



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare intera

Esercizi 4 — Euristiche MIP

Esercizi svolti sui capitoli 10–10, con la soluzione completa. Ogni esercizio cita il problema del catalogo che usa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:

fabiofurini.github.io/programmazione-lineare-intera/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare-intera

Anno accademico 2026–2027

Indice

V	Euristiche MIP	2
10	Euristiche MIP	3
10.1	Arrotondamento e diving	3
10.2	Feasibility pump	5
10.3	RINS e local branching	10



Parte V

Euristiche MIP



Euristiche MIP

10.1 Arrotondamento e diving

Esercizio 10.1 — Arrotondamento e diving (P5)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Calcolare la soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ del rilassamento lineare e il suo valore $z(\text{LP})$.
2. Applicare l'arrotondamento: arrotondare $\tilde{\mathbf{x}}$ al punto intero più vicino, verificare se è ammissibile, e poi arrotondarlo per difetto.
3. Applicare il diving frazionario: a ogni passo risolvere il rilassamento lineare con le variabili fissate fino a quel momento, fissare la variabile meno frazionaria al suo intero più vicino (pareggi: indice più piccolo), e ripetere finché la soluzione LP non è intera.
4. Calcolare il gap di ottimalità della soluzione del diving rispetto all'upper bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor$, e dimostrare che la soluzione è ottima esaminando i possibili valori di x_2 .

Soluzione

1. I due vincoli sono attivi nel vertice ottimo: da $8x_1 + 3x_2 = 36$ otteniamo $x_2 = 12 - \frac{8}{3}x_1$, e $6x_1 + 21x_2 = 77$ diventa $6x_1 + 252 - 56x_1 = 77$, cioè $x_1 = \frac{7}{2}$ e $x_2 = \frac{8}{3}$:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{7}{2}, \frac{8}{3} \right), \quad z(\text{LP}) = 7 + 8 = 15.$$

2. $(\lceil \frac{7}{2} \rceil, \lceil \frac{8}{3} \rceil) = (4, 3)$ viola il secondo vincolo: $8 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 41 > 36$. **L'arrotondamento fallisce.** L'arrotondamento per difetto dà $(3, 2)$: $60 \leq 77$ e $30 \leq 36$, ammissibile, di valore 12.
3. **Passo 1.** Le distanze dall'intero più vicino sono $\frac{1}{2}$ per x_1 e $\frac{1}{3}$ per x_2 : si fissa $x_2 := 3$.
Passo 2. Con $x_2 = 3$ i vincoli diventano $6x_1 \leq 14$ e $8x_1 \leq 27$, quindi $\tilde{x} = (\frac{7}{3}, 3)$, di valore $\frac{14}{3} + 9 = \frac{41}{3}$. Si fissa $x_1 := \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$.
Passo 3. La soluzione LP $(2, 3)$, di valore 13, è intera: il diving restituisce $(2, 3)$.
4. L'upper bound è $\lfloor 15 \rfloor = 15$, quindi il gap è $\frac{15-13}{13} \approx 15.4\%$. Per dimostrare l'ottimalità, facciamo variare x_2 : $x_2 \geq 4$ è inammissibile ($21 \cdot 4 = 84 > 77$); $x_2 = 3$ dà $x_1 \leq 2$, valore al più 13; $x_2 = 2$ dà $x_1 \leq 3$, valore al più 12; $x_2 = 1$ dà $x_1 \leq 4$, valore al più 11; $x_2 = 0$ dà $x_1 \leq 4$, valore al più 8. Quindi $z(\text{ILP}) = 13$ e $(2, 3)$ è **ottima**.

Esercizio 10.2 — Arrotondamento e diving (P3)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Calcolare la soluzione ottima $\tilde{x}$ del rilassamento lineare e il suo valore $z(\text{LP})$.
2. Arrotondare $\tilde{x}$ al punto intero più vicino: è ammissibile? Arrotondarlo invece per difetto, e indicarne il valore.
3. Applicare il diving frazionario (pareggi: indice più piccolo). Restituisce una soluzione?
4. Ripetere il diving prendendo la decisione opposta al primo passo, e proseguire con la regola del diving frazionario. Poi dimostrare che la soluzione è ottima esaminando i possibili valori di x_1 .

