

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare intera

Esercizi 2 — Metodi esatti

Esercizi svolti sui capitoli 6–8, con la soluzione completa. Ogni esercizio cita il problema del catalogo che usa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-lineare-intera/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare-intera

Anno accademico 2026–2027

Indice

III Metodi esatti **2**

6 L'algoritmo dei piani di taglio con i tagli frazionari di Gomory **3**

7 Il branch-and-bound basato sulla programmazione lineare **100**

7.1 Algoritmo di branch-and-bound 100

7.2 Strong branching 323

8 Il branch-and-cut **350**

Parte III

Metodi esatti

Capitolo 6

L'algoritmo dei piani di taglio con i tagli frazionari di Gomory

Esercizio 6.1 — Algoritmo del piano di taglio ($P1$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 1$ vincolo lineare:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 8\,x_2 & & \\ & 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 16 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\,x_1 - \dfrac{1}{6}\,x_3 \\ z = \dfrac{64}{3} - 3\,x_1 - \dfrac{4}{3}\,x_3 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:
   (a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;
   (b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

   Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & x_1 & + & 8\,x_2 & & & & \\ & 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & = & 16 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\, x_1 - \dfrac{1}{6}\, x_3 \\ z = \dfrac{64}{3} - 3\, x_1 - \dfrac{4}{3}\, x_3 \end{cases}$$

  La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

  Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{64}{3} \right\rfloor}_{=21}$$

  Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

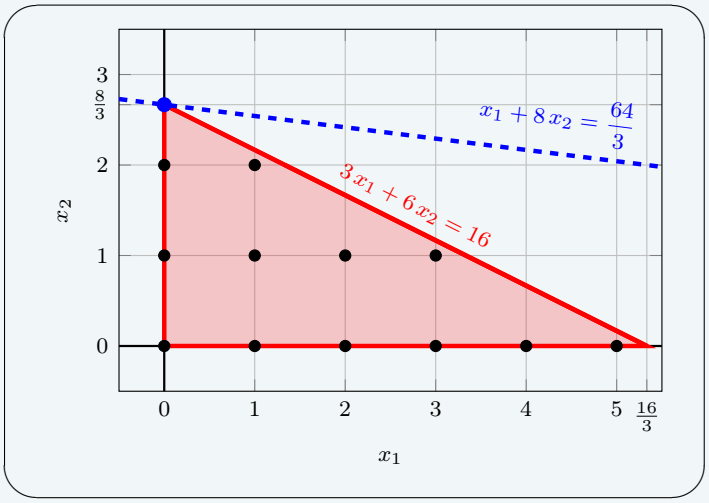
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 8\,x_2 & & \\ & 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 16 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,LP_1\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\,LP_1\,) = \frac{64}{3}$$



- **Iterazione 1**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\,x_1 - \dfrac{1}{6}\,x_3 \\ z = \dfrac{64}{3} - 3\,x_1 - \dfrac{4}{3}\,x_3 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}} x_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}} x_3 \geq \underbrace{\left(\frac{8}{3} - \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\, x_1 + \frac{1}{6}\, x_3 \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\, x_1 + x_3 \geq 4$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{2}\, x_1 + \frac{1}{6}\, x_3 - x_4 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\, x_1 + x_3 - 6\, x_4 = 4$$

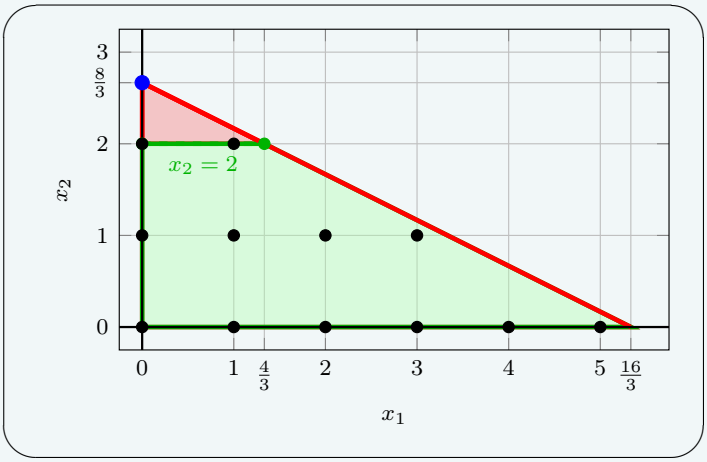
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 16 - 3\, x_1 - 6\, x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$3\, x_1 + (16 - 3\, x_1 - 6\, x_2) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 2$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla riga della funzione obiettivo è:

$$\underbrace{(3 - \lfloor 3 \rfloor)}_{3-3=0} x_1 + \underbrace{\left(\frac{4}{3} - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}} x_3 \geq \underbrace{\left(\frac{64}{3} - \left\lfloor \frac{64}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{64}{3}-21=\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\, x_3 \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 1$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{3}\, x_3 - x_4 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 - 3\, x_4 = 1$$

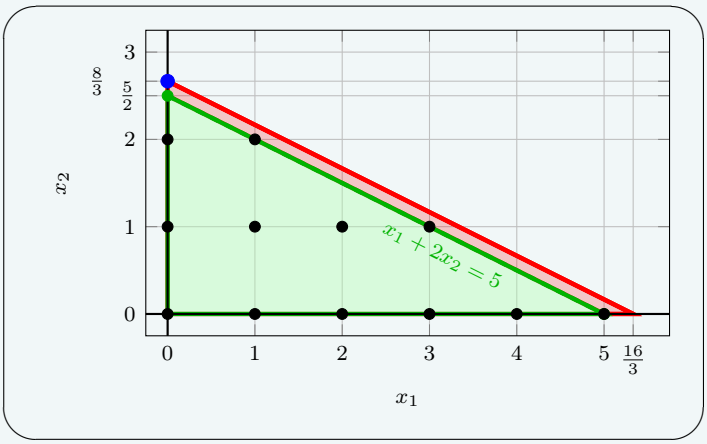
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 16 - 3\, x_1 - 6\, x_2,$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$16 - 3\, x_1 - 6\, x_2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2\, x_2 \leq 5$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla riga della funzione obiettivo sul problema LP_1 in forma canonica:



Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 8\, x_2 & & & & & & \\
 & 3\, x_1 & + & 6\, x_2 & + & x_3 & & & = & 16 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$3\,x_1 + x_3 - 6\,x_4 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{6}\,x_3$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{6}\,x_3 \\ x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{6}\,x_3 \\ z = \frac{64}{3} - 3\,x_1 - \frac{4}{3}\,x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_4 = -\frac{2}{3}, \qquad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \qquad \bar{\pi}_1 = 3, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_4, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 3 - \frac{1}{2}\,\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\,\pi_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{3 - \frac{1}{2}\,\pi_4 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\,\pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_4 \leq 6 \\ \pi_4 \leq 8 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_4 fino a $\min\{6, 8\} = 6$, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_4 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_4 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_1 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_1 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{6}\,x_3 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4\right) - \frac{1}{6}x_3 = 2 - x_4$$

$$z = \frac{64}{3} - 3\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4\right) - \frac{4}{3}x_3 = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}x_3 - 6x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 6\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \qquad \text{di valore } \frac{52}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_4 = 6 \qquad \text{di valore } \frac{52}{3}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_2 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; \underbrace{\left\lfloor \frac{52}{3} \right\rfloor}_{=17}$$

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

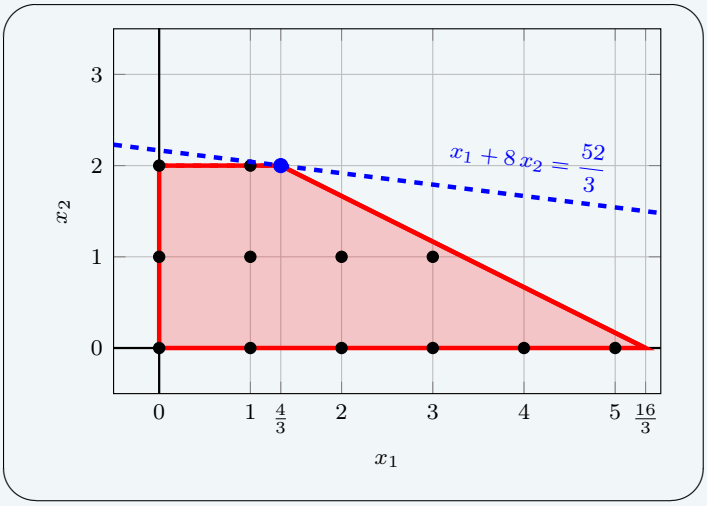
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 8\,x_2 & & \\ & 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 16 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \qquad \tilde{x}_2 = 2$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = \frac{52}{3}$$



- **Iterazione 2**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 6\,x_4 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}} x_3 + \underbrace{(-2 - \lfloor -2 \rfloor)}_{-2-(-2)=0} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{4}{3} - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\,x_3 \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 1$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{3}\,x_3 - x_5 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 - 3\,x_5 = 1$$

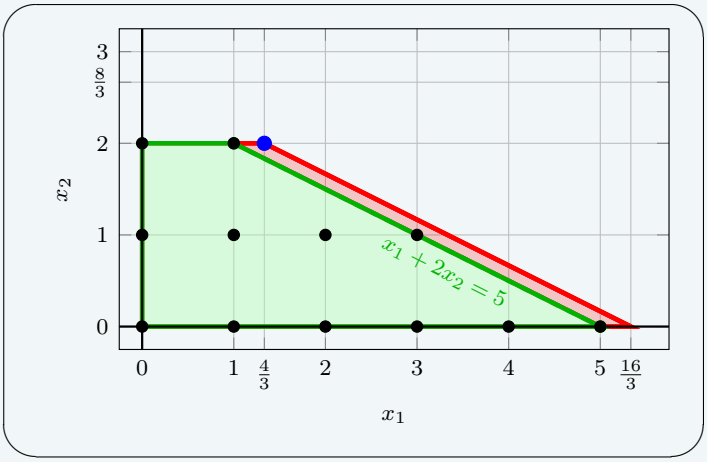
Dalla forma standard del problema LP_2, abbiamo:

$$x_3 = 16 - 3\,x_1 - 6\,x_2,$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(16 - 3\,x_1 - 6\,x_2) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2\,x_2 \leq 5.$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_2 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla riga della funzione obiettivo è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}} x_3 + \underbrace{(6 - \lfloor 6 \rfloor)}_{6-6=0} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{52}{3} - \left\lfloor \frac{52}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{52}{3}-17=\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\,x_3 \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 1$$

Questo taglio frazionario di Gomory coincide con quello generato dalla prima riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_3 aggiungendolo al problema LP_2.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 8\,x_2 & & & & & & \\
& 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & & & = & 16 \\
& & & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
& x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & + \; x_5 = & 5 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_3 - 3\,x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,x_3.$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4 \\
x_2 = 2 - x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 \\
z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 6\,x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_2 = 2, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{3}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \qquad \text{di valore } \frac{52}{3}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_4 = 6 \qquad \text{di valore } \frac{52}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\pi_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_5 \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_5 \leq 1$$

Aumentando il valore di π_5 fino a 1, il valore di π_3 scende a 0.
Abbiamo quindi che:

> π_5 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale fuori base

π_3 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_3 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_3 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 1 + 3\, x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(1 + 3x_5) + 2x_4 = 1 + 2x_4 - x_5,$$

$$x_2 = 2 - x_4,$$

$$z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}(1 + 3x_5) - 6x_4 = 17 - 6x_4 - x_5.$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\, x_4 - x_5 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ x_3 = 1 + 3\, x_5 \\ z = 17 - 6\, x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

  $\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad$ di valore 17

- la soluzione di base duale ottima è:

  $\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 6, \quad \tilde{\pi}_5 = 1 \quad$ di valore 17

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è **intera**. Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, ILP\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

Il valore ottimo $z(\, ILP\,)$ è 17.

Per il problema LP_3 in forma canonica, abbiamo:

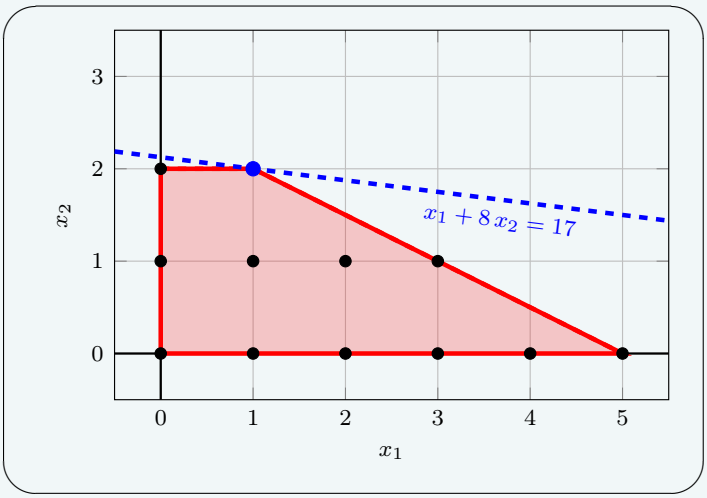
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 8\, x_2 & & \\ & 3\, x_1 & + & 6\, x_2 & \leq & 16 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & 2\, x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \qquad \tilde{x}_2 = 2$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_3\,) = 17$$



Esercizio 6.2 — Algoritmo del piano di taglio ($P2$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcrr} \max & & x_1 & + & 3 & x_2 & \\ & -4 & x_1 & + & 10 & x_2 & \leq & 35 \\ & 3 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 12 \\ & & x_1, & & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{34}\, x_3 - \dfrac{5}{17}\, x_4 \\ x_2 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{34}\, x_3 - \dfrac{2}{17}\, x_4 \\ z = 16 - \dfrac{4}{17}\, x_3 - \dfrac{11}{17}\, x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:

(a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;

(b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\ & -4\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & x_3 & & & = & 35 \\ & 3\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 12 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{34}\,x_3 - \dfrac{5}{17}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{34}\,x_3 - \dfrac{2}{17}\,x_4 \\ z = 16 - \dfrac{4}{17}\,x_3 - \dfrac{11}{17}\,x_4 \end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; 16$$

Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

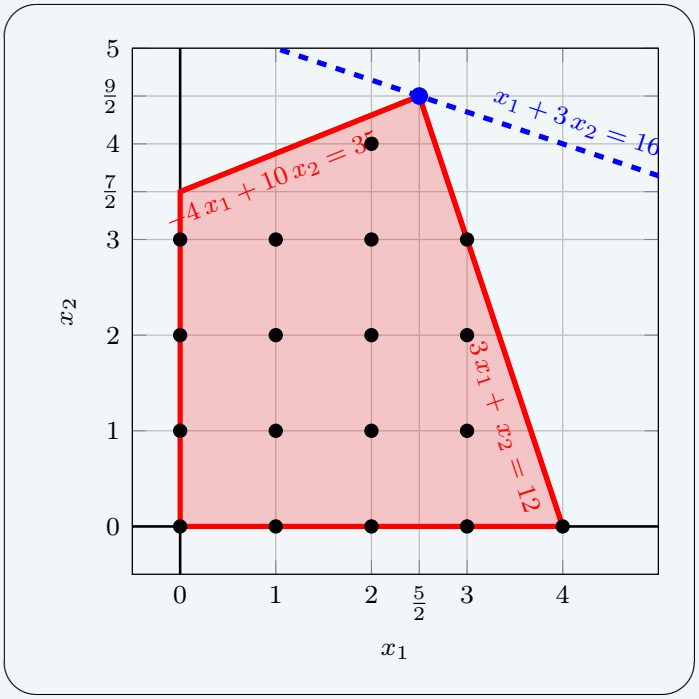
$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & 3 & x_2 & & \\ & -4\,x_1 & + & 10 & x_2 & \leq & 35 \\ & 3\,x_1 & + & & x_2 & \leq & 12 \\ & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_1\,) = 16$$



- **Iterazione 1**

  a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\, x_3 - \frac{5}{17}\, x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\, x_3 - \frac{2}{17}\, x_4 \\ z = 16 - \frac{4}{17}\, x_3 - \frac{11}{17}\, x_4 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{34} & \frac{5}{17} \\ \frac{3}{34} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{34} - \left\lfloor -\frac{1}{34} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{34}-(-1)=\frac{33}{34}} x_3 + \underbrace{\left(\frac{5}{17} - \left\lfloor \frac{5}{17} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{17}-0=\frac{5}{17}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{5}{2} - \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{33}{34}\, x_3 + \frac{5}{17}\, x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 33\, x_3 + 10\, x_4 \geq 17$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{33}{34}\, x_3 + \frac{5}{17}\, x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 33\, x_3 + 10\, x_4 - 34\, x_5 = 17$$

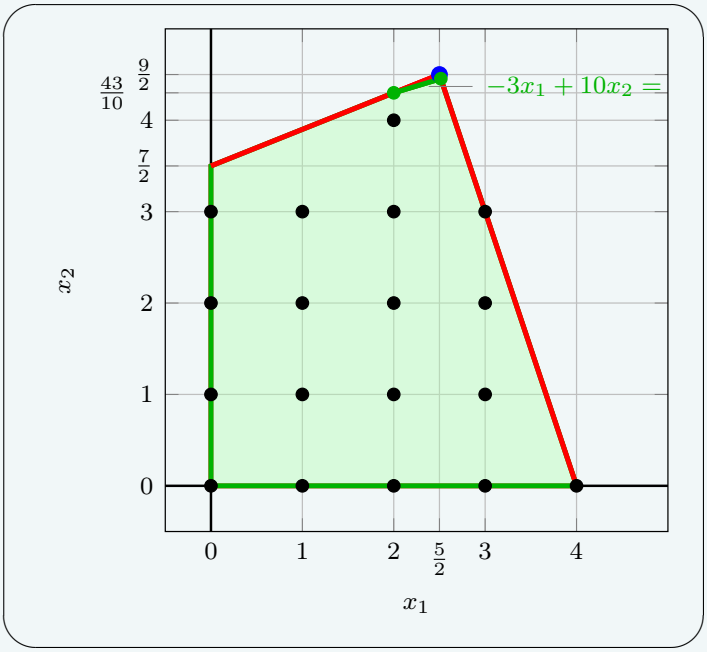
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 35 + 4\, x_1 - 10\, x_2, \qquad x_4 = 12 - 3\, x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$33\,(35 + 4\, x_1 - 10\, x_2) + 10\,(12 - 3\, x_1 - x_2) \geq 17 \quad \Rightarrow \quad -3\, x_1 + 10\, x_2 \leq 37$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{34} - \left\lfloor \frac{3}{34} \right\rfloor\right)}_{\frac{3}{34} - 0 = \frac{3}{34}} x_3 + \underbrace{\left(\frac{2}{17} - \left\lfloor \frac{2}{17} \right\rfloor\right)}_{\frac{2}{17} - 0 = \frac{2}{17}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{9}{2} - \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{34}\, x_3 + \frac{2}{17}\, x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\, x_3 + 4\, x_4 \geq 17$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{3}{34}\, x_3 + \frac{2}{17}\, x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\, x_3 + 4\, x_4 - 34\, x_5 = 17$$

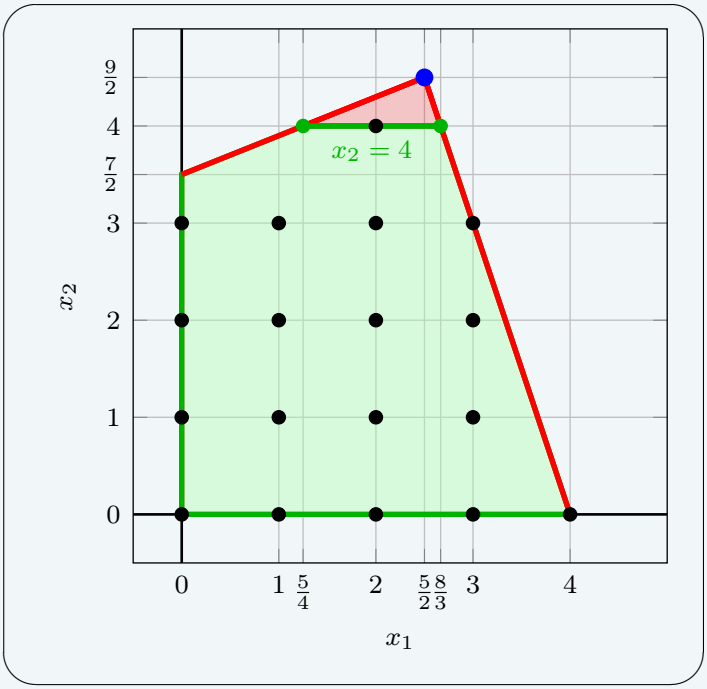
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 35 + 4\, x_1 - 10\, x_2, \qquad x_4 = 12 - 3\, x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$3\,(35 + 4\, x_1 - 10\, x_2) + 4\,(12 - 3\, x_1 - x_2) \geq 17 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 4$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_1 in forma canonica:



I due tagli frazionari di Gomory hanno lo stesso termine noto, pari a $\frac{1}{2}$. Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 3 & x_2 & & & & & & & \\
 & -4 & x_1 & + & 10 & x_2 & + & x_3 & & & = & 35 \\
 & 3 & x_1 & + & & x_2 & & & + & x_4 & = & 12 \\
 & & & & & x_2 & & & & + \ x_5 & = & 4 \\
 & & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$3\,x_3 + 4\,x_4 - 34\,x_5 = 17 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{34}\,x_3 + \frac{2}{17}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\, x_3 - \frac{5}{17}\, x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\, x_3 - \frac{2}{17}\, x_4 \\ x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{34}\, x_3 + \frac{2}{17}\, x_4 \\ z = 16 - \frac{4}{17}\, x_3 - \frac{11}{17}\, x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 16$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{4}{17}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{11}{17} \quad \text{di valore} \quad 16$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{4}{17} - \frac{3}{34}\, \pi_5 \\ \pi_4 = \frac{11}{17} - \frac{2}{17}\, \pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{4}{17} - \frac{3}{34}\, \pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{11}{17} - \frac{2}{17}\, \pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 \leq \frac{8}{3} \\ \pi_5 \leq \frac{11}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\left\{\frac{8}{3}, \frac{11}{2}\right\} = \frac{8}{3}$, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_5 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_3 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_3 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{34}\, x_3 + \frac{2}{17}\, x_4 \quad \text{quindi} \quad x_3 = \frac{17}{3} - \frac{4}{3} x_4 + \frac{34}{3} x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\left(\frac{17}{3} - \frac{4}{3} x_4 + \frac{34}{3} x_5\right) - \frac{5}{17} x_4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5$$

$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\left(\frac{17}{3} - \frac{4}{3} x_4 + \frac{34}{3} x_5\right) - \frac{2}{17} x_4 = 4 - x_5$$

$$z = 16 - \frac{4}{17}\left(\frac{17}{3} - \frac{4}{3}x_4 + \frac{34}{3}x_5\right) - \frac{11}{17}x_4 = \frac{44}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = 4 - x_5 \\ x_3 = \frac{17}{3} - \frac{4}{3}x_4 + \frac{34}{3}x_5 \\ z = \frac{44}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = \frac{17}{3}, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{44}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{8}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{44}{3}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_2 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; \underbrace{\left\lfloor \frac{44}{3} \right\rfloor}_{=14}$$

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

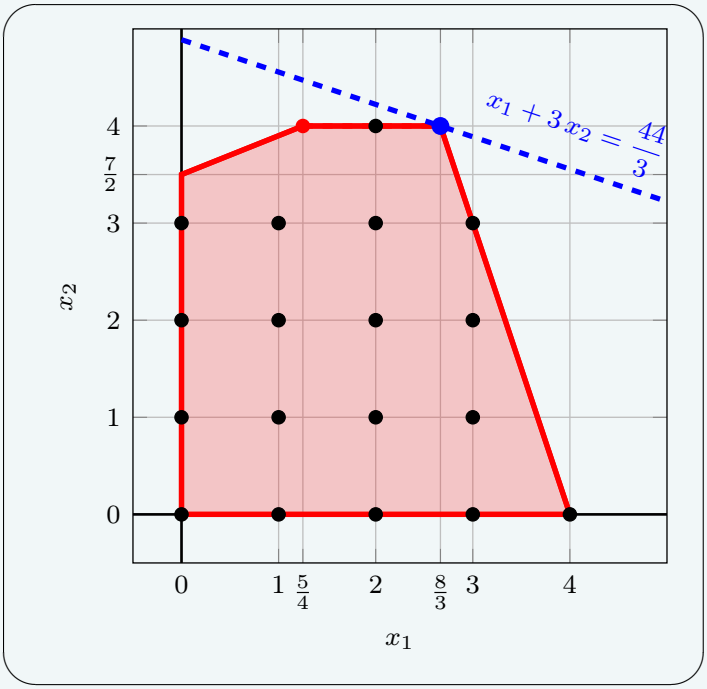
$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & 3 & x_2 & & \\ & -4\ x_1 & + & 10 & x_2 & \leq & 35 \\ & 3\ x_1 & + & & x_2 & \leq & 12 \\ & & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \qquad \tilde{x}_2 = 4$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = \frac{44}{3}$$



- **Iterazione 2**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = 4 - x_5 \\ x_3 = \frac{17}{3} - \frac{4}{3}x_4 + \frac{34}{3}x_5 \\ z = \frac{44}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{34}{3} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 4 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}} x_4 + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} - \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}} x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{8}{3} - \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\, x_4 + \frac{2}{3}\, x_5 \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 2\, x_5 \geq 2$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{3}\, x_4 + \frac{2}{3}\, x_5 - x_6 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 2\, x_5 - 3\, x_6 = 2$$

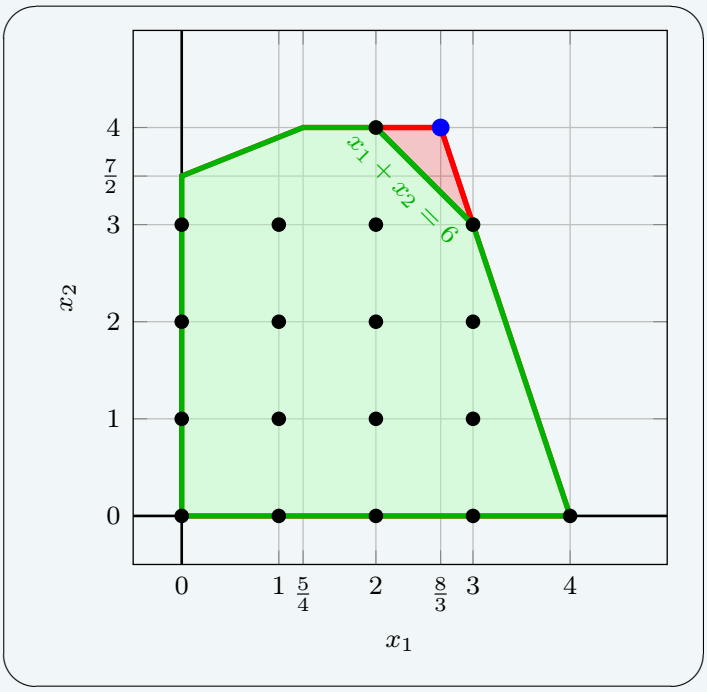
Dalla forma standard del problema LP_2, abbiamo:

$$x_4 = 12 - 3\, x_1 - x_2, \qquad x_5 = 4 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(12 - 3\, x_1 - x_2) + 2\,(4 - x_2) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 6.$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_2 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla terza riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}-\left\lfloor\frac{4}{3}\right\rfloor\right)}_{\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}} x_4+\underbrace{\left(-\frac{34}{3}-\left\lfloor-\frac{34}{3}\right\rfloor\right)}_{-\frac{34}{3}+12=\frac{2}{3}} x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{17}{3}-\left\lfloor\frac{17}{3}\right\rfloor\right)}_{\frac{17}{3}-5=\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\,x_4+\frac{2}{3}\,x_5 \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_4+2\,x_5 \geq 2$$

Si ottiene lo stesso taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_3 aggiungendolo al problema LP_2.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & & x_1 & + & 3\ x_2 & & & & & & & & \\
 & -4 & x_1 & + & 10\ x_2 & + & x_3 & & & & & = & 35 \\
 & 3 & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4 \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 6 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_4+2\,x_5-3\,x_6=2 \qquad \Rightarrow \quad x_6=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 + \frac{1}{3}\,x_5 \\
x_2 = 4 - x_5 \\
x_3 = \frac{17}{3} - \frac{4}{3}\,x_4 + \frac{34}{3}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_4 + \frac{2}{3}\,x_5 \\
z = \frac{44}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - \frac{8}{3}\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_3 = \frac{17}{3}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{2}{3}, \qquad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{44}{3}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \qquad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{8}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{44}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_6 \\ \pi_5 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \leq 1 \\ \pi_6 \leq 4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\{1, 4\} = 1$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_6 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_4 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_4 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \quad \text{quindi} \quad x_4 = 2 - 2x_5 + 3x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}(2 - 2x_5 + 3x_6) + \frac{1}{3}x_5 = 2 + x_5 - x_6$$
$$x_3 = \frac{17}{3} - \frac{4}{3}(2 - 2x_5 + 3x_6) + \frac{34}{3}x_5 = 3 + 14x_5 - 4x_6$$
$$z = \frac{44}{3} - \frac{1}{3}(2 - 2x_5 + 3x_6) - \frac{8}{3}x_5 = 14 - 2x_5 - x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_5 - x_6 \\ x_2 = 4 - x_5 \\ x_3 = 3 + 14x_5 - 4x_6 \\ x_4 = 2 - 2x_5 + 3x_6 \\ z = 14 - 2x_5 - x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 3, \quad \tilde{x}_4 = 2, \qquad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 14$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_5 = 2 \quad \tilde{\pi}_6 = 1 \quad \text{di valore} \quad 14$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è **intera**. Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, ILP\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

Il valore ottimo $z(\, ILP\,)$ è 14.

