



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Volume 2 — L'algoritmo del simplesso

L'algoritmo del simplesso sui dizionari, condizioni di ottimalità, regole di pivot e ciclaggio, la Fase 0 con il problema ausiliario. Esempi svolti passo per passo ed esercizi con la soluzione completa in fondo a ogni capitolo.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

6	Algoritmo del simplesso	2
6.1	La forma standard di un problema LP in forma canonica di massimo	2
6.2	Base del problema LP in forma standard e dizionari	5
6.3	Operazioni di pivot	14
6.4	Pseudocodice ad alto livello dell'algoritmo del simplesso	20
7	Condizioni di ottimalità e regole di pivot	26
7.1	Condizioni sufficienti di ottimalità	26
7.2	Condizioni necessarie di ottimalità	31
7.3	Regole di pivot	32
8	Fase 0 dell'algoritmo del simplesso	35
8.1	Il problema ausiliario del simplesso	35
8.2	Risoluzione del problema ausiliario del simplesso	38
8.3	Dalla Fase 0 all'algoritmo del simplesso	41
8.4	Riconoscere i problemi LP inammissibili	43
8.5	Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso con la Fase 0	44
8.6	Il Teorema fondamentale della programmazione lineare	45

Algoritmo del simplesso

6.1 La forma standard di un problema LP in forma canonica di massimo

- Consideriamo un problema LP in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza ottenuto da un problema LP in forma canonica di massimo con n variabili non negative e m vincoli lineari di minore o uguale aggiungendo m variabili di scarto non negative:

$$\max \quad \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (6.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (6.1c)$$

I dati del problema LP sono:

1. un vettore colonna dei costi $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{(n+m)}$ di $n + m$ righe;
2. una matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ di m righe e $n + m$ colonne;
3. un vettore colonna dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ di m righe.

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le $m + n$ variabili non negative possono essere scritte come un vettore colonna $\mathbf{x}$ di $n + m$ righe.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

Poiché il problema LP (6.1) è ottenuto aggiungendo m variabili di scarto a un problema LP in forma canonica, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a_{1(n+1)} & a_{1(n+2)} & \cdots & a_{1(n+m)} \\ a_{2(n+1)} & a_{2(n+2)} & \cdots & a_{2(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n+1)} & a_{m(n+2)} & \cdots & a_{m(n+m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

che è la matrice identità $\mathbf{I}$ di dimensione m . Inoltre, per lo stesso motivo, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ contiene la matrice identità $\mathbf{I}$ di dimensione m , abbiamo:

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = m$$

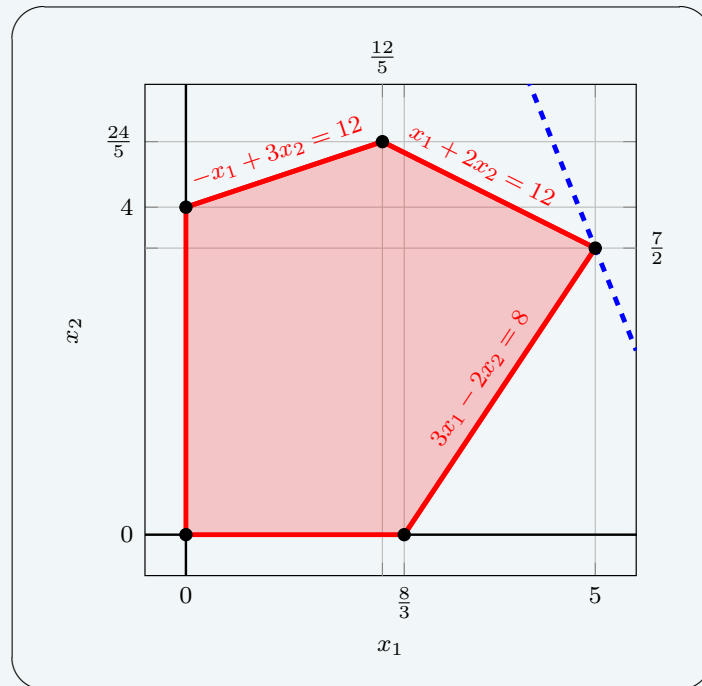
Di conseguenza ci sono m **righe linearmente indipendenti** e almeno un insieme di m **colonne linearmente indipendenti**^a nella matrice dei vincoli $\mathbf{A}$.

^aIl rango per righe e il rango per colonne di una matrice sono uguali

Esempio 6.1: forma standard di massimo di problemi LP in forma canonica di massimo

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 12 \\ & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



In blu tratteggiato l'insieme di livello $5x_1 + 2x_2 = 32$ passante per il vertice ottimo. Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

e il valore ottimo è:

$$z(LP) = 32$$

La forma standard con $n + m = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli si scrive come segue:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & & + & x_4 & = & 12 \\ & & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & & + & x_5 & = & 8 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Nel problema LP in forma standard (detto [Esempio 6.1](#)), abbiamo:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$ della forma standard è: $\tilde{x}_1 = 5$, $\tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$, $\tilde{x}_3 = \frac{13}{2}$, $\tilde{x}_4 = 0$, $\tilde{x}_5 = 0$.

6.2 Base del problema LP in forma standard e dizionari

Definizione 6.1: base del problema LP

Dato un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \{1, 2, \dots, n+m\}$ di m indici delle $n+m$ variabili del problema LP (6.1), se la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ contenente le m colonne di $\mathbf{A}$ con indici $j \in \mathcal{B}$:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = (\mathbf{A}_j)_{j \in \mathcal{B}}$$

è invertibile, si chiama **base** del problema LP (6.1).

Definizione 6.2: partizione degli indici, variabili in base e variabili fuori base

Data una base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ del problema LP (6.1), abbiamo la seguente **partizione** degli indici $\{1, 2, \dots, n+m\}$ delle variabili:

$$\mathcal{B} \subseteq \{1, 2, \dots, n+m\}, \quad |\mathcal{B}| = m,$$

$$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n+m\} \setminus \mathcal{B}, \quad |\mathcal{N}| = n.$$

Data una partizione $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$, definiamo:

1. il vettore colonna delle **variabili in base** contenente le m variabili con indici $i \in \mathcal{B}$:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_i)_{i \in \mathcal{B}}$$

2. il vettore colonna delle **variabili fuori base** contenente le n variabili con indici $i \in \mathcal{N}$:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = (x_i)_{i \in \mathcal{N}}$$

3. il vettore colonna $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m$ contenente gli m valori di $\mathbf{c}$ con indici $i \in \mathcal{B}$:

$$\mathbf{c}_{\mathcal{B}} = (c_i)_{i \in \mathcal{B}}$$

4. la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ contenente le n colonne di $\mathbf{A}$ con indici $j \in \mathcal{N}$:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}} = (\mathbf{A}_j)_{j \in \mathcal{N}}$$

5. il vettore colonna $\mathbf{c}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ contenente gli n valori di $\mathbf{c}$ con indici $i \in \mathcal{N}$:

$$\mathbf{c}_{\mathcal{N}} = (c_i)_{i \in \mathcal{N}}$$

Esempio 6.2: Base di problemi LP, variabili in base e variabili fuori base

Per il problema LP dell'Esempio 6.1 con $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A}_{\mathcal{B}}) = -1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 = 3 \neq 0$$

e quindi $\text{rank}(\mathbf{A}_{\mathcal{B}}) = 3$. Di conseguenza, la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ è invertibile ed è una base del problema LP. Calcoliamo la matrice inversa $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$ con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow -R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow R_1 + R_2, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (R_3 \leftarrow -\frac{1}{3}R_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (R_1 \leftarrow R_1 - R_3, R_2 \leftarrow R_2 - R_3)$$

Poiché $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

di conseguenza $\mathcal{N} = \{2, 5\}$ e abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 6.3: Base di problemi LP, variabili in base e variabili fuori base

Per il problema LP dell'Esempio 6.1 con $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_{\mathcal{B}}) &= -1 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2)) - 3 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 3) + 0 \cdot (1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) \\ &= -1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 7 \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi $\text{rank}(\mathbf{A}_{\mathcal{B}}) = 3$. Di conseguenza, la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ è invertibile ed è una base del problema LP. Calcoliamo la matrice inversa $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$ con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (R_1 \leftarrow -R_1) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (R_2 \leftarrow \frac{1}{5}R_2) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{array} \right) \quad (R_1 \leftarrow R_1 + 3R_2, R_3 \leftarrow R_3 - 7R_2) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{array} \right) \quad (R_3 \leftarrow -\frac{5}{7}R_3) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{array} \right) \quad (R_1 \leftarrow R_1 - \frac{3}{5}R_3, R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{5}R_3) \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

di conseguenza $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Data una base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ del problema LP (6.1), possiamo riscrivere i vincoli di uguaglianza (6.1b) come segue:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{b}$$

e quindi, moltiplicando per $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1}$, abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} (\mathbf{A}_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}}_{=\mathbf{I}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b}$$

Le variabili in base possono essere scritte in funzione delle variabili fuori base come segue:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \quad (6.2)$$

Inoltre, possiamo riscrivere il valore della funzione obiettivo (6.1a), indicato con z , come segue:

$$z = \mathbf{c}' \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{c}_{\mathcal{N}} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}$$

Usando (6.2), otteniamo quindi:

$$z = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} (\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) + \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}$$

La funzione obiettivo può essere scritta in funzione delle variabili fuori base come segue:

$$z = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}) \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \quad (6.3)$$

Usando (6.2) e (6.3), il **problema LP** (6.1) può essere riformulato sotto forma di **dizionario**.