Soluzione

1. Entrambi i vincoli sono attivi nel vertice ottimo: $x_2 = 2 + x_1$ e $8x_1 + 2x_2 = 19$ danno $10x_1 = 15$:

$$\tilde{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right), \quad z(\text{LP}) = 3 + 14 = 17.$$

2. $(\lceil \frac{3}{2} \rceil, \lceil \frac{7}{2} \rceil) = (2, 4)$ soddisfa il primo vincolo ($2 \leq 2$) ma viola il secondo: $16 + 8 =$

$24 > 19$. **L'arrotondamento fallisce.** L'arrotondamento per difetto dà $(1, 3)$: $2 \leq 2$ e $14 \leq 19$, ammissibile, di valore 14.

3. **Passo 1.** Entrambe le variabili sono a distanza $\frac{1}{2}$: si fissa $x_1 := \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 2$.

Passo 2. Con $x_1 = 2$ i vincoli diventano $x_2 \leq 4$ e $2x_2 \leq 3$, quindi $\tilde{x} = (2, \frac{3}{2})$, di valore 10. Si fissa $x_2 := \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 2$.

Passo 3. Con $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$ il secondo vincolo è $16 + 4 = 20 > 19$: l'LP è inammissibile, **il diving fallisce.**

4. **Passo 1.** Si fissa $x_1 := 1$ invece di 2. I vincoli diventano $x_2 \leq 3$ e $2x_2 \leq 11$, quindi $\tilde{x} = (1, 3)$, di valore 14, che è intera: il diving restituisce $(1, 3)$. La prima decisione del primo diving, $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 2$, era quella sbagliata.

Ottimalità: il secondo vincolo dà $x_1 \leq 2$. Per $x_1 = 0$ si ha $x_2 \leq 2$, valore al più 8; per $x_1 = 1$ si ha $x_2 \leq 3$, valore al più 14; per $x_1 = 2$ si ha $x_2 \leq 1$, valore al più 8. Quindi $z(\text{ILP}) = 14$ e $(1, 3)$ è **ottima**.

10.2 Feasibility pump

Esercizio 10.3 — Feasibility pump 1

Si consideri il programma intero

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 6x_1 - 2x_2 \leq 16 \\ & 6x_1 - 7x_2 \geq 8 \\ & x_1 \in \{0, 1, \dots, 5\} \\ & x_2 \in \{0, 1, \dots, 5\} \end{aligned}$$

(Si ricordi che la distanza L_1 di un punto da un segmento che non è né orizzontale, né verticale, né di pendenza ± 1 è minima in un estremo o dove il segmento incontra la retta orizzontale o quella verticale passante per il punto.)

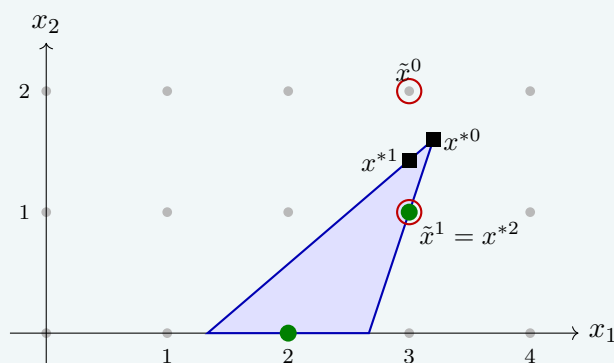
Domande

1. Disegnare la regione $\mathcal{L}$ del rilassamento lineare e i suoi punti interi, e calcolare la soluzione ottima x^{*0} del rilassamento lineare.
2. Arrotondare x^{*0} al punto intero più vicino $\tilde{x}^0$, e verificare se è ammissibile.
3. Applicare la feasibility pump: a ogni iterazione calcolare la proiezione x^{*k} , cioè il punto di $\mathcal{L}$ che minimizza la distanza L_1 $\Delta(x, \tilde{x}^{k-1})$, arrotondarla e, se l'arrotondamento restituisce lo stesso punto intero, spostare la componente con il $|x_j^{*k} - \tilde{x}_j^{k-1}|$ più grande di un'unità verso x_j^{*k} . Fermarsi quando la distanza è 0.
4. La soluzione trovata dalla pompa è ottima? Confrontarne il valore con il bound LP.