Per il problema LP_3 in forma canonica, abbiamo:

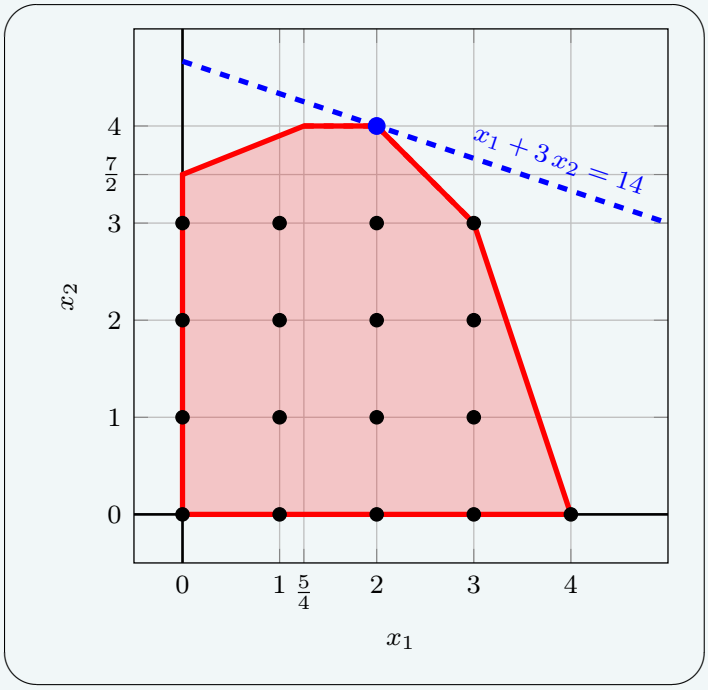
$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & x_1 & + & 3\ x_2 & & & \\ -4 & x_1 & + & 10\ x_2 & \leq & 35 & \\ 3 & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 & \\ & & & x_2 & \leq & 4 & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \qquad \tilde{x}_2 = 4$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_3\,) = 14$$



Esercizio 6.3 — Algoritmo del piano di taglio ($P3$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & \\ & -\,x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 19 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\ z = 17 - \frac{14}{5}\,x_3 - \frac{3}{5}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:
   (a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;

(b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & & & & \\
 & - & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & & = & 2 \\
 & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & + & x_4 & = & 19 \\
 & & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{5} x_3 - \dfrac{1}{10} x_4 \\
x_2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{4}{5} x_3 - \dfrac{1}{10} x_4 \\
z = 17 - \dfrac{14}{5} x_3 - \dfrac{3}{5} x_4
\end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\ ILP\ ) \ \leq \ 17$$

Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

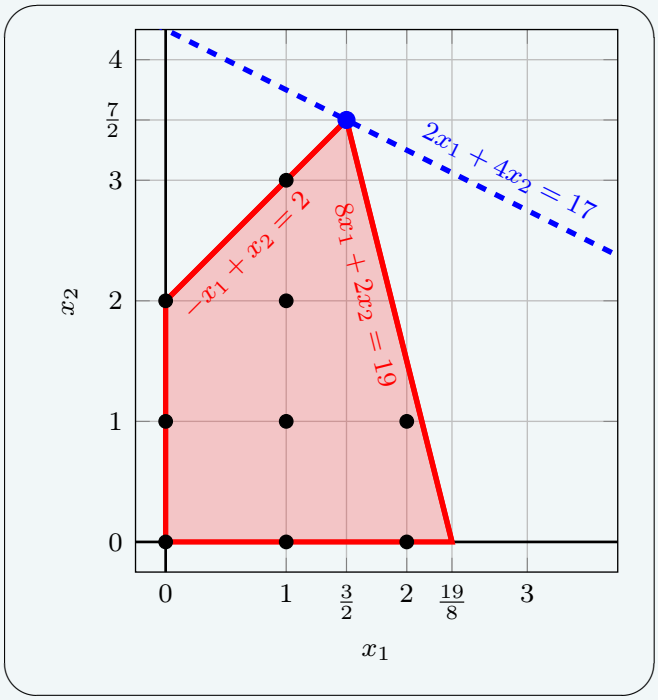
$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 2\ x_1 & + & 4\ x_2 & & & \\ & -\ x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & \\ & 8\ x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 19 & \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\ LP_1\ )$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\ LP_1\ ) = 17$$



- **Iterazione 1**

  a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\, x_3 - \frac{1}{10}\, x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\, x_3 - \frac{1}{10}\, x_4 \\ z = 17 - \frac{14}{5}\, x_3 - \frac{3}{5}\, x_4 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{5} - \left\lfloor -\frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{5}-(-1)=\frac{4}{5}} x_3 + \underbrace{\left(\frac{1}{10} - \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{10}-0=\frac{1}{10}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{4}{5}\, x_3 + \frac{1}{10}\, x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 8\, x_3 + x_4 \geq 5$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{4}{5}\, x_3 + \frac{1}{10}\, x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 8\, x_3 + x_4 - 10\, x_5 = 5$$

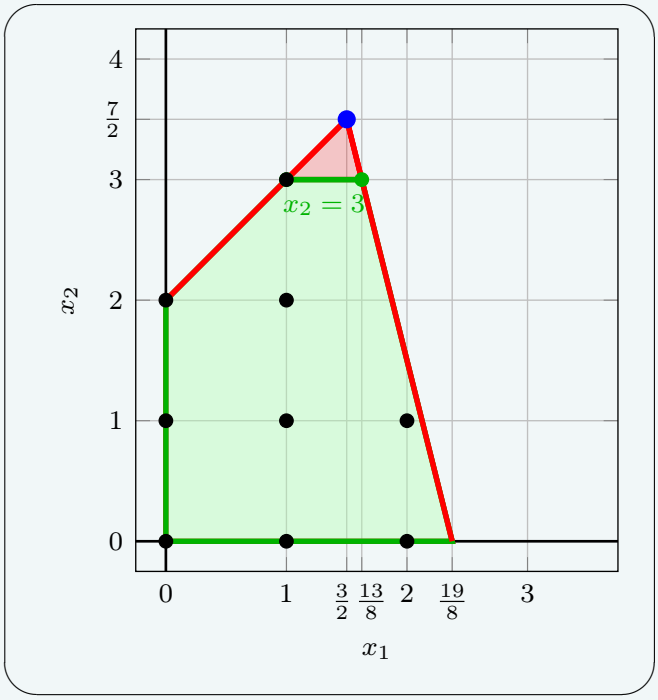
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 2 + x_1 - x_2, \qquad x_4 = 19 - 8\, x_1 - 2\, x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$8\,(2 + x_1 - x_2) + (19 - 8\, x_1 - 2\, x_2) \geq 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 3.$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{4}{5} - \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5}} x_3 + \underbrace{\left(\frac{1}{10} - \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{10} - 0 = \frac{1}{10}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{7}{2} - \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{4}{5}\, x_3 + \frac{1}{10}\, x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 8\, x_3 + x_4 \geq 5$$

Si ottiene lo stesso taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione con il simplesso duale**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & & & & & & \\
 & - & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\
 & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & + & x_4 & = & 19 \\
 & & & & & x_2 & & & & + \; x_5 & = & 3 \\
 & & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$8\,x_3 + x_4 - 10\,x_5 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\,x_3 + \frac{1}{10}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\ x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\,x_3 + \frac{1}{10}\,x_4 \\ z = 17 - \frac{14}{5}\,x_3 - \frac{3}{5}\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 17$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{14}{5}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad 17$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{14}{5} - \frac{4}{5}\,\pi_5 \\ \pi_4 = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{14}{5} - \frac{4}{5}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 \leq \frac{7}{2} \\ \pi_5 \leq 6 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\left\{\frac{7}{2}, 6\right\} = \frac{7}{2}$, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_5 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_3 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_3 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\,x_3 + \frac{1}{10}\,x_4 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5\right) - \frac{1}{10}x_4 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{1}{4}x_5$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5\right) - \frac{1}{10}x_4 = 3 - x_5$$

$$z = 17 - \frac{14}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5\right) - \frac{3}{5}x_4 = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{7}{2}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \\ z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{7}{2}x_5 \end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_2 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; \underbrace{\left\lfloor \frac{61}{4} \right\rfloor}_{=15}$$

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

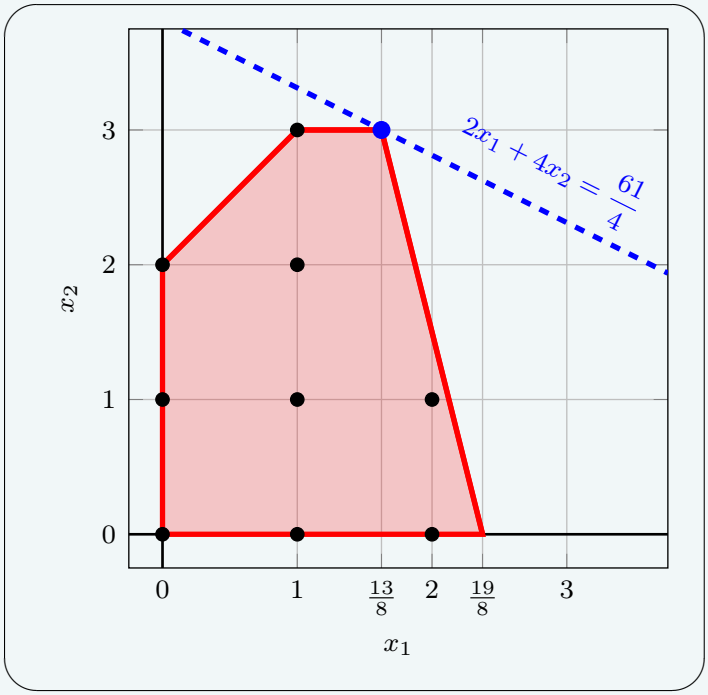
$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & \\ & -\,x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 19 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \qquad \tilde{x}_2 = 3$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = \frac{61}{4}$$



- **Iterazione 2**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \\ z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{7}{2}x_5 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ 3 \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{8}-\left\lfloor\frac{1}{8}\right\rfloor\right)}_{\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}} x_4+\underbrace{\left(-\frac{1}{4}-\left\lfloor-\frac{1}{4}\right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{4}-(-1)=\frac{3}{4}} x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{13}{8}-\left\lfloor\frac{13}{8}\right\rfloor\right)}_{\frac{13}{8}-1=\frac{5}{8}}$$

$$\frac{1}{8}\,x_4+\frac{3}{4}\,x_5 \geq \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad x_4+6\,x_5 \geq 5$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{8}\,x_4+\frac{3}{4}\,x_5-x_6=\frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad x_4+6\,x_5-8\,x_6=5$$

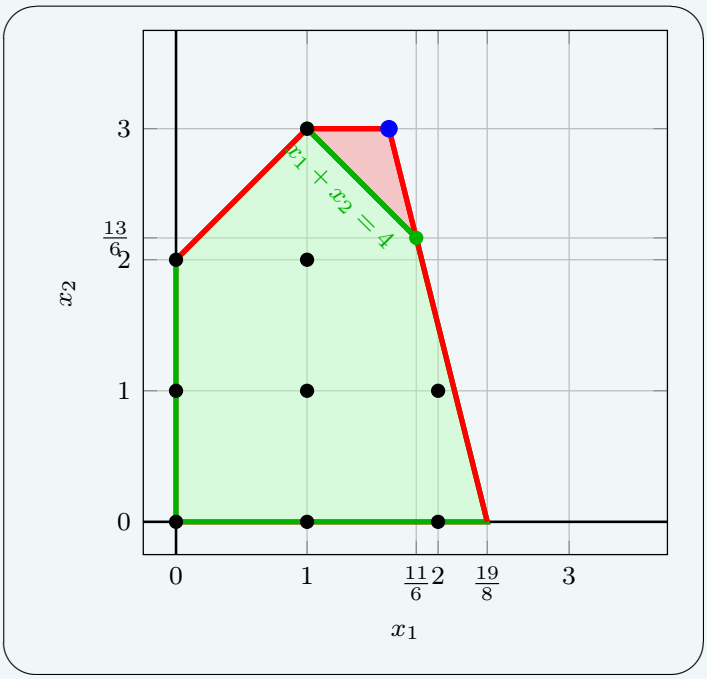
Dalla forma standard del problema LP_2, abbiamo:

$$x_4=19-8\,x_1-2\,x_2, \qquad x_5=3-x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(19-8\,x_1-2\,x_2)+6\,(3-x_2) \geq 5 \quad \Rightarrow \quad x_1+x_2 \leq 4.$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_2 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla terza riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{8}-\left\lfloor\frac{1}{8}\right\rfloor\right)}_{\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}} x_4+\underbrace{\left(-\frac{5}{4}-\left\lfloor-\frac{5}{4}\right\rfloor\right)}_{-\frac{5}{4}+2=\frac{3}{4}} x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{5}{8}-\left\lfloor\frac{5}{8}\right\rfloor\right)}_{\frac{5}{8}-0=\frac{5}{8}}$$

$$\frac{1}{8}\,x_4+\frac{3}{4}\,x_5 \geq \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad x_4+6\,x_5 \geq 5$$

Si ottiene lo stesso taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_3 aggiungendolo al problema LP_2.

b) **Fase di riottimizzazione con il simplesso duale**

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & & & & & & & & \\
 & - & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & 8 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 19 \\
 & & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & & x_1 & + & & x_2 & & & & & & & + \; x_6 \; = & 4 \\
 & & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & x_6 \; \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_4+6\,x_5-8\,x_6=5 \quad \Rightarrow \quad x_6=-\frac{5}{8}+\frac{1}{8}\,x_4+\frac{3}{4}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5 \\
x_2 = 3 - x_5 \\
x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{5}{4}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{4}\,x_5 \\
z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{7}{2}\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B}=\{1,2,3,6\}$ e $\mathcal{N}=\{4,5\}$ e

– la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_3 = \frac{5}{8}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{5}{8}, \qquad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

– la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \qquad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{7}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{7}{2} - \frac{3}{4}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{7}{2} - \frac{3}{4}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 2 \\ \pi_6 &\leq \frac{14}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{2, \frac{14}{3}\right\} = 2$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_6 diventa una variabile primale fuori base

π_4 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_4 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{4}\,x_5 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = 5 - 6x_5 + 8x_6.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,(5 - 6x_5 + 8x_6) + \frac{1}{4}x_5 = 1 + x_5 - x_6$$

$$x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\,(5 - 6x_5 + 8x_6) + \frac{5}{4}x_5 = 2\,x_5 - x_6$$

$$z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}\,(5 - 6x_5 + 8x_6) - \frac{7}{2}x_5 = 14 - 2x_5 - 2x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 &+ & x_5 &- & x_6 \\ x_2 &= 3 &- & x_5 & & \\ x_3 &= 0 &+ & 2\,x_5 &- & x_6 \\ x_4 &= 5 &- & 6\,x_5 &+ & 8\,x_6 \\ z &= 14 &- & 2\,x_5 &- & 2\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 5, \qquad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 14$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_5 = 2, \quad \tilde{\pi}_6 = 2 \quad \text{di valore} \quad 14$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è **intera** e il problema LP_3 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; 14$$

Per il problema LP_3 in forma canonica, abbiamo:

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\max & 2\ x_1 & + & 4\ x_2 & & & \\
 & -\ x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & \\
 & 8\ x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 19 & \\
 & & & x_2 & \leq & 3 & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 & \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è:

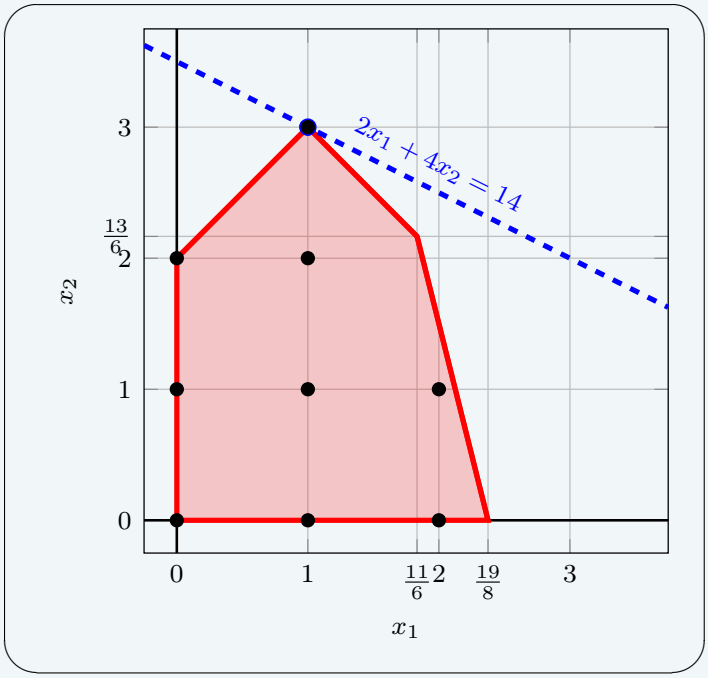
$$\tilde{x}_1 = 1, \qquad \tilde{x}_2 = 3$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_3\,) = 14$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,) = (1, 3)$ è **intera**. Quindi è anche una soluzione ottima del problema ILP.

$$z(\, ILP\,) = 14.$$



Esercizio 6.4 — Algoritmo del piano di taglio ($P4$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 5 & x_1 & + & 3 & x_2 & \\ & 2 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 14 \\ & & x_1 & + & 8 & x_2 & \leq & 32 \\ & & x_1, & & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15} x_3 + \frac{1}{15} x_4 \\ x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15} x_3 - \frac{2}{15} x_4 \\ z = \frac{110}{3} - \frac{37}{15} x_3 - \frac{1}{15} x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:

(a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;

(b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \max & 5 & x_1 & + & 3 & x_2 & & & & \\ & 2 & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & & = & 14 \\ & & x_1 & + & 8 & x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\ & & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{8}{15} x_3 + \dfrac{1}{15} x_4 \\ x_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{1}{15} x_3 - \dfrac{2}{15} x_4 \\ z = \dfrac{110}{3} - \dfrac{37}{15} x_3 - \dfrac{1}{15} x_4 \end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; \underbrace{\left\lfloor \frac{110}{3} \right\rfloor}_{=36}$$

Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

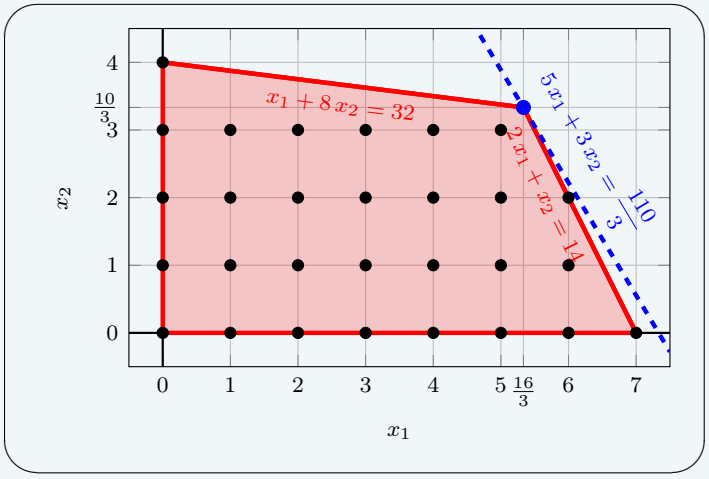
$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 5 & x_1 & + & 3 & x_2 & \\ & 2 & x_1 & + & & x_2 & \leq 14 \\ & & x_1 & + & 8 & x_2 & \leq 32 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_1\,) = \frac{110}{3}$$



- **Iterazione 1**

  a) **Fase di generazione dei tagli**

  Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15}\, x_3 + \frac{1}{15}\, x_4 \\ x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{2}{15}\, x_4 \\ z = \frac{110}{3} - \frac{37}{15}\, x_3 - \frac{1}{15}\, x_4 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{8}{15} - \left\lfloor \frac{8}{15} \right\rfloor\right)}_{\frac{8}{15} - 0 = \frac{8}{15}} x_3 + \underbrace{\left(-\frac{1}{15} - \left\lfloor -\frac{1}{15} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{15} - (-1) = \frac{14}{15}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{16}{3} - \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{16}{3} - 5 = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{8}{15}\, x_3 + \frac{14}{15}\, x_4 \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 8\, x_3 + 14\, x_4 \geq 5$$

Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 14 - 2\, x_1 - x_2, \qquad x_4 = 32 - x_1 - 8\, x_2.$$

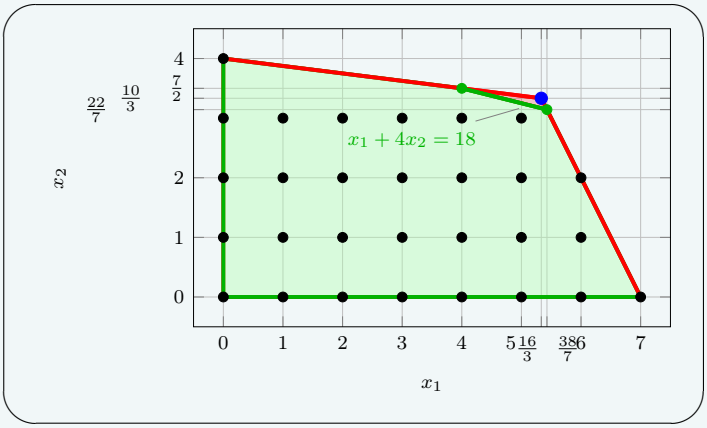
Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$8\,(14 - 2\, x_1 - x_2) + 14\,(32 - x_1 - 8\, x_2) \geq 5 \quad \Rightarrow \quad 2\, x_1 + 8\, x_2 \leq 37$$

Dividendo per il massimo comune divisore 2 dei coefficienti e arrotondando per difetto il termine noto, otteniamo il taglio in forma primitiva:

$$x_1 + 4\, x_2 \leq \left\lfloor \frac{37}{2} \right\rfloor = 18$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{15}-\left\lfloor-\frac{1}{15}\right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{15}-(-1)=\frac{14}{15}}x_3+\underbrace{\left(\frac{2}{15}-\left\lfloor\frac{2}{15}\right\rfloor\right)}_{\frac{2}{15}-0=\frac{2}{15}}x_4\geq\underbrace{\left(\frac{10}{3}-\left\lfloor\frac{10}{3}\right\rfloor\right)}_{\frac{10}{3}-3=\frac{1}{3}}$$

$$\frac{14}{15}\,x_3+\frac{2}{15}\,x_4\geq\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad 14\,x_3+2\,x_4\geq 5$$

Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3=14-2\,x_1-x_2,\qquad x_4=32-x_1-8\,x_2.$$

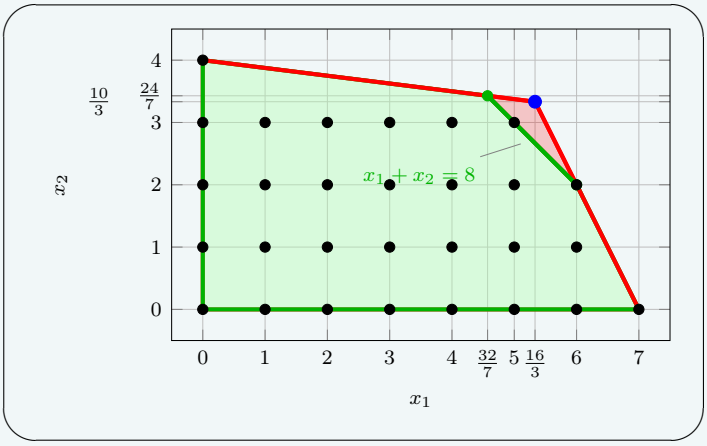
Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$14\,(14-2\,x_1-x_2)+2\,(32-x_1-8\,x_2)\geq 5\quad\Rightarrow\quad 2\,x_1+2\,x_2\leq 17$$

Dividendo per il massimo comune divisore 2 dei coefficienti e arrotondando per difetto il termine noto, otteniamo il taglio in forma primitiva:

$$x_1+x_2\leq\left\lfloor\frac{17}{2}\right\rfloor=8$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_1 in forma canonica:



I due tagli frazionari di Gomory hanno lo stesso termine noto, pari a $\frac{1}{3}$. Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione con il simplesso duale**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 5 & x_1 & + & 3 & x_2 & & & & & & \\
& 2 & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & & & = & 14 \\
& & x_1 & + & 8 & x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\
& & x_1 & + & & x_2 & & & & & = & 8 \\
& & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \geq & 0
\end{array}$$

