



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare

Volume 1 — Funzioni lineari, poliedri e problemi di programmazione lineare

Funzioni lineari (gradiente, Hessiano e insiemi di livello), semispazi e poliedri, problemi di ottimizzazione lineare con le loro soluzioni ottime, esempi e proprietà, le forme canonica e standard con il metodo grafico, esiti possibili ed equivalenze fra le forme.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Funzioni lineari	2
1.1	Funzioni lineari	2
2	Semispazi e poliedri	7
2.1	Semispazi e iperpiani di supporto	7
2.2	Poliedri	9
3	Problemi di ottimizzazione lineare	12
3.1	Problemi di programmazione lineare	12
3.2	Esempi e proprietà dei problemi di ottimizzazione lineare	16
4	Problemi di programmazione lineare	20
4.1	Forma canonica di massimo	20
4.2	Forma standard di massimo	27
5	Esiti possibili e formulazioni equivalenti	34
5.1	Le due forme di riferimento	34
5.2	Problemi LP inammissibili e illimitati	36
5.3	Riformulazioni equivalenti	40

Funzioni lineari

1.1 Funzioni lineari

Definizione 1.1: funzione lineare

Dato un vettore (colonna)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$$

la funzione (scalare) associata

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \mapsto \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{\mathbf{c}'\mathbf{x}} \quad (1.1)$$

si dice **funzione lineare**.

Definizione 1.2: gradiente di una funzione lineare

Il **gradiente** (vettore delle derivate parziali) della funzione lineare $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$ è:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}}$$

Definizione 1.3: matrice Hessiana di una funzione lineare

La **matrice Hessiana** (matrice delle derivate parziali seconde) della funzione lineare $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$ è la matrice $n \times n$:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

poiché ogni derivata parziale prima $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = c_j$ è una costante.

Definizione 1.4: insiemi di livello di una funzione lineare

Gli **insiemi di livello** della funzione lineare $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$ (gli insiemi di punti in cui la funzione è **costante**) sono:

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}'\mathbf{x} = k \}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

- Il gradiente di una funzione lineare è lo stesso vettore $\mathbf{c}$ in ogni punto e, di conseguenza, la sua **matrice Hessiana** (matrice delle derivate parziali seconde) è ovunque la matrice nulla.
- Gli insiemi di livello di una funzione lineare sono gli **iperpiani** perpendicolari al gradiente.

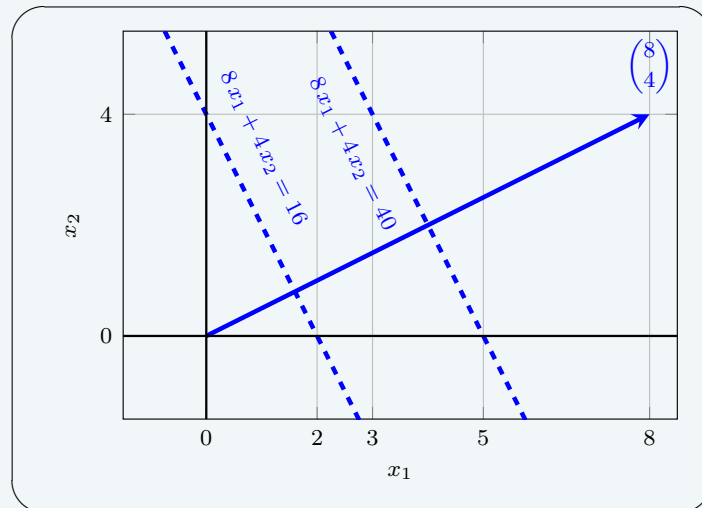
Esempio 1.1: gradiente e insiemi di livello di funzioni lineari

Con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, la funzione lineare associata è:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 8x_1 + 4x_2$$

Gradiente:

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$



La figura mostra:

- Il gradiente calcolato in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\nabla f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ (freccia blu)
- Due insiemi di livello (linee blu tratteggiate): $8x_1 + 4x_2 = 16$ e $8x_1 + 4x_2 = 40$

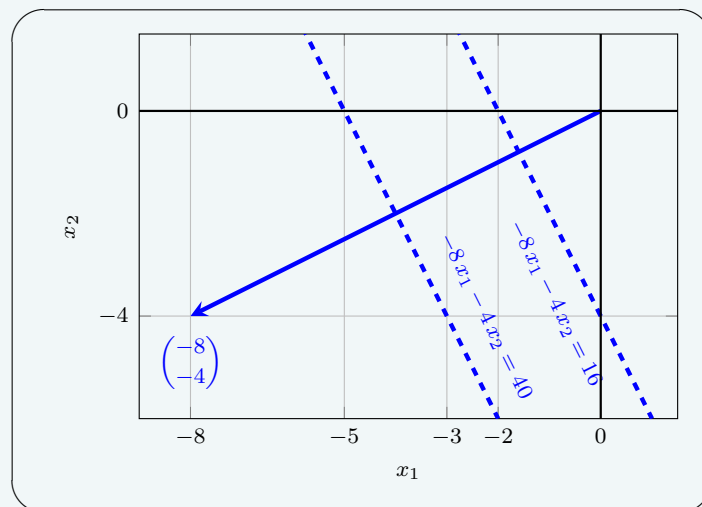
Esempio 1.2: gradiente e insiemi di livello di funzioni lineari

Con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, la funzione lineare associata è:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -8x_1 - 4x_2$$

Gradiente:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

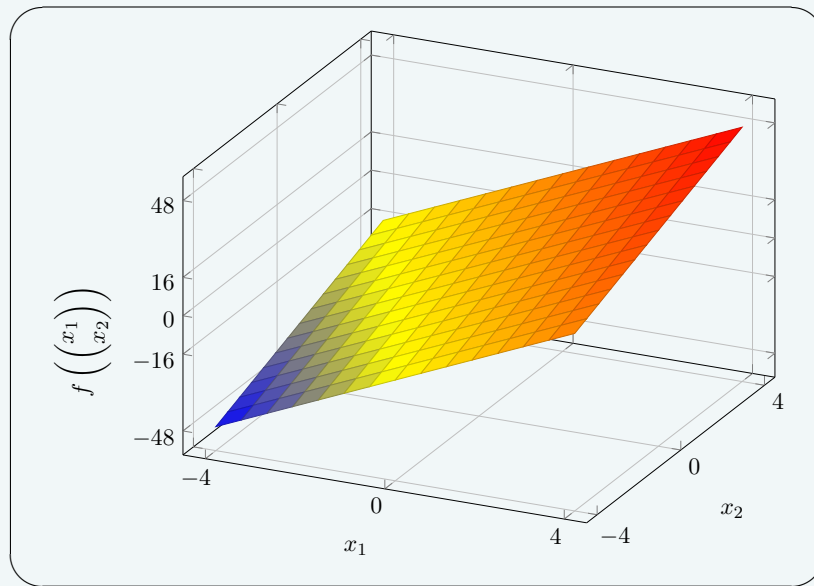


La figura mostra:

- Il gradiente calcolato in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\nabla f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ (freccia blu)
- Due insiemi di livello (linee blu tratteggiate): $-8x_1 - 4x_2 = 16$ e $-8x_1 - 4x_2 = 40$

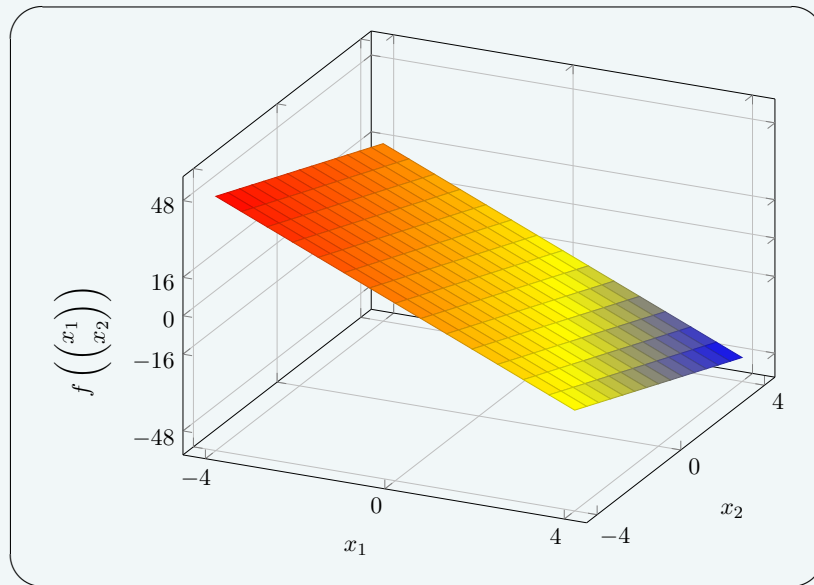
Esempio 1.3: grafici di funzioni lineari

Con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 8x_1 + 4x_2$. Il suo grafico è:



Esempio 1.4: grafici di funzioni lineari

Con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -8x_1 - 4x_2$. Il suo grafico è:



Semispazi e poliedri

2.1 Semispazi e iperpiani di supporto

Definizione 2.1: semispazio

Dato un vettore (riga)

$$\underbrace{(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)}_a \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

e uno scalare $b \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a \ x \leq b}$

si chiama **semispazio**.

- Dato un semispazio, l'insieme

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j = b \right\}$$

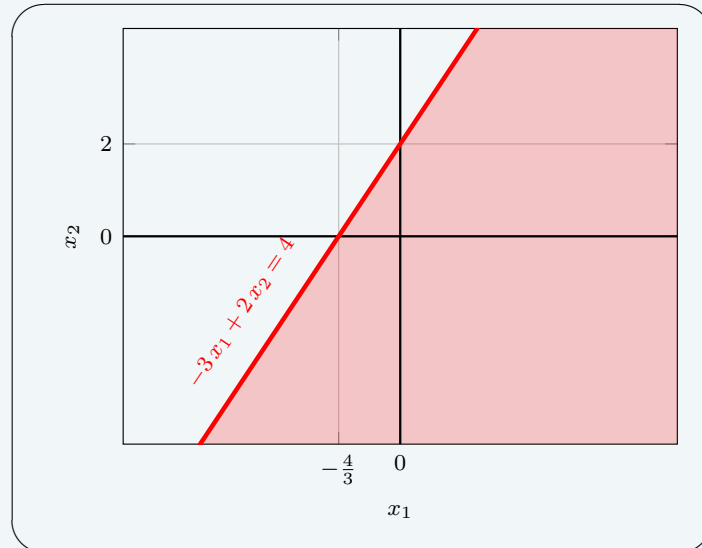
$\underbrace{\hspace{10em}}_{a \ x = b}$

si chiama **iperpiano di supporto** del semispazio.