Soluzione

1. Il vincolo $6x_1 - 7x_2 \geq 8$ con $x_2 \geq 0$ richiede $x_1 \geq \frac{4}{3}$, e $6x_1 - 2x_2 \leq 16$ con $x_2 \geq 0$ dà $x_1 \leq \frac{8}{3}$ sull'asse. $\mathcal{L}$ è il triangolo di vertici $(\frac{4}{3}, 0)$, $(\frac{8}{3}, 0)$ e l'intersezione delle due rette, $(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$. I suoi punti interi sono $(2, 0)$ e $(3, 1)$. La funzione obiettivo $x_1 + x_2$ è massima nel vertice

$$x^{*0} = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad z_{LP}(I) = \frac{24}{5} = 4.8.$$



2. $\tilde{x}^0 = ([3.2], [1.6]) = (3, 2)$: $6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 14 \leq 16$, ma $6 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 4 < 8$: inammissibile.
3. **Iterazione 1.** Proiezione di $(3, 2)$. La retta verticale $x_1 = 3$ attraversa $\mathcal{L}$ per $18 - 2x_2 \leq 16$ e $18 - 7x_2 \geq 8$, cioè fra $(3, 1)$ e $(3, \frac{10}{7})$: il punto più vicino è $(3, \frac{10}{7})$, a distanza $2 - \frac{10}{7} = \frac{4}{7}$. La retta orizzontale $x_2 = 2$ non attraversa $\mathcal{L}$ ($x_1 \leq \frac{10}{3}$ e $x_1 \geq \frac{11}{3}$). Il vertice $(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$ è a distanza $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$, gli altri vertici sono più lontani. Quindi $x^{*1} = (3, \frac{10}{7})$, $\Delta = \frac{4}{7}$, e $\tilde{x}^1 = \lceil x^{*1} \rceil = (3, 1)$, un punto nuovo.
- Iterazione 2.** $(3, 1) \in \mathcal{L}$ ($16 \leq 16$, $11 \geq 8$): $\Delta = 0$, la pompa si ferma con $(3, 1)$, di valore 4, dopo due proiezioni.
4. L'altro punto intero $(2, 0)$ ha valore 2, quindi $(3, 1)$ è **ottima**. Anche il bound LP dà $z(I) \leq \lfloor 4.8 \rfloor = 4$, e certifica l'ottimalità senza enumerare i punti interi.

Esercizio 10.4 — Feasibility pump 2

Si consideri il programma intero

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 4x_2 \\ \text{soggetto a} \quad & -3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq -1 \\ & x_1 \in \{0, 1, \dots, 5\} \\ & x_2 \in \{0, 1, \dots, 5\} \end{aligned}$$

(Si ricordi che la distanza L_1 di un punto da un segmento che non è né orizzontale, né verticale, né di pendenza ± 1 è minima in un estremo o dove il segmento incontra la retta orizzontale o quella verticale passante per il punto.)

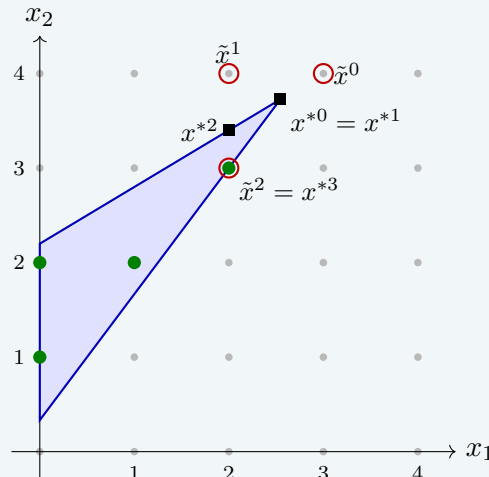
Domande

1. Disegnare la regione $\mathcal{L}$ del rilassamento lineare e i suoi punti interi, e calcolare la soluzione ottima x^{*0} del rilassamento lineare.
2. Arrotondare x^{*0} al punto intero più vicino $\tilde{x}^0$, e verificare se è ammissibile.
3. Applicare la feasibility pump: a ogni iterazione calcolare la proiezione x^{*k} , cioè il punto di $\mathcal{L}$ che minimizza la distanza $L_1 \Delta(x, \tilde{x}^{k-1})$, arrotondarla e, se l'arrotondamento restituisce lo stesso punto intero, spostare la componente con il $|x_j^{*k} - \tilde{x}_j^{k-1}|$ più grande di un'unità verso x_j^{*k} . Fermarsi quando la distanza è 0.
4. Di quanti flip ha bisogno la pompa? La soluzione trovata è ottima?