La variabile di scarto del taglio primitivo aggiunto è $x_5 = 8 - x_1 - x_2$. Sostituendo le righe di x_1 e x_2 del precedente dizionario ottimo, abbiamo:

$$x_5 = 8 - \left(\frac{16}{3} - \frac{8}{15}\, x_3 + \frac{1}{15}\, x_4\right) - \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{2}{15}\, x_4\right) = -\frac{2}{3} + \frac{7}{15}\, x_3 + \frac{1}{15}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{8}{15}\, x_3 + \dfrac{1}{15}\, x_4 \\
x_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{1}{15}\, x_3 - \dfrac{2}{15}\, x_4 \\
x_5 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{15}\, x_3 + \dfrac{1}{15}\, x_4 \\
z = \dfrac{110}{3} - \dfrac{37}{15}\, x_3 - \dfrac{1}{15}\, x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{2}{3}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{37}{15}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{15} \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases}
\pi_3 = \dfrac{37}{15} - \dfrac{7}{15}\, \pi_5 \\
\pi_4 = \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{15}\, \pi_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\dfrac{37}{15} - \dfrac{7}{15}\, \pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\
\underbrace{\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{15}\, \pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_5 \leq \dfrac{37}{7} \\
\pi_5 \leq 1
\end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\left\{\dfrac{37}{7}, 1\right\} = 1$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale fuori base

π_4 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_4 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{7}{15}\,x_3 + \frac{1}{15}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 10 - 7\,x_3 + 15\,x_5.$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15}x_3 + \frac{1}{15}\,(10 - 7x_3 + 15x_5) = 6 - x_3 + x_5$$

$$x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15}x_3 - \frac{2}{15}\,(10 - 7x_3 + 15x_5) = 2 + x_3 - 2\,x_5$$

$$z = \frac{110}{3} - \frac{37}{15}x_3 - \frac{1}{15}\,(10 - 7x_3 + 15x_5) = 36 - 2x_3 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_3 + x_5 \\ x_2 = 2 + x_3 - 2\,x_5 \\ x_4 = 10 - 7\,x_3 + 15\,x_5 \\ z = 36 - 2\,x_3 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_4 = 10, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 36$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = 2, \quad \tilde{\pi}_5 = 1 \quad \text{di valore} \quad 36$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,LP_2\,) = (6, 2)$ è **intera**. Quindi è anche una soluzione ottima del problema ILP.

$$z(\,ILP\,) = 36.$$

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

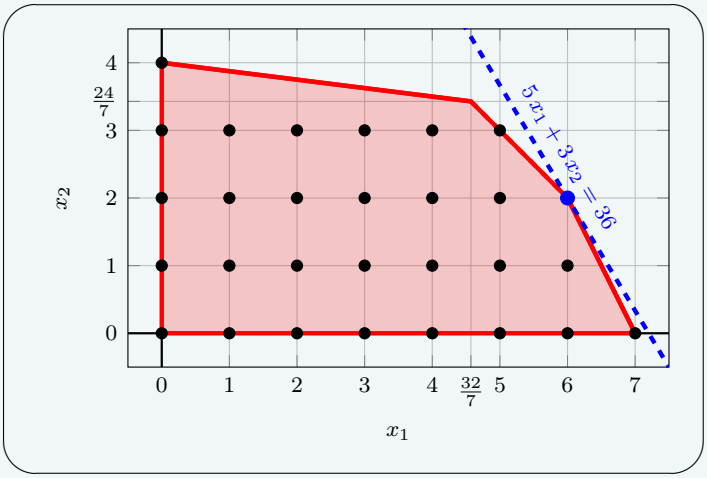
$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 5 & x_1 & + & 3 & x_2 & \\ & 2 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 14 \\ & & x_1 & + & 8 & x_2 & \leq & 32 \\ & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \qquad \tilde{x}_2 = 2$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = 36$$



Esercizio 6.5 — Algoritmo del piano di taglio ($P7$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli lineari:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 3\,x_1 & + & x_2 & & & \\ & x_1 & + & 4\,x_2 & \leq & 12 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:

   (a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;

   (b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

   Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ & x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\, x_2 - \frac{1}{2}\, x_4 \\ x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}\, x_2 + \frac{1}{2}\, x_4 \\ z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\, x_2 - \frac{3}{2}\, x_4 \end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor}_{=7}$$

Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

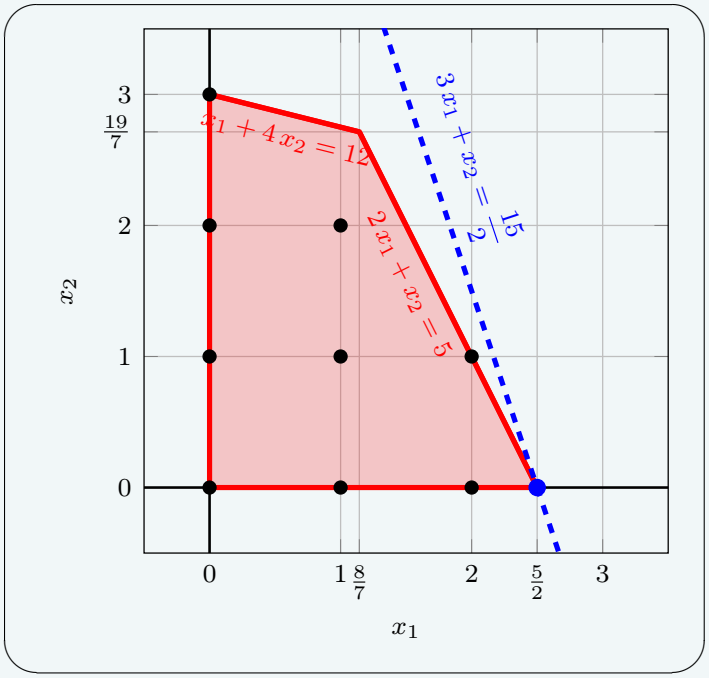
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 3\, x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 4\, x_2 & \leq & 12 \\ & 2\, x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \qquad \tilde{x}_2 = 0$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_1\,) = \frac{15}{2}$$



- **Iterazione 1**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}} x_2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{5}{2} - \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 \geq 1$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 - x_5 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 - 2\,x_5 = 1$$

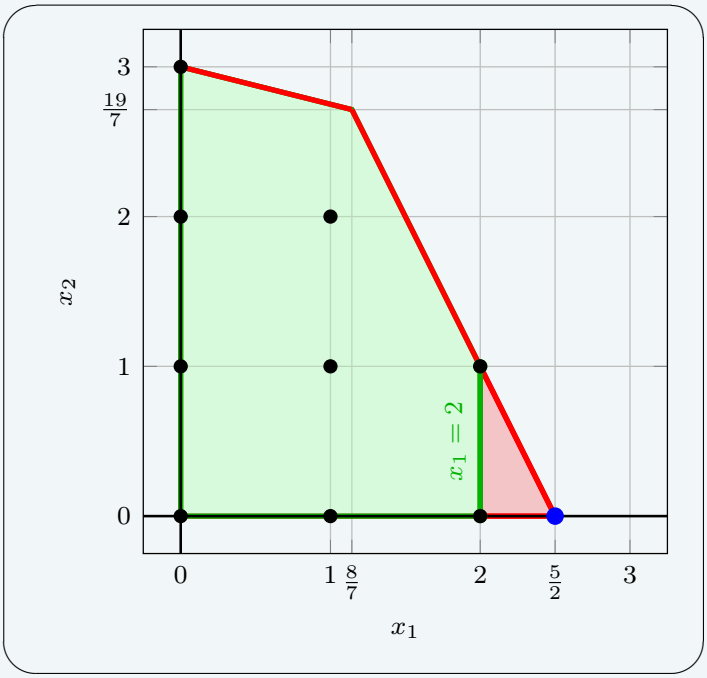
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_4 = 5 - 2\,x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$x_2 + (5 - 2\,x_1 - x_2) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 2$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{7}{2} - \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}}\,x_2 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}}\,x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{19}{2} - \left\lfloor \frac{19}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{19}{2}-9=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 \geq 1$$

Questo taglio frazionario di Gomory coincide con quello generato dalla prima riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 3\,x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
 & x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\
 & 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 5 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_2 + x_4 - 2\,x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_4 \\
x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \\
z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{3}{2}\,x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{19}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{15}{2}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{3}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{15}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_5 \\ \pi_4 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_5 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq 1 \\ \pi_5 &\leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\{1, 3\} = 1$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_5 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_2 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_2 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 1 - x_4 + 2\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(1 - x_4 + 2\,x_5) - \frac{1}{2}x_4 = 2 - x_5$$

$$x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}(1 - x_4 + 2\,x_5) + \frac{1}{2}x_4 = 6 + 4\,x_4 - 7\,x_5$$

$$z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}(1 - x_4 + 2\,x_5) - \frac{3}{2}x_4 = 7 - x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 &&&& - && x_5 \\ x_2 &= 1 &- && x_4 &+ && 2\,x_5 \\ x_3 &= 6 &+ && 4\,x_4 &- && 7\,x_5 \\ z &= 7 &- && x_4 &- && x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 6, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \qquad \text{di valore } 7$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 1, \quad \tilde{\pi}_5 = 1 \qquad \text{di valore } 7$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è **intera**. Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, ILP\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

Il valore ottimo $z(\, ILP\,)$ è 7.

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

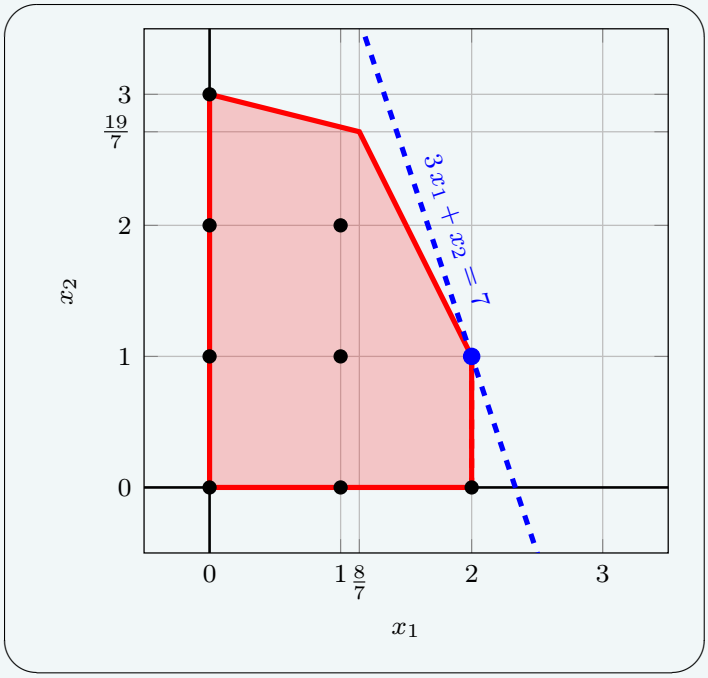
$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3\,x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 4\,x_2 & \leq & 12 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \qquad \tilde{x}_2 = 1$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = 7$$



Esercizio 6.6 — Algoritmo del piano di taglio ($P8$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli lineari:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{2}{3}\,x_4 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{1}{3}\,x_4 \\ z = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{4}{3}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:
   (a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;
   (b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

   Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & \\ & -x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}\,x_3 - \dfrac{2}{3}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3}\,x_3 - \dfrac{1}{3}\,x_4 \\ z = \dfrac{14}{3} - \dfrac{1}{3}\,x_3 - \dfrac{4}{3}\,x_4 \end{cases}$$

  La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

  Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\,ILP\,) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor}_{=4}$$

  Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

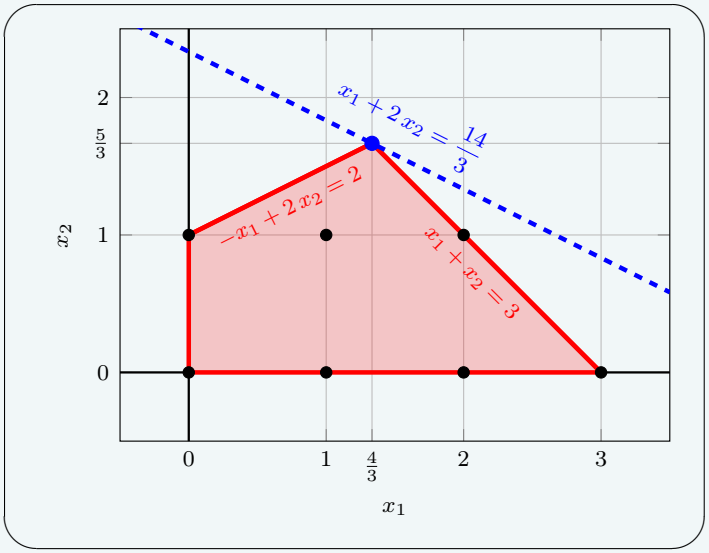
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

  Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,LP_1\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{5}{3}$$

  Il valore ottimo è:

$$z(\,LP_1\,) = \frac{14}{3}$$



- **Iterazione 1**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{2}{3}\,x_4 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{1}{3}\,x_4 \\ z = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{4}{3}\,x_4 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{3} - \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}}\,x_3 + \underbrace{\left(\frac{2}{3} - \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}}\,x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{4}{3} - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2}{3}\,x_3 + \frac{2}{3}\,x_4 \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2\,x_3 + 2\,x_4 \geq 1$$

Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 2 + x_1 - 2\,x_2, \qquad x_4 = 3 - x_1 - x_2.$$

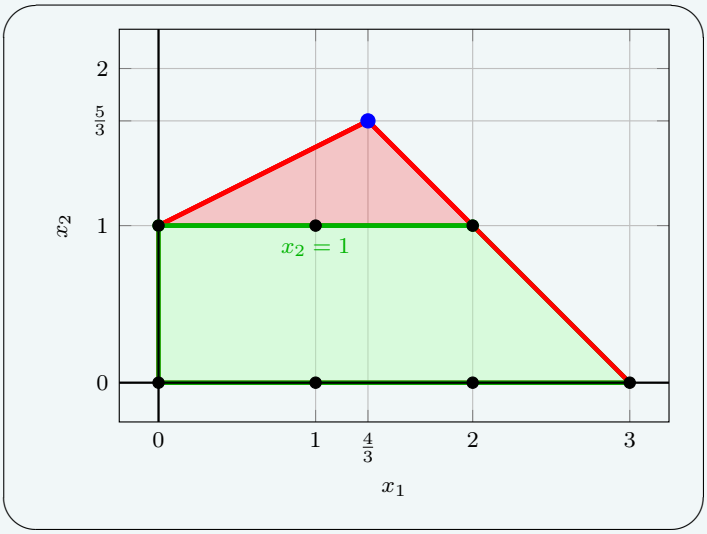
Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$2\,(2 + x_1 - 2\,x_2) + 2\,(3 - x_1 - x_2) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 6\,x_2 \leq 9$$

Dividendo per il massimo comune divisore 6 dei coefficienti e arrotondando per difetto il termine noto, otteniamo il taglio in forma primitiva, la stessa disuguaglianza del taglio generato dalla seconda riga:

$$x_2 \leq \left\lfloor \frac{9}{6} \right\rfloor = 1$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}} x_3 + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}} x_4 \geq \underbrace{\left(\frac{5}{3} - \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\,x_3 + \frac{1}{3}\,x_4 \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 + x_4 \geq 2$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{3}\,x_3 + \frac{1}{3}\,x_4 - x_5 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 + x_4 - 3\,x_5 = 2$$

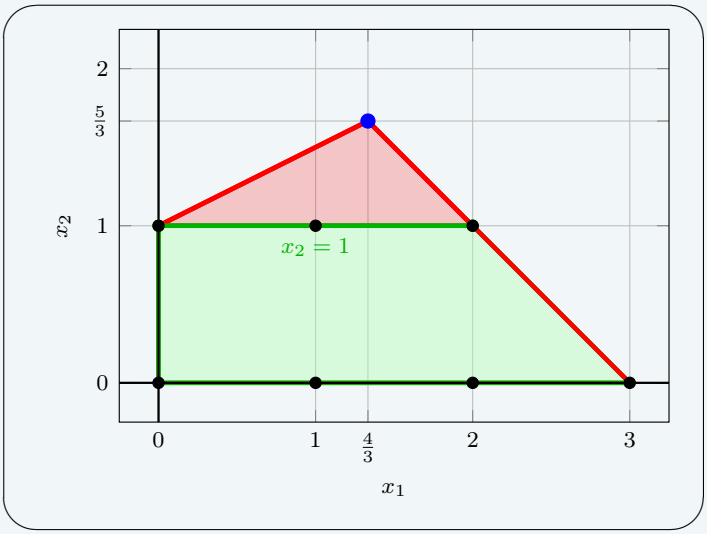
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_3 = 2 + x_1 - 2\,x_2, \qquad x_4 = 3 - x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(2 + x_1 - 2\,x_2) + (3 - x_1 - x_2) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 1$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_1 in forma canonica:



Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_3 + x_4 - 3\,x_5 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{1}{3}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{2}{3}\,x_4 \\ x_2 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{1}{3}\,x_4 \\ x_5 &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{1}{3}\,x_4 \\ z &= \frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{4}{3}\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{2}{3}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{14}{3}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{14}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq 1 \\ \pi_5 &\leq 4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\{1, 4\} = 1$, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale fuori base

π_3 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_3 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{1}{3}\,x_4 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 2 - x_4 + 3\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\,(2 - x_4 + 3\,x_5) - \frac{2}{3}x_4 = 2 - x_4 + x_5$$

$$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,(2 - x_4 + 3\,x_5) - \frac{1}{3}x_4 = 1 - x_5$$

$$z = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}(2 - x_4 + 3\,x_5) - \frac{4}{3}x_4 = 4 - x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 + x_5 \\ x_2 = 1 - x_5 \\ x_3 = 2 - x_4 + 3\,x_5 \\ z = 4 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 2, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \qquad \text{di valore } 4$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 1, \quad \tilde{\pi}_5 = 1 \qquad \text{di valore } 4$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,LP_2\,)$ è **intera**. Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,ILP\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

Il valore ottimo $z(\,ILP\,)$ è 4.

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

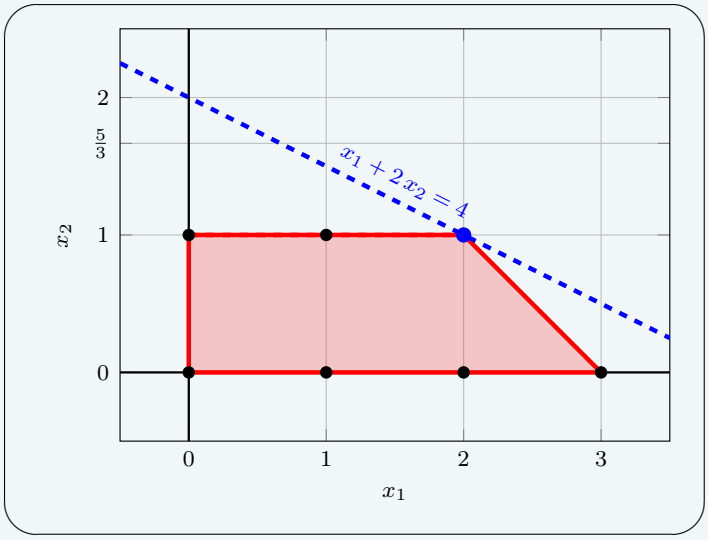
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\,LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \qquad \tilde{x}_2 = 1$$

Il valore ottimo è:

$$z(\,LP_2\,) = 4$$



Esercizio 6.7 — Algoritmo del piano di taglio ($P10$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli lineari:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 12 \\ & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\,x_4 - \frac{5}{8}\,x_5 \\ z = 32 - 2\,x_4 - x_5 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:

(a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;

(b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & & & + & 2\,x_2 & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 8 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8} x_4 - \frac{5}{8} x_5 \\ z = 32 - 2 x_4 - x_5 \end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1 \,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP \,) \leq 32$$

Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

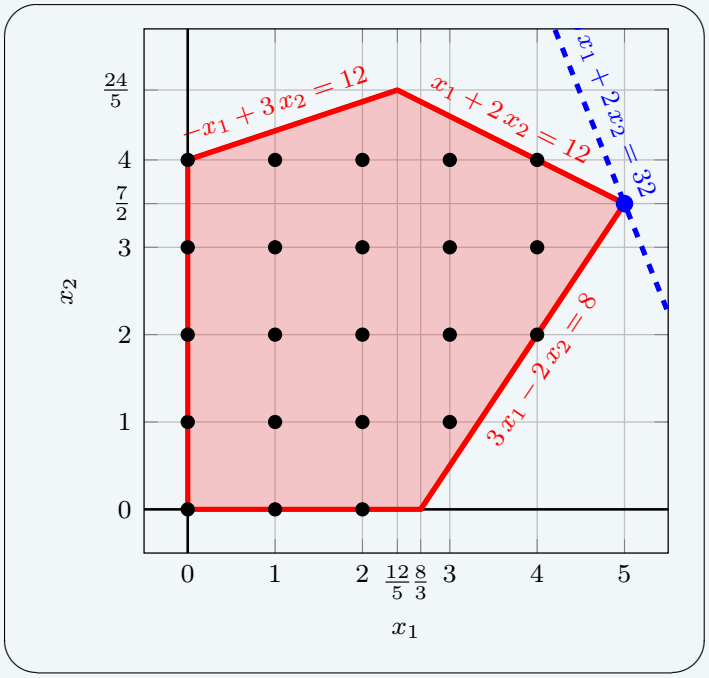
$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 12 \\ & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1 \,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_1 \,) = 32$$



- **Iterazione 1**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ z = 32 - 2x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{8} - \left\lfloor \frac{3}{8} \right\rfloor\right)}_{\frac{3}{8}-0=\frac{3}{8}} x_4 + \underbrace{\left(-\frac{1}{8} - \left\lfloor -\frac{1}{8} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{8}-(-1)=\frac{7}{8}} x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{7}{2} - \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{8}\,x_4 + \frac{7}{8}\,x_5 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\,x_4 + 7\,x_5 \geq 4$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{3}{8}\,x_4 + \frac{7}{8}\,x_5 - x_6 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\,x_4 + 7\,x_5 - 8\,x_6 = 4$$

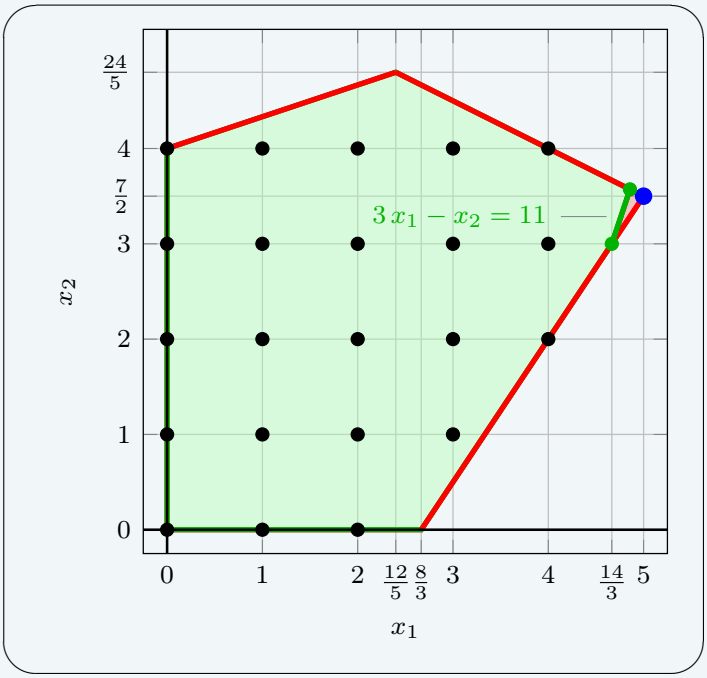
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_4 = 12 - x_1 - 2\,x_2, \qquad x_5 = 8 - 3\,x_1 + 2\,x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$3\,(12 - x_1 - 2\,x_2) + 7\,(8 - 3\,x_1 + 2\,x_2) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 3\,x_1 - x_2 \leq 11$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla terza riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{7}{8} - \left\lfloor -\frac{7}{8} \right\rfloor\right)}_{-\frac{7}{8}-(-1)=\frac{1}{8}}\,x_4 + \underbrace{\left(\frac{5}{8} - \left\lfloor \frac{5}{8} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{8}-0=\frac{5}{8}}\,x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{13}{2} - \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{13}{2}-6=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{8}\, x_4 + \frac{5}{8}\, x_5 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 5\, x_5 \geq 4$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{8}\, x_4 + \frac{5}{8}\, x_5 - x_6 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 5\, x_5 - 8\, x_6 = 4$$

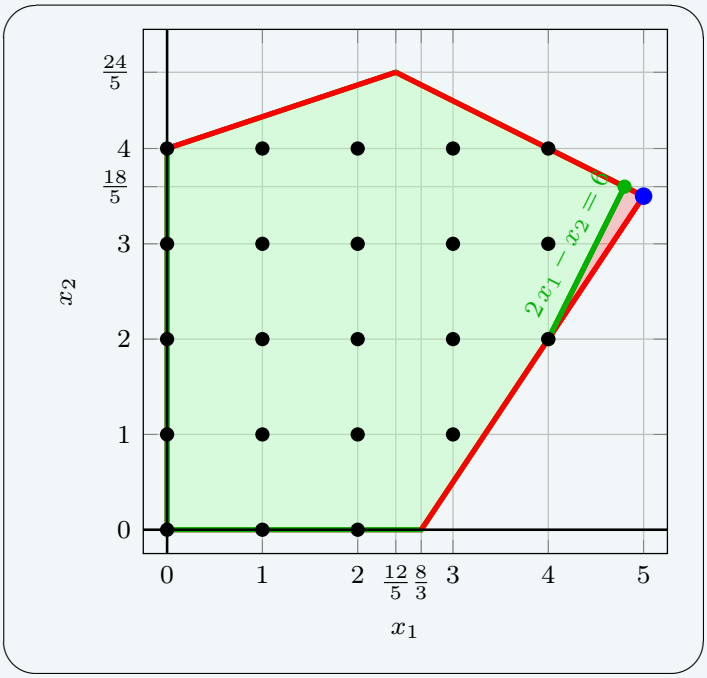
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_4 = 12 - x_1 - 2\, x_2, \qquad x_5 = 8 - 3\, x_1 + 2\, x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(12 - x_1 - 2\, x_2) + 5\,(8 - 3\, x_1 + 2\, x_2) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 2\, x_1 - x_2 \leq 6$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla terza riga sul problema LP_1 in forma canonica:



I due tagli frazionari di Gomory hanno lo stesso termine noto, pari a $\frac{1}{2}$. Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory generato dalla terza riga e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & & & + & 2\,x_2 & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 8 \\
 & 2\,x_1 & - & x_2 & & & & & & & + \; x_6 \; = & 6 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & x_6 \; \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_4 + 5\,x_5 - 8\,x_6 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{5}{8}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = 5 - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_5 \\
x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,x_5 \\
x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\,x_4 - \frac{5}{8}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{5}{8}\,x_5 \\
z = 32 - 2\,x_4 - x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