Esempio 2.1: semispazio e iperpiano di supporto

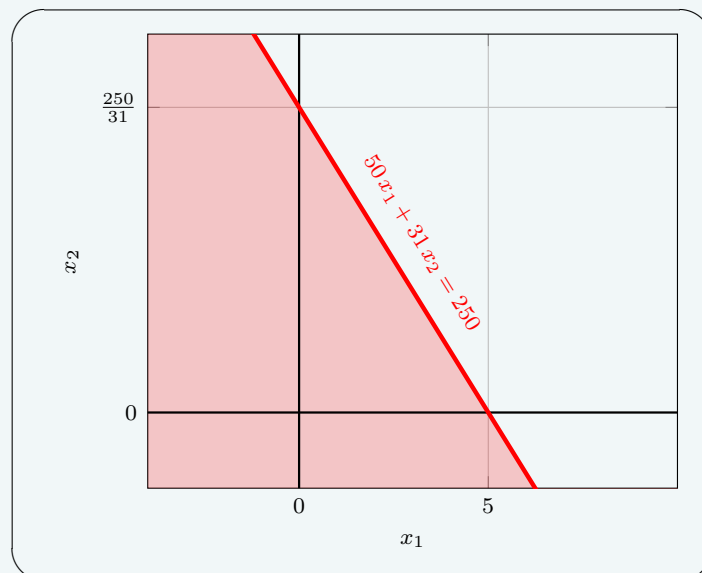
Consideriamo il seguente semispazio in $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \right\} \quad \text{dove } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } b = 4$$



Consideriamo il seguente semispazio in $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \right\} \quad \text{dove } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 50 & 31 \end{pmatrix} \text{ e } b = 250$$



2.2 Poliedri

Definizione 2.2: poliedro

Data una matrice

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

e un vettore (colonna)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b \in \mathbb{R}^m$$

l'insieme

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i}_{A x \leq b}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \right\}$$

si chiama **poliedro**.

Definizione 2.3: poliedro limitato

Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se esiste $\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{=\beta} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ tale che

$$\underbrace{-\beta_j \leq x_j \leq \beta_j}_{|x_j| \leq \beta_j}, \quad \forall x \in P, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

Qui, β_j è un **upper bound**, mentre $-\beta_j$ è un **lower bound** di P lungo la dimensione $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definizione 2.4: politopo

Un poliedro limitato si chiama **politopo**.

Esempio 2.2: poliedro

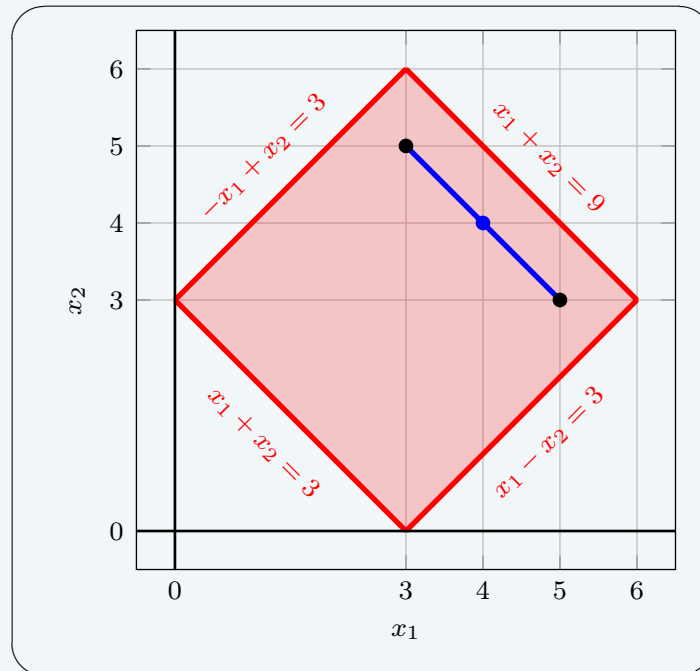
Consideriamo il seguente poliedro definito come intersezione di quattro semispazi:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - x_2 \leq -3, \quad x_1 + x_2 \leq 9, \quad -x_1 + x_2 \leq 3, \quad x_1 - x_2 \leq 3 \right\}$$

Ad esempio, consideriamo due punti, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, nell'insieme P . Tutti i punti del segmento blu in figura, dati da:

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2\lambda \\ 3 + 2\lambda \end{pmatrix} \quad \text{per } \lambda \in [0, 1],$$

appartengono anch'essi a P . Infatti, per ogni $\lambda \in [0, 1]$ abbiamo $x_1 + x_2 = 8$ e $x_1 - x_2 = 2 - 4\lambda \in [-2, 2]$, quindi tutte e quattro le disuguaglianze che definiscono P sono soddisfatte.



Ad esempio, con $\lambda = \frac{1}{2}$, il punto del segmento è quello mostrato in blu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 3 + (1 - \frac{1}{2}) \cdot 5 \\ \frac{1}{2} \cdot 5 + (1 - \frac{1}{2}) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Questo poliedro P è anche un politopo, poiché è un poliedro limitato in $\mathbb{R}^2$. Infatti, ponendo $\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ abbiamo

$$|x_1| \leq 6 \quad \text{e} \quad |x_2| \leq 6 \quad \text{per ogni} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in P$$

- Osserviamo che se un poliedro contiene i seguenti due semispazi:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \mathbf{x} \leq b\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \mathbf{x} \geq b\}$$

contiene, *de facto*, il seguente iperpiano:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \mathbf{x} = b\}$$

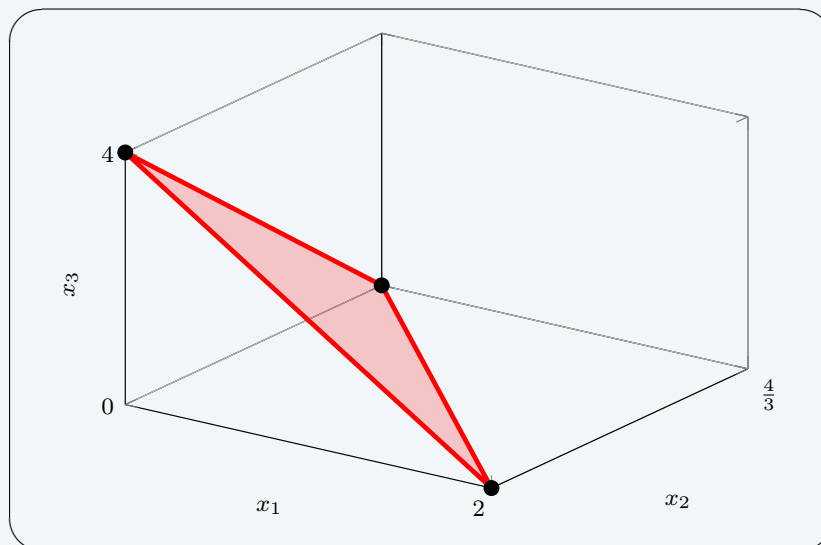
In generale, un poliedro è dato dall'intersezione di semispazi e iperpiani.

Esempio 2.3: poliedro

Consideriamo il seguente poliedro dato dall'intersezione di tre semispazi e un iperpiano:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \right\}$$

La sua rappresentazione tridimensionale corrisponde all'iperpiano mostrato in figura.



Problemi di ottimizzazione lineare

3.1 Problemi di programmazione lineare

Definizione 3.1: Problema di programmazione lineare in forma di minimo e di massimo

Dati un poliedro $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il **problema di programmazione lineare** LP associato consiste nel,

- in **forma di minimo**, trovare un punto $\tilde{x}(LP) \in F$ tale che

$$f(\tilde{x}(LP)) \leq f(x), \quad \forall x \in F;$$

- in **forma di massimo**, trovare un punto $\tilde{x}(LP) \in F$ tale che

$$f(\tilde{x}(LP)) \geq f(x), \quad \forall x \in F.$$

3.1.1 Regione ammissibile e funzione obiettivo

- Il poliedro F si chiama **regione ammissibile** del problema LP; i suoi punti $x \in F$ si chiamano **soluzioni ammissibili** del problema LP.
- La funzione lineare f è la **funzione obiettivo** del problema LP; essa associa un valore obiettivo a ogni soluzione ammissibile.
- Per definire il poliedro della regione ammissibile di un problema LP servono il numero m delle sue disuguaglianze/uguaglianze e
 1. una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — la **matrice dei vincoli**,
 2. un vettore (colonna) $b \in \mathbb{R}^m$ — il **vettore dei termini noti**.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b \in \mathbb{R}^m$$

Inoltre, per ogni riga occorre specificare se corrisponde a un semispazio (disuguaglianza lineare) o a un iperpiano (uguaglianza lineare).

- Per definire la funzione obiettivo lineare di un problema LP serve il vettore (colonna) $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, detto **vettore dei costi**:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n.$$

I **dati** di un problema LP sono la matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, il vettore dei costi $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e, per ogni riga, l'informazione che specifica se il vincolo corrispondente è un'uguaglianza o una disuguaglianza.

3.1.2 Soluzioni ottime e valore ottimo

Definizione 3.2: soluzione ottima e valore ottimo di un problema LP

- Un punto $\tilde{\mathbf{x}}(LP) \in F$ come nella definizione del problema LP si chiama **soluzione ottima** del problema LP.

1. In forma di minimo,

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) \in \arg \min \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}.$$

2. In forma di massimo,

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP) \in \arg \max \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}.$$

- Il valore $f(\tilde{\mathbf{x}}(LP))$ si chiama **valore ottimo** del problema LP e si indica con $z(LP)$.

1. In forma di minimo,

$$z(LP) = \underbrace{\min \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}}_{=f(\tilde{\mathbf{x}}(LP))}.$$

2. In forma di massimo,

$$z(LP) = \underbrace{\max \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}}_{=f(\tilde{\mathbf{x}}(LP))}.$$

- Un problema LP può ammettere più soluzioni ottime (anche infinite), oppure nessuna. In tali casi, gli operatori $\arg \min$ e $\arg \max$ restituiscono l'insieme di tutte le soluzioni ottime quando esistono, e l'insieme vuoto altrimenti.
- Con un lieve abuso di notazione:

1. In **forma di minimo**, scriviamo il problema LP come

$$\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}.$$

2. In **forma di massimo**, scriviamo il problema LP come

$$\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}.$$

Sebbene si usino i simboli “min” e “max”, l’obiettivo di un problema LP è **trovare una soluzione ottima** $\tilde{\mathbf{x}}(LP)$, quando esiste, e non soltanto determinare il valore ottimo $z(LP)$.