Soluzione

1. Con $x_1 \geq 0$, $\mathcal{L}$ è il triangolo di vertici $(0, \frac{1}{3})$ e $(0, \frac{11}{5})$, sull'asse $x_1 = 0$, e l'intersezione delle due rette, $(\frac{28}{11}, \frac{41}{11})$. I suoi punti interi sono $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. La funzione obiettivo è massima in

$$x^{*0} = \left(\frac{28}{11}, \frac{41}{11}\right), \quad z_{LP}(I) = \frac{276}{11} \approx 25.09.$$



2. $\tilde{x}^0 = ([2.55], [3.73]) = (3, 4)$: $-9 + 20 = 11 \leq 11$, ma $12 - 12 = 0 > -1$: inammissibile.
3. **Iterazione 1.** Proiezione di $(3, 4)$. La retta verticale $x_1 = 3$ richiederebbe $x_2 \geq \frac{13}{3}$ e $x_2 \leq 4$: nessuna intersezione. La retta orizzontale $x_2 = 4$ richiederebbe $x_1 \geq 3$ e $x_1 \leq \frac{11}{4}$: nessuna intersezione. Il punto più vicino è il vertice $x^{*1} = (\frac{28}{11}, \frac{41}{11})$, a distanza $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$. Il suo arrotondamento è di nuovo $(3, 4)$: un **ciclo corto**. La differenza più grande è su x_1 ($\frac{5}{11} > \frac{3}{11}$), che si sposta verso $\frac{28}{11}$: $\tilde{x}^1 = (2, 4)$.
Iterazione 2. Proiezione di $(2, 4)$. La retta verticale $x_1 = 2$ attraversa $\mathcal{L}$ per $x_2 \geq 3$ e $x_2 \leq \frac{17}{5}$: il punto più vicino è $(2, \frac{17}{5})$, a distanza $\frac{3}{5}$. La retta orizzontale $x_2 = 4$ non attraversa $\mathcal{L}$, e il vertice $(\frac{28}{11}, \frac{41}{11})$ è a distanza $\frac{6}{11} + \frac{3}{11} = \frac{9}{11} > \frac{3}{5}$. Quindi $x^{*2} = (2, \frac{17}{5})$ e $\tilde{x}^2 = (2, 3)$.
Iterazione 3. $(2, 3) \in \mathcal{L}$ ($-6 + 15 = 9 \leq 11$, $8 - 9 = -1 \leq -1$): $\Delta = 0$, la pompa si ferma con $(2, 3)$, di valore 20.
4. La pompa ha bisogno di **un flip**: senza, ciclerebbe all'infinito fra $(3, 4)$ e il vertice x^{*0} . I valori dei punti interi sono 4, 8, 12, 20: $(2, 3)$ è **ottima**.

Esercizio 10.5 — Feasibility pump 3

Si consideri il programma intero

$$\max \quad 4x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a } & 5x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ & -7x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1 \in \{0, 1, \dots, 5\} \\ & x_2 \in \{0, 1, \dots, 5\} \end{aligned}$$

(Si ricordi che la distanza L_1 di un punto da un segmento che non è né orizzontale, né verticale, né di pendenza ± 1 è minima in un estremo o dove il segmento incontra la retta orizzontale o quella verticale passante per il punto.)