  $\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{13}{2}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad$ di valore $\quad 32$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

  $\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \qquad \bar{\pi}_4 = 2, \quad \bar{\pi}_5 = 1 \quad$ di valore $\quad 32$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases}
\pi_4 = 2 - \frac{1}{8}\,\pi_6 \\
\pi_5 = 1 - \frac{5}{8}\,\pi_6
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{2 - \frac{1}{8}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\
\underbrace{1 - \frac{5}{8}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_6 \leq 16 \\
\pi_6 \leq \frac{8}{5}
\end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{16, \frac{8}{5}\right\} = \frac{8}{5}$, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_6 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_5 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{8}x_5 \quad \Longrightarrow \quad x_5 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 5 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}x_6\right) = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}x_6\right) = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_6$$

$$x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}x_4 - \frac{5}{8}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}x_6\right) = 6 + x_4 - x_6$$

$$z = 32 - 2x_4 - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}x_6\right) = \frac{156}{5} - \frac{9}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_6 \\ x_2 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_6 \\ x_3 = 6 + x_4 - x_6 \\ x_5 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}x_6 \\ z = \frac{156}{5} - \frac{9}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{24}{5}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \tilde{x}_3 = 6, \quad \tilde{x}_5 = \frac{4}{5}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \qquad \text{di valore } \frac{156}{5}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = \frac{9}{5}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{8}{5} \qquad \text{di valore } \frac{156}{5}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_2 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \;\leq\; \underbrace{\left\lfloor \frac{156}{5} \right\rfloor}_{=31}$$

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

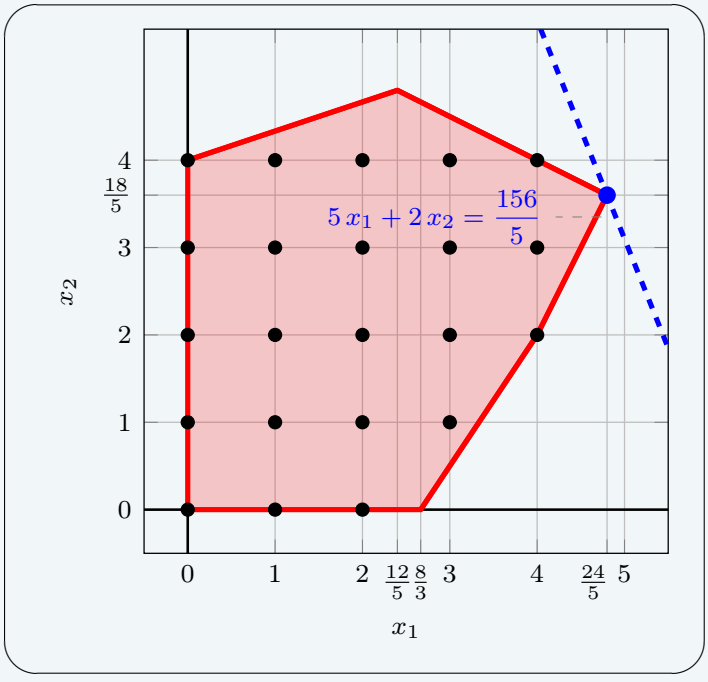
$$\begin{array}{rrrrrr} \max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 12 \\ & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 8 \\ & 2\,x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{24}{5}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{18}{5}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = \frac{156}{5}$$



- **Iterazione 2**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}\, x_4 - \frac{2}{5}\, x_6 \\ x_2 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}\, x_4 + \frac{1}{5}\, x_6 \\ x_3 = 6 + x_4 - x_6 \\ x_5 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\, x_4 + \frac{8}{5}\, x_6 \\ z = \frac{156}{5} - \frac{9}{5}\, x_4 - \frac{8}{5}\, x_6 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{18}{5} \\ 6 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{5} - \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}} x_4 + \underbrace{\left(\frac{2}{5} - \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{2}{5}-0=\frac{2}{5}} x_6 \geq \underbrace{\left(\frac{24}{5} - \left\lfloor \frac{24}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{24}{5}-4=\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{5}\, x_4 + \frac{2}{5}\, x_6 \geq \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 2\, x_6 \geq 4$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{5}\, x_4 + \frac{2}{5}\, x_6 - x_7 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 2\, x_6 - 5\, x_7 = 4$$

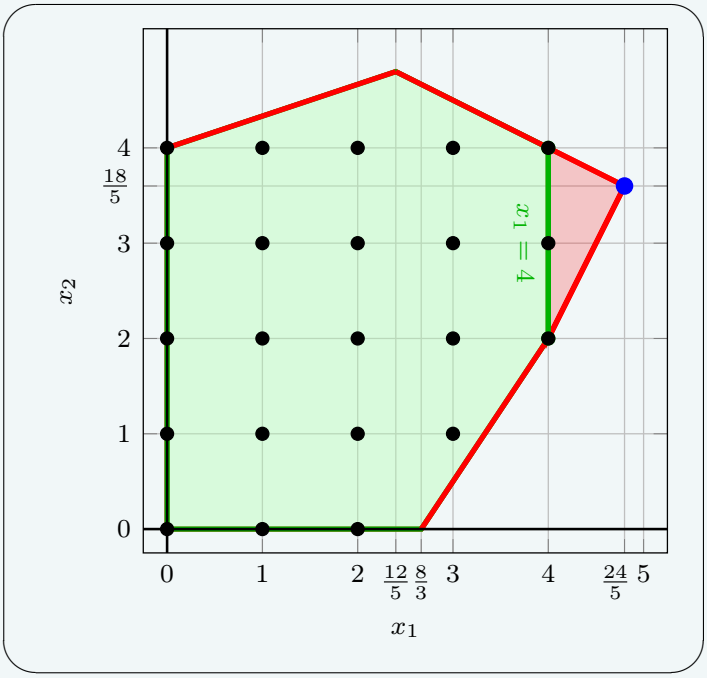
Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto, abbiamo:

$$x_4 = 12 - x_1 - 2\, x_2, \qquad x_6 = 6 - 2\, x_1 + x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(12 - x_1 - 2\,x_2) + 2\,(6 - 2\,x_1 + x_2) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 4$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_2 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{5} - \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{2}{5}-0=\frac{2}{5}} x_4 + \underbrace{\left(-\frac{1}{5} - \left\lfloor -\frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{5}-(-1)=\frac{4}{5}} x_6 \geq \underbrace{\left(\frac{18}{5} - \left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{18}{5}-3=\frac{3}{5}}$$

$$\frac{2}{5}\,x_4 + \frac{4}{5}\,x_6 \geq \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 2\,x_4 + 4\,x_6 \geq 3$$

Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto, abbiamo:

$$x_4 = 12 - x_1 - 2\,x_2, \qquad x_6 = 6 - 2\,x_1 + x_2.$$

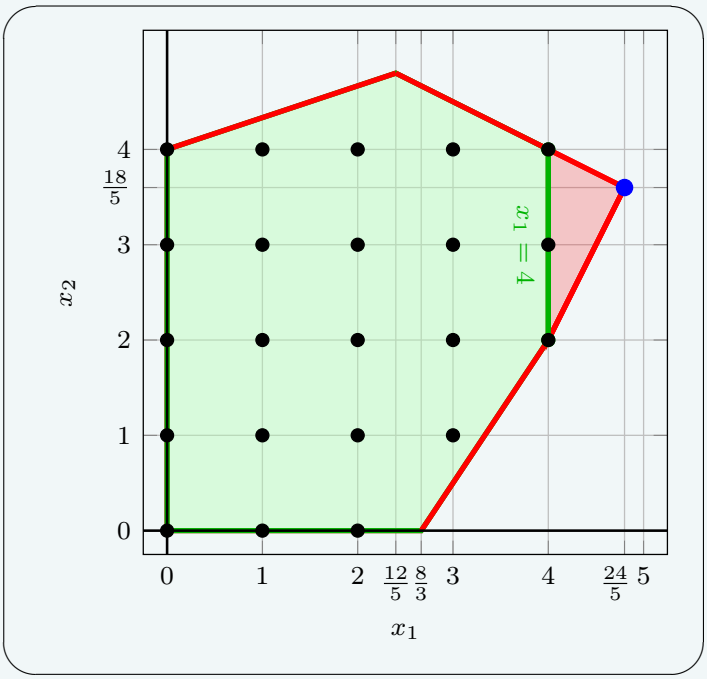
Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$2\,(12 - x_1 - 2\,x_2) + 4\,(6 - 2\,x_1 + x_2) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 10\,x_1 \leq 45$$

Dividendo per il massimo comune divisore 10 dei coefficienti e arrotondando per difetto il termine noto, otteniamo il taglio in forma primitiva, la stessa disuguaglianza del taglio generato dalla prima riga:

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{45}{10} \right\rfloor = 4$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_2 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla quarta riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{5} - \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}} x_4 + \underbrace{\left(-\frac{8}{5} - \left\lfloor -\frac{8}{5} \right\rfloor\right)}_{-\frac{8}{5}-(-2)=\frac{2}{5}} x_6 \geq \underbrace{\left(\frac{4}{5} - \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{4}{5}-0=\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{5}\, x_4 + \frac{2}{5}\, x_6 \geq \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x_4 + 2\, x_6 \geq 4$$

Questo taglio frazionario di Gomory coincide con quello generato dalla prima riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_3 aggiungendolo al problema LP_2.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & & & + & 2\,x_2 & + & x_4 & & & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 8 \\
 & 2\,x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 6 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_4 + 2\,x_6 - 5\,x_7 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_7 = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\,x_4 + \frac{2}{5}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}\,x_4 - \frac{2}{5}\,x_6 \\
x_2 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}\,x_4 + \frac{1}{5}\,x_6 \\
x_3 = 6 + x_4 - x_6 \\
x_5 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\,x_4 + \frac{8}{5}\,x_6 \\
x_7 = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\,x_4 + \frac{2}{5}\,x_6 \\
z = \frac{156}{5} - \frac{9}{5}\,x_4 - \frac{8}{5}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{24}{5}, \quad \bar{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \bar{x}_3 = 6, \quad \bar{x}_5 = \frac{4}{5}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{4}{5},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{156}{5}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{9}{5}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{8}{5} \quad \text{di valore} \quad \frac{156}{5}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{9}{5} - \frac{1}{5}\pi_7 \\ \pi_6 &= \frac{8}{5} - \frac{2}{5}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{9}{5} - \frac{1}{5}\pi_7 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{8}{5} - \frac{2}{5}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 9 \\ \pi_7 &\leq 4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a $\min\{9, 4\} = 4$, il valore di π_6 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_7 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_7 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_6 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_6 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_6 \quad \Longrightarrow \quad x_6 = 2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{24}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}\left(2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_7\right) = 4 - x_7$$

$$x_2 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}\left(2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_7\right) = 4 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_7$$

$$x_3 = 6 + x_4 - \left(2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_7\right) = 4 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_7$$

$$x_5 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 + \frac{8}{5}\left(2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_7\right) = 4 - x_4 + 4x_7$$

$$z = \frac{156}{5} - \frac{9}{5}x_4 - \frac{8}{5}\left(2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_7\right) = 28 - x_4 - 4x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 &= 4 &&&& - && x_7 \\ x_2 &= 4 &- \frac{1}{2}&x_4 &+ \frac{1}{2}&&x_7 \\ x_3 &= 4 &+ \frac{3}{2}&x_4 &- \frac{5}{2}&&x_7 \\ x_5 &= 4 &-&x_4 &+ 4&&x_7 \\ x_6 &= 2 &- \frac{1}{2}&x_4 &+ \frac{5}{2}&&x_7 \\ z &= 28 &-&x_4 &- 4&&x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 7\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 4, \quad \tilde{x}_5 = 4, \quad \tilde{x}_6 = 2, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0$$

di valore 28

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 1, \quad \tilde{\pi}_7 = 4$$

di valore 28

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è **intera**. Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, ILP\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

Il valore ottimo $z(\, ILP\,)$ è 28.

Per il problema LP_3 in forma canonica, abbiamo:

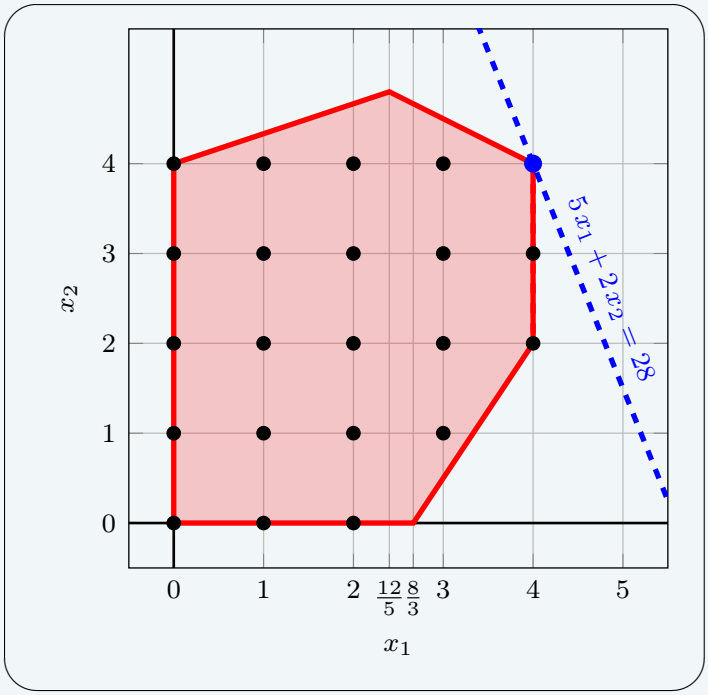
$$\begin{array}{rrrrrr} \max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 12 \\ & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 8 \\ & 2\,x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \qquad \tilde{x}_2 = 4$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_3\,) = 28$$



Esercizio 6.8 — Algoritmo del piano di taglio ($P21$)

Considera il seguente problema ILP in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli lineari:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 21 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\,x_4 - \frac{2}{11}\,x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11}\,x_4 - \frac{3}{11}\,x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\,x_4 - \frac{5}{11}\,x_5 \end{cases}$$

Domande

1. Esegui l'algoritmo del piano di taglio basato sui tagli frazionari di Gomory utilizzando:

   (a) un taglio frazionario di Gomory a ogni iterazione;

   (b) il termine noto più grande come strategia di selezione del taglio.

   Risolvi i problemi LP dopo aver aggiunto il taglio frazionario di Gomory utilizzando l'algoritmo del simplesso duale. Mostra graficamente la soluzione ottima del problema LP a ogni iterazione.

2. Mostra graficamente l'effetto di ciascun taglio frazionario di Gomory sul rilassamento lineare del problema ILP in forma canonica.

Data una riga $i \in \mathcal{B}$ di un dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile tale che $\bar{b}_i$ sia frazionaria, la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor)\, x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

è detta **taglio frazionario di Gomory** generato dalla riga i.

Soluzione

Esecuzione dell'algoritmo del piano di taglio per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo del simplesso:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\, x_4 - \frac{1}{11}\, x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11}\, x_4 - \frac{3}{11}\, x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\, x_4 - \frac{5}{11}\, x_5 \end{cases}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor}_{=10}$$

Per il problema LP_1 in forma canonica, abbiamo:

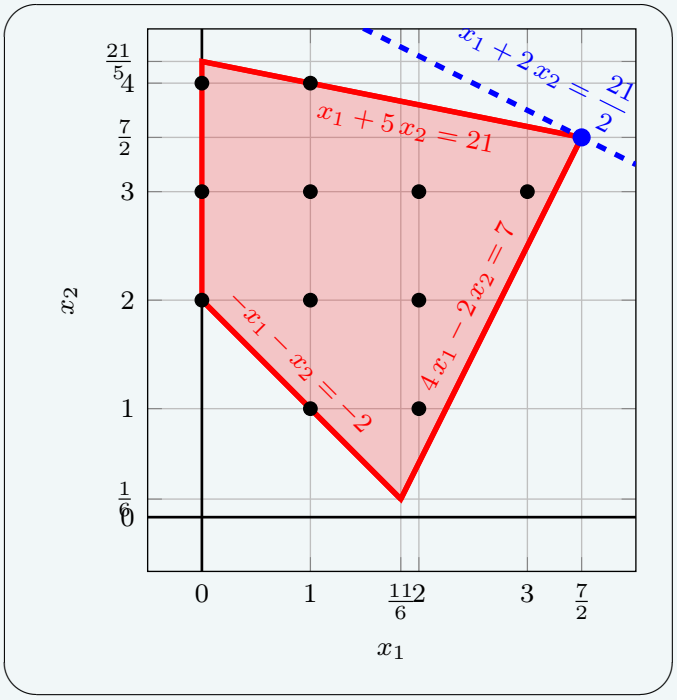
$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 21 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_1\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_1\,) = \frac{21}{2}$$



- **Iterazione 1**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22} x_4 - \frac{1}{11} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22} x_4 - \frac{2}{11} x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11} x_4 - \frac{3}{11} x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22} x_4 - \frac{5}{11} x_5 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{22} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{5}{22} - \left\lfloor \frac{5}{22} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{22}-0=\frac{5}{22}} x_4 + \underbrace{\left(\frac{1}{11} - \left\lfloor \frac{1}{11} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{11}-0=\frac{1}{11}} x_5 \geq \underbrace{\left(\frac{7}{2} - \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{5}{22}\, x_4 + \frac{1}{11}\, x_5 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 5\, x_4 + 2\, x_5 \geq 11$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{5}{22}\, x_4 + \frac{1}{11}\, x_5 - x_6 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 5\, x_4 + 2\, x_5 - 22\, x_6 = 11$$

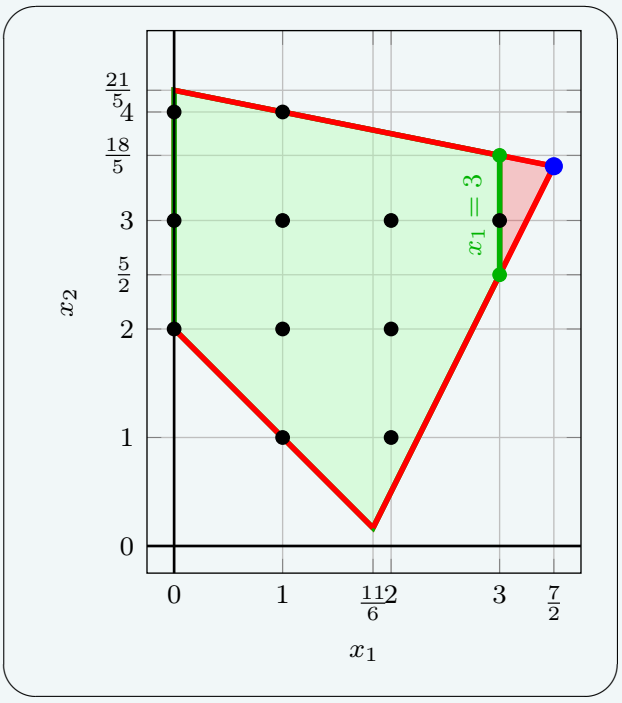
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_4 = 7 - 4\, x_1 + 2\, x_2, \qquad x_5 = 21 - x_1 - 5\, x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$5\,(7 - 4\, x_1 + 2\, x_2) + 2\,(21 - x_1 - 5\, x_2) \geq 11 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 3$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_1 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{22}-\left\lfloor-\frac{1}{22}\right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{22}-(-1)=\frac{21}{22}}x_4+\underbrace{\left(\frac{2}{11}-\left\lfloor\frac{2}{11}\right\rfloor\right)}_{\frac{2}{11}-0=\frac{2}{11}}x_5\geq\underbrace{\left(\frac{7}{2}-\left\lfloor\frac{7}{2}\right\rfloor\right)}_{\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{21}{22}\,x_4+\frac{2}{11}\,x_5\geq\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad 21\,x_4+4\,x_5\geq 11$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{21}{22}\,x_4+\frac{2}{11}\,x_5-x_6=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad 21\,x_4+4\,x_5-22\,x_6=11$$

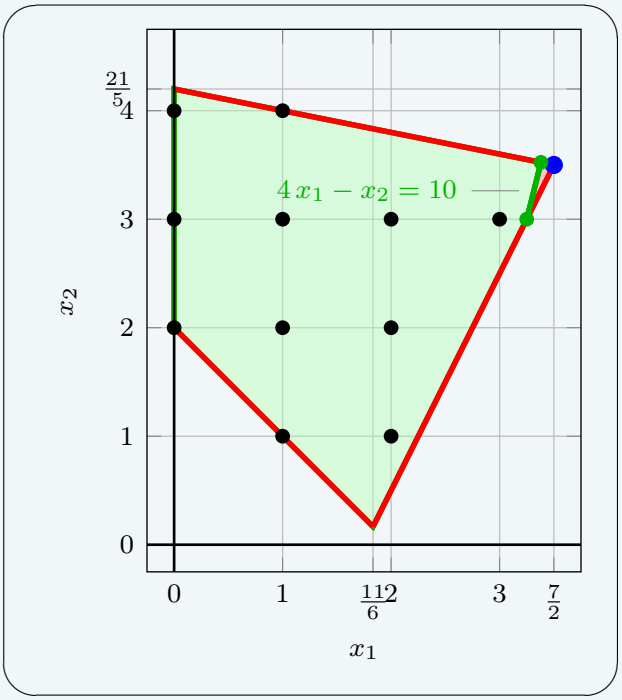
Dalla forma standard del problema LP_1, abbiamo:

$$x_4=7-4\,x_1+2\,x_2,\qquad x_5=21-x_1-5\,x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$21\,(7-4\,x_1+2\,x_2)+4\,(21-x_1-5\,x_2)\geq 11\quad\Rightarrow\quad 4\,x_1-x_2\leq 10$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_1 in forma canonica:



I due tagli frazionari di Gomory hanno lo stesso termine noto, pari a $\frac{1}{2}$. Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga e creiamo il problema LP_2 aggiungendolo al problema LP_1.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & = & 21 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + \; x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$5\,x_4 + 2\,x_5 - 22\,x_6 = 11 \quad \Rightarrow \quad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{22}\,x_4 + \frac{1}{11}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5 \\
x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\,x_4 - \frac{2}{11}\,x_5 \\
x_3 = 5 - \frac{2}{11}\,x_4 - \frac{3}{11}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{22}\,x_4 + \frac{1}{11}\,x_5 \\
z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\,x_4 - \frac{5}{11}\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \qquad \bar{\pi}_4 = \frac{3}{22}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{5}{11} \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{3}{22} - \frac{5}{22}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{5}{11} - \frac{1}{11}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{22} - \frac{5}{22}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{5}{11} - \frac{1}{11}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq \frac{3}{5} \\ \pi_6 &\leq 5 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{\frac{3}{5}, 5\right\} = \frac{3}{5}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_6 diventa una variabile primale fuori base

π_4 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_4 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{22}x_4 + \frac{1}{11}x_5 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6\right) - \frac{1}{11}x_5 = 3 - x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6\right) - \frac{2}{11}x_5 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6$$

$$x_3 = 5 - \frac{2}{11}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6\right) - \frac{3}{11}x_5 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}x_5 - \frac{4}{5}x_6$$

$$z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6\right) - \frac{5}{11}x_5 = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 &= 3 &&- x_6 \\ x_2 &= \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_5 &&+ \frac{1}{5}x_6 \\ x_3 &= \frac{23}{5} - \frac{1}{5}x_5 &&- \frac{4}{5}x_6 \\ x_4 &= \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 &&+ \frac{22}{5}x_6 \\ z &= \frac{51}{5} - \frac{2}{5}x_5 &&- \frac{3}{5}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$.

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{23}{5}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{11}{5}, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \qquad \text{di valore } \frac{51}{5}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{2}{5}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{3}{5} \qquad \text{di valore } \frac{51}{5}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_2 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\, ILP\,) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{51}{5} \right\rfloor}_{=10}$$

Per il problema LP_2 in forma canonica, abbiamo:

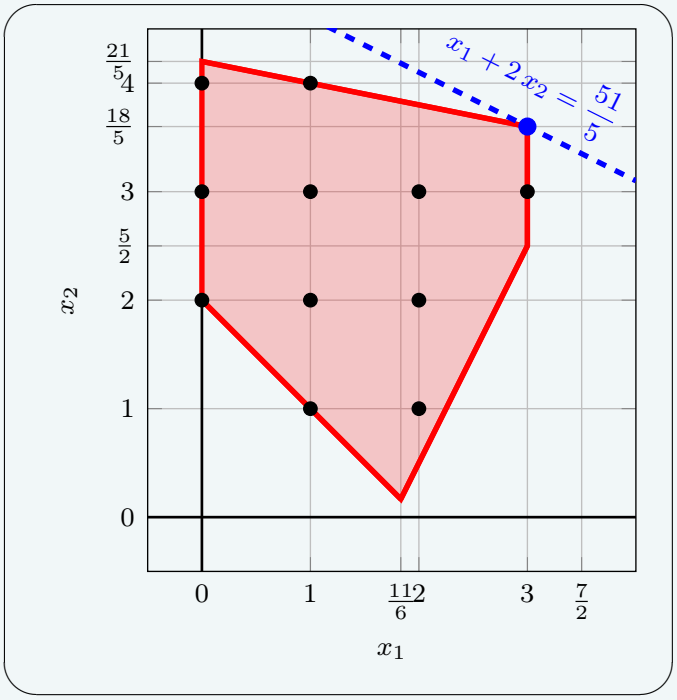
$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 21 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_2\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{18}{5}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\, LP_2\,) = \frac{51}{5}$$



- **Iterazione 2**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_6 \\ x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 \\ x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}x_5 - \frac{4}{5}x_6 \\ x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6 \\ z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{22}{5} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{23}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{5} - \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}} x_5 + \underbrace{\left(-\frac{1}{5} - \left\lfloor -\frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{5}-(-1)=\frac{4}{5}} x_6 \geq \underbrace{\left(\frac{18}{5} - \left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{18}{5}-3=\frac{3}{5}}$$

$$\frac{1}{5}\, x_5 + \frac{4}{5}\, x_6 \geq \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x_5 + 4\, x_6 \geq 3$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{5}\, x_5 + \frac{4}{5}\, x_6 - x_7 = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x_5 + 4\, x_6 - 5\, x_7 = 3$$

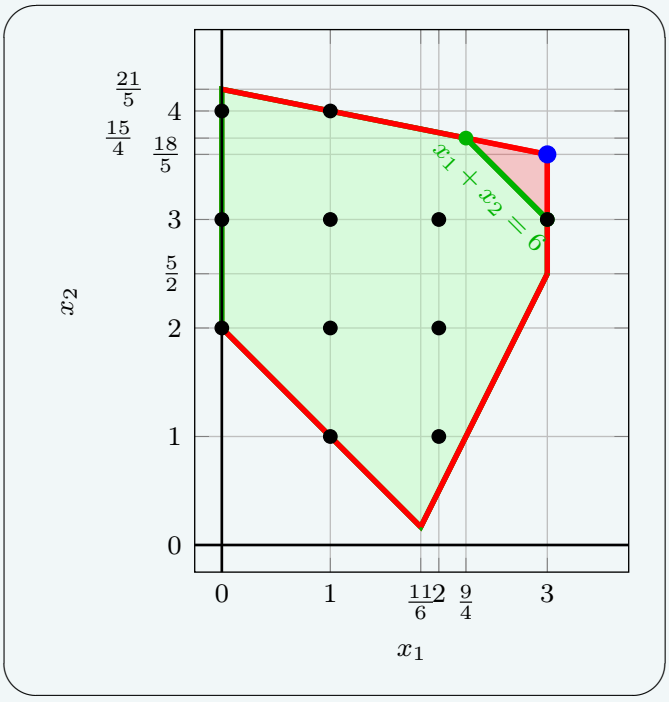
Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto, abbiamo:

$$x_5 = 21 - x_1 - 5\, x_2, \qquad x_6 = 3 - x_1.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(21 - x_1 - 5\, x_2) + 4\,(3 - x_1) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 6$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_2 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla terza riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{5} - \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}} x_5 + \underbrace{\left(\frac{4}{5} - \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{4}{5}-0=\frac{4}{5}} x_6 \geq \underbrace{\left(\frac{23}{5} - \left\lfloor \frac{23}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{23}{5}-4=\frac{3}{5}}$$

$$\frac{1}{5}\, x_5 + \frac{4}{5}\, x_6 \geq \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x_5 + 4\, x_6 \geq 3$$

Questo taglio frazionario di Gomory coincide con quello generato dalla seconda riga.