- In **forma di minimo**, una soluzione ottima è un **punto di minimo** e il valore ottimo corrispondente è il **minimo** della funzione obiettivo sulla regione ammissibile. Analogamente, in **forma di massimo**, una soluzione ottima è un **punto di massimo** e il valore ottimo corrispondente è il **massimo** della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.

3.1.3 Problemi LP senza soluzione ottima

- Una soluzione ottima di un problema LP può non esistere per una delle due seguenti ragioni:
 1. Se la funzione obiettivo decresce indefinitamente in forma di minimo o cresce indefinitamente in forma di massimo, il problema LP si dice **illimitato**. In questi casi scriviamo rispettivamente $z(LP) = -\infty$ e $z(LP) = +\infty$.
 2. Se la regione ammissibile è vuota, cioè non esistono soluzioni ammissibili, il problema LP si dice **inammissibile**. Non ha soluzione ottima e $z(LP)$ non è definito.
- Non esiste una terza ragione: se un problema LP ha soluzioni ammissibili e non è illimitato, l’estremo inferiore (in forma di minimo) o l’estremo superiore (in forma di massimo) della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è sempre **raggiunto** da una soluzione ammissibile. Ciò dipende dalla struttura speciale dei problemi LP: la funzione obiettivo è lineare e la regione ammissibile è un poliedro, un insieme **chiuso** definito da disuguaglianze lineari “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” e da uguaglianze lineari “ $=$ ”, mai da disuguaglianze strette “ $<$ ”, “ $>$ ”. Ad esempio, l’intervallo $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ non è un poliedro e $\min\{x \text{ soggetto a } 0 < x \leq 1\}$ non è un problema LP: il suo estremo inferiore 0 non è raggiunto.
- I tre possibili esiti di un problema LP (inammissibile, illimitato, soluzione ottima) sono definiti formalmente e studiati nel capitolo «Esiti possibili e formulazioni equivalenti».

Esempio 3.1: problemi LP senza soluzione ottima

- Consideriamo la funzione obiettivo $f(x) = 2x + 1$ e la regione ammissibile $F = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$, una semiretta. In forma di minimo, $2x + 1 \geq -3$ per ogni x ammissibile, con uguaglianza solo per $x = -2$: l’unica soluzione ottima è $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = (-2)$ e $z(LP) =$

–3. In forma di massimo, per ogni valore $M \geq 0$ la soluzione ammissibile $x = M$ ha $f(M) = 2M + 1 > M$: la funzione obiettivo cresce indefinitamente e il problema è **illimitato**, $z(LP) = +\infty$.

- Consideriamo la regione ammissibile $F = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1, x \geq 1\}$. Nessun numero reale soddisfa entrambe le disuguaglianze, quindi $F = \emptyset$: per ogni funzione obiettivo lineare, sia la forma di minimo sia la forma di massimo sono **inammissibili**.

3.1.4 Soluzioni ammissibili e bound sul valore ottimo

- Given

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}(LP)} \in F$$

una **soluzione ammissibile** di un problema LP, abbiamo

1. in forma di **minimo**, il seguente **upper bound**:

$$z(LP) \leq \underbrace{f(\bar{x}(LP))}_{UB(\bar{x})}.$$

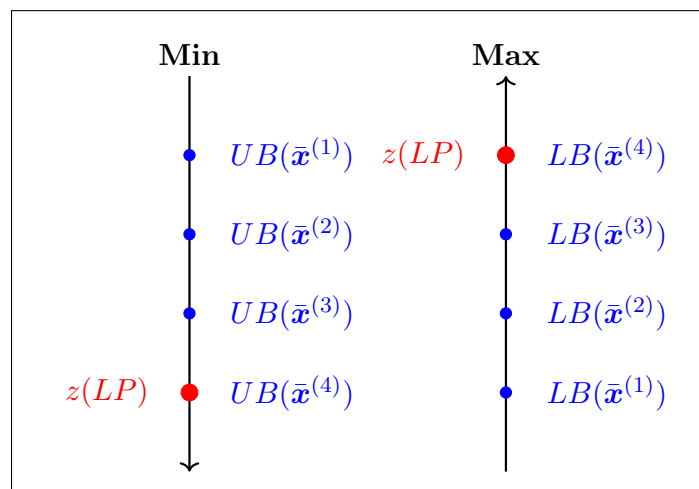
2. in forma di **massimo**, il seguente **lower bound**:

$$\underbrace{f(\bar{x}(LP))}_{LB(\bar{x})} \leq z(LP).$$

A titolo di esempio, la figura seguente considera quattro soluzioni ammissibili

$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \bar{x}^{(4)} \in F$$

e mostra come forniscano lower bound nel caso di massimo e upper bound nel caso di minimo per il valore ottimo $z(LP)$ (la quarta raggiunge il valore ottimo).



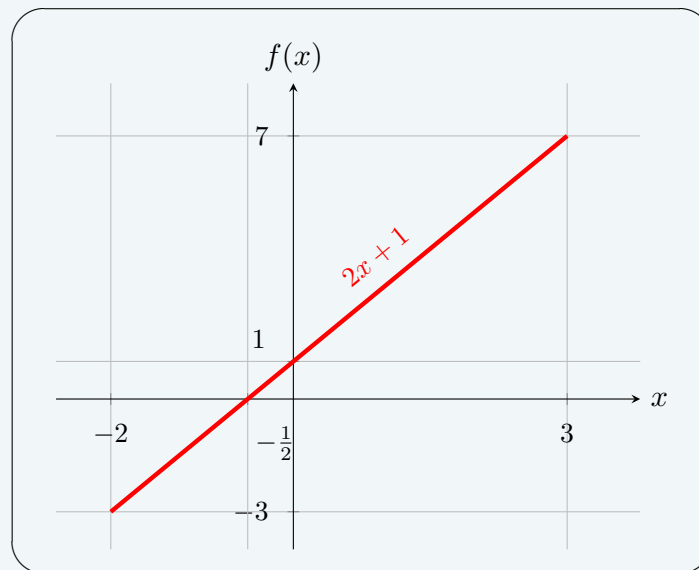
3.2 Esempi e proprietà dei problemi di ottimizzazione lineare

- Il seguente esempio è un problema di ottimizzazione lineare in una variabile: la regione ammissibile è un intervallo (un poliedro in $\mathbb{R}$) e la funzione obiettivo è lineare.

Esempio 3.2: problema LP in una variabile

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto 2x + 1 \quad \text{e} \quad F = [-2, 3]$$



I problemi LP associati in forma di minimo e di massimo sono:

$$\min \left\{ 2x + 1 \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3 \right\}$$

$$\max \left\{ 2x + 1 \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3 \right\}$$

- Per la forma di minimo, poiché la funzione lineare è strettamente crescente, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(LP) = (-2) \quad \text{e} \quad z(LP) = -3.$$

- Per la forma di massimo, poiché la funzione lineare è strettamente crescente, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(LP) = (3) \quad \text{e} \quad z(LP) = 7.$$

La funzione derivata è costante:

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f' : x \mapsto 2$$

$$f'(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

3.2.1 Proprietà dei problemi LP

- Le seguenti proprietà valgono per ogni problema LP con regione ammissibile F e funzione obiettivo $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$.
- Le enunciamo usando min e max per problemi LP che ammettono una soluzione ottima. Se uno dei due problemi LP di un'uguaglianza è inammissibile (illimitato), lo è anche l'altro.
- Per ogni problema LP, abbiamo:

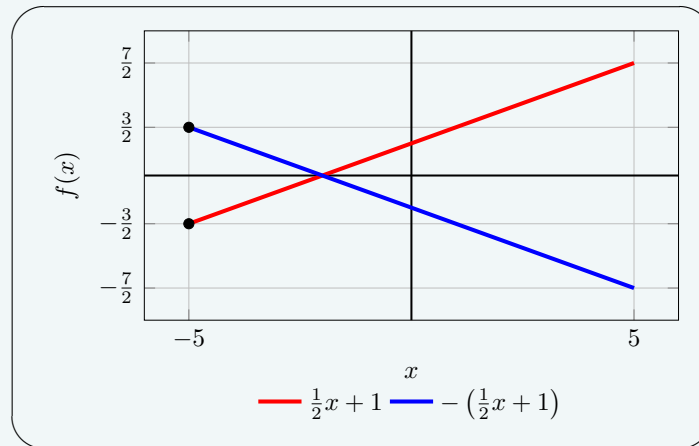
$$\min \left\{ \mathbf{c}'\mathbf{x} \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} = - \max \left\{ -\mathbf{c}'\mathbf{x} \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \quad (3.1)$$

- Le soluzioni ottime non cambiano: un punto minimizza $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ su F se e solo se massimizza $-\mathbf{c}'\mathbf{x}$ su F .

Esempio 3.3: proprietà: minimo e massimo

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{1}{2}x + 1 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\} \\ & \quad \quad \quad = -\frac{3}{2} \\ & = - \max \left\{ -\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\} \\ & \quad \quad \quad = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Entrambi gli ottimi sono raggiunti in $x = -5$ (punti neri in figura).



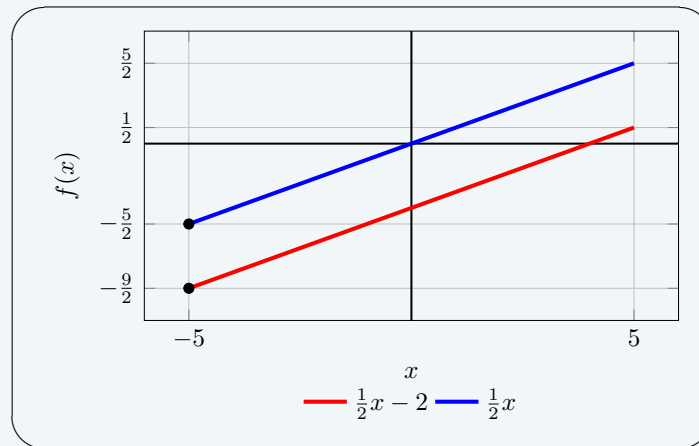
- Per ogni problema LP e per ogni $a \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\min \left\{ a + \mathbf{c}'\mathbf{x} \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} = a + \min \left\{ \mathbf{c}'\mathbf{x} \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \quad (3.2)$$

- Sommare una costante sposta il grafico della funzione obiettivo verso l'alto o verso il basso: le soluzioni ottime non cambiano.