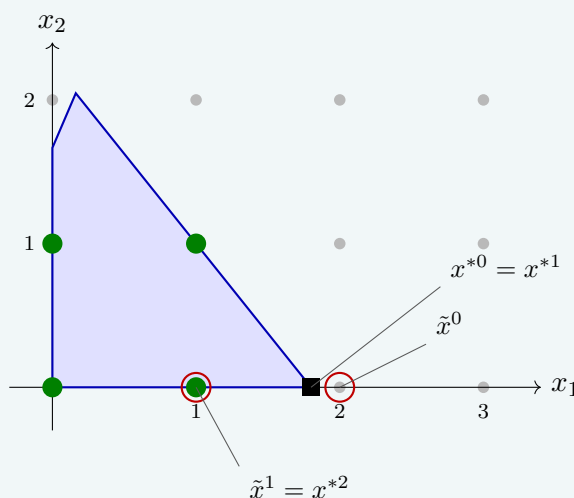
Domande

1. Disegnare la regione $\mathcal{L}$ del rilassamento lineare e i suoi punti interi, e calcolare la soluzione ottima x^{*0} del rilassamento lineare.
2. Arrotondare x^{*0} al punto intero più vicino $\tilde{x}^0$, e verificare se è ammissibile.
3. Applicare la feasibility pump: a ogni iterazione calcolare la proiezione x^{*k} , cioè il punto di $\mathcal{L}$ che minimizza la distanza $L_1 \Delta(x, \tilde{x}^{k-1})$, arrotondarla e, se l'arrotondamento restituisce lo stesso punto intero, spostare la componente con il $|x_j^{*k} - \tilde{x}_j^{k-1}|$ più grande di un'unità verso x_j^{*k} . Fermarsi quando la distanza è 0.
4. Trovare la soluzione ottima esaminando i punti interi, e calcolare il gap della soluzione della pompa rispetto al bound LP. Perché la pompa manca l'ottimo?

Soluzione

1. $\mathcal{L}$ è il quadrilatero di vertici $(0, 0)$, $(\frac{9}{5}, 0)$, $(\frac{7}{43}, \frac{88}{43})$ (intersezione delle due rette) e $(0, \frac{5}{3})$. I suoi punti interi sono $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. I valori della funzione obiettivo nei vertici sono 0 , $\frac{36}{5}$, $\frac{204}{43} \approx 4.74$, $\frac{10}{3}$, quindi

$$x^{*0} = \left(\frac{9}{5}, 0\right), \quad z_{LP}(I) = \frac{36}{5} = 7.2.$$



2. $\tilde{x}^0 = ([1.8], 0) = (2, 0)$: $10 > 9$, inammissibile.

3. **Iterazione 1.** Con $\tilde{x}^0 = (2, 0)$, $\Delta(x, \tilde{x}^0) = |x_1 - 2| + x_2$. La retta verticale $x_1 = 2$ non attraversa $\mathcal{L}$; la retta orizzontale $x_2 = 0$ la attraversa sul segmento da $(0, 0)$ a $(\frac{9}{5}, 0)$, il cui punto più vicino è $(\frac{9}{5}, 0)$, a distanza $\frac{1}{5}$; gli altri vertici sono più lontani. Quindi $x^{*1} = (\frac{9}{5}, 0) = x^{*0}$, il cui arrotondamento è di nuovo $(2, 0)$: un ciclo corto. Il flip sposta x_1 verso $\frac{9}{5}$: $\tilde{x}^1 = (1, 0)$.

Iterazione 2. $(1, 0) \in \mathcal{L}$: $\Delta = 0$, la pompa si ferma con $(1, 0)$, di valore 4.

4. I valori dei punti interi sono 0, 4, 2, 6: l'ottimo è $(1, 1)$, con $z(I) = 6$ ($5 + 4 = 9 \leq 9$, $-7 + 3 \leq 5$). Rispetto al bound LP $\lfloor 7.2 \rfloor = 7$ il gap della soluzione della pompa è $\frac{7-4}{7} \approx 42.9\%$ (il suo vero errore relativo è $\frac{6-4}{6} \approx 33.3\%$). La pompa guarda solo la distanza da $\mathcal{L}$, mai la funzione obiettivo dopo il primo LP: si ferma al primo punto ammissibile che incontra. Migliorarlo è compito di metodi come il local branching o la proximity search.

10.3 RINS e local branching

Esercizio 10.6 — RINS, local branching e proximity search (P23)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & 4x_2 \\ & 3x_1 & + & 8x_2 \leq 24 \\ & -x_1 & & \leq -1 \\ & & -x_2 & \leq -1 \\ & x_1, & x_2 & \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

La soluzione incumbent è $\bar{x} = (1, 2)$.

Domande

1. Calcolare il valore dell'incumbent, la soluzione ottima $\tilde{x}$ del rilassamento lineare e l'upper bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor$.
2. Applicare RINS con $\theta = 1$: elencare le variabili che vengono fissate, scrivere il sotto-MIP con il vincolo di cutoff e risolverlo.
3. Applicare il local branching con $k = 1$, $k_{\max} = 3$, $k_{\text{step}} = 1$ e $\theta = 1$. Scrivere esplicitamente i vincoli di local branching.
4. Applicare la proximity search con $\theta = 1$. Confrontare i tre metodi, e dire quale di essi dimostra l'ottimalità della soluzione trovata.