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla quarta riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{5} - \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{2}{5}-0=\frac{2}{5}} x_5 + \underbrace{\left(-\frac{22}{5} - \left\lfloor -\frac{22}{5} \right\rfloor\right)}_{-\frac{22}{5}-(-5)=\frac{3}{5}} x_6 \geq \underbrace{\left(\frac{11}{5} - \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor\right)}_{\frac{11}{5}-2=\frac{1}{5}}$$

$$\frac{2}{5}\, x_5 + \frac{3}{5}\, x_6 \geq \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad 2\, x_5 + 3\, x_6 \geq 1$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{2}{5}\, x_5 + \frac{3}{5}\, x_6 - x_7 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad 2\, x_5 + 3\, x_6 - 5\, x_7 = 1$$

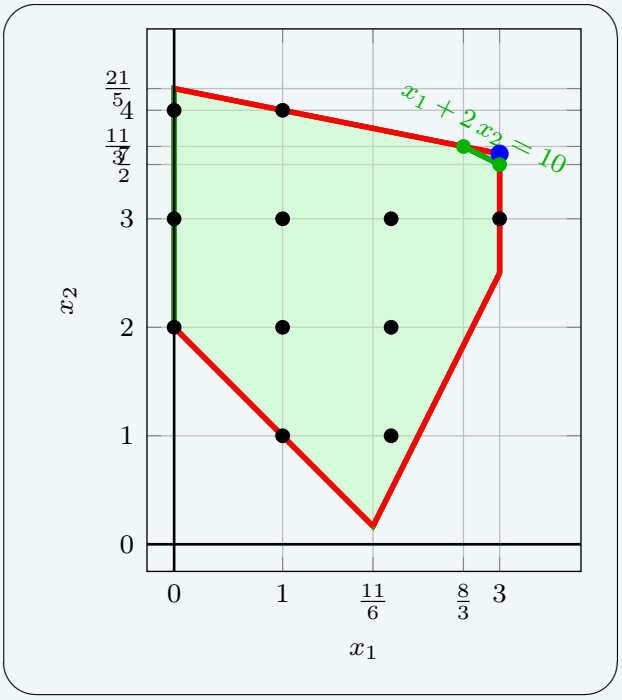
Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto, abbiamo:

$$x_5 = 21 - x_1 - 5\, x_2, \qquad x_6 = 3 - x_1.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$2\,(21 - x_1 - 5\, x_2) + 3\,(3 - x_1) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2\, x_2 \leq 10$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla quarta riga sul problema LP_2 in forma canonica:



Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_3 aggiungendolo al problema LP_2.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 21 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & + \; x_7 \; = & 6 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & x_7 \; \geq & 0
\end{array}
$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_5 + 4\,x_6 - 5\,x_7 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_7 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{4}{5}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= 3 & & - & x_6 \\ x_2 &= \frac{18}{5} - \frac{1}{5} x_5 + \frac{1}{5} x_6 \\ x_3 &= \frac{23}{5} - \frac{1}{5} x_5 - \frac{4}{5} x_6 \\ x_4 &= \frac{11}{5} - \frac{2}{5} x_5 + \frac{22}{5} x_6 \\ x_7 &= -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} x_5 + \frac{4}{5} x_6 \\ z &= \frac{51}{5} - \frac{2}{5} x_5 - \frac{3}{5} x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \bar{x}_3 = \frac{23}{5}, \quad \bar{x}_4 = \frac{11}{5}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{3}{5},$$
$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

- la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = \frac{2}{5}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_5 &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \pi_7 \\ \pi_6 &= \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \pi_7 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 2 \\ \pi_7 &\leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a $\min\left\{2, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, il valore di π_6 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_7 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_7 diventa una variabile primale fuori base
>
> π_6 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_6 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} x_5 + \frac{4}{5} x_6 \quad \Longrightarrow \quad x_6 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} x_5 + \frac{5}{4} x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 3 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_7\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_5 - \frac{5}{4}x_7$$

$$x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_7\right) = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_7$$

$$x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}x_5 - \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_7\right) = 4 - x_7$$

$$x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_7\right) = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x_5 + \frac{11}{2}x_7$$

$$z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_7\right) = \frac{39}{4} - \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_5 - \frac{5}{4}x_7 \\ x_2 = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_7 \\ x_3 = 4 - x_7 \\ x_4 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x_5 + \frac{11}{2}x_7 \\ x_6 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_7 \\ z = \frac{39}{4} - \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 7\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{4}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{15}{4}, \quad \tilde{x}_3 = 4, \quad \tilde{x}_4 = \frac{11}{2}, \quad \tilde{x}_6 = \frac{3}{4}, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0$$

di valore $\frac{39}{4}$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_7 = \frac{3}{4}$$

di valore $\frac{39}{4}$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_3\,)$ è **frazionaria** e il problema LP_3 è **ammissibile**.

Abbiamo il limite superiore sul valore ottimo del problema ILP:

$$z(\ ILP\ ) \ \leq \ \underbrace{\left\lfloor \frac{39}{4} \right\rfloor}_{=9}$$

Per il problema LP_3 in forma canonica, abbiamo:

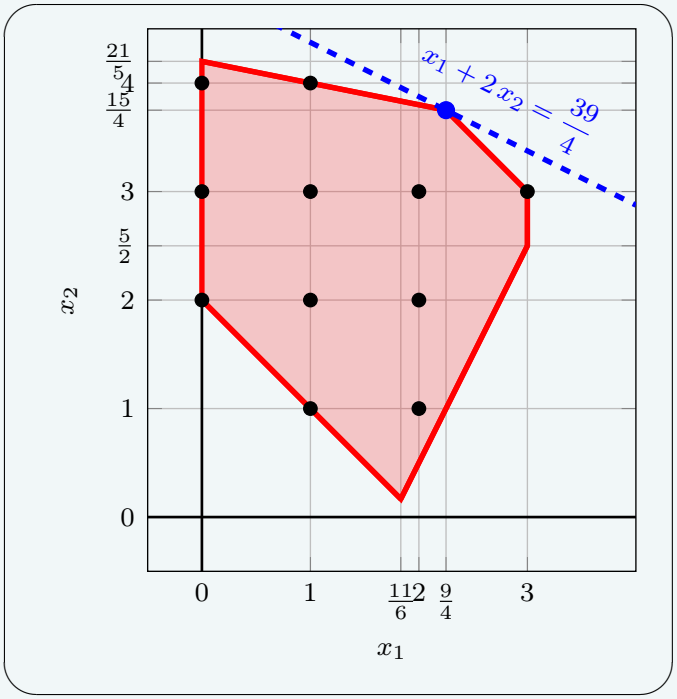
$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 21 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\ LP_3\ )$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{4}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{15}{4}$$

Il valore ottimo è:

$$z(\ LP_3\ ) = \frac{39}{4}$$



- **Iterazione 3**

a) **Fase di generazione dei tagli**

Abbiamo il seguente dizionario del simplesso associato a una soluzione di base ammissibile frazionaria del problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\,x_5 - \frac{5}{4}\,x_7 \\ x_2 = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}\,x_5 + \frac{1}{4}\,x_7 \\ x_3 = 4 - x_7 \\ x_4 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\,x_5 + \frac{11}{2}\,x_7 \\ x_6 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,x_5 + \frac{5}{4}\,x_7 \\ z = \frac{39}{4} - \frac{1}{4}\,x_5 - \frac{3}{4}\,x_7 \end{cases}$$

dove

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{15}{4} \\ 4 \\ \frac{11}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga è:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{4} - \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{4}-(-1)=\frac{3}{4}} x_5 + \underbrace{\left(\frac{5}{4} - \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor\right)}_{\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}} x_7 \geq \underbrace{\left(\frac{9}{4} - \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor\right)}_{\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}}$$

$$\frac{3}{4}\,x_5 + \frac{1}{4}\,x_7 \geq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 3\,x_5 + x_7 \geq 1$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{3}{4}\,x_5 + \frac{1}{4}\,x_7 - x_8 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 3\,x_5 + x_7 - 4\,x_8 = 1$$

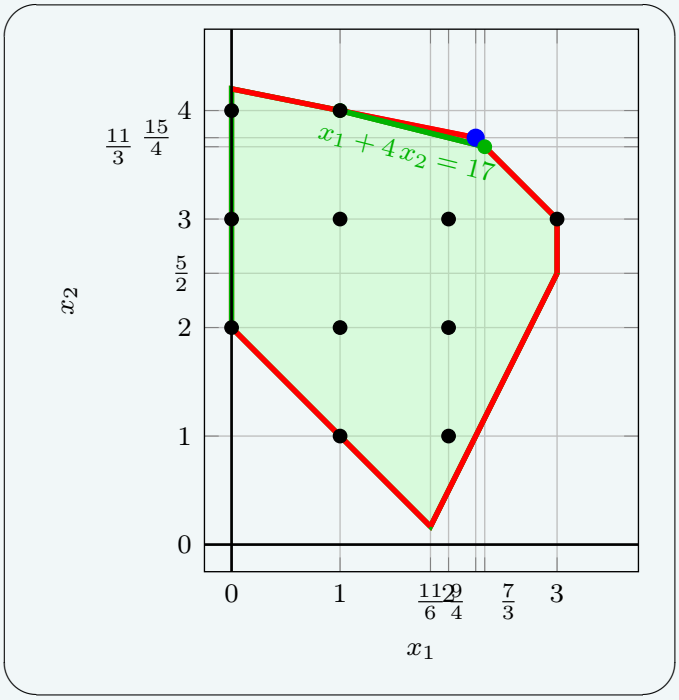
Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto all'iterazione 2 (il problema LP_3), abbiamo:

$$x_5 = 21 - x_1 - 5\,x_2, \qquad x_7 = 6 - x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$3\,(21 - x_1 - 5\,x_2) + (6 - x_1 - x_2) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 4\,x_2 \leq 17$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla prima riga sul problema LP_3 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4} - \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}} x_5 + \underbrace{\left(-\frac{1}{4} - \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor\right)}_{-\frac{1}{4}-(-1)=\frac{3}{4}} x_7 \geq \underbrace{\left(\frac{15}{4} - \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor\right)}_{\frac{15}{4}-3=\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{4}\,x_5 + \frac{3}{4}\,x_7 \geq \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x_5 + 3\,x_7 \geq 3$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{4}\,x_5 + \frac{3}{4}\,x_7 - x_8 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x_5 + 3\,x_7 - 4\,x_8 = 3$$

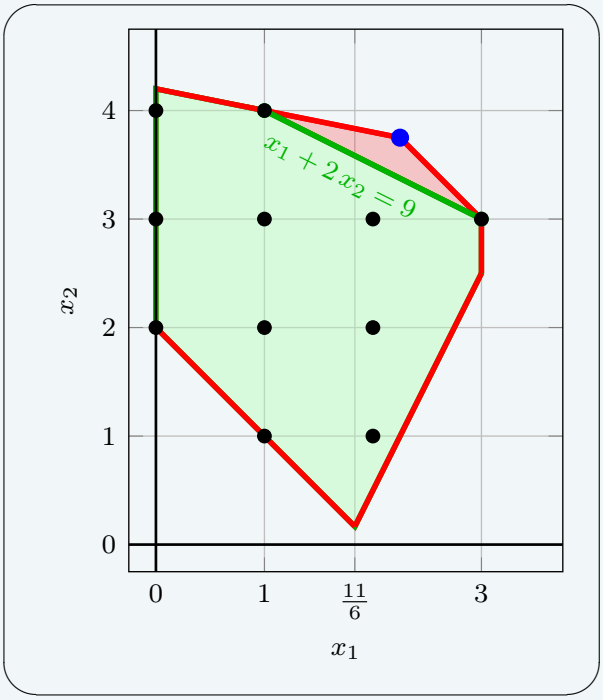
Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto all'iterazione 2 (il problema LP_3), abbiamo:

$$x_5 = 21 - x_1 - 5\,x_2, \qquad x_7 = 6 - x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(21 - x_1 - 5\,x_2) + 3\,(6 - x_1 - x_2) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2\,x_2 \leq 9$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla seconda riga sul problema LP_3 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla quarta riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}} x_5 + \underbrace{\left(-\frac{11}{2} - \left\lfloor -\frac{11}{2} \right\rfloor\right)}_{-\frac{11}{2}-(-6)=\frac{1}{2}} x_7 \geq \underbrace{\left(\frac{11}{2} - \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor\right)}_{\frac{11}{2}-5=\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\,x_5 + \frac{1}{2}\,x_7 \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_5 + x_7 \geq 1$$

Sottraendo una variabile di surplus, otteniamo il taglio frazionario di Gomory in forma standard:

$$\frac{1}{2}\,x_5 + \frac{1}{2}\,x_7 - x_8 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_5 + x_7 - 2\,x_8 = 1$$

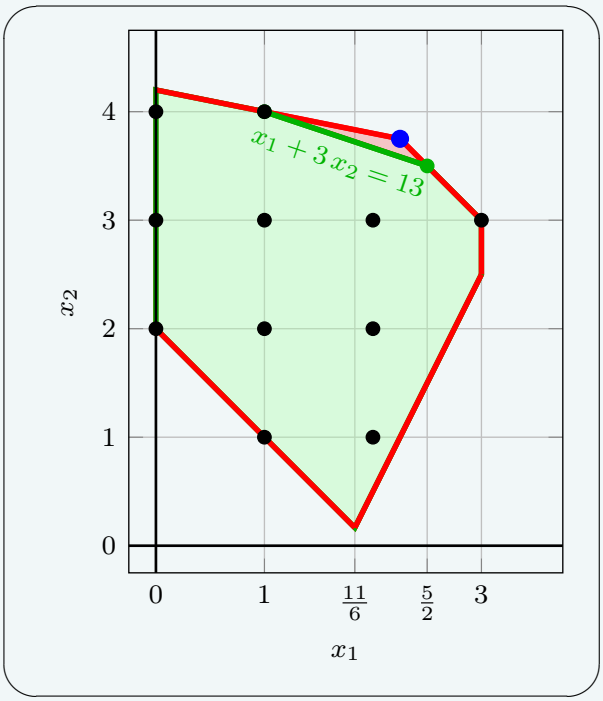
Dalla forma standard del problema LP_1 e dal taglio aggiunto all'iterazione 2 (il problema LP_3), abbiamo:

$$x_5 = 21 - x_1 - 5\,x_2, \qquad x_7 = 6 - x_1 - x_2.$$

Sostituendo nel taglio frazionario di Gomory, possiamo esprimerlo in termini delle variabili originali del problema ILP:

$$(21 - x_1 - 5\,x_2) + (6 - x_1 - x_2) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3\,x_2 \leq 13$$

Effetto del taglio frazionario di Gomory generato dalla quarta riga sul problema LP_3 in forma canonica:



– Il taglio frazionario di Gomory generato dalla quinta riga è:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4} - \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor\right)}_{\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}} x_5 + \underbrace{\left(-\frac{5}{4} - \left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor\right)}_{-\frac{5}{4}-(-2)=\frac{3}{4}} x_7 \geq \underbrace{\left(\frac{3}{4} - \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor\right)}_{\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{4}\,x_5 + \frac{3}{4}\,x_7 \geq \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x_5 + 3\,x_7 \geq 3$$

Questo taglio frazionario di Gomory coincide con quello generato dalla seconda riga.

Selezioniamo il taglio frazionario di Gomory con il termine noto più grande e creiamo il problema LP_4 aggiungendolo al problema LP_3.

b) **Fase di riottimizzazione LP**

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & & = & 21 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & & = & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & + \; x_7 & = & 6 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & + \; x_8 & = & 9 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & x_8 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il taglio frazionario di Gomory aggiunto abbiamo:

$$x_5 + 3\,x_7 - 4\,x_8 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_8 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,x_5 + \frac{3}{4}\,x_7$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\,x_5 - \frac{5}{4}\,x_7 \\
x_2 = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}\,x_5 + \frac{1}{4}\,x_7 \\
x_3 = 4 - x_7 \\
x_4 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\,x_5 + \frac{11}{2}\,x_7 \\
x_6 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,x_5 + \frac{5}{4}\,x_7 \\
x_8 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,x_5 + \frac{3}{4}\,x_7 \\
z = \frac{39}{4} - \frac{1}{4}\,x_5 - \frac{3}{4}\,x_7
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 7\}$ e

- la soluzione primale di base non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{4}, \quad \bar{x}_2 = \frac{15}{4}, \quad \bar{x}_3 = 4, \quad \bar{x}_4 = \frac{11}{2}, \quad \bar{x}_6 = \frac{3}{4}, \quad \bar{x}_8 = -\frac{3}{4},$$
$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{39}{4}$$

– la soluzione duale di base ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_8 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = \frac{1}{4}, \quad \bar{\pi}_7 = \frac{3}{4} \quad \text{di valore} \quad \frac{39}{4}$$

Se aumentiamo il valore di π_8, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_5 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\pi_8 \\ \pi_7 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\pi_8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\pi_8 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\pi_8 \geq 0}_{\pi_7 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_8 &\leq 1 \\ \pi_8 &\leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_8 fino a $\min\{1, 1\} = 1$, i valori di π_5 e π_7 scendono a 0 **contemporaneamente**: nel test del rapporto c'è un pareggio. Scegliamo di far entrare x_5 nella base primale (scegliendo invece x_7 si arriverebbe all'altro vertice ottimo $(1, 4)$, anch'esso di valore 9: il problema ILP ha due soluzioni ottime, $(3, 3)$ e $(1, 4)$). Abbiamo quindi che:

π_8 diventa una variabile duale di base e di conseguenza x_8 diventa una variabile primale fuori base

π_5 diventa una variabile duale fuori base e di conseguenza x_5 diventa una variabile primale di base

Abbiamo:

$$x_8 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_5 + \frac{3}{4}x_7 \quad \Longrightarrow \quad x_5 = 3 - 3x_7 + 4x_8$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}(3 - 3x_7 + 4x_8) - \frac{5}{4}x_7 = 3 - 2x_7 + x_8$$
$$x_2 = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}(3 - 3x_7 + 4x_8) + \frac{1}{4}x_7 = 3 + x_7 - x_8$$
$$x_3 = 4 - x_7$$
$$x_4 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}(3 - 3x_7 + 4x_8) + \frac{11}{2}x_7 = 1 + 10x_7 - 6x_8$$
$$x_6 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(3 - 3x_7 + 4x_8) + \frac{5}{4}x_7 = 2x_7 - x_8$$
$$z = \frac{39}{4} - \frac{1}{4}(3 - 3x_7 + 4x_8) - \frac{3}{4}x_7 = 9 - x_8$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2\,x_7 + x_8 \\ x_2 = 3 + x_7 - x_8 \\ x_3 = 4 - x_7 \\ x_4 = 1 + 10\,x_7 - 6\,x_8 \\ x_5 = 3 - 3\,x_7 + 4\,x_8 \\ x_6 = 0 + 2\,x_7 - x_8 \\ z = 9 - x_8 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{7, 8\}$.

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 4, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 3, \quad \tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0, \quad \tilde{x}_8 = 0$$

di valore 9

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0, \quad \tilde{\pi}_7 = 0, \quad \tilde{\pi}_8 = 1$$

di valore 9

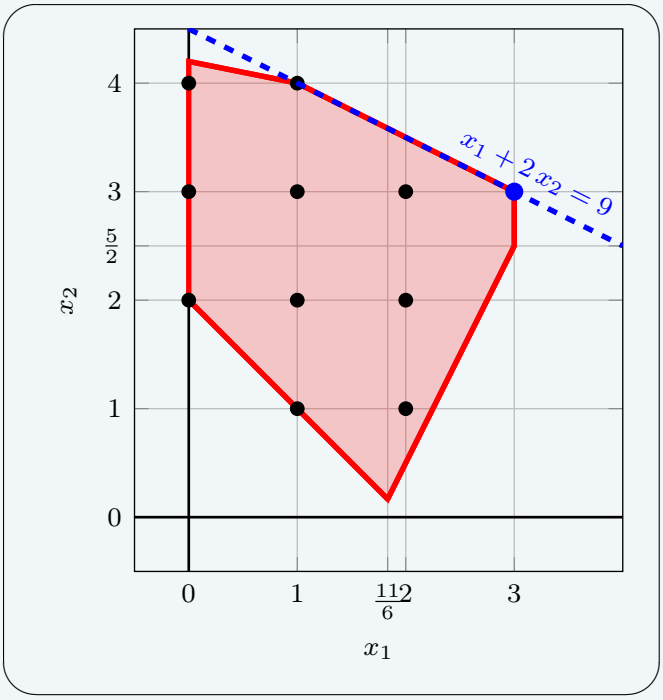
La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, LP_4\,)$ è **intera**. Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\, ILP\,)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

Il valore ottimo $z(\, ILP\,)$ è 9.

Per il problema LP_4 in forma canonica, abbiamo:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 21 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$


4
3
$\frac{5}{2}$
2
1
0
x_2
0
1
$\frac{11}{6}$2
3
x_1
$x_1 + 2x_2 = 9$

Capitolo 7

Il branch-and-bound basato sulla programmazione lineare

7.1 Algoritmo di branch-and-bound

Esercizio 7.1 — Algoritmo di branch-and-bound ($P1$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & 8\ x_2 & & & \\ & 3\ x_1 & + & 6\ x_2 & \leq & 16 & \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\ x_1 - \dfrac{1}{6}\ x_3 \\ z = \dfrac{64}{3} - 3\ x_1 - \dfrac{4}{3}\ x_3 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non viene eseguito alcun algoritmo euristico).

Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.

2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, mostrando il motivo per cui ciascun nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & x_1 & + & 8\ x_2 & & & & \\ & 3\ x_1 & + & 6\ x_2 & + & x_3 & = & 16 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\ x_1 - \dfrac{1}{6}\ x_3 \\ z = \dfrac{64}{3} - 3\ x_1 - \dfrac{4}{3}\ x_3 \end{cases}$$

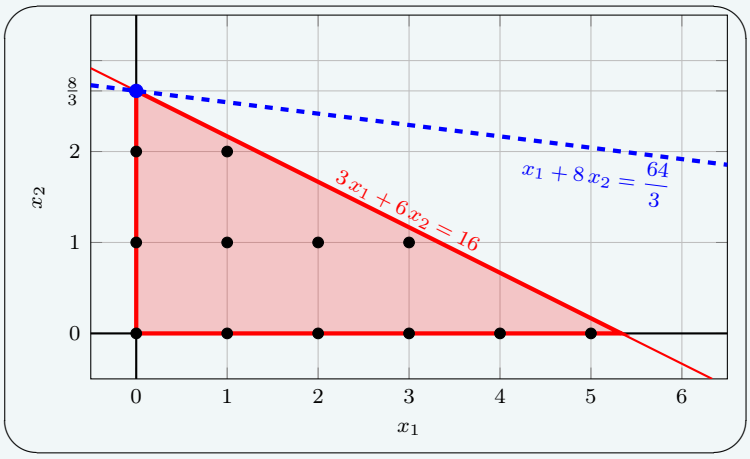


Figura 7.1: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti ammissibili del problema PLI (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{64}{3}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{64}{3} \right\rfloor}_{=21}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 8\,x_2 & & & & & & \\
& 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & & & = & 16 \\
& & & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_4 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = 2 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_4 = 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{6}\,x_3\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{6}\,x_3$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_3 \\ x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_3 \\ z = \frac{64}{3} - 3x_1 - \frac{4}{3}x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_4 = -\frac{2}{3}, \qquad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \qquad \bar{\pi}_1 = 3, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_4, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 3 - \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\pi_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{3 - \frac{1}{2}\pi_4 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_4 \leq 6 \\ \pi_4 \leq 8 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_4 fino a $\min\{6, 8\} = 6$, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 entra nella base duale e, di conseguenza, x_4 esce dalla base primale.