Esempio 3.4: proprietà: somma di una costante

$$\underbrace{\min \left\{ \frac{1}{2}x - 2 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-\frac{9}{2}} = -2 + \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{2}x \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-\frac{5}{2}}$$



- Per ogni problema LP e per ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$, abbiamo:

$$\min \left\{ a \mathbf{c}' \mathbf{x} \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} = a \min \left\{ \mathbf{c}' \mathbf{x} \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \quad (3.3)$$

- Moltiplicare per una costante positiva dilata (o comprime) verticalmente il grafico: le soluzioni ottime non cambiano.

Esempio 3.5: proprietà: moltiplicazione per una costante positiva

$$\underbrace{\min \left\{ 2 \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-7} = 2 \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{2}x - 1 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-\frac{7}{2}}$$

Problemi di programmazione lineare

4.1 Forma canonica di massimo

Definizione 4.1: Problemi di programmazione lineare in forma canonica di massimo

Dati:

1. un vettore dei costi $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
2. una matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
3. un vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ con m righe

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$$

un **problema di programmazione lineare LP in forma canonica di massimo** con n variabili non negative

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$$

e m vincoli lineari di minore o uguale è il seguente problema di ottimizzazione:

$$\max \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{c'x} \quad (4.1a)$$

$$\text{soggetto a } \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}}_{Ax \leq b}, \quad (4.1b)$$

$$\underbrace{x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}}_{x \geq 0}, \quad (4.1c)$$

dove $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è un vettore (colonna) di n zeri.

Esempio 4.1: Problema LP in forma canonica di massimo

Consideriamo i seguenti dati di un problema LP con $n = 2$ e $m = 3$:

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le componenti numeriche dei due vettori colonna e della matrice sono

$$c_1 = 5, c_2 = 2, a_{11} = -1, a_{12} = 3, a_{21} = 1, a_{22} = 2, \\ a_{31} = 3, a_{32} = -2, b_1 = 12, b_2 = 12, b_3 = 8.$$

Il problema ha $n = 2$ variabili non negative $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Il problema LP associato in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale è il seguente:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 12 \\ & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Esempio 4.2: Problema LP in forma canonica di massimo

Consideriamo i seguenti dati di un problema LP con $n = 2$ e $m = 2$:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I valori numerici dei due vettori colonna e della matrice sono

$$c_1 = -2, \quad c_2 = -4, \quad a_{11} = -1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = -1, \quad b_1 = -2, \quad b_2 = 0.$$

Il problema ha $n = 2$ variabili decisionali non negative $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Il problema LP associato in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale è il seguente:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

4.1.1 Regione ammissibile e funzione obiettivo

Definizione 4.2: regione ammissibile e funzione obiettivo

- La **regione ammissibile** di un problema LP (4.1) è il **poliedro** F definito come segue:

$$F = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}}_{\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}}, \quad \underbrace{x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}}_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \right\}. \quad (4.2)$$

La regione ammissibile è definita dai vincoli lineari di minore o uguale (4.1b) e dai vincoli di non negatività (4.1c).

- La **funzione obiettivo** (4.1a) di un problema LP (4.1), da massimizzare, è la

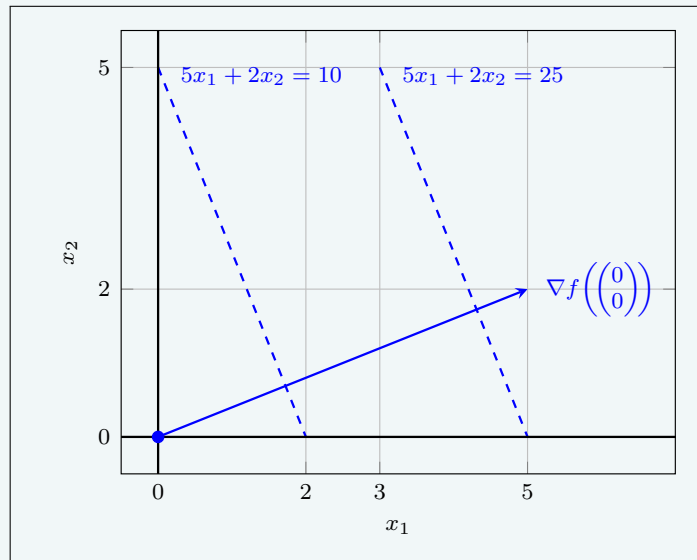
funzione lineare f (scalare) definita come segue:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \mapsto \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{c'x} \quad (4.3)$$

Esempio 4.3: funzione obiettivo

La funzione obiettivo del problema LP dell'Esempio 4.1 è la funzione lineare scalare:

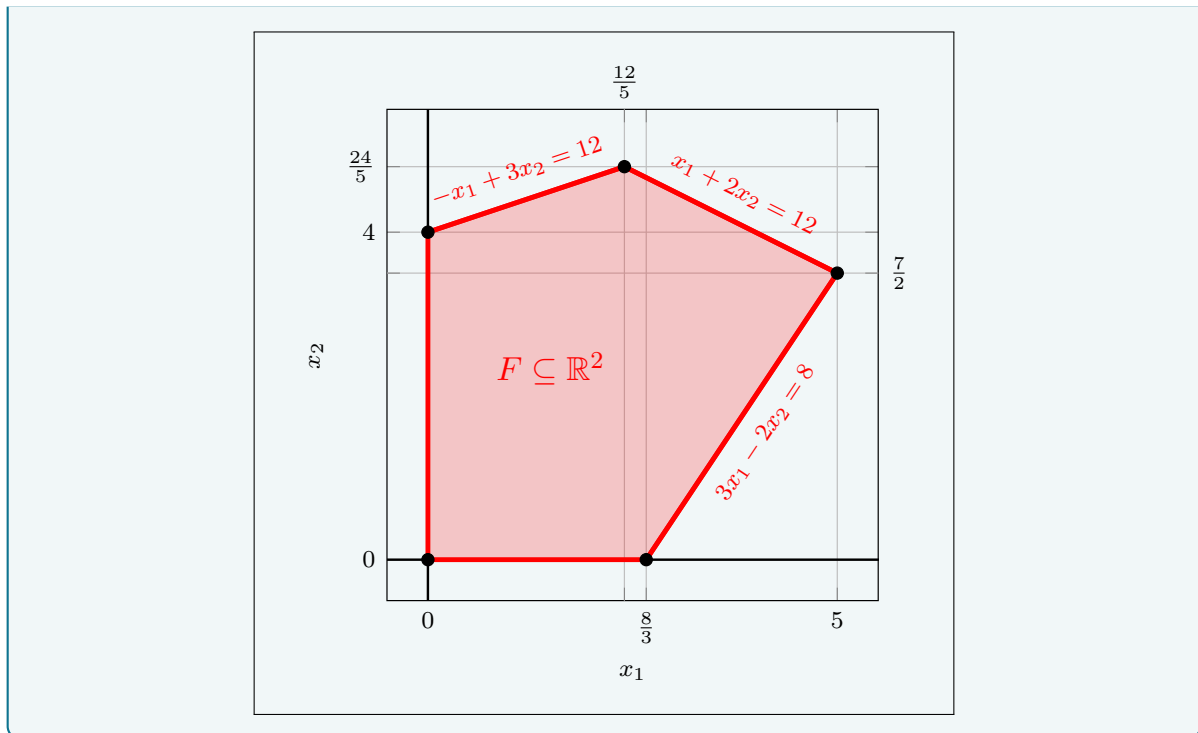
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 5x_1 + 2x_2 \quad \text{il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Esempio 4.4: regione ammissibile

La regione ammissibile del problema LP dell'Esempio 4.1 è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad x_1 + 2x_2 \leq 12, \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 8, \quad x_1, x_2 \geq 0 \right\}.$$



4.1.2 Lower bound

Definizione 4.3: soluzione ammissibile e lower bound

- Data

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}(LP)} \in F$$

una **soluzione ammissibile** del problema LP (4.1) (un punto che soddisfa i vincoli (4.1b) e (4.1c)), possiamo calcolare un **lower bound** $LB(\bar{\mathbf{x}})$ sul valore ottimo $z(LP)$ come segue:

$$LB(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \quad (4.4)$$

Per ogni soluzione ammissibile $\bar{\mathbf{x}}(LP) \in F$ di un problema LP (4.1), abbiamo

$$LB(\bar{\mathbf{x}}) \leq z(LP) \quad (4.5)$$

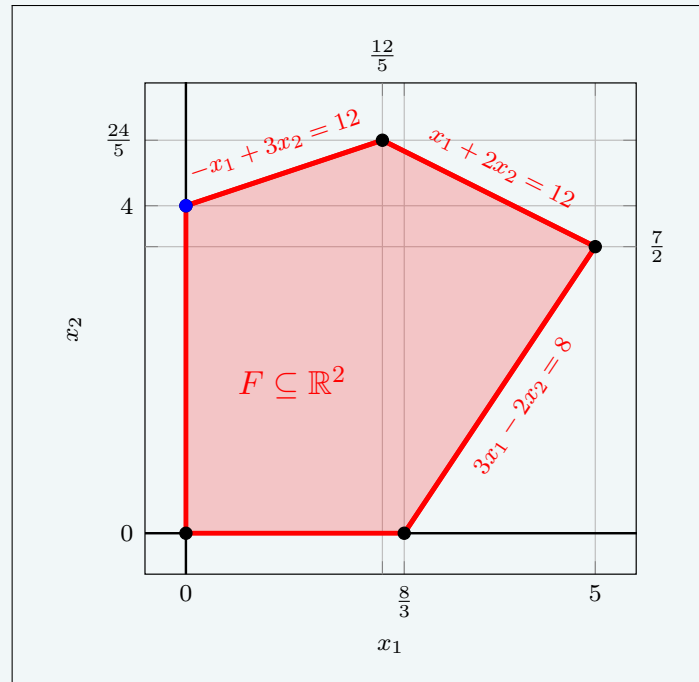
Esempio 4.5: Soluzioni ammissibili e lower bound

Consideriamo il problema LP dell'Esempio 4.1. Una soluzione ammissibile è per esempio $\bar{x}(LP) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (dove $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = 4$) poiché:

$$-0 + 3 \cdot 4 = 12 \leq 12, \quad 0 + 2 \cdot 4 = 8 \leq 12, \quad 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8 \leq 8, \quad 0 \geq 0 \quad \text{e} \quad 4 \geq 0$$

Di conseguenza, un lower bound $LB(\bar{x})$ sul valore ottimo $z(LP)$ del problema LP è:

$$LB(\bar{x}) = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8$$



4.1.3 Metodo grafico

Una soluzione ottima di un problema LP (4.1) in forma canonica di massimo con due variabili si può determinare graficamente usando la direzione del gradiente della funzione obiettivo e gli insiemi di livello perpendicolari al gradiente.