Soluzione

1. L'incumbent è ammissibile ($3 + 16 = 19 \leq 24$), di valore $1 + 8 = 9$. L'ottimo LP è $x_1 = 1$ (il suo limite inferiore) e $x_2 = \frac{21}{8}$:

$$\tilde{x} = \left(1, \frac{21}{8}\right), \quad z(\text{LP}) = 1 + \frac{21}{2} = \frac{23}{2}, \quad \lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 11.$$

2. $\tilde{x}_1 = 1 = \bar{x}_1$, mentre $\tilde{x}_2 = \frac{21}{8} \neq 2 = \bar{x}_2$: RINS fissa $x_1 := 1$. Il sotto-MIP è

$$\max 1 + 4x_2 \quad \text{s.a.} \quad 3 + 8x_2 \leq 24, \quad 1 + 4x_2 \geq 10, \quad x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Il primo vincolo dà $x_2 \leq 2$, il cutoff $x_2 \geq 3$: il sotto-MIP è inammissibile e RINS restituisce l'incumbent, di valore 9.

3. Con $\bar{x}^1 = (1, 2)$ il vincolo $\Delta(\mathbf{x}, \bar{x}^1) \leq 1$ si scrive $|x_1 - 1| + |x_2 - 2| \leq 1$, con le variabili ausiliarie $d_1 \geq x_1 - 1$, $d_1 \geq 1 - x_1$, $d_2 \geq x_2 - 2$, $d_2 \geq 2 - x_2$, $d_1 + d_2 \leq 1$; il cutoff è $x_1 + 4x_2 \geq 10$.

$k = 1$. I vicini a distanza 1 sono $(2, 2)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 1)$. Solo $(2, 2)$ è ammissibile e ha valore 10: $\bar{x}^2 = (2, 2)$. Si aggiunge $\Delta(\mathbf{x}, \bar{x}^1) \geq 2$.

$k = 1, 2, 3$, **attorno a $\bar{x}^2$** . Il cutoff è $x_1 + 4x_2 \geq 11$. Per $x_2 = 2$ il primo vincolo dà $x_1 \leq \frac{8}{3}$, valore al più 10; per $x_2 \geq 3$ il primo vincolo è violato; per $x_2 = 1$ il cutoff richiede $x_1 \geq 7$, che viola il primo vincolo. Nessuna soluzione: il metodo si ferma con $(2, 2)$, di valore 10.

4. **Iterazione 1.** Cutoff $x_1 + 4x_2 \geq 10$: la soluzione più vicina è $(2, 2)$, a distanza 1, di valore 10.

Iterazione 2. Cutoff $x_1 + 4x_2 \geq 11$: inammissibile, come mostrato nella domanda 3. Per la proposizione sulla proximity search (Capitolo 10), 10 è **ottimo**.

Confronto: RINS fallisce, perché la variabile x_1 su cui l'LP e l'incumbent concordano è proprio quella che deve cambiare; il local branching trova l'ottimo con $k = 1$ ma, fermandosi a $k_{\max}$, non lo dimostra; la proximity search lo trova e lo dimostra. Il bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 11$ da solo non lo dimostra.

Esercizio 10.7 — RINS, local branching e proximity search (P4)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione incumbent è $\bar{x} = (5, 3)$.

Domande

1. Calcolare il valore dell'incumbent, la soluzione ottima $\tilde{x}$ del rilassamento lineare e l'upper bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor$.
2. Applicare RINS con $\theta = 1$: quali variabili vengono fissate, e che cosa restituisce il sotto-MIP?
3. Applicare il local branching con $k = 1$ e poi, dopo aver aggiunto il vincolo inverso, con $k = 2$.
4. Applicare la proximity search con $\theta = 1$. Quali metodi dimostrano l'ottimalità della soluzione trovata?

Soluzione

1. L'incumbent è ammissibile ($13 \leq 14$, $29 \leq 32$), di valore 34. Entrambi i vincoli sono attivi nell'ottimo LP: $x_2 = 14 - 2x_1$ e $x_1 + 8x_2 = 32$ danno $15x_1 = 80$:

$$\tilde{x} = \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}\right), \quad z(\text{LP}) = \frac{80}{3} + 10 = \frac{110}{3}, \quad \lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 36.$$