Definizione 6.3: dictionary

Data una base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ del problema LP (6.1), il **dizionario** associato è un sistema di $m + 1$ equazioni lineari in cui le variabili in base e la funzione obiettivo sono scritte

in funzione delle variabili fuori base:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_N \\ z = \bar{z} + \bar{\mathbf{c}}' \mathbf{x}_N \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \\ \bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \end{cases} \quad (6.4)$$

- Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (6.1), nel dizionario associato ci sono:
 - la matrice $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di m righe associata alle variabili in base e n colonne associate alle variabili fuori base
 - due vettori colonna $\bar{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ di m righe associate alle variabili in base e di n righe associate alle variabili fuori base, rispettivamente:

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})_{i \in B, j \in N}, \quad \bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_i)_{i \in B}, \quad \bar{\mathbf{c}} = (\bar{c}_i)_{i \in N}.$$

Un dizionario può essere riscritto equivalentemente usando le sommatorie come segue:

$$\begin{cases} x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j, \quad \forall i \in B \\ z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \end{cases}$$

Esempio 6.4: dizionario del simplesso

Per il problema LP dell'Esempio 6.1, con $B = \{1, 3, 4\}$ e $N = \{2, 5\}$, abbiamo:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{44}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ \frac{5}{3}) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{40}{3}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}' &= c'_{\mathcal{N}} - c'_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} = (2 \ 0) - (5 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2 \ 0) - (0 \ 0 \ \frac{5}{3}) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 0) - (-\frac{10}{3} \ \frac{5}{3}) = (\frac{16}{3} \ -\frac{5}{3})\end{aligned}$$

Di conseguenza, il dizionario associato è:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{44}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ z = \frac{40}{3} + \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_3 &= \frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_4 &= \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_5 \\ z &= \frac{40}{3} + \frac{16}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_5 \end{cases}$$

Questo dizionario è associato alla soluzione ammissibile $\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = \frac{44}{3}, \bar{x}_4 = \frac{28}{3}, \bar{x}_5 = 0$ di valore $z = \frac{40}{3}$.

Esempio 6.5: dizionario del semplice

Per il problema LP dell'Esempio 6.1, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\bar{b} &= A_{\mathcal{B}}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{7} \\ \frac{44}{7} \\ -\frac{52}{7} \end{pmatrix} \\ \bar{A} &= A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = (5 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \left(\frac{16}{7} \ 0 \ \frac{17}{7}\right) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{328}{7}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = (0 \ 0) - (5 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0 \ 0) - \left(\frac{16}{7} \ 0 \ \frac{17}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0) - \left(\frac{16}{7} \ \frac{17}{7}\right) = \left(-\frac{16}{7} \ -\frac{17}{7}\right) \end{aligned}$$

Di conseguenza, il dizionario associato è:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{48}{7} \\ \frac{44}{7} \\ -\frac{52}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ z &= \frac{328}{7} + \left(-\frac{16}{7} \ -\frac{17}{7}\right) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

o, equivalentemente:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{48}{7} - \frac{2}{7} x_3 - \frac{3}{7} x_5 \\ x_2 &= \frac{44}{7} - \frac{3}{7} x_3 - \frac{1}{7} x_5 \\ x_4 &= -\frac{52}{7} + \frac{8}{7} x_3 + \frac{5}{7} x_5 \\ z &= \frac{328}{7} - \frac{16}{7} x_3 - \frac{17}{7} x_5 \end{aligned} \right.$$

Questo dizionario non è associato a una soluzione ammissibile.

6.2.1 Soluzioni di base ammissibili e costi ridotti

- I valori delle variabili in base dipendono dai valori delle variabili fuori base, di conseguenza:
 1. le variabili in base sono le variabili dipendenti
 2. le variabili fuori base sono le variabili indipendenti

Definizione 6.4: soluzione di base

Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (6.1), ponendo tutte le variabili fuori base a zero abbiamo:

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

che si chiama **soluzione di base** del problema LP (6.1).

- Le variabili sono non negative (6.1c) quindi non tutte le soluzioni di base sono soluzioni ammissibili.

Definizione 6.5: soluzioni di base ammissibili

Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (6.1), se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ allora

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

si chiama **soluzione di base ammissibile**.

Definizione 6.6: vettore dei costi ridotti

Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (6.1), il vettore $\bar{\mathbf{c}}$ si chiama **vettore dei costi ridotti**.

- Il costo ridotto

$$\bar{c}_p = c_p - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p$$

di una variabile fuori base x_p con $p \in \mathcal{N}$ è la variazione della funzione obiettivo per ogni incremento unitario della variabile.

L'incremento è proporzionale a c_p mentre il decremento (dovuto alla variazione delle variabili in base per preservare i vincoli di uguaglianza (6.1b)) è proporzionale a $\mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p$.

6.2.2 Determinare una soluzione di base ammissibile iniziale

Per un problema LP (6.1), se $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, la partizione:

$$\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \dots, n+m\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$$

è associata a una base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e alla **soluzione di base ammissibile iniziale**:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

- Per un problema LP (6.1), poiché in $\mathcal{B}$ ci sono gli indici delle m variabili di scarto, abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ è invertibile e quindi è una base. Inoltre, abbiamo:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

In questi casi, abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{I} \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \mathbf{I} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \mathbf{A}_{\mathcal{N}} \\ \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{I} \mathbf{b} = 0 \\ \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{I} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} \end{cases}$$

Esempio 6.6: soluzione di base ammissibile iniziale

Per il problema LP dell'Esempio 6.1, poiché $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$,

abbiamo la soluzione di base ammissibile $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre $\bar{\mathbf{z}} = 0$ e abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} = (0 \quad 0 \quad 0), \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}}_{=\bar{\mathbf{c}}'} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\mathbf{A}_{\mathcal{N}}}_{=\bar{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6.3 Operazioni di pivot

- Data una base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ e una soluzione di base ammissibile $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{0}$ del problema LP (6.1), se nel dizionario associato esiste $j \in \mathcal{N}$ tale che $\bar{c}_j > 0$ (un costo ridotto positivo), è necessario eseguire un'operazione di pivot.

Definizione 6.7: operazione di pivot

Un'operazione di pivot consiste nel determinare una nuova soluzione di base ammissibile con l'obiettivo di aumentare il valore della soluzione di base ammissibile scambiando una variabile fuori base e una variabile in base.

- La variabile fuori base che entra in base si chiama **colonna pivot**
- La variabile in base che esce dalla base si chiama **riga pivot**

6.3.1 Determinare una nuova soluzione di base ammissibile

La colonna pivot è una variabile fuori base con un costo ridotto positivo, cioè una variabile fuori base

$$x_p \quad \text{con} \quad p \in \mathcal{N} \quad \text{tale che} \quad \underbrace{c_p - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_p}_{=\bar{c}_p} > 0$$

- Poiché tra le variabili fuori base solo il valore della colonna pivot x_p con $p \in \mathcal{N}$ viene (potenzialmente) aumentato, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \bar{\mathbf{b}} - \underbrace{\mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_p}_{=\bar{\mathbf{A}}_p} x_p$$

dove $\bar{\mathbf{A}}_p$ è la colonna della matrice $\bar{\mathbf{A}}$ associata alla colonna pivot x_p . Queste m uguaglianze determinano la variazione dei valori delle variabili in base causata da un incremento del valore della colonna pivot.

Il valore della colonna pivot viene aumentato il più possibile mantenendo allo stesso tempo non negativo il valore di tutte le variabili in base. In questo modo viene determinata una nuova soluzione di base ammissibile. Di conseguenza, il valore

della colonna pivot diventa il valore massimo t , detto t_m , tale che:

$$\bar{b} - t \underbrace{\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_p}_{=\bar{\mathbf{A}}_p} \geq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad t_m = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ip}} : i \in \mathcal{B}, \bar{a}_{ip} > 0 \right\}$$

Se $\bar{a}_{ip} \leq 0$ per ogni $i \in \mathcal{B}$, allora il problema LP è illimitato nella direzione di x_p . In questo caso, il valore della colonna pivot può essere aumentato senza limite mantenendo non negativo il valore di tutte le variabili in base.

Certificato di illimitatezza. Data una base $\mathbf{A}_B$ con una soluzione di base ammissibile, se esiste una variabile fuori base x_p con $p \in \mathcal{N}$ tale che

$$\bar{c}_p > 0 \quad \text{e} \quad \bar{a}_{ip} \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{B},$$

allora il problema LP (6.1) è **illimitato**.

– Infatti, per ogni valore $t \geq 0$, il punto

$$x_p = t, \quad x_i = \bar{b}_i - t \bar{a}_{ip}, \quad \forall i \in \mathcal{B}, \quad x_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}, \quad (6.8)$$

è una soluzione ammissibile del problema LP (6.1): soddisfa per costruzione i vincoli di uguaglianza (6.1b), e soddisfa i vincoli di non negatività (6.1c) poiché $\bar{b}_i \geq 0$ e $-t \bar{a}_{ip} \geq 0$ per ogni $i \in \mathcal{B}$.

– Il valore obiettivo di questa soluzione ammissibile è

$$\bar{z} + t \bar{c}_p,$$

e quindi, per ogni valore $M \in \mathbb{R}$, la soluzione ammissibile ottenuta con $t > \frac{M - \bar{z}}{\bar{c}_p}$ ha un valore obiettivo maggiore di M .

La riga pivot è una variabile in base il cui valore diventa zero ponendo il valore della colonna pivot a t_m , cioè una variabile in base

$$x_r \quad \text{con} \quad r \in \mathcal{B} \quad \text{tale che} \quad \bar{a}_{rp} > 0 \quad \text{e} \quad \bar{b}_r - t_m \bar{a}_{rp} = 0 \quad (\text{cioè, } \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} = t_m)$$

dove $\bar{a}_{rp}$ è il valore della colonna $\bar{\mathbf{A}}_p$ associata alla variabile in base x_r .

- Dati t_m e $\bar{\mathbf{A}}_p$, la nuova soluzione di base ammissibile (che determina il nuovo vettore $\bar{\mathbf{b}}$) si ottiene come segue:

$$x_i = \underbrace{\bar{b}_i - t_m \bar{a}_{ip}}_{\text{nuovo } \bar{b}_i}, \quad \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}, \quad x_p = \underbrace{t_m}_{\bar{b}_p}, \quad x_r = 0, \quad x_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}. \quad (6.9)$$

- Data una colonna pivot x_p con $p \in \mathcal{N}$ e una riga pivot x_r con $r \in \mathcal{B}$, la nuova partizione degli indici delle variabili si aggiorna come segue:

$$\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{p\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} \leftarrow (\mathcal{N} \setminus \{p\}) \cup \{r\} \quad (6.10)$$

Per costruzione $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ rimane una base.