Esempio 4.6: Metodo grafico

Per il problema LP dell'Esempio 4.1:

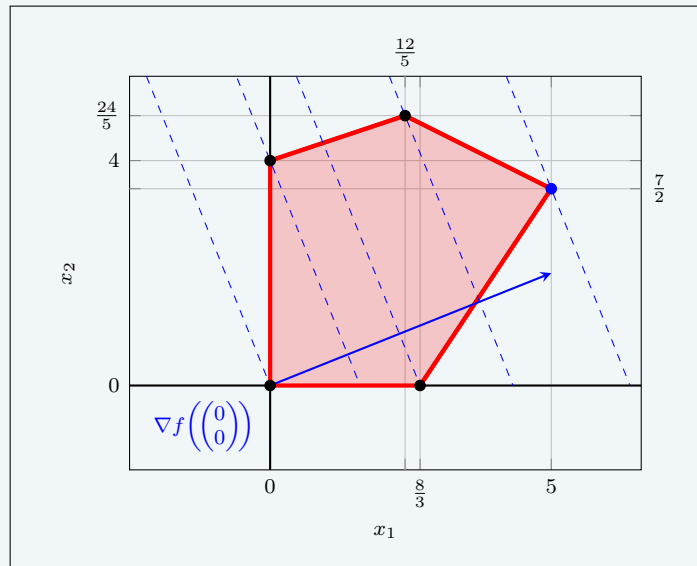
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

una soluzione ottima è:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}(LP)} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

e il valore ottimo è:

$$z(LP) = 5 \tilde{x}_1 + 2 \tilde{x}_2 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 32$$



In blu tratteggiato, da sinistra a destra, gli insiemi di livello $5x_1 + 2x_2 = 0$, $5x_1 + 2x_2 = 8$, $5x_1 + 2x_2 = \frac{40}{3}$, $5x_1 + 2x_2 = \frac{108}{5}$ e $5x_1 + 2x_2 = 32$ della funzione obiettivo; il vertice ottimo è disegnato in blu.

Esempio 4.7: Metodo grafico

Per il problema LP dell'Esempio 4.2:

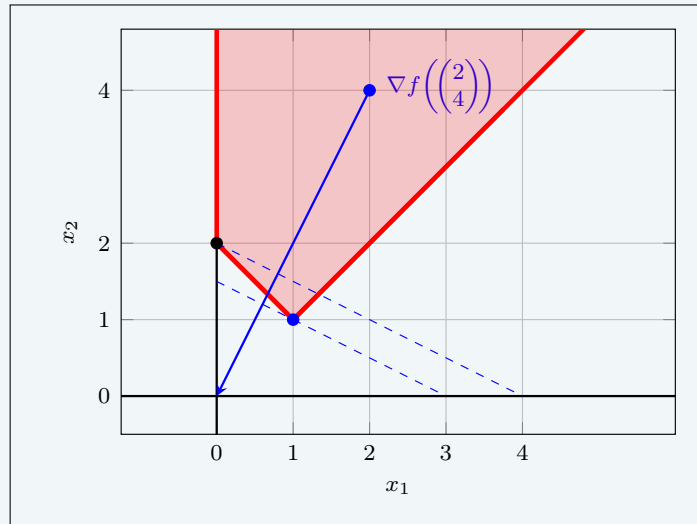
$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

una soluzione ottima è:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}(LP)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e il valore ottimo è:

$$z(LP) = -2 \tilde{x}_1 - 4 \tilde{x}_2 = -2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -6$$



In blu tratteggiato, dal basso verso l'alto, gli insiemi di livello $-2x_1 - 4x_2 = -6$ e $-2x_1 - 4x_2 = -8$ della funzione obiettivo; il vertice ottimo $(1,1)$ è disegnato in blu e il gradiente è tracciato a partire dal punto $(2,4)$.

4.2 Forma standard di massimo

Definizione 4.4: Problemi di programmazione lineare in forma standard di massimo

Dati:

1. un vettore dei costi $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
2. una matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
3. un vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ con m righe

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$$

un **problema di programmazione lineare LP in forma standard di massimo** con n variabili non negative

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$$

e m vincoli lineari di uguaglianza è il seguente problema di ottimizzazione:

$$\max \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{\mathbf{c}'\mathbf{x}} \quad (4.6a)$$

$$\text{soggetto a } \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i}_{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (4.6b)$$

$$\underbrace{x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}}_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}}, \quad (4.6c)$$

dove $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è un vettore (colonna) di n zeri.

Esempio 4.8: Problema LP in forma standard di massimo

Consideriamo i seguenti dati di un problema LP con $n = 3$ e $m = 1$:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (4)$$

I valori numerici dei due vettori colonna e della matrice sono

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 1, \quad a_{11} = 2, \quad a_{12} = 3, \quad a_{13} = 1, \quad b_1 = 4.$$

Il problema ha $n = 3$ variabili non negative $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Il problema LP associato in forma standard di massimo con $n = 3$ variabili non negative e $m = 1$ vincolo lineare di uguaglianza è il seguente:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & x_3 \\ \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

4.2.1 Regione ammissibile e funzione obiettivo

Definizione 4.5: regione ammissibile e funzione obiettivo

- La **regione ammissibile** di un problema LP (4.6) è il **poliedro** F definito come segue:

$$F = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}}_{Ax=b}, \right. \quad (4.7)$$

$$\left. \underbrace{x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}}_{x \geq 0} \right\}.$$

La regione ammissibile è definita dai vincoli lineari di uguaglianza (4.6b) e dai vincoli di non negatività (4.6c).

- La **funzione obiettivo** (4.6a) di un problema LP (4.6), da massimizzare, è la **funzione lineare** f (scalare) definita come segue:

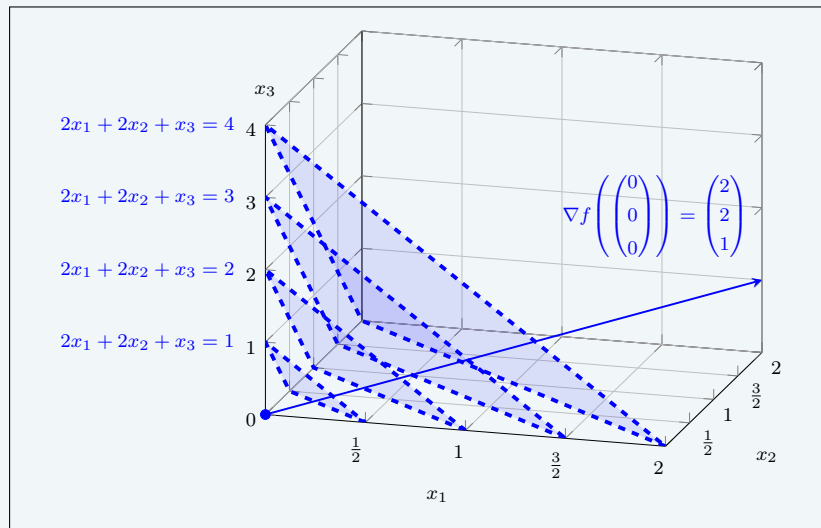
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \mapsto \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.8)$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c'x}$$

Esempio 4.9: funzione obiettivo

La funzione obiettivo del problema LP dell'Esempio 4.8 è la funzione lineare scalare:

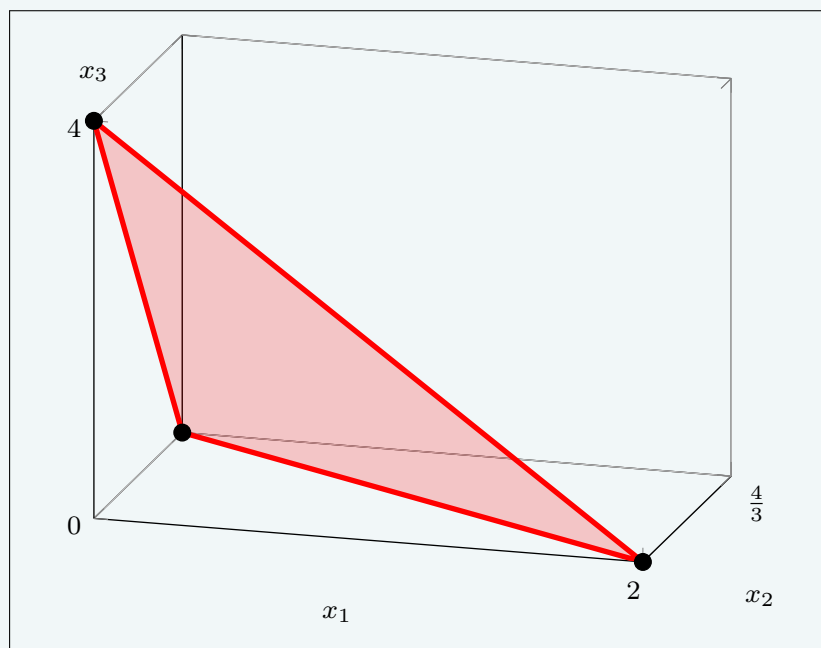
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \text{e il suo gradiente è} \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Esempio 4.10: regione ammissibile

La regione ammissibile del problema LP dell'Esempio 4.8 è il poliedro:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \right\}.$$