2. $\frac{16}{3} \neq 5$ e $\frac{10}{3} \neq 3$: nessuna variabile viene fissata, il sotto-MIP è l'intero problema con il cutoff $5x_1 + 3x_2 \geq 35$. La sua soluzione è $(6, 2)$ ($12 + 2 = 14$, $6 + 16 = 22$), di valore 36. Poiché $36 = \lfloor z(\text{LP}) \rfloor$, la soluzione è **ottima**.
3. $\bar{x}^1 = (5, 3)$. $k = 1$. I vicini a distanza 1 sono $(4, 3)$, $(6, 3)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$: $(6, 3)$ viola il primo vincolo ($15 > 14$), $(5, 4)$ il secondo ($37 > 32$), e $(4, 3)$, $(5, 2)$ hanno valori 29 e $31 < 35$. Nessuna soluzione; si aggiunge $\Delta(x, \bar{x}^1) \geq 2$ e si pone $k = 2$.
 $k = 2$. La soluzione $(6, 2)$, a distanza 2, ha valore $36 \geq 35$: $\bar{x}^2 = (6, 2)$. Non esiste alcuna soluzione di valore almeno 37, perché $37 > \lfloor z(\text{LP}) \rfloor$: il metodo prosegue fino a $k_{\max}$ e si ferma con 36.
4. **Iterazione 1.** Cutoff $5x_1 + 3x_2 \geq 35$: nessuna soluzione a distanza 1 (domanda 3), e $(6, 2)$ è a distanza 2: viene restituita, di valore 36.

Iterazione 2. Cutoff ≥ 37 : inammissibile. Per la proposizione sulla proximity search (Capitolo 10), 36 è **ottimo**.

RINS e la proximity search trovano l'ottimo in un passo; anche il bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 36$ lo dimostra, qui senza alcun lavoro aggiuntivo. Il local branching lo trova con $k = 2$ e non ha bisogno di dimostrarlo: l'intorno di raggio 1 non basta.

Esercizio 10.8 — Proximity search (P3)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione incumbent è $\bar{x} = (0, 0)$. Fra le soluzioni del sotto-MIP di prossimità alla stessa distanza, si sceglie quella di valore maggiore.

Domande

1. Calcolare il valore dell'incumbent e l'upper bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor$ (l'ottimo LP è $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$).
2. Applicare la prima iterazione della proximity search con $\theta = 1$.
3. Applicare le iterazioni successive finché il sotto-MIP non è inammissibile.
4. Concludere: l'ultima soluzione è ottima? Quanti sotto-MIP sono stati risolti?

Soluzione

1. L'incumbent ha valore 0. Il valore LP è $z(\text{LP}) = 3 + 14 = 17$, quindi $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 17$.
2. **Iterazione 1.** Cutoff $2x_1 + 4x_2 \geq 1$. Due punti ammissibili sono a distanza 1 da $(0, 0)$: $(1, 0)$, di valore 2, e $(0, 1)$, di valore 4. Si sceglie $(0, 1)$.
3. **Iterazione 2.** Cutoff $2x_1 + 4x_2 \geq 5$, attorno a $(0, 1)$. A distanza 1: $(0, 2)$, di valore 8, e $(1, 1)$, di valore 6. Si sceglie $(0, 2)$.
Iterazione 3. Cutoff ≥ 9 , attorno a $(0, 2)$. A distanza 1: $(0, 3)$ viola $-x_1 + x_2 \leq 2$; $(1, 2)$ ha valore 10 ed è ammissibile ($1 \leq 2$, $12 \leq 19$). Si restituisce $(1, 2)$.
Iterazione 4. Cutoff ≥ 11 , attorno a $(1, 2)$. A distanza 1: $(2, 2)$ viola il secondo vincolo ($20 > 19$); $(1, 3)$ ha valore 14 ed è ammissibile ($2 \leq 2$, $14 \leq 19$). Si restituisce $(1, 3)$.
Iterazione 5. Cutoff ≥ 15 , attorno a $(1, 3)$. Il secondo vincolo dà $x_1 \leq 2$, e per $x_1 = 0, 1, 2$ i valori sono al più 8, 14, 8: inammissibile.

4. L'ultima soluzione $(1, 3)$, di valore 14, è **ottima** per la proposizione sulla proximity search (Capitolo 10): sono stati risolti 5 sotto-MIP, quattro dei quali con una soluzione. Il bound 17 da solo lascia un gap di $\frac{17-14}{14} \approx 21.4\%$. Ogni passo si sposta di un'unità perché il cutoff è piccolo: un θ più grande chiederebbe mosse più ampie e meno iterazioni.