Esempio 6.7: operazioni di pivot

Per il problema LP dell'Esempio 6.1, con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} = (0 \quad 0 \quad 0) \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\mathbf{A}_{\mathcal{N}}}_{=\bar{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\mathbf{c}'_{\mathcal{N}}}_{=\bar{\mathbf{c}}'} = (5 \quad 2)$$

Di conseguenza, possiamo scegliere x_1 come colonna pivot poiché $\bar{c}_1 = 5 > 0$. Troviamo quindi il valore massimo di t tale che $\bar{\mathbf{b}} - t \bar{\mathbf{A}}_1 \geq 0$:

$$\begin{cases} \underbrace{12 - t \cdot (-1)}_{x_3 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{12 - t \cdot 1}_{x_4 \geq 0} \geq 0 \\ \underbrace{8 - t \cdot 3}_{x_5 \geq 0} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq -12 \\ t \leq 12 \\ t \leq \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{8}{3}$$

Il valore della colonna pivot diventa t_m e $x_1 = \frac{8}{3}$. Il valore di x_5 diventa zero e x_5 è la riga pivot. Le altre variabili in base assumono i valori $\bar{\mathbf{b}} - t_m \bar{\mathbf{A}}_1$, quindi abbiamo:

$$x_3 = 12 - \frac{8}{3} \cdot (-1) = \frac{44}{3}, \quad x_4 = 12 - \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{28}{3} \quad \text{e di conseguenza} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{44}{3} \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix}$$

La nuova partizione degli indici delle variabili è $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$.

Nello stesso dizionario anche $\bar{c}_2 = 2 > 0$, quindi anche x_2 può essere scelta come colonna pivot: il test dei rapporti dà allora $t_m = 4$, la riga pivot è x_3 e la nuova partizione è $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$. L'esecuzione dell'algoritmo del simplesso che parte da questa scelta è svolta negli esercizi di questo capitolo (*Algoritmo del simplesso con una diversa colonna pivot*, problema P10).

Esempio 6.8: certificato di illimitatezza

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & x_2 \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & x_2 \leq 1 \\ & x_1 & - & x_2 \leq 1 \\ & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Aggiungendo $m = 2$ variabili di scarto, con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ otteniamo il dizionario iniziale:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_3 & = & 1 & + x_1 - x_2 \\ x_4 & = & 1 & - x_1 + x_2 \\ z & = & 0 & + x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

Eseguiamo un'operazione di pivot con colonna pivot x_1 (poiché $\bar{c}_1 = 1 > 0$). L'unico valore positivo nella colonna di x_1 è $\bar{a}_{41} = 1$, e quindi $t_m = \frac{1}{1} = 1$ e la riga pivot è x_4 . Con $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$, il nuovo dizionario è:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & = & 1 & + x_2 - x_4 \\ x_3 & = & 2 & - x_4 \\ z & = & 1 & + 2x_2 - x_4 \end{array} \right.$$

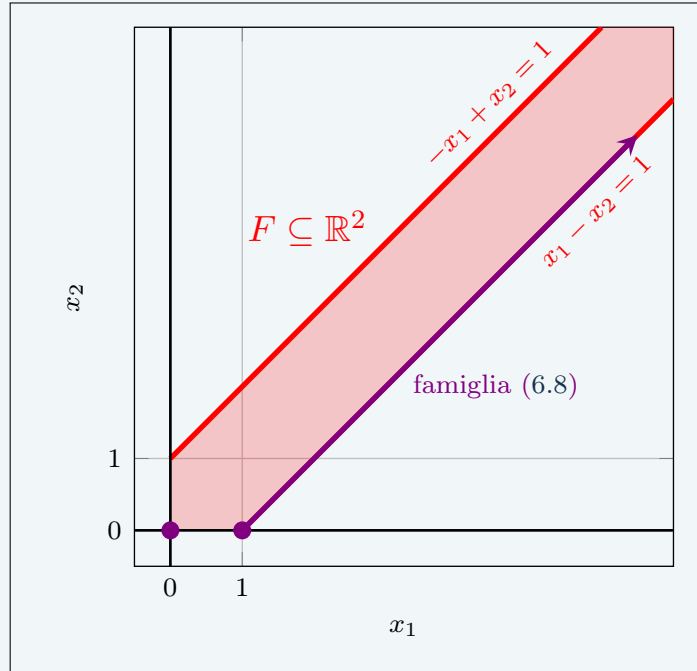
Il costo ridotto della variabile fuori base x_2 è $\bar{c}_2 = 2 > 0$, e i valori della sua colonna sono

$$\bar{a}_{12} = -1 \leq 0 \quad \text{e} \quad \bar{a}_{32} = 0 \leq 0.$$

Di conseguenza, non si può determinare alcuna riga pivot e questo problema LP è **illimitato**. La corrispondente famiglia di soluzioni ammissibili (6.8) è, per ogni valore $t \geq 0$:

$$x_2 = t, \quad x_1 = 1 + t, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0,$$

il cui valore obiettivo è $1 + 2t$.



In viola la soluzione di base ammissibile raggiunta dopo la prima operazione di pivot e la famiglia di soluzioni ammissibili (6.8) lungo la quale il problema LP è illimitato.

6.3.2 Aggiornamento del dizionario

Una volta determinate la colonna pivot x_p con $p \in \mathcal{N}$ e la riga pivot x_r con $r \in \mathcal{B}$, il nuovo dizionario può essere determinato con opportune operazioni sulle righe per realizzare lo scambio.

- Siano x_p la colonna pivot e x_r la riga pivot. Dall'equazione della riga pivot, abbiamo:

$$x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{rp}x_p - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \bar{a}_{rj}x_j.$$

Risolvendo rispetto a x_p si ottiene l'equazione della colonna pivot nel nuovo dizionario:

$$x_p = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}}x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}}x_r. \quad (6.11)$$

Per ogni altra variabile in base $i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}$, sostituendo con (6.11) si ottengono le loro equazioni nel nuovo dizionario:

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \bar{a}_{ij}x_j - \bar{a}_{ip} \left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}}x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}}x_r \right). \quad (6.12)$$

Per la funzione obiettivo, sostituendo con (6.11) si ottiene l'equazione della funzione obiettivo nel nuovo dizionario:

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \bar{c}_jx_j + \bar{c}_p \left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}}x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}}x_r \right). \quad (6.13)$$

Esempio 6.9: aggiornamento del dizionario

Per il problema LP dell'Esempio 6.1, con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, abbiamo il dizionario:

$$\begin{cases} x_3 = 12 + x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 12 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \\ z = 0 + 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Eseguendo l'operazione di pivot con x_1 come colonna pivot e x_5 come riga pivot, abbiamo:

$$x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = 12 + x_1 - 3x_2 = 12 + \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5\right) - 3x_2 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5$$

$$x_4 = 12 - x_1 - 2x_2 = 12 - \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5\right) - 2x_2 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5$$

$$z = 5x_1 + 2x_2 = 5\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5\right) + 2x_2 = \frac{40}{3} + \frac{16}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_5$$

Di conseguenza, il nuovo dizionario si scrive come segue:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5 \\ z = \frac{40}{3} + \frac{16}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_5 \end{cases}$$

Questo dizionario è associato alla soluzione ammissibile $\bar{x}_1 = \frac{8}{3}$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = \frac{44}{3}$, $\bar{x}_4 = \frac{28}{3}$, $\bar{x}_5 = 0$ di valore $z = \frac{40}{3}$.

6.4 Pseudocodice ad alto livello dell'algoritmo del semplice

- La **Fase 0 dell'algoritmo del semplice** consiste in una procedura per determinare una soluzione di base ammissibile iniziale e il dizionario iniziale associato. La Fase 0 è anche in grado di dimostrare che per un problema LP (6.1) non esiste alcuna soluzione di base ammissibile.

Algoritmo

Input

Un problema LP (6.1).

Output

Una soluzione ottima del problema LP (6.1), se esiste; altrimenti, un certificato che il problema LP è inammissibile o illimitato.

Passo 0: Inizializzazione

Se $b_i \geq 0$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, allora porre

$$\mathcal{B} \leftarrow \{n+1, n+2, \dots, n+m\}, \quad \mathcal{N} \leftarrow \{1, 2, \dots, n\},$$

e considerare la soluzione di base ammissibile

$$x_i = \bar{b}_i, \quad \forall i \in \mathcal{B}, \quad x_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

del problema LP (6.1), insieme al dizionario iniziale associato. Altrimenti, eseguire la Fase 0 dell'algoritmo del semplice.

Se la Fase 0 dimostra che non esiste alcuna soluzione di base ammissibile, allora il problema LP è **inammissibile** e **STOP**. Altrimenti, considerare la soluzione di base ammissibile trovata dalla Fase 0 insieme al suo dizionario.

Passo 1: Test di ottimalità

Rispetto al dizionario corrente

$$\begin{cases} x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, & \forall i \in \mathcal{B}, \\ z = \bar{z} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \end{cases}$$

controllare i costi ridotti. Se

$$\bar{c}_j \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

allora la soluzione di base ammissibile

$$x_i = \bar{b}_i, \quad \forall i \in \mathcal{B}, \quad x_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{N},$$

è una soluzione ottima e $\bar{z}$ è il valore ottimo del problema LP (6.1). In questo caso **STOP**.