4.2.2 Lower bound

Definizione 4.6: soluzione ammissibile e lower bound

- Data

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}(LP)} \in F$$

una **soluzione ammissibile** del problema LP (4.6) (un punto che soddisfa i vincoli (4.6b) e (4.6c)), possiamo calcolare un **lower bound** $LB(\bar{\mathbf{x}})$ sul valore ottimo $z(LP)$ come segue:

$$LB(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j \quad (4.9)$$

Per ogni soluzione ammissibile $\bar{\mathbf{x}}(LP) \in F$ di un problema LP (4.6), abbiamo

$$LB(\bar{\mathbf{x}}) \leq z(LP) \quad (4.10)$$

Esempio 4.11: Soluzioni ammissibili e lower bound

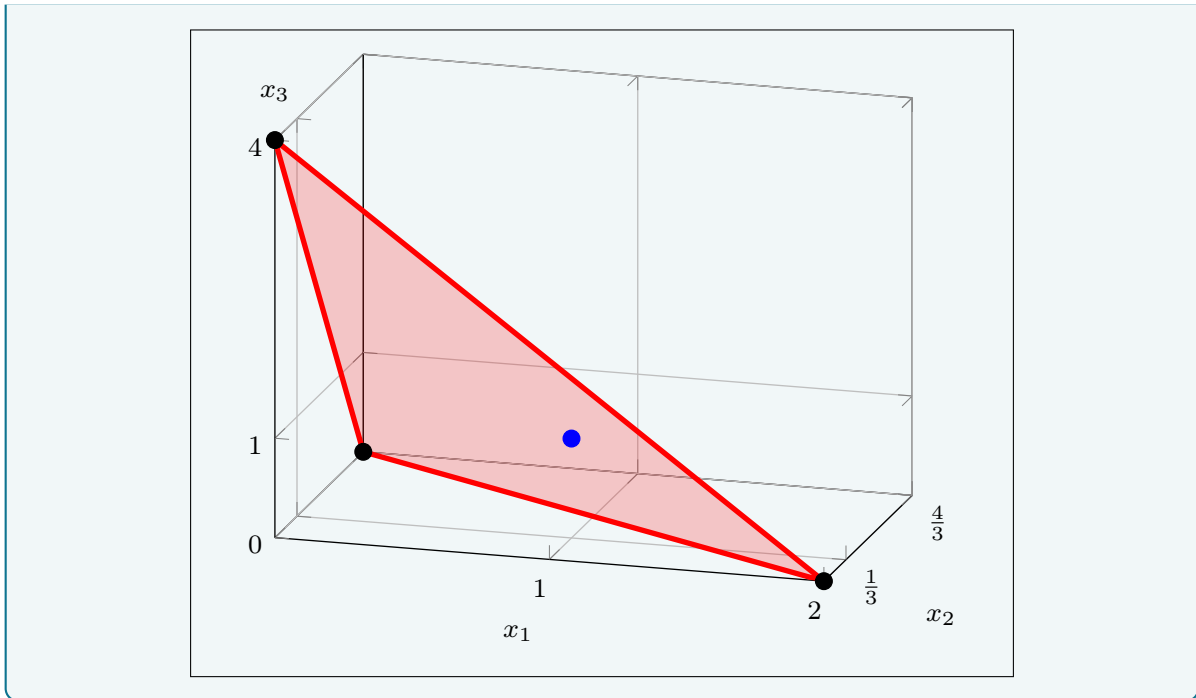
Consideriamo il problema LP dell'Esempio 4.8. Una soluzione ammissibile è per esempio

$$\bar{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (dove } \bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = \frac{1}{3} \text{ e } \bar{x}_3 = 1) \text{ poiché:}$$

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 4, \quad 1 \geq 0, \quad \frac{1}{3} \geq 0, \quad 1 \geq 0.$$

Di conseguenza, un lower bound $LB(\bar{\mathbf{x}})$ sul valore ottimo $z(LP)$ del problema LP è:

$$LB(\bar{\mathbf{x}}) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{3}.$$



4.2.3 Metodo grafico

Una soluzione ottima di un problema LP (4.6) in forma standard di massimo con due o tre variabili si può determinare graficamente usando la direzione del gradiente della funzione obiettivo e gli insiemi di livello perpendicolari al gradiente.

Esempio 4.12: Metodo grafico

Per il problema LP dell'Esempio 4.8:

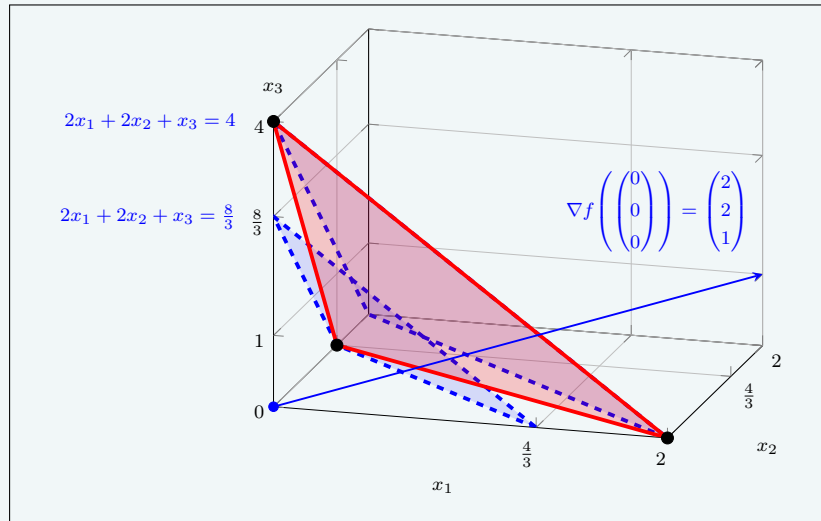
$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 & + 2x_2 + x_3 \\ \text{soggetto a} & 2x_1 & + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Tutte le soluzioni ottime giacciono sul segmento

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0, 2x_1 + x_3 = 4, x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \right\},$$

cioè sul segmento che congiunge i punti $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Prendendo per esempio la soluzione

ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (dove $\tilde{x}_1 = 2$, $\tilde{x}_2 = 0$ e $\tilde{x}_3 = 0$), il valore ottimo è: $z(LP) = 2\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 = 4$.



Esiti possibili e formulazioni equivalenti

5.1 Le due forme di riferimento

- In tutto questo documento facciamo riferimento alle due forme di un problema LP introdotte nel documento precedente. Dati un vettore dei costi $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, una matrice dei vincoli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e un vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, esse si scrivono come segue.

Un problema LP in **forma canonica di massimo** con n variabili non negative e m vincoli lineari di minore o uguale:

$$\max \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{\mathbf{c}'\mathbf{x}} \quad (5.1a)$$

$$\text{soggetto a } \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}}_{\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}}, \quad (5.1b)$$

$$\underbrace{x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}}_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}}. \quad (5.1c)$$

Un problema LP in **forma standard di massimo** con n variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza:

$$\max \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{\mathbf{c}'\mathbf{x}} \quad (5.2a)$$

$$\text{soggetto a } \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}}_{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}, \quad (5.2b)$$

$$\underbrace{x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}}_{x \geq 0}. \quad (5.2c)$$

- Facciamo inoltre riferimento ai tre problemi LP usati come esempi guida nel documento precedente, che richiamiamo nei tre esempi seguenti.

Esempio 5.1: problema LP guida in forma canonica di massimo

Il primo esempio guida è il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{llllll} \max & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & 3 & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 12 \\ & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima è $\tilde{x}(LP) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7/2 \end{pmatrix}$ e il valore ottimo è $z(LP) = 32$.

Esempio 5.2: problema LP guida in forma canonica di massimo

Il secondo esempio guida è il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima è $\tilde{x}(LP) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il valore ottimo è $z(LP) = -6$.

Esempio 5.3: problema LP guida in forma standard di massimo

Il terzo esempio guida è il seguente problema LP in forma standard di massimo con $n = 3$ variabili non negative e $m = 1$ vincolo lineare di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & x_3 \\ \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Il suo valore ottimo è $z(LP) = 4$, raggiunto da ogni punto del segmento che congiunge

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.2 Problemi LP inammissibili e illimitati

- I problemi LP dell'Esempio 5.1, dell'Esempio 5.2 e dell'Esempio 5.3 ammettono una soluzione ottima. Non è sempre così: un problema LP può non avere alcuna soluzione ammissibile, oppure può avere soluzioni ammissibili di valore obiettivo arbitrariamente grande.

Definizione 5.1: problema LP inammissibile

Un problema LP si dice **inammissibile** se la sua regione ammissibile è vuota:

$$F = \emptyset.$$

Definizione 5.2: problema LP illimitato

Un problema LP in **forma di massimo** si dice **illimitato** se, per ogni valore $M \in \mathbb{R}$, esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}(LP) \in F$ tale che

$$f(\bar{x}(LP)) > M.$$

Un problema LP in **forma di minimo** si dice **illimitato** se, per ogni valore $M \in \mathbb{R}$, esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}(LP) \in F$ tale che $f(\bar{x}(LP)) < M$.

Un problema LP soddisfa esattamente una delle tre condizioni seguenti:

1. è **inammissibile**;
2. è **illimitato**;
3. ammette una **soluzione ottima** $\tilde{x}(LP)$, e il valore ottimo $z(LP)$ è un numero finito.

- Un problema LP inammissibile non ha soluzioni ammissibili, quindi non ha soluzioni ottime e il valore ottimo $z(LP)$ non è definito. Un problema LP illimitato ha soluzioni ammissibili, ma nessuna di esse è ottima, e anche in questo caso il valore ottimo $z(LP)$ non è definito.
- Nei due casi, con un leggero abuso di notazione, scriviamo $z(LP) = -\infty$ per un problema LP inammissibile in forma di massimo e $z(LP) = +\infty$ per un problema LP illimitato in forma di massimo.

Esempio 5.4: problema LP inammissibile

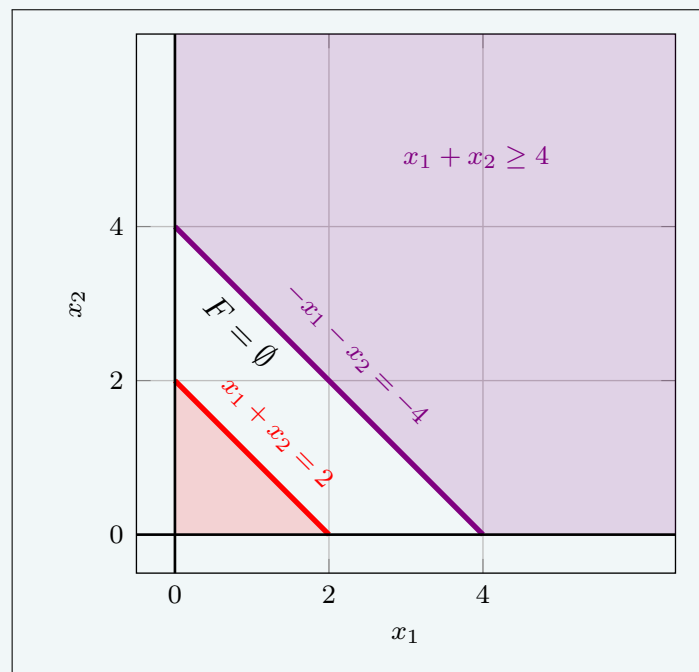
Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \leq 2$ e il secondo impone $x_1 + x_2 \geq 4$. Nessun punto di $\mathbb{R}^2$ li soddisfa entrambi, e quindi abbiamo:

$$F = \emptyset.$$

Di conseguenza, questo problema LP è **inammissibile**.



In rosso il semipiano $x_1 + x_2 \leq 2$ (con i vincoli di non negatività) e in viola il semipiano $x_1 + x_2 \geq 4$: la loro intersezione è vuota.