π_1 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_1 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4\right) - \frac{1}{6}x_3 = 2 - x_4$$

$$z = \frac{64}{3} - 3\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4\right) - \frac{4}{3}x_3 = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}x_3 - 6x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}x_3 - 6x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{52}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_4 = 6 \quad \text{di valore} \quad \frac{52}{3}$$

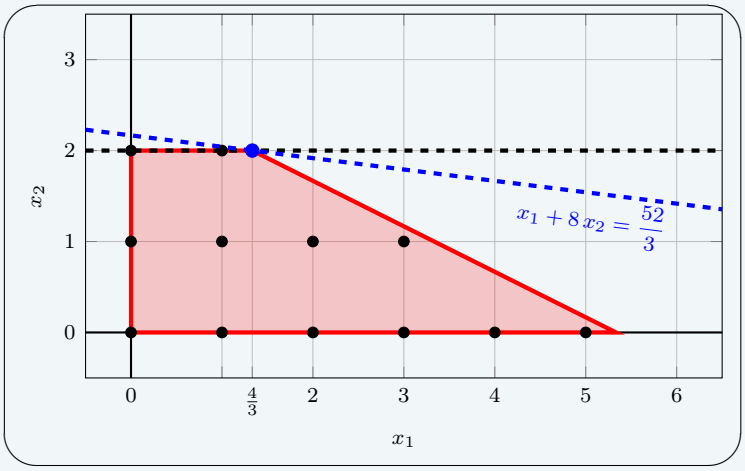


Figura 7.2: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{52}{3}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{52}{3} \right\rfloor}_{=17} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_2 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 8\,x_2 & & & & & & \\
& 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & x_3 & & & = & 16 \\
& & & x_2 & & & - & x_4 & = & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_4 = 3 \qquad \Rightarrow \quad x_4 = -3 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_4 = -3 + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{6}\,x_3\right) \qquad \Rightarrow \quad x_4 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{6}\,x_3$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{6}\,x_3 \\ x_4 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{6}\,x_3 \\ z = \frac{64}{3} - 3\,x_1 - \frac{4}{3}\,x_3 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 3\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_4 = -\frac{1}{3}, \qquad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

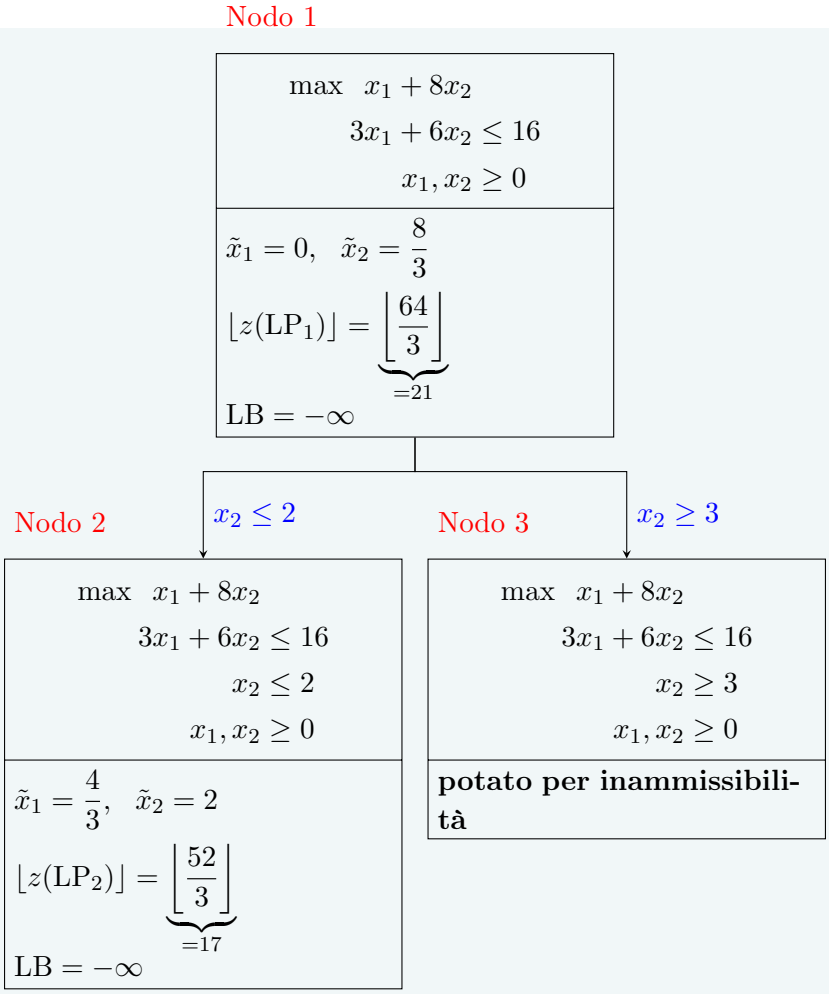
$$\bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \qquad \bar{\pi}_1 = 3, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{64}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_4, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 = 3 + \frac{1}{2}\,\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\,\pi_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{3 + \frac{1}{2}\,\pi_4 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\,\pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_4 \geq -6 \\ \pi_4 \geq -8 \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_4 senza violare l'ammissibilità duale: il problema duale è **illimitato**. Ne segue che il problema primale LP_3 è **inammissibile** e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{52}{3} \right\rfloor}_{=17}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor}_{=1} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 1}_{=2}$$

Con il primo vincolo di branching si crea il problema LP_4 (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 8\ x_2 & & & & & & \\
& 3\ x_1 & + & 6\ x_2 & + & x_3 & & & = & 16 \\
& & & x_2 & & + & x_4 & & = & 2 \\
& x_1 & & & & & & + & x_5 & = & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_5 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 1 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, x_3 + 2\, x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_3 - 2\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, x_3 + 2\, x_4 \\
x_2 = 2 - x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_3 - 2\, x_4 \\
z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\, x_3 - 6\, x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_2 = 2, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{3}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{52}{3}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_4 = 6 \quad \text{di valore} \quad \frac{52}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$
\begin{cases}
\pi_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\, \pi_5 \\
\pi_4 = 6 + 2\, \pi_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\, \pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\
\underbrace{6 + 2\, \pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_5 \leq 1 \\
\pi_5 \geq -3
\end{cases}
$$

Aumentando il valore di π_5 fino a 1, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 - 2\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 + 6\,x_4 + 3\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,(1 + 6\,x_4 + 3\,x_5) + 2\,x_4 = 1 - x_5$$

$$z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\,(1 + 6\,x_4 + 3\,x_5) - 6\,x_4 = 17 - 8\,x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_5 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ x_3 = 1 + 6\,x_4 + 3\,x_5 \\ z = 17 - 8\,x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 1, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 17$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = 8, \quad \tilde{\pi}_5 = 1 \quad \text{di valore} \quad 17$$

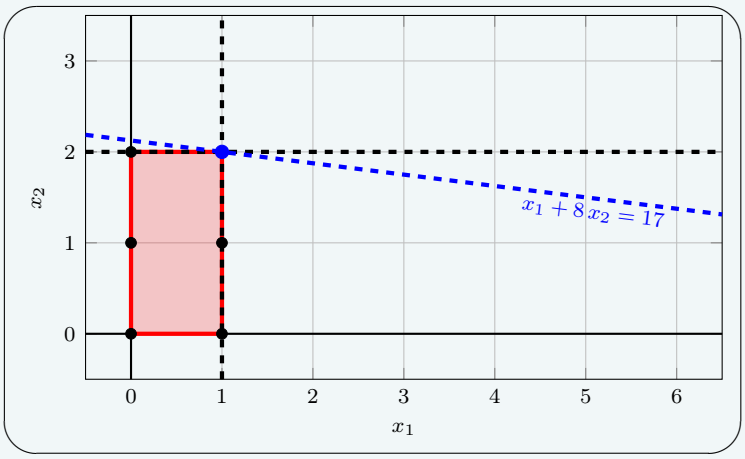


Figura 7.3: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 1$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 17$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 17 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 17 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 2$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non viene risolto, poiché dopo il Nodo 4 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la parte dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 16 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{52}{3} \right\rfloor}_{=17}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_1 \leq 1$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 16 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 2$

$z(\mathrm{LP}_4) = 17$

$\mathrm{LB} = 17$

potato per integralità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

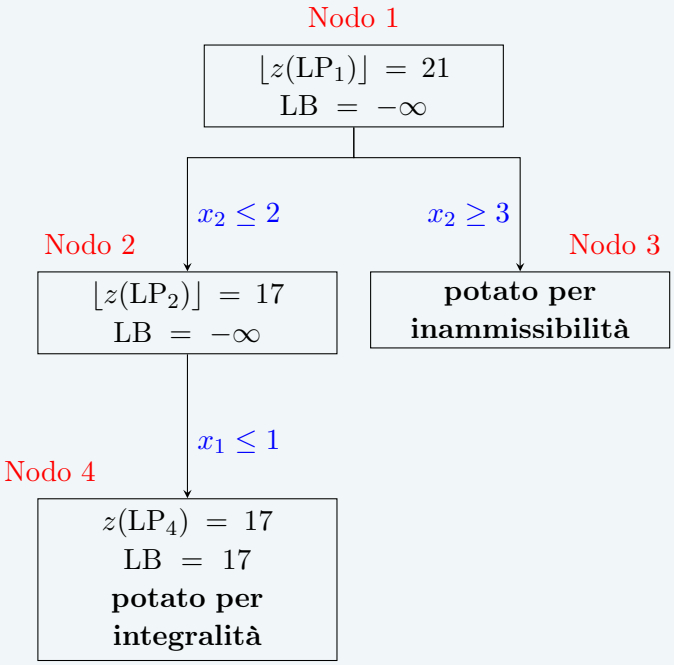
$$17 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 17$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 17$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 2$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching vengono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_1) \rfloor = 21$: si effettua il branching su x_2.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 17$: si effettua il branching su x_1.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 2 non viene risolto né disegnato, poiché $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 17 \leq \text{LB} = 17$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 3 è potato per inammissibilità: il problema LP_3 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (1, 2)$ è intera, con valore 17, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 17$ e l'algoritmo di branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (1, 2)$.

Esercizio 7.2 — Algoritmo di branch-and-bound ($P2$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & 3\ x_2 & & & \\ & -4\ x_1 & + & 10\ x_2 & \leq & 35 & \\ & 3\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12 & \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\ x_3 - \frac{5}{17}\ x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\ x_3 - \frac{2}{17}\ x_4 \\ z = 16 - \frac{4}{17}\ x_3 - \frac{11}{17}\ x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola FIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non viene eseguito alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, mostrando il motivo per cui ciascun nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_1 & + & 3\ x_2 & & & & & & \\ & -4\ x_1 & + & 10\ x_2 & + & x_3 & & & = & 35 \\ & 3\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 12 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\ x_3 - \frac{5}{17}\ x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\ x_3 - \frac{2}{17}\ x_4 \\ z = 16 - \frac{4}{17}\ x_3 - \frac{11}{17}\ x_4 \end{cases}$$

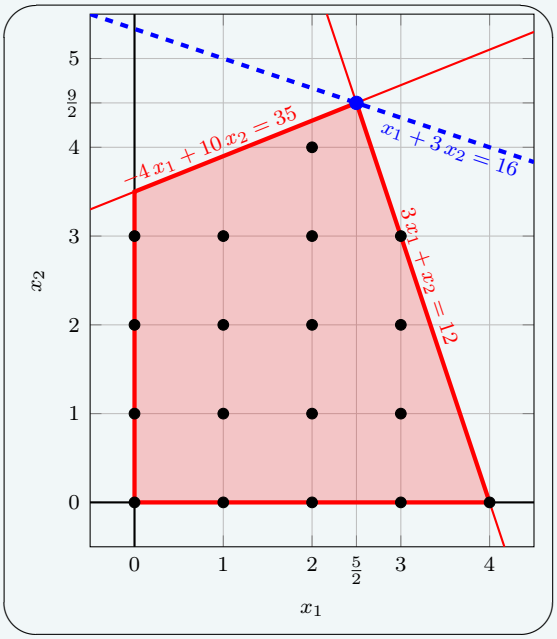


Figura 7.4: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti ammissibili del problema PLI (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 16$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 16$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -4\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 35 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_5 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 2 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 2 - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{34}\, x_3 - \frac{5}{17}\, x_4 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{34}\, x_3 + \frac{5}{17}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\, x_3 - \frac{5}{17}\, x_4 \\
x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\, x_3 - \frac{2}{17}\, x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{34}\, x_3 + \frac{5}{17}\, x_4 \\
z = 16 - \frac{4}{17}\, x_3 - \frac{11}{17}\, x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 16$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{4}{17}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{11}{17} \quad \text{di valore} \quad 16$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \dfrac{4}{17} + \dfrac{1}{34}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \dfrac{11}{17} - \dfrac{5}{17}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{4}{17} + \dfrac{1}{34}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{11}{17} - \dfrac{5}{17}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\geq -8 \\ \pi_5 &\leq \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\dfrac{11}{5}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{34}\,x_3 + \frac{5}{17}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{17}{10} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{17}{5}\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\,x_3 - \frac{5}{17}\left(\frac{17}{10} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{17}{5}\,x_5\right) = 2 - x_5$$

$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\,x_3 - \frac{2}{17}\left(\frac{17}{10} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{17}{5}\,x_5\right) = \frac{43}{10} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{2}{5}\,x_5$$

$$z = 16 - \frac{4}{17}\,x_3 - \frac{11}{17}\left(\frac{17}{10} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{17}{5}\,x_5\right) = \frac{149}{10} - \frac{3}{10}\,x_3 - \frac{11}{5}\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 &&- &&- x_5 \\ x_2 &= \dfrac{43}{10} &- \dfrac{1}{10}\,x_3 &- &\dfrac{2}{5}\,x_5 \\ x_4 &= \dfrac{17}{10} &+ \dfrac{1}{10}\,x_3 &+ &\dfrac{17}{5}\,x_5 \\ z &= \dfrac{149}{10} &- \dfrac{3}{10}\,x_3 &- &\dfrac{11}{5}\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{43}{10}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{17}{10}, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \qquad \text{di valore} \quad \frac{149}{10}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{3}{10}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{11}{5} \qquad \text{di valore} \quad \frac{149}{10}$$

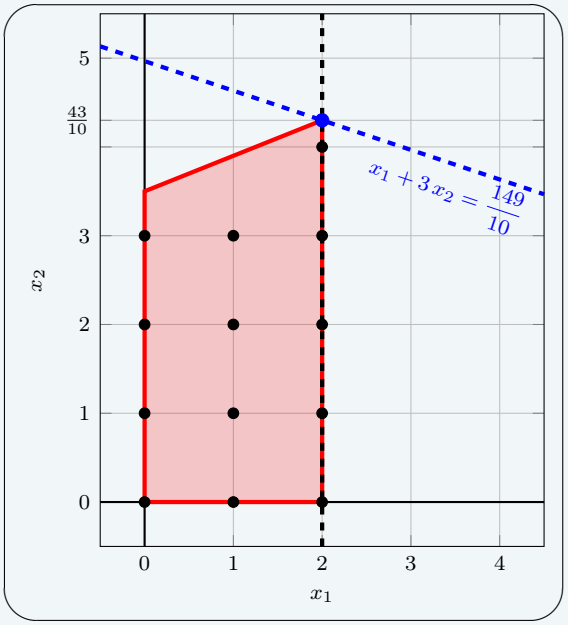


Figura 7.5: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{43}{10}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{149}{10}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{149}{10} \right\rfloor}_{=14} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_2 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\
& -4\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & x_3 & & & = & 35 \\
& 3\,x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & & = & 12 \\
& x_1 & & & & & & - & x_5 = & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -3 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = -3 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{34}\,x_3 - \frac{5}{17}\,x_4\right) \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{34}\,x_3 - \frac{5}{17}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\,x_3 - \frac{5}{17}\,x_4 \\
x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\,x_3 - \frac{2}{17}\,x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{34}\,x_3 - \frac{5}{17}\,x_4 \\
z = 16 - \frac{4}{17}\,x_3 - \frac{11}{17}\,x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 16$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{4}{17}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{11}{17} \quad \text{di valore} \quad 16$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$
\begin{cases}
\pi_3 = \frac{4}{17} - \frac{1}{34}\,\pi_5 \\
\pi_4 = \frac{11}{17} + \frac{5}{17}\,\pi_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\frac{4}{17} - \frac{1}{34}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\
\underbrace{\frac{11}{17} + \frac{5}{17}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_5 \leq 8 \\
\pi_5 \geq -\frac{11}{5}
\end{cases}
$$

Aumentando il valore di π_5 fino a 8, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{34}\,x_3 - \frac{5}{17}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 17 + 10\,x_4 + 34\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{34}\,(17 + 10\,x_4 + 34\,x_5) - \frac{5}{17}\,x_4 = 3 + x_5$$

$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{34}\,(17 + 10\,x_4 + 34\,x_5) - \frac{2}{17}\,x_4 = 3 - x_4 - 3\,x_5$$

$$z = 16 - \frac{4}{17}\,(17 + 10\,x_4 + 34\,x_5) - \frac{11}{17}\,x_4 = 12 - 3\,x_4 - 8\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_5 \\ x_2 = 3 - x_4 - 3\,x_5 \\ x_3 = 17 + 10\,x_4 + 34\,x_5 \\ z = 12 - 3\,x_4 - 8\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

  $\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 17, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad$ di valore $\quad 12$

- la soluzione di base duale ottima è:

  $\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = 3, \quad \tilde{\pi}_5 = 8 \quad$ di valore $\quad 12$

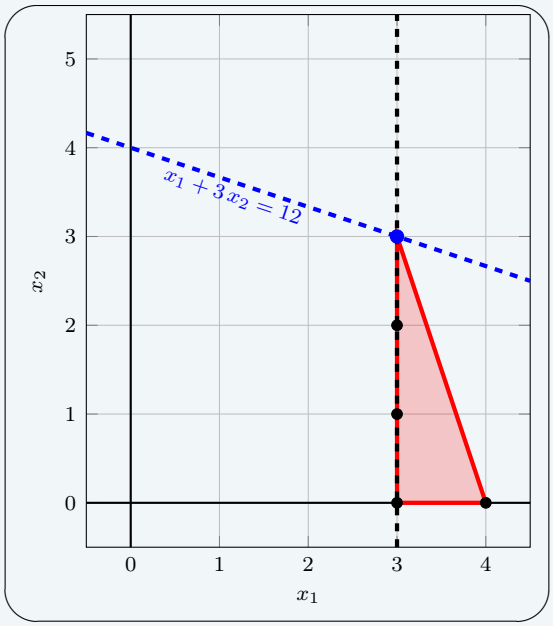


Figura 7.6: Nodo 3: regione ammissibile di LP_3 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \geq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

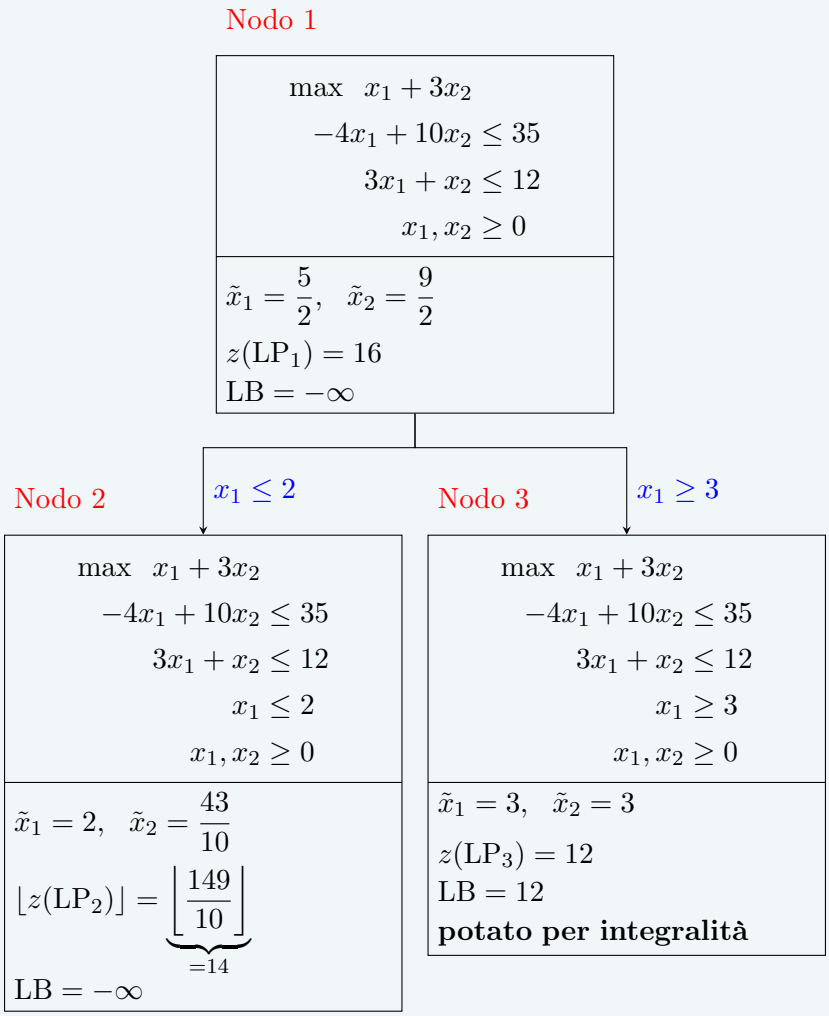
$$z(\mathrm{LP}_3) = 12$$

Il problema LP_3 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 12 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 12 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 3$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per integralità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$12 \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{149}{10} \right\rfloor}_{=14}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{43}{10} \right\rfloor}_{=4} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{43}{10} \right\rfloor + 1}_{=5}$$

Con il primo vincolo di branching si crea il problema LP_4 (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & -4\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 35 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 4 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 4 - \left(\frac{43}{10} - \frac{1}{10}\, x_3 - \frac{2}{5}\, x_5 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{2}{5}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 & & & - & x_5 \\ x_2 &= \frac{43}{10} & - & \frac{1}{10}\, x_3 & - & \frac{2}{5}\, x_5 \\ x_4 &= \frac{17}{10} & + & \frac{1}{10}\, x_3 & + & \frac{17}{5}\, x_5 \\ x_6 &= -\frac{3}{10} & + & \frac{1}{10}\, x_3 & + & \frac{2}{5}\, x_5 \\ z &= \frac{149}{10} & - & \frac{3}{10}\, x_3 & - & \frac{11}{5}\, x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = \frac{43}{10}, \quad \bar{x}_4 = \frac{17}{10}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{3}{10},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{149}{10}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{3}{10}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{11}{5} \quad \text{di valore} \quad \frac{149}{10}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{3}{10} - \frac{1}{10}\,\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 3 \\ \pi_6 &\leq \frac{11}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{3, \frac{11}{2}\right\} = 3$, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{2}{5}\, x_5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3 - 4\, x_5 + 10\, x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{43}{10} - \frac{1}{10}\,(3 - 4\, x_5 + 10\, x_6) - \frac{2}{5}\, x_5 = 4 - x_6$$

$$x_4 = \frac{17}{10} + \frac{1}{10}(3 - 4\,x_5 + 10\,x_6) + \frac{17}{5}\,x_5 = 2 + 3\,x_5 + x_6$$
$$z = \frac{149}{10} - \frac{3}{10}(3 - 4\,x_5 + 10\,x_6) - \frac{11}{5}\,x_5 = 14 - x_5 - 3\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_5 \\ x_2 = 4 - x_6 \\ x_3 = 3 - 4\,x_5 + 10\,x_6 \\ x_4 = 2 + 3\,x_5 + x_6 \\ z = 14 - x_5 - 3\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 3, \quad \tilde{x}_4 = 2,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 14$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 1, \quad \tilde{\pi}_6 = 3 \quad \text{di valore} \quad 14$$

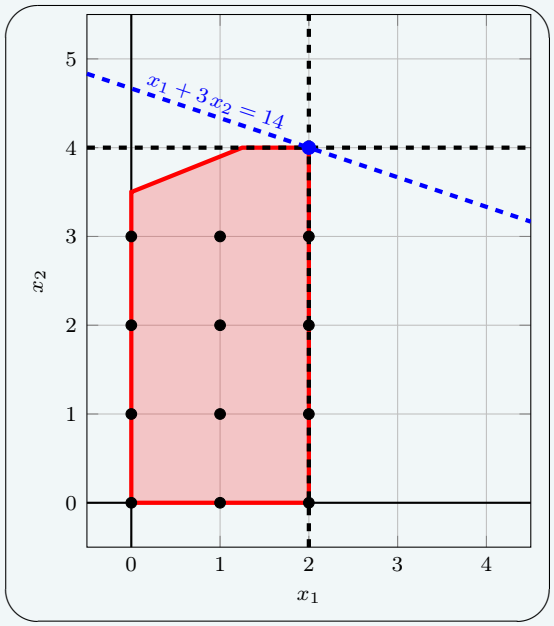


Figura 7.7: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 14$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 14 > 12$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 14 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 4$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non viene risolto, poiché dopo il Nodo 4 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la parte dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ -4x_1 + 10x_2 &\leq 35 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{43}{10}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{149}{10} \right\rfloor}_{=14}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_2 \leq 4$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ -4x_1 + 10x_2 &\leq 35 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 4$

$z(\mathrm{LP}_4) = 14$

$\mathrm{LB} = 14$

potato per integralità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

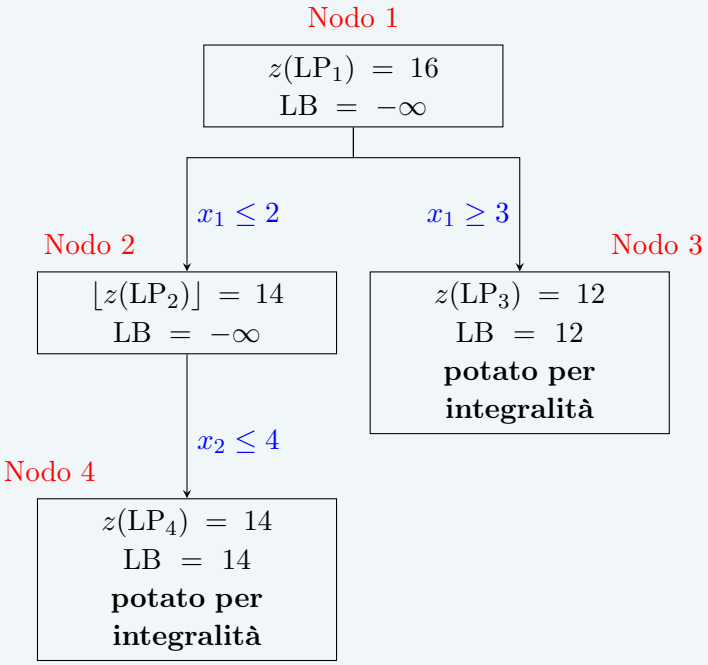
$$14 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 14$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 14$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 2, \tilde{x}_2 = 4$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching vengono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\text{LP}_1) = 16$: si effettua il branching su x_1.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 14$: si effettua il branching su x_2.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 2 non viene risolto né disegnato, poiché $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 14 \leq \text{LB} = 14$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 3 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_3) = (3, 3)$ è intera, con valore 12, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (2, 4)$ è intera, con valore 14, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 14$ e l'algoritmo di branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (2, 4)$.