Passo 2: Operazioni di pivot

La **colonna pivot** è una variabile fuori base x_p con $p \in \mathcal{N}$ tale che:

$$\bar{c}_p > 0$$

a. Se

$$\bar{a}_{ip} \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{B},$$

allora il problema LP (6.1) è **illimitato. STOP.**

b. Trovare il valore massimo t (detto t_m) tale che:

$$\bar{b}_i - t \bar{a}_{ip} \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad t_m \leftarrow \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ip}} : i \in \mathcal{B}, \bar{a}_{ip} > 0 \right\}$$

La **riga pivot** è una variabile in base x_r con $r \in \mathcal{B}$ tale che:

$$\bar{a}_{rp} > 0 \quad \text{e} \quad \bar{b}_r - t_m \bar{a}_{rp} = 0$$

c. Aggiornare il dizionario con la nuova base eseguendo le seguenti operazioni:

- La nuova equazione della colonna pivot x_p si ottiene isolando x_p nella riga pivot:

$$x_p = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}} x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}} x_r.$$

- Le nuove equazioni delle variabili in base x_i con $i \in \mathcal{B} \setminus \{r\}$ si ottengono sostituendo la nuova equazione di x_p nelle vecchie equazioni di x_i :

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \bar{a}_{ij} x_j - \bar{a}_{ip} \left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}} x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}} x_r \right).$$

- La nuova equazione della funzione obiettivo z si ottiene sostituendo la nuova equazione di x_p nella vecchia equazione di z :

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \bar{c}_j x_j + \bar{c}_p \left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{p\}} \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rp}} x_j - \frac{1}{\bar{a}_{rp}} x_r \right).$$

d. Aggiornare la base con la nuova partizione degli indici delle variabili:

$$\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{p\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} \leftarrow (\mathcal{N} \setminus \{p\}) \cup \{r\}$$

andare al passo 1.

Esempio 6.10: esecuzione dell'algoritmo del simplesso

Eseguiamo l'algoritmo del simplesso sul problema LP dell'Esempio 6.1. Poiché $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, la soluzione di base ammissibile iniziale è quella dell'Esempio 6.6, associata a $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$.

- Inizializzazione**

Consideriamo il dizionario iniziale:

$$\begin{cases} x_3 = 12 + x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 12 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \\ z = 0 + 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_3 = 12, \quad \bar{x}_4 = 12, \quad \bar{x}_5 = 8, \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0 \quad \text{di valore} \quad 0$$

- Iterazione 1**

Se aumentiamo il valore della variabile x_1 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_3 = 12 + x_1 \\ x_4 = 12 - x_1 \\ x_5 = 8 - 3x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{12 + x_1 \geq 0}_{x_3 \geq 0} \\ \underbrace{12 - x_1 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \\ \underbrace{8 - 3x_1 \geq 0}_{x_5 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \geq -12 \\ x_1 \leq 12 \\ x_1 \leq \frac{8}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 fino a $\min \left\{ 12, \frac{8}{3} \right\} = \frac{8}{3}$, il valore di x_5 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_1 entra in base e di conseguenza x_5 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_5 = 8 - 3x_1 + 2x_2 \quad \text{quindi} \quad x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$x_3 = 12 + \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 \right) - 3x_2 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5$$

$$x_4 = 12 - \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \right) - 2 x_2 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_5$$

$$z = 5 \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \right) + 2 x_2 = \frac{40}{3} + \frac{16}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_5$$

• **Iterazione 2**

Consideriamo il dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_5 \\ x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_5 \\ z = \frac{40}{3} + \frac{16}{3} x_2 - \frac{5}{3} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 5\}$. La soluzione di base ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{44}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{28}{3}, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{40}{3}$$

Se aumentiamo il valore della variabile x_2 , possiamo ottenere una soluzione migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 \\ x_3 = \frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 \\ x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{8}{3} + \frac{2}{3} x_2 \geq 0}^{x_1 \geq 0} \\ \frac{44}{3} - \frac{7}{3} x_2 \geq 0 \\ \underbrace{\frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 \geq 0}_{x_4 \geq 0} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \geq -4 \\ x_2 \leq \frac{44}{7} \\ x_2 \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_2 fino a $\min \left\{ \frac{44}{7}, \frac{7}{2} \right\} = \frac{7}{2}$, il valore di x_4 scende a 0.

Abbiamo quindi che:

x_2 entra in base e di conseguenza x_4 esce dalla base

Abbiamo:

$$x_4 = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_5 \quad \text{quindi} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario, otteniamo:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \right) - \frac{1}{3} x_5 = 5 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_5 \\x_3 &= \frac{44}{3} - \frac{7}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \right) - \frac{1}{3} x_5 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8} x_4 - \frac{5}{8} x_5 \\z &= \frac{40}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \right) - \frac{5}{3} x_5 = 32 - 2 x_4 - x_5\end{aligned}$$

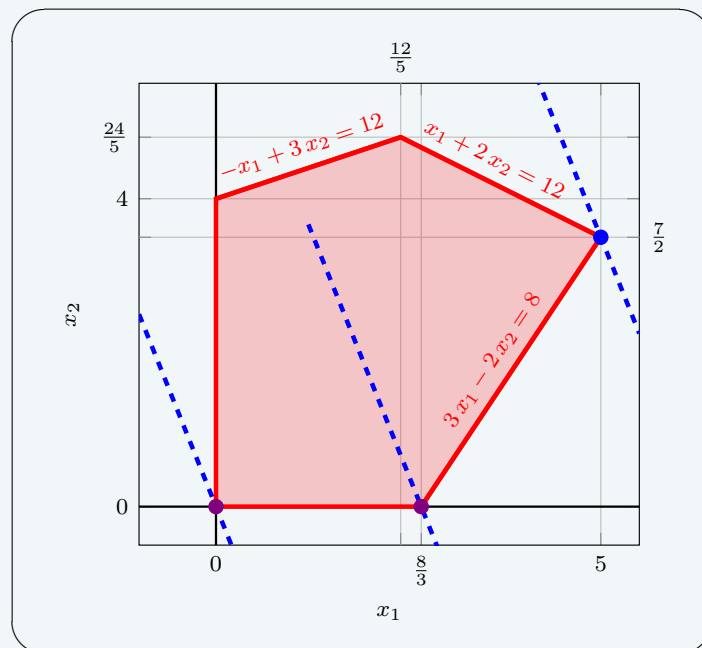
Di conseguenza, abbiamo ottenuto una soluzione ottima e questo è il dizionario ottimo:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & = & 5 & - & \frac{1}{4} x_4 & - & \frac{1}{4} x_5 \\ x_2 & = & \frac{7}{2} & - & \frac{3}{8} x_4 & + & \frac{1}{8} x_5 \\ x_3 & = & \frac{13}{2} & + & \frac{7}{8} x_4 & - & \frac{5}{8} x_5 \\ z & = & 32 & - & 2 x_4 & - & x_5 \end{array} \right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$. La soluzione ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 32$$

La regione ammissibile del problema LP (in forma canonica) è il poliedro ombreggiato in rosso:



In viola il primo e il secondo vertice esplorati da questa esecuzione dell'algoritmo del simplesso (prima di raggiungere quello ottimo rappresentato in blu).

In blu tratteggiato, le curve di livello $5x_1 + 2x_2 = 0$, $5x_1 + 2x_2 = \frac{40}{3}$ e $5x_1 + 2x_2 = 32$ della funzione obiettivo associate ai valori assunti nei tre vertici.

Alla prima iterazione la colonna pivot x_1 è stata scelta tra le due variabili fuori base con costo ridotto positivo. Scegliendo invece x_2 , l'algoritmo del simplesso raggiunge la stessa soluzione ottima dopo tre operazioni di pivot, visitando i vertici $(0, 4)$ e $(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$: la variazione della scelta della colonna pivot cambia il percorso sul poliedro e il numero di iterazioni (si veda l'esercizio *Algoritmo del simplesso con una diversa colonna pivot*, problema P10).

Condizioni di ottimalità e regole di pivot

7.1 Condizioni sufficienti di ottimalità

- Consideriamo un problema LP in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza, ottenuto da un problema LP in forma canonica di massimo con n variabili non negative e m vincoli lineari di minore o uguale aggiungendo m variabili di scarto non negative:

$$\max \quad \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (7.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (7.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (7.1c)$$

Teorema 7.1: condizioni sufficienti di ottimalità

Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (7.1), se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ è una soluzione ottima e $\mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}}$ è il valore ottimo.

Dimostrazione. Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (7.1), se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ è una soluzione ammissibile. Se $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$, per ogni soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' \mathbf{x} &= \mathbf{c}'_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}'_N \mathbf{x}_N = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \underbrace{\bar{\mathbf{c}}'}_{\leq \mathbf{0}} \underbrace{\mathbf{x}_N}_{\geq \mathbf{0}} \\ &\leq \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{c}'_N \mathbf{0} \end{aligned}$$

Quindi il valore della funzione obiettivo di tutte le soluzioni ammissibili è minore o uguale al valore della funzione obiettivo della soluzione di base ammissibile $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, e di conseguenza quest'ultima è una soluzione ottima di valore $\mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}}$. $\square$

- Abbiamo dimostrato che:

$$\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0} \text{ e } \bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \text{ e } \mathbf{x}_N = \mathbf{0}, \text{ soluzione ottima}$$

quindi “ $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ ” è una condizione sufficiente affinché “ $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, soluzione ottima” e “ $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, soluzione ottima” è una condizione necessaria affinché “ $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ ”. L’implicazione non vale nell’altro verso (vedremo un controesempio). Di conseguenza:

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \text{ e } \mathbf{x}_N = \mathbf{0}, \text{ soluzione ottima} \not\Rightarrow \bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$$

Corollario 7.2

Data una base $\mathbf{A}_B$ del problema LP (7.1), se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} < \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ è l’unica soluzione ottima.