Esempio 5.5: problema LP illimitato

Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{soggetto a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

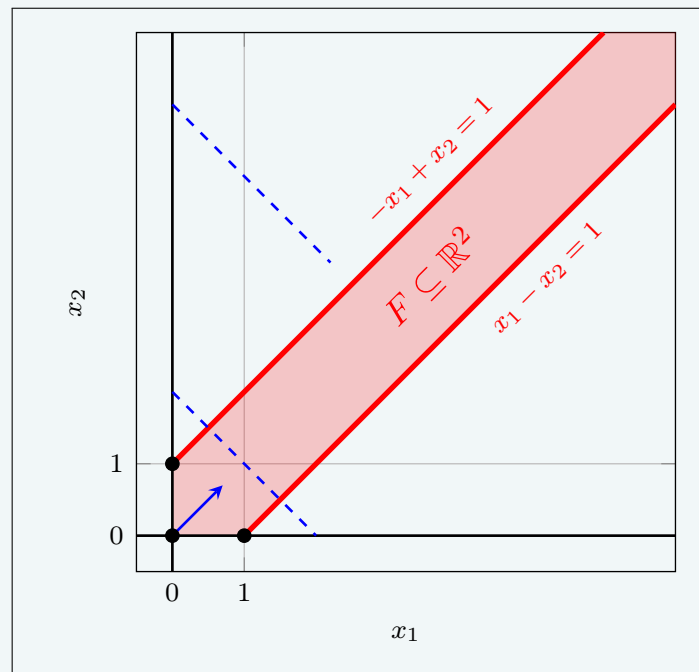
Per ogni valore $t \geq 0$, il punto $\bar{x}(LP) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ è una soluzione ammissibile, poiché

$$-t + t = 0 \leq 1, \quad t - t = 0 \leq 1, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad t \geq 0,$$

e il suo valore obiettivo è

$$LB(\bar{x}) = t + t = 2t.$$

Di conseguenza, per ogni valore $M \in \mathbb{R}$, la soluzione ammissibile ottenuta con $t > \frac{M}{2}$ ha un valore obiettivo maggiore di M , e quindi questo problema LP è **illimitato**.



In blu tratteggiato gli insiemi di livello $x_1 + x_2 = 2$ e $x_1 + x_2 = 6$ della funzione obiettivo: il gradiente punta lungo la regione ammissibile illimitata.

Un problema LP la cui regione ammissibile F è illimitata non è necessariamente un problema LP illimitato: la funzione obiettivo può benissimo raggiungere un valore ottimo finito su F .

Esempio 5.6: regione ammissibile illimitata e soluzioni ottime multiple

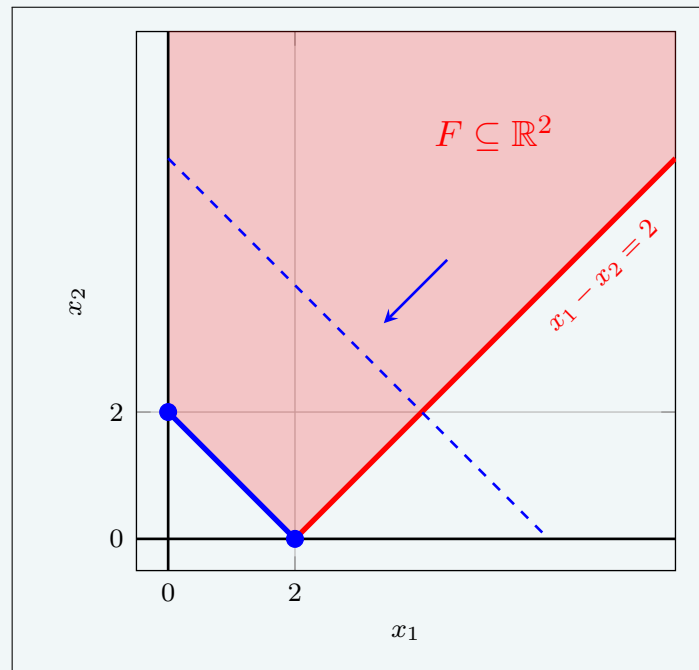
Consideriamo il seguente problema LP in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{llll} \max & - & x_1 & - & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & x_2 \leq 2 \\ & & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

La regione ammissibile F è illimitata. Tuttavia, il primo vincolo impone $x_1 + x_2 \geq 2$ per ogni soluzione ammissibile, e quindi

$$-x_1 - x_2 \leq -2, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in F.$$

Le soluzioni ammissibili $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ raggiungono questo valore, e quindi sono due **soluzioni ottime** e il valore ottimo è $z(LP) = -2$.



In blu tratteggiato l'insieme di livello $-x_1 - x_2 = -6$ e in blu continuo l'insieme di livello $-x_1 - x_2 = -2$, che contiene il segmento di soluzioni ottime che congiunge i due vertici blu.

Osservazione 5.3: soluzioni ottime multiple

Se $\tilde{x}^{(1)}(LP)$ e $\tilde{x}^{(2)}(LP)$ sono due soluzioni ottime di un problema LP, allora ogni

combinazione convessa

$$\lambda \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(LP) + (1 - \lambda) \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(LP), \quad \lambda \in [0, 1],$$

è anch'essa una soluzione ottima. Di conseguenza, un problema LP che ammette una soluzione ottima ammette o esattamente una soluzione ottima o infinite soluzioni ottime.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}^\lambda = \lambda \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(LP) + (1 - \lambda) \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(LP)$ con $\lambda \in [0, 1]$. Innanzitutto, $\mathbf{x}^\lambda \in F$. Infatti, la regione ammissibile F è un poliedro e, per ciascuna delle sue disuguaglianze $\mathbf{a} \mathbf{x} \leq b$, poiché $\lambda \geq 0$, $1 - \lambda \geq 0$ ed entrambe le soluzioni la soddisfano, abbiamo:

$$\mathbf{a} \mathbf{x}^\lambda = \lambda \mathbf{a} \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(LP) + (1 - \lambda) \mathbf{a} \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(LP) \leq \lambda b + (1 - \lambda) b = b;$$

lo stesso calcolo, con $=$ al posto di $\leq$, vale per ciascuna delle sue uguaglianze. Inoltre, poiché la funzione obiettivo f è lineare, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^\lambda) &= \lambda f(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(LP)) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(LP)) \\ &= \lambda z(LP) + (1 - \lambda) z(LP) = z(LP), \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza vale perché entrambe le soluzioni sono ottime. Di conseguenza, $\mathbf{x}^\lambda$ è una soluzione ammissibile il cui valore obiettivo è il valore ottimo, e quindi è una soluzione ottima. $\square$

5.3 Riformulazioni equivalenti

- Un **problema LP generico** può essere scritto in una forma che non è né la forma canonica di massimo (5.1) né la forma standard di massimo (5.2): la sua funzione obiettivo può dover essere minimizzata, i suoi vincoli possono essere dei tre tipi “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” e “ $=$ ”, e le sue variabili possono essere non positive o libere.
- In questa sezione mostriamo che ogni problema LP generico può essere riscritto in forma canonica di massimo e in forma standard di massimo.

Definizione 5.4: problemi LP equivalenti

Due problemi LP si dicono **equivalenti** se, da una soluzione ottima di uno dei due, si può ottenere direttamente una soluzione ottima dell'altro, e i due problemi sono entrambi inammissibili, entrambi illimitati, oppure entrambi ammettono una soluzione ottima.

5.3.1 Forma di minimo e forma di massimo

- Per ogni funzione lineare f e ogni poliedro F , abbiamo:

$$\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\} = -\max\{-f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}.$$

- Di conseguenza, un problema LP in **forma di minimo** con vettore dei costi $\mathbf{c}$ è equivalente al problema LP in **forma di massimo** con la stessa regione ammissibile e vettore dei costi $-\mathbf{c}$:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j}_{\mathbf{c}'\mathbf{x}} \longrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^n (-c_j) x_j}_{-\mathbf{c}'\mathbf{x}}.$$

I due problemi LP equivalenti hanno le **stesse soluzioni ottime**, mentre i loro valori ottimi sono numeri opposti:

$$\tilde{\mathbf{x}}(LP_{\min}) = \tilde{\mathbf{x}}(LP_{\max}) \quad \text{e} \quad z(LP_{\min}) = -z(LP_{\max}).$$

Esempio 5.7: dalla forma di minimo alla forma di massimo

Consideriamo il seguente problema LP in forma di minimo con $n = 2$ variabili non negative:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Cambiando il segno del vettore dei costi, otteniamo il problema LP equivalente in forma canonica di massimo dell'[Esempio 5.2](#):

$$\begin{array}{llllll} \max & -2 & x_1 & - & 4 & x_2 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2 \leq -2 \\ & & x_1 & - & & x_2 \leq 0 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

La soluzione ottima di entrambi i problemi è $\tilde{\mathbf{x}}(LP) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre il valore ottimo della forma di minimo è 6 e il valore ottimo della forma di massimo è -6.

5.3.2 Vincoli di maggiore o uguale e di uguaglianza

- Un vincolo lineare di **maggiore o uguale** è equivalente a un vincolo lineare di minore o uguale, poiché, moltiplicando entrambi i membri per -1 , abbiamo:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i.$$

- Un vincolo lineare di **uguaglianza** è equivalente a due vincoli lineari di minore o uguale, poiché:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i}_{\text{primo vincolo}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i}_{\text{secondo vincolo}}.$$

Un problema LP (5.2) in forma standard di massimo con n variabili non negative e m vincoli lineari di uguaglianza è equivalente a un problema LP (5.1) in forma canonica di massimo con le stesse n variabili non negative e $2m$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{aligned} & \max \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{soggetto a} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & \quad \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & \quad x_j \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

I due problemi LP hanno la **stessa regione ammissibile**, e quindi le stesse soluzioni ottime e lo stesso valore ottimo.