Esercizio 7.3 — Algoritmo di branch-and-bound ($P3$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & \\ & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 19 & \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\ z = 17 - \frac{14}{5}\,x_3 - \frac{3}{5}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice massimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non viene eseguito alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, mostrando il motivo per cui ciascun nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & \\ & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & = & 19 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{5}\,x_3 - \dfrac{1}{10}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{4}{5}\,x_3 - \dfrac{1}{10}\,x_4 \\ z = 17 - \dfrac{14}{5}\,x_3 - \dfrac{3}{5}\,x_4 \end{cases}$$

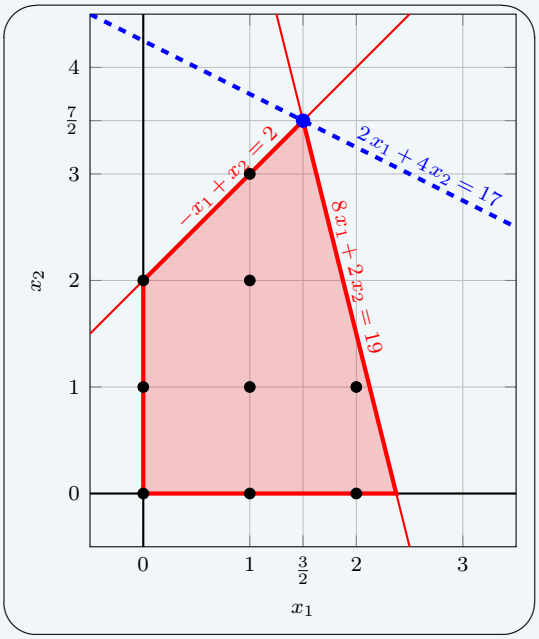


Figura 7.8: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti ammissibili del problema PLI (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 17$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 17$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 19 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_5 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 3 - \left(\frac{7}{2} - \frac{4}{5}\, x_3 - \frac{1}{10}\, x_4 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\, x_3 + \frac{1}{10}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\, x_3 - \frac{1}{10}\, x_4 \\
x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\, x_3 - \frac{1}{10}\, x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\, x_3 + \frac{1}{10}\, x_4 \\
z = 17 - \frac{14}{5}\, x_3 - \frac{3}{5}\, x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 17$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{14}{5}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad 17$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \dfrac{14}{5} - \dfrac{4}{5}\pi_5 \\ \pi_4 = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10}\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{14}{5} - \dfrac{4}{5}\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10}\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 \leq \dfrac{7}{2} \\ \pi_5 \leq 6 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\left\{\frac{7}{2}, 6\right\} = \frac{7}{2}$, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{10}x_4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5\right) - \frac{1}{10}x_4 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{1}{4}x_5$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5\right) - \frac{1}{10}x_4 = 3 - x_5$$

$$z = 17 - \frac{14}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{4}x_5\right) - \frac{3}{5}x_4 = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{7}{2}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{8} - \dfrac{1}{8}x_4 + \dfrac{1}{4}x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_3 = \dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{8}x_4 + \dfrac{5}{4}x_5 \\ z = \dfrac{61}{4} - \dfrac{1}{4}x_4 - \dfrac{7}{2}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = \frac{5}{8}, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{7}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

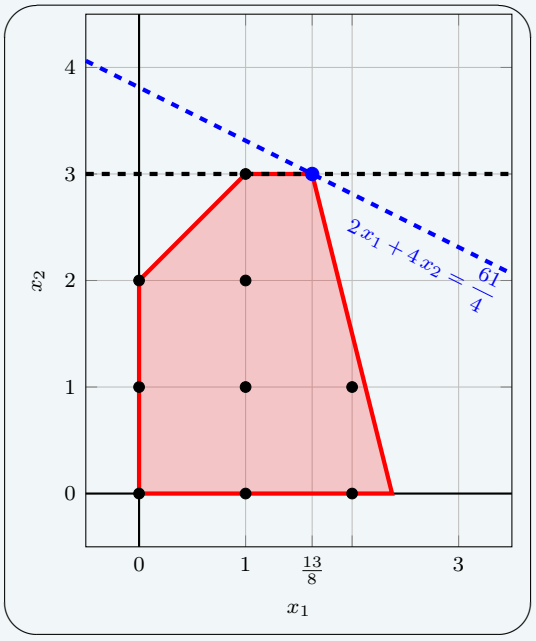


Figura 7.9: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{61}{4}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{61}{4} \right\rfloor}_{=15} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_2 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 19 \\
 & & & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_5 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -4 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = -4 + \left(\frac{7}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\
x_2 = \frac{7}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\,x_3 - \frac{1}{10}\,x_4 \\
z = 17 - \frac{14}{5}\,x_3 - \frac{3}{5}\,x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 17$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

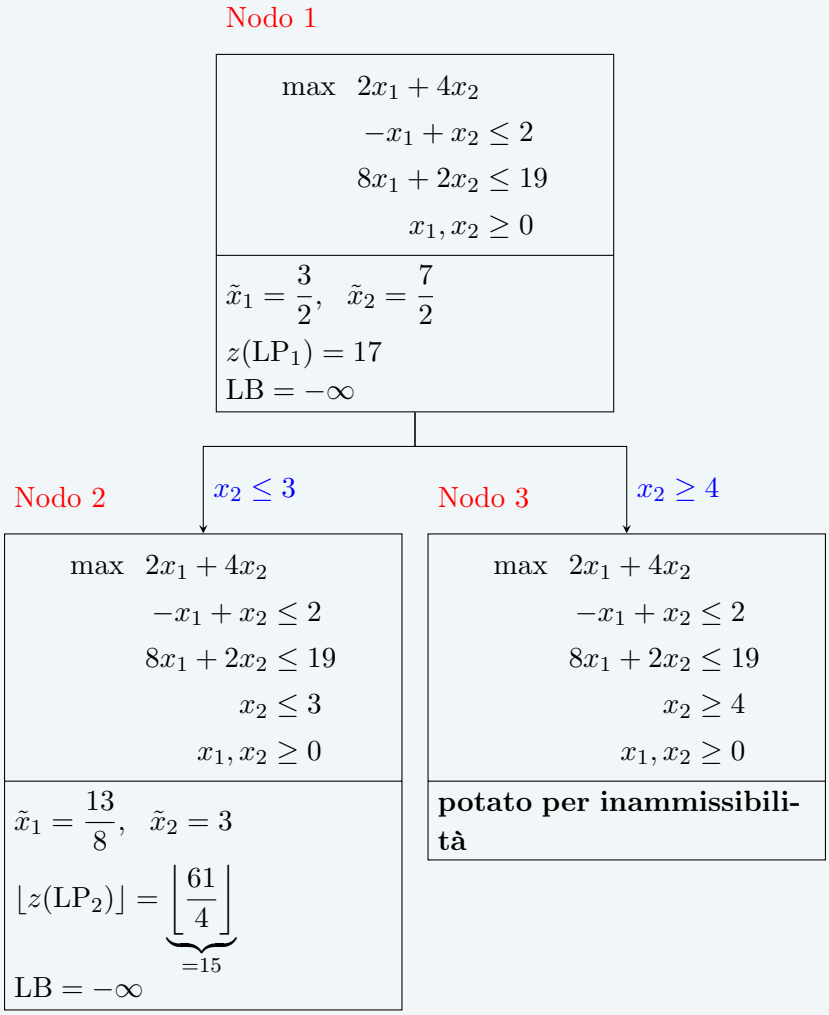
$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{14}{5}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad 17$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$
\begin{cases}
\pi_3 = \frac{14}{5} + \frac{4}{5}\,\pi_5 \\
\pi_4 = \frac{3}{5} + \frac{1}{10}\,\pi_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\frac{14}{5} + \frac{4}{5}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\
\underbrace{\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_5 \geq -\frac{7}{2} \\
\pi_5 \geq -6
\end{cases}
$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_5 senza violare l'ammissibilità duale: il problema duale è **illimitato**. Ne segue che il problema primale LP_3 è **inammissibile** e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{61}{4} \right\rfloor}_{=15}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{13}{8} \right\rfloor}_{=1} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{13}{8} \right\rfloor + 1}_{=2}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & \\
& -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
& 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 19 \\
& & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
& x_1 & & & & & & & & x_6 & = & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 \geq 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_6 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 1 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 1 - \left(\frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & \frac{13}{8} & - & \frac{1}{8}\,x_4 & + & \frac{1}{4}\,x_5 \\
x_2 & = & 3 & & & - & x_5 \\
x_3 & = & \frac{5}{8} & - & \frac{1}{8}\,x_4 & + & \frac{5}{4}\,x_5 \\
x_6 & = & -\frac{5}{8} & + & \frac{1}{8}\,x_4 & - & \frac{1}{4}\,x_5 \\
z & = & \frac{61}{4} & - & \frac{1}{4}\,x_4 & - & \frac{7}{2}\,x_5
\end{array}\right.$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_3 = \frac{5}{8}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{5}{8},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{7}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{7}{2} + \frac{1}{4}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 2 \\ \pi_6 &\geq -14 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 2, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.

π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 5 + 2x_5 + 8x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}(5 + 2x_5 + 8x_6) + \frac{1}{4}x_5 = 1 - x_6$$

$$x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}(5 + 2x_5 + 8x_6) + \frac{5}{4}x_5 = 0 + x_5 - x_6$$

$$z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}(5 + 2x_5 + 8x_6) - \frac{7}{2}x_5 = 14 - 4x_5 - 2x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 &&&& - && x_6 \\ x_2 &= 3 &- && x_5 \\ x_3 &= 0 &+ && x_5 &- && x_6 \\ x_4 &= 5 &+ & 2\,x_5 &+ & 8\,x_6 \\ z &= 14 &- & 4\,x_5 &- & 2\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 5,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 14$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 4, \quad \tilde{\pi}_6 = 2 \quad \text{di valore} \quad 14$$

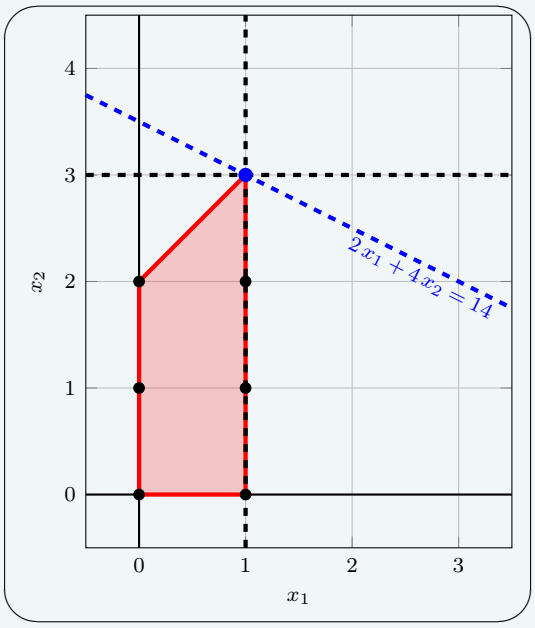


Figura 7.10: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 1$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 14$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 14 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 14 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 3$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 2 \\
 & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 19 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & & & & & - & x_6 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_6 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -2 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -2 + \left(\frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5 \\
x_2 = 3 - x_5 \\
x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{5}{4}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5 \\
z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{7}{2}\,x_5
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_3 = \frac{5}{8}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{3}{8}, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{7}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{4}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{4}\,\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{7}{2} - \frac{1}{4}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\geq -2 \\ \pi_6 &\leq 14 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 14, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_5 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_5 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,x_4 + 4\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,x_4 + 4\,x_6\right) = 2 + x_6$$

$$x_2 = 3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,x_4 + 4\,x_6\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,x_4 - 4\,x_6$$

$$x_3 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{5}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,x_4 + 4\,x_6\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_4 + 5\,x_6$$

$$z = \frac{61}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{7}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,x_4 + 4\,x_6\right) = 10 - 2\,x_4 - 14\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 &&&+ x_6 \\ x_2 &= \frac{3}{2} &- \frac{1}{2}\,x_4 &- 4\,x_6 \\ x_3 &= \frac{5}{2} &+ \frac{1}{2}\,x_4 &+ 5\,x_6 \\ x_5 &= \frac{3}{2} &+ \frac{1}{2}\,x_4 &+ 4\,x_6 \\ z &= 10 &- 2\,x_4 &- 14\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{3}{2},$$
$$\tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 10$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_4 = 2, \quad \tilde{\pi}_6 = 14 \quad \text{di valore} \quad 10$$

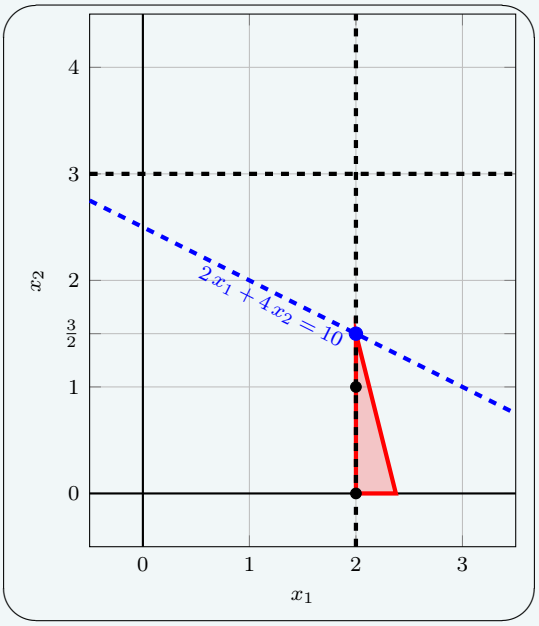


Figura 7.11: Nodo 5: regione ammissibile di LP_5 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \geq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_5) = 10$$

Il problema LP_5 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_5) \rfloor \leq \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 10 \leq 14$$

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per bound.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Il Nodo 4 è potato per integralità, mentre il Nodo 5 è potato per bound. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{61}{4} \right\rfloor}_{=15}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_1 \leq 1$ | $x_1 \geq 2$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$z(\mathrm{LP}_4) = 14$

$\mathrm{LB} = 14$

potato per integralità

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2}$

$z(\mathrm{LP}_5) = 10$

$\mathrm{LB} = 14$

potato per bound

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

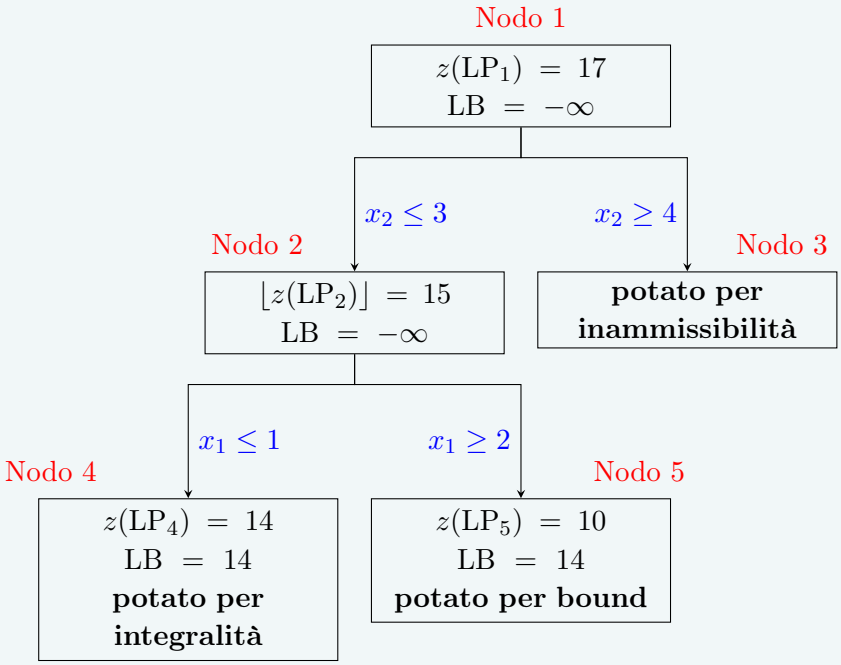
$$14 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 14$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 14$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 3$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching vengono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\text{LP}_1) = 17$: si effettua il branching su x_2.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 15$: si effettua il branching su x_1.
- Il Nodo 3 è potato per inammissibilità: il problema LP_3 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (1, 3)$ è intera, con valore 14, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 5 è potato per bound: $z(\text{LP}_5) = 10 \leq \text{LB} = 14$.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 14$ e l'algoritmo di branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (1, 3)$.

Esercizio 7.4 — Algoritmo di branch-and-bound ($P4$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 5\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 14 & \\ & x_1 & + & 8\,x_2 & \leq & 32 & \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{8}{15}\,x_3 + \dfrac{1}{15}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{1}{15}\,x_3 - \dfrac{2}{15}\,x_4 \\ z = \dfrac{110}{3} - \dfrac{37}{15}\,x_3 - \dfrac{1}{15}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice massimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non viene eseguito alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, mostrando il motivo per cui ciascun nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 5\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 14 \\ & x_1 & + & 8\,x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{8}{15}\,x_3 + \dfrac{1}{15}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{1}{15}\,x_3 - \dfrac{2}{15}\,x_4 \\ z = \dfrac{110}{3} - \dfrac{37}{15}\,x_3 - \dfrac{1}{15}\,x_4 \end{cases}$$

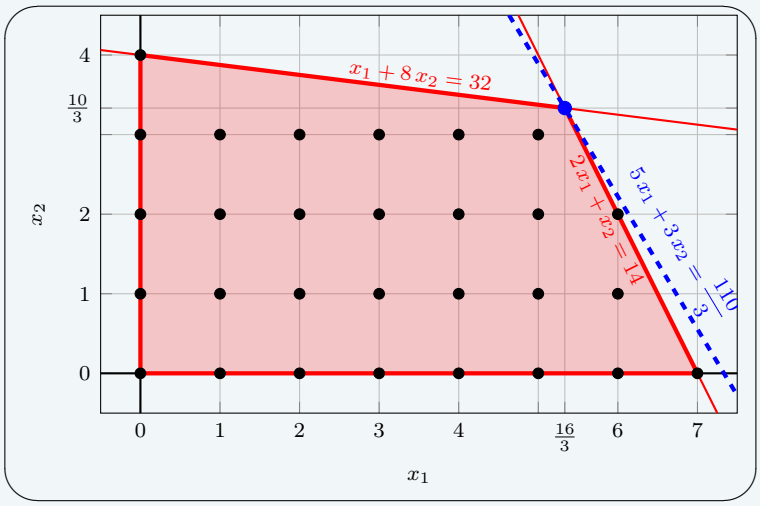


Figura 7.12: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti ammissibili del problema PLI (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{110}{3}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \leq z(\text{ILP}) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{110}{3} \right\rfloor}_{=36}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 14 \\
& x_1 & + & 8\,x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\
& & & x_2 & & & & + \; x_5 & = & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, \quad x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 3 - \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{2}{15}\, x_4 \right) \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\, x_3 + \frac{2}{15}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15}\, x_3 + \frac{1}{15}\, x_4 \\
x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{2}{15}\, x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\, x_3 + \frac{2}{15}\, x_4 \\
z = \frac{110}{3} - \frac{37}{15}\, x_3 - \frac{1}{15}\, x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:
$$\bar{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{3}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$
- la soluzione di base duale ammissibile è:
$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{37}{15}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{15} \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \dfrac{37}{15} + \dfrac{1}{15}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \dfrac{1}{15} - \dfrac{2}{15}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{37}{15} + \dfrac{1}{15}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{1}{15} - \dfrac{2}{15}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\geq -37 \\ \pi_5 &\leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\frac{1}{2}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{15}\,x_3 + \frac{2}{15}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{15}{2}\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15}\,x_3 + \frac{1}{15}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{15}{2}\,x_5\right) = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_5$$

$$x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15}\,x_3 - \frac{2}{15}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{15}{2}\,x_5\right) = 3 - x_5$$

$$z = \frac{110}{3} - \frac{37}{15}\,x_3 - \frac{1}{15}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{15}{2}\,x_5\right) = \frac{73}{2} - \frac{5}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{11}{2} &- \dfrac{1}{2}\,x_3 &+ \dfrac{1}{2}\,x_5 \\ x_2 &= 3 & &- x_5 \\ x_4 &= \dfrac{5}{2} &+ \dfrac{1}{2}\,x_3 &+ \dfrac{15}{2}\,x_5 \\ z &= \dfrac{73}{2} &- \dfrac{5}{2}\,x_3 &- \dfrac{1}{2}\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{11}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_4 = \frac{5}{2}, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{73}{2}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{73}{2}$$

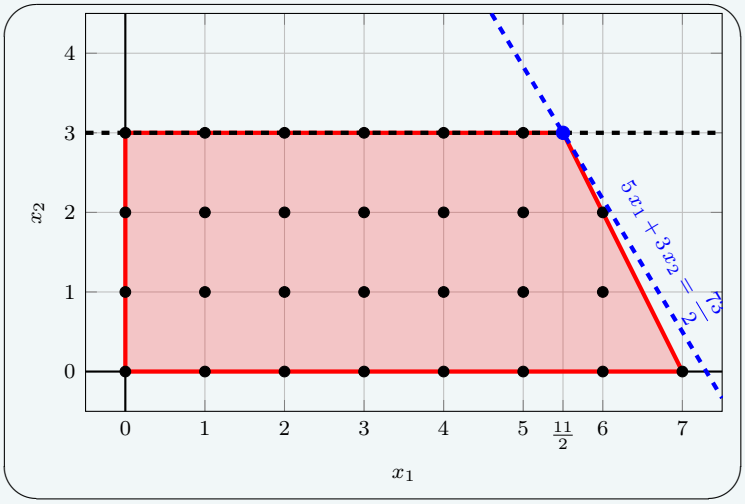


Figura 7.13: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{11}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{73}{2}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{73}{2} \right\rfloor}_{=36} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_2 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 14 \\
& x_1 & + & 8\,x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\
& & & x_2 & & & & - & x_5 = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_5 = 4 \qquad \Rightarrow \quad x_5 = -4 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = -4 + \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{15}\,x_3 - \frac{2}{15}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{15}\,x_3 - \frac{2}{15}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{16}{3} - \dfrac{8}{15}\,x_3 + \dfrac{1}{15}\,x_4 \\ x_2 &= \dfrac{10}{3} + \dfrac{1}{15}\,x_3 - \dfrac{2}{15}\,x_4 \\ x_5 &= -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{15}\,x_3 - \dfrac{2}{15}\,x_4 \\ z &= \dfrac{110}{3} - \dfrac{37}{15}\,x_3 - \dfrac{1}{15}\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{2}{3}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{37}{15}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{15} \quad \text{di valore} \quad \frac{110}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \dfrac{37}{15} - \dfrac{1}{15}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{15}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{37}{15} - \dfrac{1}{15}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{1}{15} + \dfrac{2}{15}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq 37 \\ \pi_5 &\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a 37, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{15}\,x_3 - \frac{2}{15}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 10 + 2\,x_4 + 15\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{16}{3} - \frac{8}{15}(10 + 2\,x_4 + 15\,x_5) + \frac{1}{15}\,x_4 = 0 - x_4 - 8\,x_5$$

$$x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{15}(10 + 2\,x_4 + 15\,x_5) - \frac{2}{15}\,x_4 = 4 + x_5$$

$$z = \frac{110}{3} - \frac{37}{15}(10 + 2\,x_4 + 15\,x_5) - \frac{1}{15}\,x_4 = 12 - 5\,x_4 - 37\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 0 - x_4 - 8\,x_5 \\ x_2 = 4 + x_5 \\ x_3 = 10 + 2\,x_4 + 15\,x_5 \\ z = 12 - 5\,x_4 - 37\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 10, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 12$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = 5, \quad \tilde{\pi}_5 = 37 \quad \text{di valore} \quad 12$$

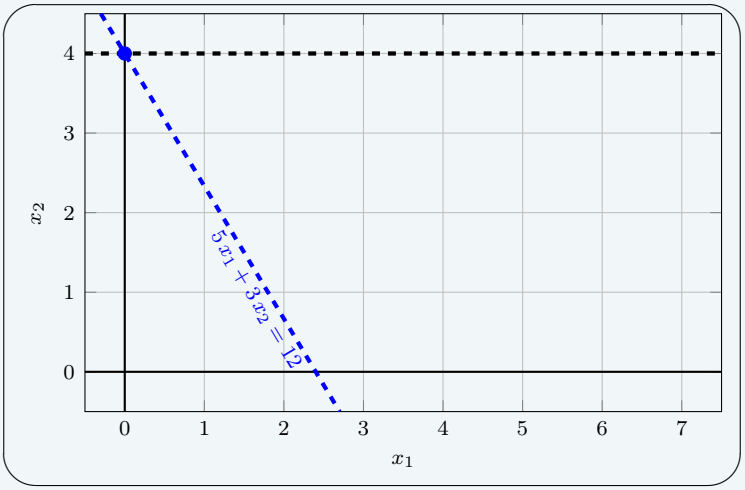


Figura 7.14: Nodo 3: regione ammissibile di LP_3 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \geq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

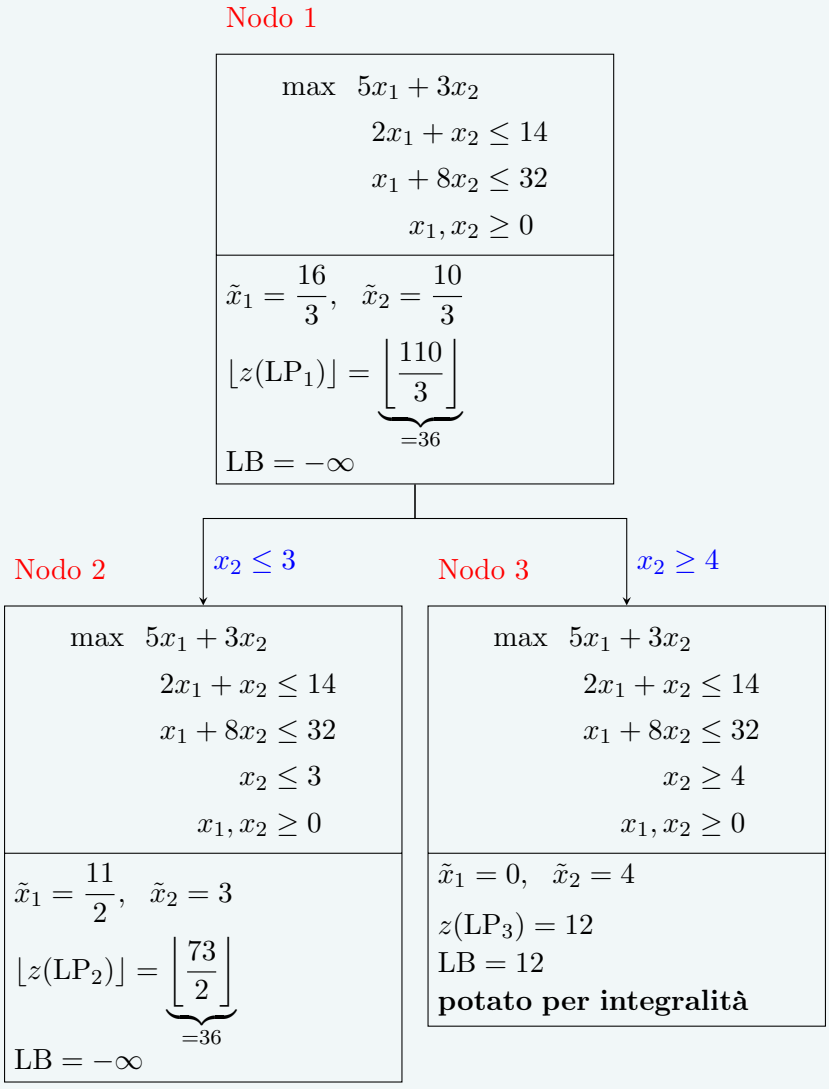
$$z(\mathrm{LP}_3) = 12$$

Il problema LP_3 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 12 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 12 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 4$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per integralità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$12 \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{73}{2} \right\rfloor}_{=36}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor}_{=5} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + 1}_{=6}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 5\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 14 \\
& x_1 & + & 8\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 32 \\
& & & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 3 \\
& x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & = & 5 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_6 = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 5 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 5 - \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_5 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{15}{2}\,x_5 \\ x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\,x_5 \\ z = \frac{73}{2} - \frac{5}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{11}{2}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{73}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{5}{2}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{73}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\pi_6 \\ \pi_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \leq 5 \\ \pi_6 \geq -1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 5, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 + x_5 + 2\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,(1 + x_5 + 2\,x_6) + \frac{1}{2}\,x_5 = 5 - x_6$$

$$x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}(1 + x_5 + 2\,x_6) + \frac{15}{2}\,x_5 = 3 + 8\,x_5 + x_6$$
$$z = \frac{73}{2} - \frac{5}{2}(1 + x_5 + 2\,x_6) - \frac{1}{2}\,x_5 = 34 - 3\,x_5 - 5\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_6 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ x_3 = 1 + x_5 + 2\,x_6 \\ x_4 = 3 + 8\,x_5 + x_6 \\ z = 34 - 3\,x_5 - 5\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 3,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 34$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 3, \quad \tilde{\pi}_6 = 5 \quad \text{di valore} \quad 34$$