Dimostrazione. Dal Teorema precedente segue che $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ è una soluzione ottima. Se $\bar{\mathbf{c}} < \mathbf{0}$ e poiché ogni soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ diversa da $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ deve avere $\mathbf{x}_N \neq \mathbf{0}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' \mathbf{x} &= \mathbf{c}'_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}'_N \mathbf{x}_N = \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \underbrace{\bar{\mathbf{c}}'}_{< \mathbf{0}} \underbrace{\mathbf{x}_N}_{\geq \mathbf{0} \text{ e } \neq \mathbf{0}} \\ &< \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{c}'_N \mathbf{0} \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ è l’unica soluzione ottima. □

- Di conseguenza, abbiamo dimostrato che:

$$\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0} \text{ e } \bar{\mathbf{c}} < \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \text{ e } \mathbf{x}_N = \mathbf{0}, \text{ soluzione ottima unica}$$

quindi “ $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} < \mathbf{0}$ ” è una condizione sufficiente affinché “ $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, unica soluzione ottima”. L’implicazione non vale nell’altro verso (daremo un controesempio). Di conseguenza

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \text{ e } \mathbf{x}_N = \mathbf{0}, \text{ soluzione ottima unica} \not\Rightarrow \bar{\mathbf{c}} < \mathbf{0}$$

Esempio 7.1: forma standard di massimo di problemi LP in forma canonica di massimo

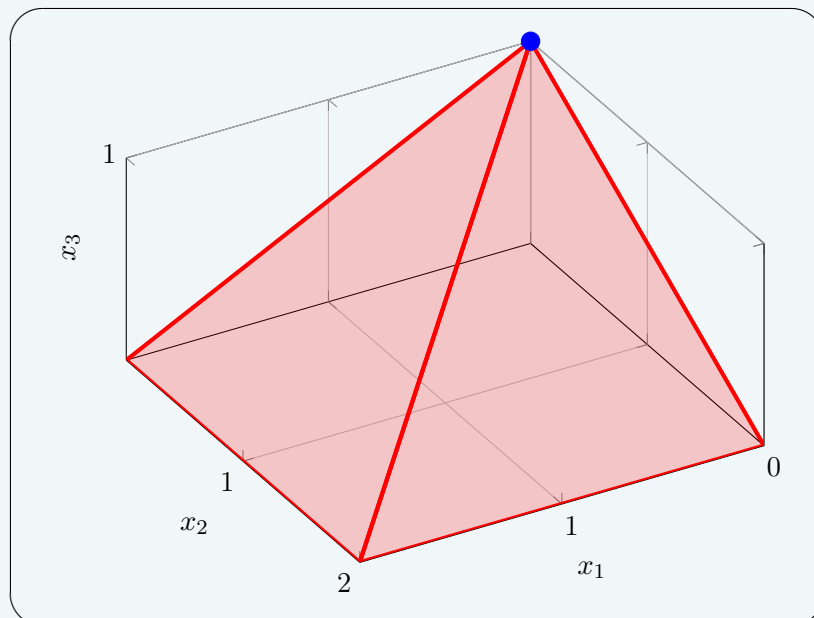
Introduciamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli e la sua forma standard con $n + m = 5$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + 2x_3 \leq 2 \\
 & \quad \quad \quad x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
 & \quad \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \max \quad x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\
 & \text{soggetto a} \quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
 & \quad \quad \quad x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\
 & \quad \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Nel problema LP in forma standard, abbiamo:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$



Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP})$ della forma canonica è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1$$

e il valore ottimo è:

$$z(\text{LP}) = 7$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP})$ della forma standard è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0$$

con lo stesso valore ottimo.

Esempio 7.2: condizioni di ottimalità

Per il problema LP dell'Esempio 7.1, con $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4, 5\}$, abbiamo:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = (2 \quad 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2} \quad 2\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = (1 \quad 0 \quad 0) - (2 \quad 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \quad 0 \quad 0) - \left(\frac{3}{2} \quad 2\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0 \quad 0) - \left(\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 2\right) = \left(-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -2\right) \end{aligned}$$

Poiché $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$, la soluzione di base ammissibile

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è l'unica soluzione ottima e $\bar{z} = 7$ è il valore ottimo.

Il dizionario associato è:

$$\begin{cases} x_2 = 0 + x_1 + x_4 - x_5 \\ x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \\ z = 7 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

Esempio 7.3: condizioni di ottimalità

Per il problema LP dell'Esempio 7.1, con $\mathcal{B} = \{3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} = (7 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (\frac{7}{2} \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}' &= \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}} = (1 \ 2 \ 0) - (7 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 2 \ 0) - (\frac{7}{2} \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 0) - (\frac{7}{2} \ 0 \ \frac{7}{2}) = (-\frac{5}{2} \ 2 \ -\frac{7}{2}) \end{aligned}$$

Poiché $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ e $\bar{z} = 7$ (il valore ottimo), la soluzione di base ammissibile

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una soluzione ottima ma $\bar{\mathbf{c}} \not\geq \mathbf{0}$. È un **controesempio** al fatto che una soluzione ottima di base implica costi ridotti non positivi. Poiché questa soluzione ottima è unica (si veda

l'Esempio 7.2), è anche un **controesempio** al fatto che una soluzione ottima di base unica implica costi ridotti negativi.

Il dizionario associato è:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - \frac{1}{2} x_1 & - \frac{1}{2} x_4 \\ x_5 = 0 + x_1 - x_2 + x_4 \\ z = 7 - \frac{5}{2} x_1 + 2 x_2 - \frac{7}{2} x_4 \end{cases}$$

7.2 Condizioni necessarie di ottimalità

7.2.1 Soluzioni di base ammissibili degeneri

Definizione 7.3: soluzioni di base ammissibili degeneri

Data una base A_B del problema LP (7.1), se $\bar{b} \geq 0$ e per qualche $i \in \mathcal{B}$ abbiamo $\bar{b}_i = 0$ allora $x_B = \bar{b}$ e $x_N = 0$ si chiama **soluzione di base ammissibile degenera**.

- In una soluzione di base ammissibile degenera ci sono più di n variabili a zero (anche alcune variabili in base sono a zero e non solo tutte le variabili fuori base).

Teorema 7.4: condizioni necessarie di ottimalità

Data una base A_B del problema LP (7.1), se $x_B = \bar{b}$ e $x_N = 0$ è una soluzione ottima non degenera allora $\bar{c} \leq 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $x_B = \bar{b}$ e $x_N = 0$ sia una soluzione ottima non degenera e che $\bar{c}_p > 0$ per qualche $p \in \mathcal{N}$. Poiché la soluzione è non degenera e ammissibile abbiamo $\bar{b} > 0$ ma allora esiste un valore positivo $\vartheta > 0$ tale che:

$$x_B = \bar{b} - \underbrace{A_B^{-1} A_p}_{=\bar{A}_p} \vartheta \geq 0$$

Allora, ponendo $x_p = \vartheta$ e $x_B = \bar{b} - \bar{A}_p \vartheta$ (tutte le altre variabili a zero), otteniamo un'altra soluzione ammissibile con un valore della funzione obiettivo strettamente migliore. Questo contraddice il fatto che $x_B = \bar{b}$ e $x_N = 0$ siano ottime, quindi deve valere $\bar{c} \leq 0$. $\square$

- Combinando con le condizioni sufficienti di ottimalità, abbiamo dimostrato che:

$$x_B = \bar{b} \text{ e } x_N = 0, \text{ soluzione ottima non degenera} \iff \bar{b} > 0 \text{ e } \bar{c} \leq 0$$

quindi “ $\bar{\mathbf{b}} > \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ ” è una condizione necessaria e sufficiente affinché “ $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, soluzione ottima non degenera” e viceversa.

Esempio 7.4: soluzioni di base ammissibili degeneri

Per il problema LP dell'Esempio 7.1, con $\mathcal{B} = \{3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$, abbiamo la soluzione di base ammissibile degenera:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 7.5: operazione di pivot degenera

Un'operazione di pivot degenera si verifica quando $t_m = 0$, cioè quando la riga pivot x_r ha $\bar{b}_r = 0$; questo può accadere solo se la soluzione di base ammissibile è degenera.

Il valore della funzione obiettivo aumenta in ogni operazione di pivot non degenera e può rimanere invariato solo in una degenera.

7.3 Regole di pivot

- Nelle operazioni di pivot, una **regola di pivot** è un modo di rispondere alle due domande:
 1. Come determinare la colonna pivot nei casi in cui ci siano più variabili fuori base con costo ridotto positivo?
 2. Come determinare la riga pivot nei casi in cui ci siano più variabili in base che assumono il valore zero quando si pone il valore della colonna pivot al suo massimo valore possibile t_m ?

7.3.1 Regole di pivot anti-ciclaggio

Teorema 7.6

Se l'algoritmo del simplesso non termina, allora deve ciclare.

Dimostrazione. Esistono al più $\binom{n+m}{m}$ basi $\mathbf{A}_B$ del problema LP (7.1) e, di conseguenza, dizionari. Quindi, se l'algoritmo del simplesso non termina, deve visitare alcuni di questi dizionari più di una volta. Di conseguenza, l'algoritmo cicla. $\square$

- È molto raro che l'algoritmo del simplesso cicli, ma esistono istanze in cui cicla.
- Il ciclaggio può verificarsi solo all'interno di una sequenza di soluzioni di base ammissibili degeneri in cui la funzione obiettivo rimane invariata.

7.3.1.1 Regola di pivot di Bland

- La **regola di pivot di Bland** (regola di pivot dell'indice minimo) seleziona la colonna pivot e la riga pivot come segue:

1. la **colonna pivot** è la variabile fuori base x_p con l'**indice minimo** $p \in \mathcal{N}$ tale che:

$$\bar{c}_p > 0 \quad \text{o, equivalentemente} \quad c_p > \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_p$$

2. la **riga pivot** è la variabile in base x_r con l'**indice minimo** $r \in \mathcal{B}$ tale che:

$$\bar{a}_{rp} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rp}} = t_m$$

Teorema 7.7

L'algoritmo del simplesso termina purché la colonna pivot e la riga pivot siano selezionate dalla regola di pivot di Bland in ogni operazione di pivot.

- Per il Teorema precedente, la dimostrazione deve solo mostrare che il ciclaggio è impossibile quando si usa la regola di pivot di Bland.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo e supponiamo che si verifichi il ciclaggio. Di conseguenza, sia

$$D_0, D_1, D_2, \dots, D_{k-1}, D_0, D_1, D_2, \dots$$

una sequenza di dizionari tale che il dizionario D_0 si ripete dopo k operazioni di pivot degeneri con valore della funzione obiettivo costante.