Esempio 5.8: dalla forma standard alla forma canonica di massimo

Consideriamo il problema LP in forma standard di massimo dell'Esempio 5.3, con $n = 3$ variabili non negative e $m = 1$ vincolo lineare di uguaglianza:

$$\begin{aligned} & \max \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & \text{soggetto a} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Sostituendo il vincolo lineare di uguaglianza con due vincoli lineari di minore o uguale, otteniamo il problema LP equivalente in forma canonica di massimo con $n = 3$ variabili non negative e $2m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{rcllclcl}
 \max & 2 & x_1 & + & 2 & x_2 & + & x_3 \\
 \text{soggetto a} & 2 & x_1 & + & 3 & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & -2 & x_1 & - & 3 & x_2 & - & x_3 & \leq & -4 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

5.3.3 Variabili di scarto e di surplus

- Un vincolo lineare di **minore o uguale** è equivalente a un vincolo lineare di uguaglianza e a un vincolo di non negatività, ottenuti aggiungendo una variabile non negativa x_{n+i} :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{e} \quad x_{n+i} \geq 0.$$

- Un vincolo lineare di **maggiore o uguale** è equivalente a un vincolo lineare di uguaglianza e a un vincolo di non negatività, ottenuti sottraendo una variabile non negativa x_{n+i} :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \quad \text{e} \quad x_{n+i} \geq 0.$$

Definizione 5.5: variabili di scarto e di surplus

La variabile non negativa aggiuntiva x_{n+i} si chiama **variabile di scarto** di un vincolo lineare di minore o uguale e **variabile di surplus** di un vincolo lineare di maggiore o uguale. Il suo valore misura, per una data soluzione ammissibile, la differenza fra i due membri del vincolo.

Un problema LP (5.1) in forma canonica di massimo con n variabili non negative e m vincoli lineari di minore o uguale è equivalente a un problema LP (5.2) in forma standard di massimo con $n + m$ variabili non negative e gli stessi m vincoli lineari, ora di uguaglianza:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{soggetto a} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\
 & x_j \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n + m\}.
 \end{array}$$

- In notazione matriciale, le m variabili di scarto formano un vettore colonna $\mathbf{x}_S \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ e la matrice dei vincoli della forma standard di massimo si ottiene affiancando ad $\mathbf{A}$ la

matrice identità I di dimensione m :

$$\begin{aligned} & \max \quad c' x \\ & \text{soggetto a} \quad \underbrace{A x + I x_S}_{(A \quad I) \begin{pmatrix} x \\ x_S \end{pmatrix}} = b, \\ & \quad \quad \quad x, x_S \geq 0, \end{aligned}$$

dove

$$x_S = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 5.9: dalla forma canonica alla forma standard di massimo

Aggiungendo $m = 3$ variabili di scarto, il problema LP dell'Esempio 5.1 diventa il seguente problema LP equivalente in forma standard di massimo con $n+m = 5$ variabili non negative:

$$\begin{aligned} & \max \quad 5 x_1 + 2 x_2 \\ & \text{soggetto a} \quad - x_1 + 3 x_2 + x_3 = 12 \\ & \quad \quad \quad x_1 + 2 x_2 + x_4 = 12 \\ & \quad \quad \quad 3 x_1 - 2 x_2 + x_5 = 8 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP)$ dell'Esempio 5.1 soddisfa il primo vincolo come disuguaglianza stretta e gli altri due con uguaglianza, e quindi i valori delle tre variabili di scarto sono $\tilde{x}_3 = \frac{13}{2}$, $\tilde{x}_4 = 0$ e $\tilde{x}_5 = 0$.

5.3.4 Variabili non positive e variabili libere

- Una variabile **non positiva** $x_j \leq 0$ è equivalente a una variabile non negativa $x_j^+ \geq 0$, ponendo:

$$x_j = -x_j^+.$$

- Una variabile **libera** $x_j \geq 0$ è equivalente a due variabili non negative $x_j^+ \geq 0$ e $x_j^- \geq 0$, ponendo:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-.$$

In entrambi i casi, la sostituzione si effettua nella funzione obiettivo e in ogni vincolo lineare del problema LP. Una variabile libera si sostituisce con due variabili non negative, poiché ogni numero reale è la differenza di due numeri non negativi.

Esempio 5.10: problema LP equivalente con sole variabili non negative

Consideriamo il seguente problema LP con una variabile non negativa $x_1 \geq 0$, una variabile non positiva $x_2 \leq 0$ e una variabile libera $x_3 \geq 0$:

$$\begin{array}{rcll} \max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & + & 2 & x_3 \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2 & + & & x_3 & = & 2 \\ & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & & = & 19 \\ & & x_1 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_2 & & & & \leq & 0 \\ & & & & & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ponendo $x_2 = -x_2^+$ e $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, otteniamo il seguente problema LP equivalente con sole variabili non negative:

$$\begin{array}{rcll} \max & 2 & x_1 & - & 4 & x_2^+ & + & 2 & x_3^+ & - & 2 & x_3^- \\ \text{soggetto a} & - & x_1 & - & & x_2^+ & + & & x_3^+ & - & & x_3^- & = & 2 \\ & 8 & x_1 & - & 2 & x_2^+ & & & & & & & = & 19 \\ & & x_1, & & x_2^+, & & x_3^+, & & x_3^- & \geq & 0 \end{array}$$

Da una soluzione ottima del secondo problema LP si ottiene una soluzione ottima del primo calcolando $\tilde{x}_2 = -\tilde{x}_2^+$ e $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_3^+ - \tilde{x}_3^-$.

5.3.5 Da un problema LP generico alla forma canonica e alla forma standard di massimo

Ogni problema LP generico può essere riscritto in forma canonica di massimo e in forma standard di massimo applicando le seguenti trasformazioni:

	forma canonica di max	forma standard di max
$\min \mathbf{c}'\mathbf{x}$	$-\max(-\mathbf{c})'\mathbf{x}$	$-\max(-\mathbf{c})'\mathbf{x}$
$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	invariato	aggiungere una variabile di scarto $x_{n+i} \geq 0$
$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	moltiplicare per -1	sottrarre una variabile di surplus $x_{n+i} \geq 0$
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	sdoppiare in due " $\leq$ ", il secondo moltiplicato per -1	invariato
$x_j \geq 0$	invariata	invariata
$x_j \leq 0$	$x_j = -x_j^+$	$x_j = -x_j^+$
$x_j \gtrless 0$	$x_j = x_j^+ - x_j^-$	$x_j = x_j^+ - x_j^-$

Esempio 5.11: da un problema LP generico alla forma canonica di massimo

Consideriamo il seguente problema LP generico con 3 variabili:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & 3 & x_1 & - & 2 & x_2 & + & x_3 \\
 \text{soggetto a} & & x_1 & + & & x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\
 & & 2 & x_1 & - & & & x_2 & = & 6 \\
 & & & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & & & x_3 \gtrless 0
 \end{array}$$

Applichiamo le trasformazioni della tabella precedente:

1. la funzione obiettivo è da minimizzare, e quindi massimizziamo la funzione obiettivo opposta;
2. il primo vincolo è un vincolo di maggiore o uguale, e quindi lo moltiplichiamo per -1 ;
3. il secondo vincolo è un vincolo di uguaglianza, e quindi lo sdoppiamo in due vincoli di minore o uguale;
4. la variabile x_2 è non positiva, e quindi poniamo $x_2 = -x_2^+$ con $x_2^+ \geq 0$;
5. la variabile x_3 è libera, e quindi poniamo $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ con $x_3^+, x_3^- \geq 0$.

Otteniamo il seguente problema LP equivalente in forma canonica di massimo con $n = 4$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di minore o uguale:

$$\begin{array}{rcll}
 - \max & -3 & x_1 & - & 2 & x_2^+ & - & x_3^+ & + & x_3^- \\
 \text{soggetto a} & - & x_1 & + & & x_2^+ & + & x_3^+ & - & x_3^- & \leq & -4 \\
 & & 2 & x_1 & + & & & x_2^+ & & & \leq & 6 \\
 & & -2 & x_1 & - & & & x_2^+ & & & \leq & -6 \\
 & & & & & x_1, & & x_2^+, & & x_3^+, & & x_3^- & \geq & 0
 \end{array}$$

Infine, aggiungendo $m = 3$ variabili di scarto x_5, x_6, x_7 , otteniamo il problema LP equivalente in forma standard di massimo con $n + m = 7$ variabili non negative e $m = 3$ vincoli lineari di uguaglianza.

5.3.6 Dati razionali

Definizione 5.6: Minimo comune denominatore

Dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^k$ di k numeri razionali $v_j = \frac{p_j}{q_j}$ con $p_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \in \mathbb{N}$ coprimi, $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$, il **minimo comune denominatore**^a, indicato con $lcd(\mathbf{v})$, è il più piccolo numero intero positivo divisibile per tutti i denominatori q_j , con $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

^aovvero il minimo comune multiplo dei denominatori.

- Moltiplicare un vincolo lineare per un numero positivo non cambia l'insieme dei punti che lo soddisfano, e moltiplicare la funzione obiettivo per un numero positivo non cambia l'insieme delle soluzioni ottime. Di conseguenza, un problema LP con **dati razionali** è equivalente a un problema LP con **dati interi**.

Dato un problema LP (5.1) con dati razionali, il problema LP equivalente con dati interi si scrive come segue:

$$\begin{array}{rcll}
 \frac{1}{lcd(\mathbf{c})} \max & \sum_{j=1}^n lcd(\mathbf{c}) c_j x_j \\
 \text{soggetto a} & \sum_{j=1}^n lcd([\mathbf{a}_i \ b_i]) a_{ij} x_j \leq lcd([\mathbf{a}_i \ b_i]) b_i, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\
 & x_j \geq 0, & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},
 \end{array}$$

dove $\mathbf{a}_i$ indica la i -esima riga della matrice dei vincoli $\mathbf{A}$.

Esempio 5.12: problema LP equivalente con dati interi

Per il seguente problema LP (5.1) con $n = 5$ variabili non negative, $m = 1$ vincolo lineare di minore o uguale e dati razionali:

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{1}{3} x_1 - \frac{11}{27} x_2 + \frac{7}{10} x_3 + \frac{7}{5} x_4 + \frac{2}{9} x_5 \\ \text{soggetto a} & \frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{4} x_2 + \frac{11}{6} x_3 - \frac{1}{4} x_4 + \frac{5}{2} x_5 \leq \frac{25}{12} \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{array}$$

abbiamo:

$$\underbrace{lcd \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{11}{27} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} \right)}_{=lcd(c)} = 270 \quad \text{e} \quad \underbrace{lcd \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{11}{6} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{25}{12} \end{pmatrix} \right)}_{=lcd \left(\begin{bmatrix} a_1 & \frac{25}{12} \end{bmatrix} \right)} = 12$$

e, di conseguenza, il problema LP equivalente con le stesse variabili e gli stessi vincoli e con dati interi si scrive come segue:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{270} \max & 90 x_1 - 110 x_2 + 189 x_3 + 378 x_4 + 60 x_5 \\ \text{soggetto a} & 6 x_1 + 9 x_2 + 22 x_3 - 3 x_4 + 30 x_5 \leq 25 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{array}$$