -6 - \left(2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4\right) - x_3 = -8 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4\end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\ x_5 = 3 - x_3 + x_4 \\ z = -8 - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$. La soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_5 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad -8$$