Diciamo che una variabile è *volubile* se è una variabile in base in alcuni dizionari e una variabile fuori base in altri.

Sia x_t la variabile volubile con indice massimo t e sia D un dizionario

$$\begin{cases} x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, & \forall i \in \mathcal{B} \\ z = \bar{z} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j \end{cases}$$

della sequenza ciclica $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$ in cui x_t è la riga pivot. Sia x_s la colonna pivot del dizionario D . Senza perdita di generalità, assumiamo che $D = D_0$.

Sia D^* un dizionario

$$\begin{cases} x_i = \bar{b}_i^* - \sum_{j \in \mathcal{N}^*} \bar{a}_{ij}^* x_j, & \forall i \in \mathcal{B}^* \\ z = \bar{z}^* + \sum_{j \in \mathcal{N}^*} \bar{c}_j^* x_j \end{cases}$$

della sequenza $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$ in cui x_t è la colonna pivot.

Poiché tutte le operazioni di pivot nel ciclo sono degeneri (il valore della funzione obiettivo rimane costante), abbiamo $\bar{z} = \bar{z}^* = v$, e quindi possiamo scrivere la funzione obiettivo del dizionario D^* come

$$z = v + \sum_{j=1}^{n+m} \hat{c}_j^* x_j \quad \text{dove} \quad \hat{c}_j^* = \begin{cases} \bar{c}_j^* & \text{se } j \in \mathcal{N}^* \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7.2)$$

Consideriamo la soluzione ottenuta aumentando il valore di x_s fino a ϑ :

$$x_s = \vartheta, \quad x_i = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \{s\}, \quad x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} \vartheta, \quad \forall i \in \mathcal{B}$$

Di conseguenza, per la funzione obiettivo z dei dizionari D e D^* , abbiamo:

$$z = v + \bar{c}_s \vartheta \quad \text{e} \quad z = v + \hat{c}_s^* \vartheta + \sum_{i \in \mathcal{B}} \hat{c}_i^* (\bar{b}_i - \bar{a}_{is} \vartheta)$$

Uguagliando queste due espressioni di z , abbiamo:

$$\left(\bar{c}_s - \hat{c}_s^* + \sum_{i \in \mathcal{B}} \hat{c}_i^* \bar{a}_{is} \right) \vartheta = \sum_{i \in \mathcal{B}} \hat{c}_i^* \bar{b}_i \Rightarrow \bar{c}_s - \hat{c}_s^* + \sum_{i \in \mathcal{B}} \hat{c}_i^* \bar{a}_{is} = 0$$

L'implicazione è dovuta al fatto che l'equazione deve valere per ogni ϑ (di conseguenza, abbiamo anche $\sum_{i \in \mathcal{B}} \hat{c}_i^* \bar{b}_i = 0$).

Il fatto che x_s sia la colonna pivot in D implica che $\bar{c}_s > 0$. Poiché x_s è volubile e $s \neq t$ (x_s è fuori base e x_t è in base in D), abbiamo $s < t$. Inoltre, abbiamo $\hat{c}_s^* \leq 0$: se $s \in \mathcal{B}^*$, allora $\hat{c}_s^* = 0$; se $s \in \mathcal{N}^*$ e $\hat{c}_s^* = \bar{c}_s^* > 0$, allora, per la regola di Bland e poiché $s < t$, x_s e non x_t sarebbe la colonna pivot in D^* . Di conseguenza, abbiamo:

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} \hat{c}_i^* \bar{a}_{is} = \hat{c}_s^* - \bar{c}_s < 0 \Rightarrow \text{esiste } r \in \mathcal{B} : \hat{c}_r^* \bar{a}_{rs} < 0 \text{ e quindi } \hat{c}_r^* \neq 0 \text{ e } r \in \mathcal{N}^*$$

Quindi x_r è volubile e perciò $r \leq t$. Infatti, $r < t$, poiché $\hat{c}_t^* \bar{a}_{ts} > 0$: entrambi i fattori sono positivi, poiché $\hat{c}_t^* = \bar{c}_t^* > 0$ (x_t è la colonna pivot in D^*) e $\bar{a}_{ts} > 0$ (x_t è la riga pivot in D).

Il fatto che $r < t$ implica che $\hat{c}_r^* \leq 0$ (altrimenti, per la regola di Bland, x_r sarebbe la colonna pivot in D^*). Allora abbiamo:

$$\hat{c}_r^* \bar{a}_{rs} < 0 \text{ e } \hat{c}_r^* \leq 0 \Rightarrow \bar{a}_{rs} > 0$$

Poiché ciascuno dei dizionari del ciclo descrive la stessa soluzione ammissibile (tutte le operazioni di pivot sono degeneri), ogni variabile volubile è nulla in tutti questi dizionari (è nulla in un dizionario in cui è fuori base).

In particolare, $x_r = 0$. Ma in D , x_r è in base. Quindi $\bar{b}_r = 0$ e, poiché $\bar{a}_{rs} > 0$, abbiamo $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = 0 = t_m$. Quindi x_r era una candidata a essere la riga pivot in D , e poiché $r < t$, per la regola di Bland avrebbe dovuto essere scelta al posto di x_t .

Questa è la contraddizione che dimostra che una sequenza ciclica di dizionari non può esistere usando la regola di Bland. $\square$

Fase 0 dell'algoritmo del simplesso

8.1 Il problema ausiliario del simplesso

- Consideriamo un problema LP in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza, ottenuto da un problema LP in forma canonica di massimo con n variabili non negative e m vincoli lineari di minore o uguale aggiungendo m variabili di scarto non negative:

$$\max \quad \mathbf{c}' \mathbf{x} \quad (8.1a)$$

$$\text{soggetto a} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (8.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (8.1c)$$

- Il Passo 0 dell'algoritmo del simplesso richiede una soluzione di base ammissibile iniziale. Se $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, la partizione

$$\mathcal{B} = \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$$

è associata alla base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e alla soluzione di base ammissibile iniziale $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{0}$.

- Se invece $b_i < 0$ per qualche $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, questa partizione non è associata a una soluzione di base ammissibile, e l'algoritmo del simplesso non può essere avviato. In questo caso eseguiamo la **Fase 0** dell'algoritmo del simplesso.

Definizione 8.1: Fase 0 dell'algoritmo del simplesso

La **Fase 0** dell'algoritmo del simplesso è una procedura che determina una soluzione di base ammissibile del problema LP (8.1), insieme al dizionario associato, oppure dimostra che il problema LP (8.1) è **inammissibile**.

Definizione 8.2: problema ausiliario del semplice

Dato un problema LP (8.1) in forma standard di massimo, il **problema ausiliario del semplice** associato è il problema LP in forma standard di massimo ottenuto aggiungendo una variabile non negativa x_0 , detta **variabile ausiliaria**, sottraendola dal membro sinistro di ogni vincolo lineare e sostituendo la funzione obiettivo:

$$\max -x_0 \quad (8.2a)$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j - x_0 = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (8.2b)$$

$$x_0, x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n+m\} \quad (8.2c)$$

- La variabile ausiliaria x_0 è posta in prima posizione, e quindi i dati del problema ausiliario del semplice (8.2) sono il vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m+1}$ delle variabili, il vettore dei costi $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{n+m+1}$, la cui prima componente è -1 e le cui altre componenti sono 0 , la matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m+1)}$, ottenuta aggiungendo in testa alla matrice dei vincoli originale una colonna di m componenti tutte uguali a -1 , e il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ -1 & a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Il problema ausiliario del semplice (8.2) non è mai inammissibile e non è mai illimitato:

1. ammette sempre una soluzione ammissibile, ottenuta ponendo $x_j = 0$ per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_0 = \max\{0, -\min_i b_i\}$ e le variabili di scarto $x_{n+i} = b_i + x_0 \geq 0$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$;
2. il suo valore obiettivo è $-x_0 \leq 0$ per ogni soluzione ammissibile.

Di conseguenza, per il Teorema fondamentale della programmazione lineare, ammette sempre una soluzione ottima.

Teorema 8.3: ammissibilità di un problema LP

Il problema LP (8.1) ammette una soluzione ammissibile se e solo se il valore ottimo del problema ausiliario del semplice (8.2) associato è uguale a 0 .

- L'idea della dimostrazione è che una soluzione ammissibile del problema LP (8.1) è esattamente una soluzione ammissibile del problema ausiliario del semplice (8.2) in cui la variabile ausiliaria assume il valore $x_0 = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni.

($\Rightarrow$) Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile del problema LP (8.1). Il punto ottenuto aggiungendo $\bar{x}_0 = 0$ è una soluzione ammissibile del problema ausiliario del semplice (8.2), poiché

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \bar{x}_j - \underbrace{\bar{x}_0}_{=0} = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

e il suo valore obiettivo è $-\bar{x}_0 = 0$. Poiché il valore obiettivo di ogni soluzione ammissibile di (8.2) è $-x_0 \leq 0$, questa soluzione è ottima e il valore ottimo è 0.

($\Leftarrow$) Sia 0 il valore ottimo del problema ausiliario del semplice (8.2) e sia $\tilde{x}$ una soluzione ottima. Allora $\tilde{x}_0 = 0$ e, per (8.2b),

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \tilde{x}_j = b_i + \underbrace{\tilde{x}_0}_{=0} = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Di conseguenza, il punto ottenuto eliminando la variabile ausiliaria soddisfa i vincoli di uguaglianza (8.1b) e i vincoli di non negatività (8.1c), e quindi è una soluzione ammissibile del problema LP (8.1). $\square$

Se il valore ottimo del problema ausiliario del semplice (8.2) è strettamente negativo, allora il problema LP (8.1) è **inammissibile**.

Esempio 8.1: problema ausiliario del semplice

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale (detto [Esempio 8.1](#)):

$$\begin{array}{llllll} \max & & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 & \leq & -3 \\ & & - & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aggiungendo $m = 3$ variabili di scarto, otteniamo il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n + m = 5$ variabili non negative:

$$\begin{array}{rcllclclclcl}
 \max & x_1 & + & 2 & x_2 & & & & & \\
 \text{soggetto a} & -x_1 & - & & x_2 & + & x_3 & & & = & -3 \\
 & -x_1 & + & & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
 & x_1 & + & & x_2 & & & & + & x_5 & = & 6 \\
 & x_1, & & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 & &
 \end{array}$$

Poiché $b_1 = -3 < 0$, la partizione $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ non è associata a una soluzione di base ammissibile, e dobbiamo eseguire la Fase 0.

Il problema ausiliario del simplesso associato, con $n + m + 1 = 6$ variabili non negative, è il seguente:

$$\begin{array}{rcllclclclclcl}
 \max & - & x_0 & & & & & & & & \\
 \text{soggetto a} & - & x_0 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & = & -3 \\
 & - & x_0 & - & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
 & - & x_0 & + & x_1 & + & x_2 & & & & + & x_5 & = & 6 \\
 & x_0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 & &
 \end{array}$$

8.2 Risoluzione del problema ausiliario del simplesso

- Il problema ausiliario del simplesso (8.2) si risolve con l'algoritmo del simplesso. Le sue m variabili di scarto danno la partizione

$$\mathcal{B} = \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

che è associata alla base $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}$ e al dizionario

$$\begin{cases} x_i = b_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, & \forall i \in \mathcal{B} \\ -w = 0 - x_0, \end{cases}$$

dove $-w = -x_0$ indica la funzione obiettivo del problema ausiliario del simplesso (cioè $w = x_0$). Questo dizionario non è associato a una soluzione di base ammissibile, poiché $b_i < 0$ per qualche $i \in \mathcal{B}$.

- Basta una sola **operazione di pivot speciale** per ottenere una soluzione di base ammissibile del problema ausiliario del simplesso: la variabile ausiliaria x_0 entra in base, e la variabile che esce dalla base è quella con il valore più negativo.

Operazione di pivot speciale. La colonna pivot è la variabile ausiliaria x_0 e la riga pivot è la variabile in base x_r con

$$r \in \arg \min \{ b_i : i \in \mathcal{B} \}.$$

Dopo questa operazione di pivot, i valori delle variabili sono

$$x_0 = -b_r \quad \text{e} \quad x_i = b_i - b_r, \quad \forall i \in \mathcal{B} \setminus \{r\},$$

e sono tutti non negativi, poiché $b_r \leq b_i$ per ogni $i \in \mathcal{B}$.

- A partire dalla soluzione di base ammissibile ottenuta con l'operazione di pivot speciale, l'algoritmo del sempliceo viene eseguito sul problema ausiliario del sempliceo fino a trovare una soluzione ottima. Poiché il problema ausiliario del sempliceo non è mai illimitato, l'algoritmo termina sempre con un dizionario ottimo.

Al termine della Fase 0 si verifica esattamente uno dei tre casi seguenti:

1. il valore ottimo del problema ausiliario del sempliceo è **strettamente negativo**: il problema LP (8.1) è **inammissibile**;
2. il valore ottimo è 0 e la variabile ausiliaria x_0 è **fuori base**: la base ottima del problema ausiliario del sempliceo, dopo aver eliminato x_0 da $\mathcal{N}$, è una base del problema LP (8.1) associata a una soluzione di base ammissibile;
3. il valore ottimo è 0 e la variabile ausiliaria x_0 è **in base**, necessariamente con valore $x_0 = 0$: un'ulteriore operazione di pivot fa uscire x_0 dalla base, riconducendoci al caso precedente.

- Nel terzo caso, la soluzione di base ammissibile del problema ausiliario del sempliceo è **degenere**, poiché la variabile in base x_0 assume il valore 0. Si esegue un'operazione di pivot sulla riga di x_0 , scegliendo come colonna pivot una qualsiasi variabile fuori base x_j con $j \in \mathcal{N}$ tale che $\bar{a}_{0j} \neq 0$: il valore delle altre variabili in base non cambia, poiché il valore di x_0 è 0. Tale variabile esiste sempre: altrimenti la riga di x_0 in $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}$ (senza la colonna di x_0) sarebbe nulla, in contraddizione con $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, che vale poiché $\mathbf{A}$ contiene la matrice identità delle variabili di scarto.

Esempio 8.2: Fase 0 dell'algoritmo del sempliceo

Consideriamo il problema ausiliario del sempliceo dell'Esempio 8.1. Con $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$, il dizionario iniziale è:

$$\begin{cases} x_3 = -3 + x_0 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 2 + x_0 + x_1 - x_2 \\ x_5 = 6 + x_0 - x_1 - x_2 \\ -w = 0 - x_0 \end{cases}$$

La soluzione di base associata non è ammissibile, poiché $\bar{b}_3 = -3 < 0$.

Operazione di pivot speciale. La colonna pivot è x_0 e la riga pivot è x_3 , la variabile in base con il valore più negativo. Risolvendo rispetto a x_0 la prima equazione otteniamo

$x_0 = 3 + x_3 - x_1 - x_2$, e sostituendola nelle altre equazioni otteniamo il dizionario con $\mathcal{B} = \{0, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 5 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 9 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -w = -3 + x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

La soluzione di base ammissibile associata è $\bar{x}_0 = 3$, $\bar{x}_4 = 5$, $\bar{x}_5 = 9$ e $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$, di valore $-w = -3$.

Prima operazione di pivot. Il costo ridotto di x_1 è $\bar{c}_1 = 1 > 0$, e quindi la colonna pivot è x_1 . I valori della sua colonna sono $\bar{a}_{01} = 1$ e $\bar{a}_{51} = 2$, e quindi

$$t_m = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{9}{2} \right\} = 3$$

e la riga pivot è x_0 . Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 2, 3\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_0 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 5 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 3 + 2x_0 - x_3 \\ -w = 0 - x_0 \end{cases}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, e quindi questo dizionario è ottimo: il valore ottimo del problema ausiliario del simplesso è 0 e la variabile ausiliaria x_0 è fuori base. Di conseguenza, il problema LP dell'Esempio 8.1 è **ammissibile** e

$$\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$$

è una base associata a una soluzione di base ammissibile.

8.3 Dalla Fase 0 all'algoritmo del semplice

- Al termine della Fase 0, il dizionario ottimo del problema ausiliario del semplice fornisce le equazioni delle variabili in base del problema LP (8.1) in funzione delle sue variabili fuori base, una volta eliminata la variabile ausiliaria x_0 da $\mathcal{N}$.
- L'ultima equazione di quel dizionario, tuttavia, è quella della funzione obiettivo $-w$ del problema ausiliario del semplice, e deve essere sostituita dall'equazione della funzione obiettivo originale z .

L'equazione della funzione obiettivo originale si ottiene **sostituendo**, in

$$z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j,$$

l'equazione di ogni variabile in base x_i con $i \in \mathcal{B}$, in modo che z sia scritta in funzione delle sole variabili fuori base. Equivalentemente, si calcola come

$$\bar{z} = \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}'_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{N}}.$$

- Una volta disponibile il dizionario iniziale del problema LP (8.1), l'algoritmo del semplice viene eseguito come di consueto, a partire dal suo Passo 1.

Esempio 8.3: dalla Fase 0 all'algoritmo del semplice

Consideriamo il dizionario ottimo del problema ausiliario del semplice dell'[Esempio 8.1](#), con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$. Eliminando la variabile ausiliaria x_0 , le equazioni delle variabili in base del problema LP sono:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 5 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 3 - x_3 \end{cases}$$

La funzione obiettivo del problema LP dell'[Esempio 8.1](#) è $z = x_1 + 2x_2$, e in essa compare la variabile in base x_1 . Sostituendo la sua equazione, otteniamo:

$$z = \underbrace{3 - x_2 + x_3}_{= x_1} + 2x_2 = 3 + x_2 + x_3.$$

Di conseguenza, con $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3\}$, il dizionario iniziale del problema LP dell'[Esempio 8.1](#) è:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + x_3 \\ x_4 = 5 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 3 - x_3 \\ z = 3 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

e la soluzione di base ammissibile associata è $\bar{x}_1 = 3$, $\bar{x}_4 = 5$, $\bar{x}_5 = 3$ e $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$, di valore 3.

Esempio 8.4: esecuzione dell'algoritmo del simplesso dopo la Fase 0

A partire dal dizionario iniziale dell'Esempio 8.1 determinato dalla Fase 0, eseguiamo l'algoritmo del simplesso.

Prima operazione di pivot. Il costo ridotto di x_2 è $\bar{c}_2 = 1 > 0$, e quindi la colonna pivot è x_2 . I valori della sua colonna sono $\bar{a}_{12} = 1$ e $\bar{a}_{42} = 2$, e quindi

$$t_m = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{5}{2} \right\} = \frac{5}{2}$$

e la riga pivot è x_4 . Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 3 - x_3 \\ z = \frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

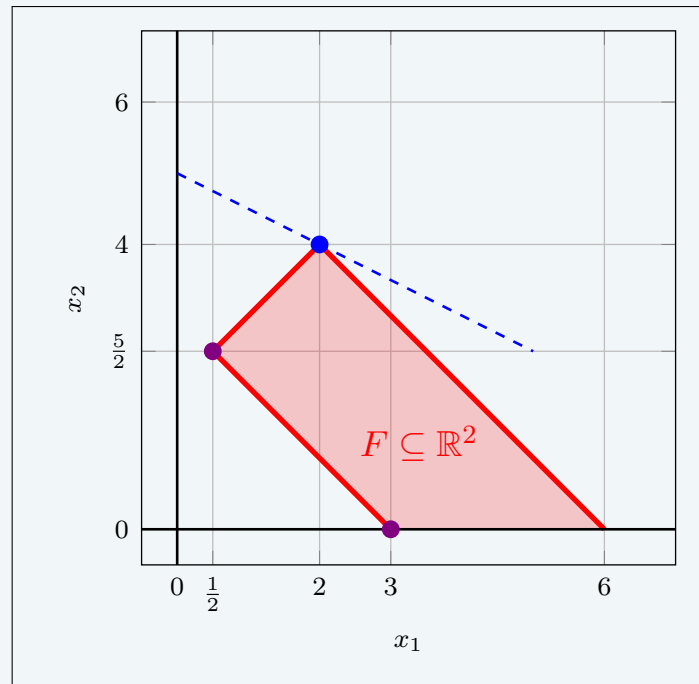
Seconda operazione di pivot. Il costo ridotto di x_3 è $\bar{c}_3 = \frac{3}{2} > 0$, e quindi la colonna pivot è x_3 . L'unico valore positivo della sua colonna è $\bar{a}_{53} = 1$, e quindi $t_m = \frac{3}{1} = 3$ e la riga pivot è x_5 . Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$, è:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = 4 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = 3 - x_5 \\ z = 10 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \end{cases}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, e quindi questo dizionario è ottimo. Una soluzione ottima del problema LP dell'Esempio 8.1 è

$$\tilde{x}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e il valore ottimo è $z(LP) = 10$.



La regione ammissibile F è delimitata dalle rette $-x_1 - x_2 = -3$ (in basso a sinistra), $-x_1 + x_2 = 2$ (in alto a sinistra), $x_1 + x_2 = 6$ (a destra) e dall'asse x_1 ; in blu tratteggiato l'insieme di livello $x_1 + 2x_2 = 10$ passante per il vertice ottimo. In viola la soluzione di base ammissibile $(3, 0)$ determinata dalla Fase 0 e il vertice $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ raggiunto dopo la prima operazione di pivot, in blu la soluzione ottima raggiunta dall'algoritmo del simplesso.

8.4 Riconoscere i problemi LP inammissibili

- Se il valore ottimo del problema ausiliario del simplesso (8.2) è strettamente negativo, allora, per il Teorema 8.3, il problema LP (8.1) è inammissibile. In questo caso il dizionario ottimo del problema ausiliario del simplesso è un **certificato di inammissibilità**.

Esempio 8.5: problema LP inammissibile

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale (detto [Esempio 8.5](#)):

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Poiché $b_2 = -4 < 0$, eseguiamo la Fase 0. Con $\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{0, 1, 2\}$, il dizionario iniziale del problema ausiliario del simplesso è:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + x_0 - x_1 - x_2 \\ x_4 = -4 + x_0 + x_1 + x_2 \\ -w = 0 - x_0 \end{cases}$$

Operazione di pivot speciale. La colonna pivot è x_0 e la riga pivot è x_4 , la variabile in base con il valore più negativo. Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{0, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4\}$, è:

$$\begin{cases} x_0 = 4 - x_1 - x_2 + x_4 \\ x_3 = 6 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\ -w = -4 + x_1 + x_2 - x_4 \end{cases}$$

Prima operazione di pivot. La colonna pivot è x_1 , poiché $\bar{c}_1 = 1 > 0$. I valori della sua colonna sono $\bar{a}_{01} = 1$ e $\bar{a}_{31} = 2$, e quindi $t_m = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2} \right\} = 3$ e la riga pivot è x_3 . Il nuovo dizionario, con $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 3, 4\}$, è:

$$\begin{cases} x_0 = 1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = 3 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ -w = -1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

Tutti i costi ridotti sono non positivi, e quindi questo dizionario è ottimo. Il valore ottimo del problema ausiliario del simplesso è $-1 < 0$, cioè la variabile ausiliaria assume il valore $\tilde{x}_0 = 1$ in ogni soluzione ottima. Di conseguenza, il problema LP dell'Esempio 8.5 è **inammissibile**.

8.5 Pseudocodice dell'algoritmo del simplesso con la Fase 0

Algoritmo

Input

Un problema LP (8.1).

Output

Una soluzione ottima del problema LP (8.1), se esiste; altrimenti, un certificato che il problema LP è inammissibile o illimitato.

Passo 0: Inizializzazione

Se $b_i \geq 0$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, allora porre

$$\mathcal{B} \leftarrow \{n+1, n+2, \dots, n+m\}, \quad \mathcal{N} \leftarrow \{1, 2, \dots, n\},$$

insieme al dizionario associato, e andare al Passo 1.

Altrimenti, eseguire la **Fase 0**:

- a. costruire il problema ausiliario del simplesso (8.2) e il suo dizionario iniziale con $\mathcal{B} \leftarrow \{n+1, \dots, n+m\}$ e $\mathcal{N} \leftarrow \{0, 1, \dots, n\}$;
- b. eseguire l'**operazione di pivot speciale**: la colonna pivot è x_0 e la riga pivot è x_r con $r \in \arg \min\{b_i : i \in \mathcal{B}\}$;
- c. eseguire il Passo 1 e il Passo 2 sul problema ausiliario del simplesso fino a trovare un dizionario ottimo;
- d. se il valore ottimo è strettamente negativo, allora il problema LP (8.1) è **inammissibile** e STOP;
- e. se la variabile ausiliaria x_0 è in base, eseguire un'operazione di pivot sulla sua riga per farla uscire dalla base;
- f. eliminare x_0 da $\mathcal{N}$ e sostituire l'equazione di $-w$ con l'equazione della funzione obiettivo originale z , scritta in funzione delle variabili fuori base.

Andare al Passo 1.

Passo 1: Test di ottimalità

Rispetto al dizionario corrente, se $\bar{c}_j \leq 0$ for all $j \in \mathcal{N}$, allora la soluzione di base ammissibile $x_i = \bar{b}_i$, $\forall i \in \mathcal{B}$, e $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, è una soluzione ottima e $\bar{z}$ è il valore ottimo. In questo caso STOP.

Passo 2: Operazioni di pivot

La **colonna pivot** è una variabile fuori base x_p con $p \in \mathcal{N}$ tale che $\bar{c}_p > 0$. Se $\bar{a}_{ip} \leq 0$ per ogni $i \in \mathcal{B}$, allora il problema LP (8.1) è **illimitato** e STOP. Altrimenti calcolare

$$t_m \leftarrow \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ip}} : i \in \mathcal{B}, \bar{a}_{ip} > 0 \right\},$$

determinare la **riga pivot** x_r con $\bar{a}_{rp} > 0$ e $\bar{b}_r - t_m \bar{a}_{rp} = 0$, aggiornare il dizionario e porre $\mathcal{B} \leftarrow (\mathcal{B} \setminus \{r\}) \cup \{p\}$ e $\mathcal{N} \leftarrow (\mathcal{N} \setminus \{p\}) \cup \{r\}$. Andare al Passo 1.

8.6 Il Teorema fondamentale della programmazione lineare

- La Fase 0 e l'algoritmo del simplesso, eseguiti uno dopo l'altro, dimostrano il seguente teorema, che descrive tutti i possibili esiti di un problema LP e mostra che, ogni volta che esiste una soluzione ottima, una di esse è una soluzione di base ammissibile.

Teorema 8.4: Teorema fondamentale della programmazione lineare

Per ogni problema LP (8.1) in forma standard di massimo:

1. se ammette una soluzione ammissibile, allora ammette una soluzione **di base** ammissibile;
2. se ammette una soluzione ottima, allora ammette una soluzione **di base** ammissibile che è ottima;
3. è **inammissibile**, è **illimitato**, oppure ammette una **soluzione ottima**.

- L'idea della dimostrazione è che la Fase 0 e l'algoritmo del simplesso, eseguiti con una regola di pivot anti-ciclaggio, terminano dopo un numero finito di operazioni di pivot, e che ciascuno dei loro possibili esiti è uno dei tre casi dell'enunciato.

Dimostrazione. Eseguiamo la Fase 0 sul problema LP (8.1), e poi l'algoritmo del simplesso con la regola di pivot di Bland. Entrambi terminano dopo un numero finito di operazioni di pivot, poiché il numero di basi è finito e la regola di Bland impedisce il ciclaggio.

Punto 1. Se il problema LP (8.1) ammette una soluzione ammissibile, allora, per il Teorema 8.3, il valore ottimo del problema ausiliario del simplesso è 0. La Fase 0 termina con un dizionario ottimo del problema ausiliario del simplesso in cui, eventualmente dopo un'ulteriore operazione di pivot, la variabile ausiliaria x_0 è fuori base. La partizione associata $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ è quindi una base del problema LP (8.1) la cui soluzione di base $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ è ammissibile.

Punto 3. Se il problema LP (8.1) non è inammissibile, per il Punto 1 l'algoritmo del simplesso può essere avviato da una soluzione di base ammissibile. Termina in uno di due modi:

- (i) con un dizionario in cui $\bar{c}_j \leq 0$ per ogni $j \in \mathcal{N}$: per le condizioni sufficienti di ottimalità, la soluzione di base ammissibile associata è una soluzione ottima;
- (ii) con una variabile fuori base x_p tale che $\bar{c}_p > 0$ e $\bar{a}_{ip} \leq 0$ per ogni $i \in \mathcal{B}$: per il certificato di illimitatezza, il problema LP è illimitato.

Di conseguenza, il problema LP è inammissibile, illimitato, oppure ammette una soluzione ottima, e i tre casi sono mutuamente esclusivi.

Punto 2. Se il problema LP (8.1) ammette una soluzione ottima, allora non è né inammissibile né illimitato, e quindi l'algoritmo del simplesso termina nel caso (i) sopra, con una soluzione ottima che è una soluzione di base ammissibile. $\square$

Il Teorema fondamentale della programmazione lineare ha un'importante conseguenza algoritmica: per risolvere un problema LP basta cercare una soluzione ottima tra le sue soluzioni **di base** ammissibili, il cui numero è finito e al più

$$\binom{n+m}{m}.$$

L'algoritmo del simplesso ne esplora un piccolo sottoinsieme, passando da una soluzione di base ammissibile a un'altra il cui valore obiettivo non è minore.