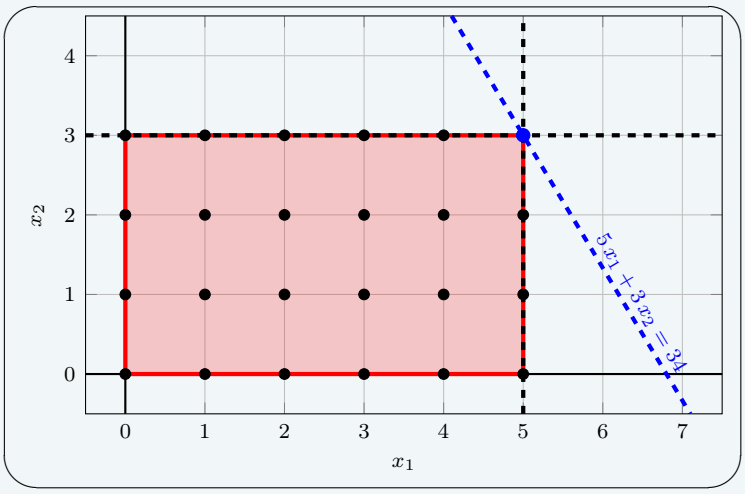


Figura 7.15: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 5$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 34$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 34 > 12$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 34 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 5, \bar{x}_2 = 3$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
\max & 5\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & = & 14 \\
& x_1 & + & 8\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & & = & 32 \\
& & & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & = & 3 \\
& x_1 & & & & & & & & & - & x_6 & & = & 6 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_6 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -6 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -6 + \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{11}{2} - \dfrac{1}{2}\,x_3 + \dfrac{1}{2}\,x_5 \\
x_2 = 3 - x_5 \\
x_4 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\,x_3 + \dfrac{15}{2}\,x_5 \\
x_6 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,x_3 + \dfrac{1}{2}\,x_5 \\
z = \dfrac{73}{2} - \dfrac{5}{2}\,x_3 - \dfrac{1}{2}\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{11}{2}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{73}{2}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{5}{2}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{73}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\geq -5 \\ \pi_6 &\leq 1 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 1, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_5 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_5 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 1 + x_3 + 2\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}(1 + x_3 + 2\,x_6) = 6 + x_6$$
$$x_2 = 3 - (1 + x_3 + 2\,x_6) = 2 - x_3 - 2\,x_6$$
$$x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{15}{2}(1 + x_3 + 2\,x_6) = 10 + 8\,x_3 + 15\,x_6$$
$$z = \frac{73}{2} - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}(1 + x_3 + 2\,x_6) = 36 - 3\,x_3 - x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 6 &&&+ x_6 \\ x_2 &= 2 &- x_3 &- 2\,x_6 \\ x_4 &= 10 &+ 8\,x_3 &+ 15\,x_6 \\ x_5 &= 1 &+ x_3 &+ 2\,x_6 \\ z &= 36 &- 3\,x_3 &- x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_4 = 10, \quad \tilde{x}_5 = 1,$$
$$\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 36$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_3 = 3, \quad \tilde{\pi}_6 = 1 \quad \text{di valore} \quad 36$$

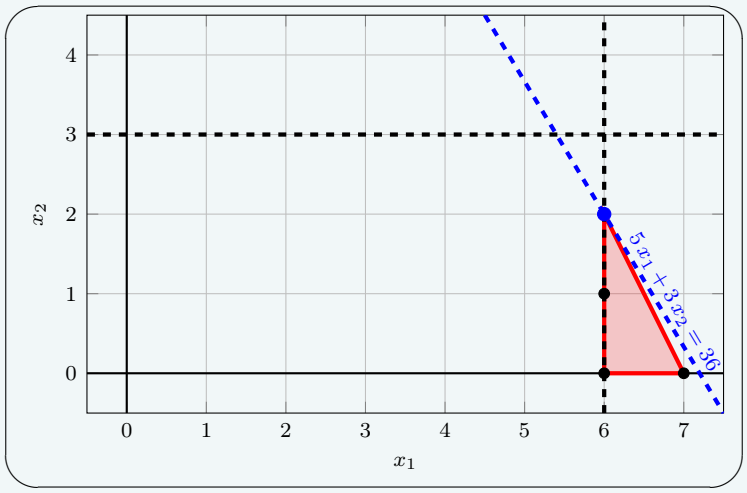


Figura 7.16: Nodo 5: regione ammissibile di LP_5 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \geq 6$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_5) = 36$$

Il problema LP_5 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_5) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 36 > 34$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 36 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 6, \bar{x}_2 = 2$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Entrambi i nodi sono potati per integralità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{11}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{73}{2} \right\rfloor}_{=36}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_1 \leq 5$ | $x_1 \geq 6$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$z(\mathrm{LP}_4) = 34$

$\mathrm{LB} = 34$

potato per integralità

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 2$

$z(\mathrm{LP}_5) = 36$

$\mathrm{LB} = 36$

potato per integralità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

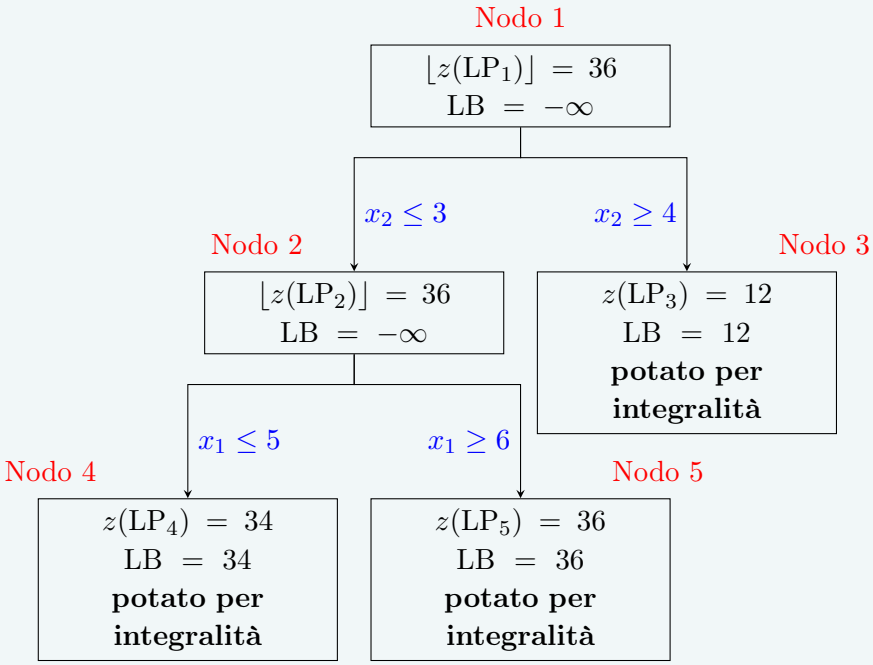
$$36 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 36$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 36$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 6, \tilde{x}_2 = 2$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching vengono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_1) \rfloor = 36$: si effettua il branching su x_2.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = 36$: si effettua il branching su x_1.
- Il Nodo 3 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3) = (0, 4)$ è intera, con valore 12, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4) = (5, 3)$ è intera, con valore 34, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 5 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5) = (6, 2)$ è intera, con valore 36, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 36$ e l'algoritmo di branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (6, 2)$.

Esercizio 7.5 — Algoritmo di branch-and-bound ($P5$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & 2\ x_1 & + & 3\ x_2 & & \\ & 6\ x_1 & + & 21\ x_2 & \leq & 77 \\ & 8\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 36 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\ x_3 - \frac{7}{50}\ x_4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\ x_3 + \frac{1}{25}\ x_4 \\ z = 15 - \frac{3}{25}\ x_3 - \frac{4}{25}\ x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non viene eseguito alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, mostrando il motivo per cui ciascun nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\ & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & = & 77 \\ & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & = & 36 \\ & x_1, & & & x_2, & & x_3, & & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{50}\,x_3 - \dfrac{7}{50}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{4}{75}\,x_3 + \dfrac{1}{25}\,x_4 \\ z = 15 - \dfrac{3}{25}\,x_3 - \dfrac{4}{25}\,x_4 \end{cases}$$

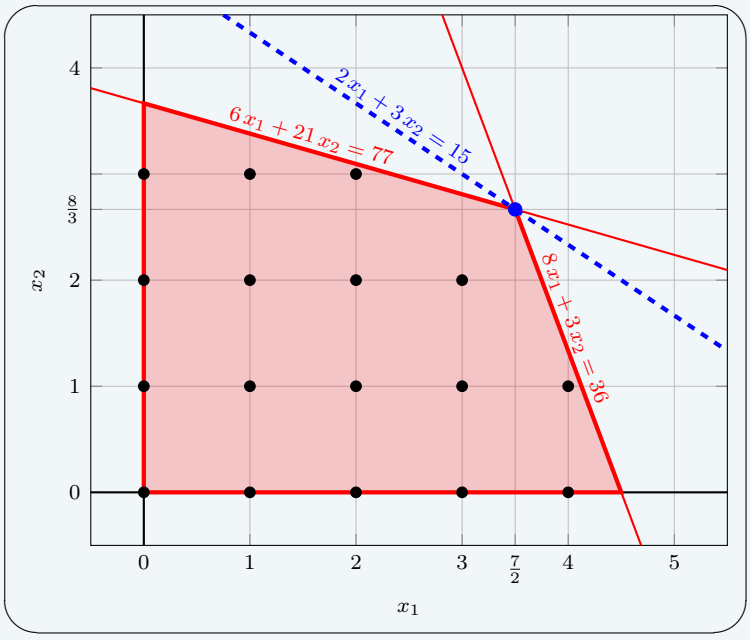


Figura 7.17: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti ammissibili del problema PLI (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 15$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 15$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\
& 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & = & 77 \\
& 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & = & 36 \\
& x_1 & & & & & & & + \; x_5 \; = & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_5 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 3 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 3 - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{50}\, x_3 - \frac{7}{50}\, x_4 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{50}\, x_3 + \frac{7}{50}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\, x_3 - \frac{7}{50}\, x_4 \\
x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\, x_3 + \frac{1}{25}\, x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{50}\, x_3 + \frac{7}{50}\, x_4 \\
z = 15 - \frac{3}{25}\, x_3 - \frac{4}{25}\, x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 15$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{3}{25}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{4}{25} \quad \text{di valore} \quad 15$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \dfrac{3}{25} + \dfrac{1}{50}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \dfrac{4}{25} - \dfrac{7}{50}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{3}{25} + \dfrac{1}{50}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{4}{25} - \dfrac{7}{50}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\geq -6 \\ \pi_5 &\leq \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\frac{8}{7}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{50}\,x_3 + \frac{7}{50}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{25}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\left(\frac{25}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\,x_5\right) = 3 - x_5$$

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\,x_3 + \frac{1}{25}\left(\frac{25}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\,x_5\right) = \frac{59}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_5$$

$$z = 15 - \frac{3}{25}\,x_3 - \frac{4}{25}\left(\frac{25}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\,x_5\right) = \frac{101}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{8}{7}\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 3 &&- &&- x_5 \\ x_2 &= \dfrac{59}{21} &- \dfrac{1}{21}\,x_3 &+ &\dfrac{2}{7}\,x_5 \\ x_4 &= \dfrac{25}{7} &+ \dfrac{1}{7}\,x_3 &+ &\dfrac{50}{7}\,x_5 \\ z &= \dfrac{101}{7} &- \dfrac{1}{7}\,x_3 &- &\dfrac{8}{7}\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{59}{21}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{25}{7}, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \qquad \text{di valore} \quad \frac{101}{7}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{7}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{8}{7} \qquad \text{di valore} \quad \frac{101}{7}$$

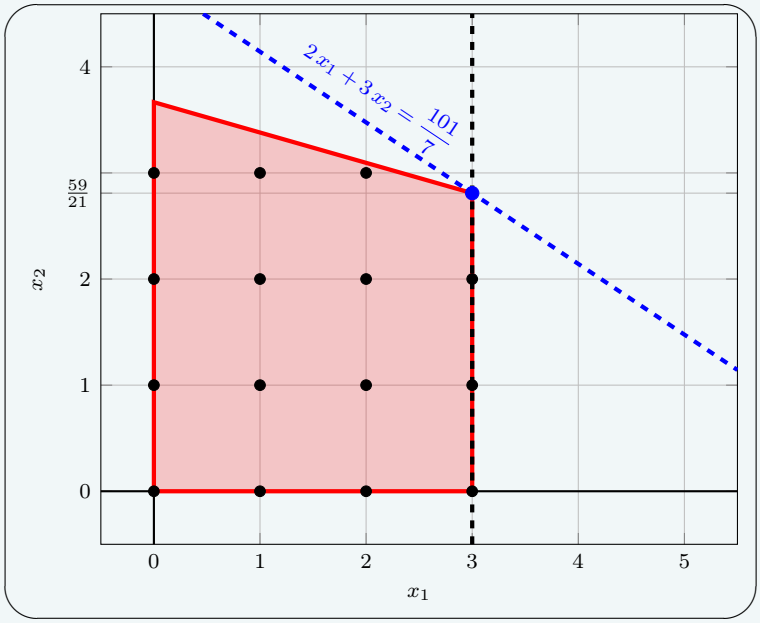


Figura 7.18: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{59}{21}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{101}{7}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor}_{=14} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_2 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & \\
& 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & = & 77 \\
& 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & + & x_4 & & = & 36 \\
& x_1 & & & & & & - & x_5 = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_5 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -4 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = -4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\,x_4 \\
x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\,x_3 + \frac{1}{25}\,x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\,x_4 \\
z = 15 - \frac{3}{25}\,x_3 - \frac{4}{25}\,x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 15$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{3}{25}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{4}{25} \quad \text{di valore} \quad 15$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$
\begin{cases}
\pi_3 = \frac{3}{25} - \frac{1}{50}\,\pi_5 \\
\pi_4 = \frac{4}{25} + \frac{7}{50}\,\pi_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\frac{3}{25} - \frac{1}{50}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\
\underbrace{\frac{4}{25} + \frac{7}{50}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_5 \leq 6 \\
\pi_5 \geq -\frac{8}{7}
\end{cases}
$$

Aumentando il valore di π_5 fino a 6, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 25 + 7\,x_4 + 50\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\,(25 + 7\,x_4 + 50\,x_5) - \frac{7}{50}\,x_4 = 4 + x_5$$

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\,(25 + 7\,x_4 + 50\,x_5) + \frac{1}{25}\,x_4 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - \frac{8}{3}\,x_5$$

$$z = 15 - \frac{3}{25}\,(25 + 7\,x_4 + 50\,x_5) - \frac{4}{25}\,x_4 = 12 - x_4 - 6\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_5 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - \frac{8}{3}\,x_5 \\ x_3 = 25 + 7\,x_4 + 50\,x_5 \\ z = 12 - x_4 - 6\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 25, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \qquad \text{di valore} \quad 12$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = 1, \quad \tilde{\pi}_5 = 6 \qquad \text{di valore} \quad 12$$

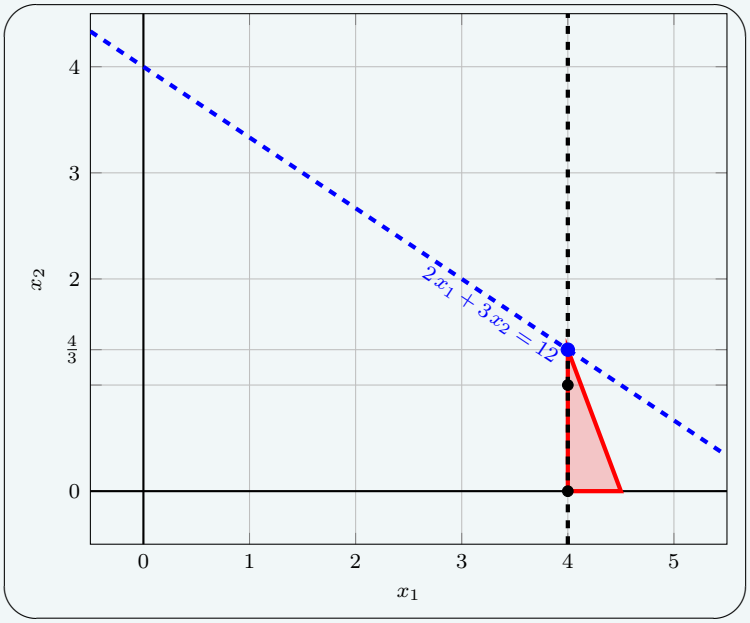


Figura 7.19: Nodo 3: regione ammissibile di LP_3 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \geq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$$

il valore ottimo è:

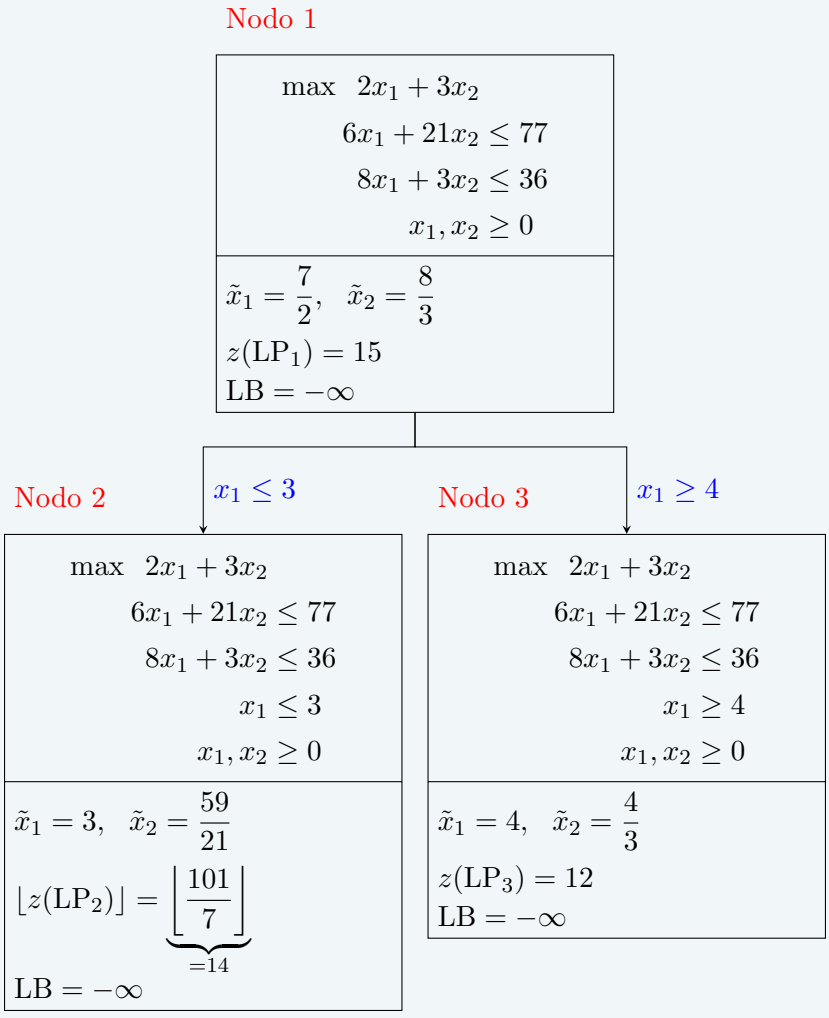
$$z(\mathrm{LP}_3) = 12$$

Il problema LP_3 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 12 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_3 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Entrambi i nodi sono inseriti nella lista L. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor}_{=14}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_3 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor}_{=1} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 1}_{=2}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 77 \\
 & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 36 \\
 & x_1 & & & & & & & - & x_5 & & & = & 4 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 1 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, x_4 - \frac{8}{3}\, x_5 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_4 + \frac{8}{3}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= 4 & & & + & x_5 \\ x_2 &= \frac{4}{3} & - & \frac{1}{3}\, x_4 & - & \frac{8}{3}\, x_5 \\ x_3 &= 25 & + & 7\, x_4 & + & 50\, x_5 \\ x_6 &= -\frac{1}{3} & + & \frac{1}{3}\, x_4 & + & \frac{8}{3}\, x_5 \\ z &= 12 & - & x_4 & - & 6\, x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 4, \quad \bar{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_3 = 25, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{3},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 12$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = 1, \quad \bar{\pi}_5 = 6 \quad \text{di valore} \quad 12$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= 1 - \frac{1}{3}\, \pi_6 \\ \pi_5 &= 6 - \frac{8}{3}\, \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{1 - \frac{1}{3}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{6 - \frac{8}{3}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 3 \\ \pi_6 &\leq \frac{9}{4} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{3, \frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{4}$, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_5 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_5 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_4 + \frac{8}{3}\, x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\, x_4 + \frac{3}{8}\, x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 4 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\, x_4 + \frac{3}{8}\, x_6\right) = \frac{33}{8} - \frac{1}{8}\, x_4 + \frac{3}{8}\, x_6$$

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, x_4 - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\, x_4 + \frac{3}{8}\, x_6\right) = 1 - x_6$$

$$x_3 = 25 + 7\,x_4 + 50\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{8}\,x_6\right) = \frac{125}{4} + \frac{3}{4}\,x_4 + \frac{75}{4}\,x_6$$

$$z = 12 - x_4 - 6\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{8}\,x_6\right) = \frac{45}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{9}{4}\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{33}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{8}\,x_6 \\ x_2 = 1 - x_6 \\ x_3 = \frac{125}{4} + \frac{3}{4}\,x_4 + \frac{75}{4}\,x_6 \\ x_5 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{8}\,x_6 \\ z = \frac{45}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{9}{4}\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{33}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{125}{4}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{1}{8},$$
$$\tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{45}{4}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{9}{4} \quad \text{di valore} \quad \frac{45}{4}$$

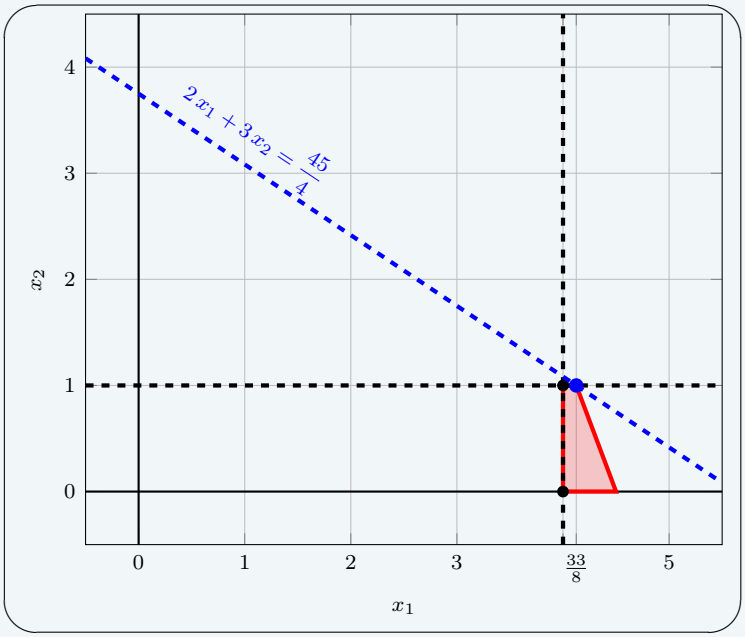


Figura 7.20: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 1$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{33}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = \frac{45}{4}$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{45}{4} \right\rfloor}_{=11} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_4 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & \\
& 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 77 \\
& 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 36 \\
& x_1 & & & & & & & - & x_5 & & = & 4 \\
& & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 2 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_6 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -2 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - \frac{8}{3}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - \frac{8}{3}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_5 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} x_4 - \frac{8}{3} x_5 \\ x_3 = 25 + 7 x_4 + 50 x_5 \\ x_6 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} x_4 - \frac{8}{3} x_5 \\ z = 12 - x_4 - 6 x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 4, \quad \bar{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_3 = 25, \quad \bar{x}_6 = -\frac{2}{3},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 12$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = 1, \quad \bar{\pi}_5 = 6 \quad \text{di valore} \quad 12$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = 1 + \frac{1}{3}\pi_6 \\ \pi_5 = 6 + \frac{8}{3}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{1 + \frac{1}{3}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{6 + \frac{8}{3}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \geq -3 \\ \pi_6 \geq -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_6 senza violare l'ammissibilità duale: il problema duale è **illimitato**. Ne segue che il problema primale LP_5 è **inammissibile** e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 3 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Il Nodo 4 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 5 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 3

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{4}{3}$

$z(\mathrm{LP}_3) = 12$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_2 \leq 1$ | $x_2 \geq 2$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \dfrac{33}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 1$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{45}{4} \right\rfloor}_{=11}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

potato per inammissibilità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor}_{=14}$$

- **Iterazione 3**

Il problema LP_4 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{33}{8} \right\rfloor}_{=4} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{33}{8} \right\rfloor + 1}_{=5}$$

Con il primo vincolo di branching si crea il problema LP_6 (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_6

Consideriamo il problema LP_6 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 77 \\
 & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 36 \\
 & x_1 & & & & & & & - & x_5 & & & = & 4 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & + \; x_7 = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & \; x_7 \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_7 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = 4 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 4 - \left(\frac{33}{8} - \frac{1}{8}\,x_4 + \frac{3}{8}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\,x_4 - \frac{3}{8}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{33}{8} - \dfrac{1}{8}\,x_4 + \dfrac{3}{8}\,x_6 \\
x_2 = 1 - x_6 \\
x_3 = \dfrac{125}{4} + \dfrac{3}{4}\,x_4 + \dfrac{75}{4}\,x_6 \\
x_5 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\,x_4 + \dfrac{3}{8}\,x_6 \\
x_7 = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}\,x_4 - \dfrac{3}{8}\,x_6 \\
z = \dfrac{45}{4} - \dfrac{1}{4}\,x_4 - \dfrac{9}{4}\,x_6
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{33}{8}, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = \frac{125}{4}, \quad \bar{x}_5 = \frac{1}{8}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{1}{8},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{45}{4}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{9}{4} \quad \text{di valore} \quad \frac{45}{4}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\pi_7 \\ \pi_6 &= \frac{9}{4} + \frac{3}{8}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\pi_7 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{9}{4} + \frac{3}{8}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 2 \\ \pi_7 &\geq -6 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a 2, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 entra nella base duale e, di conseguenza, x_7 esce dalla base primale.

π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{8}x_6 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1 + 3x_6 + 8x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{33}{8} - \frac{1}{8}(1 + 3x_6 + 8x_7) + \frac{3}{8}x_6 = 4 - x_7$$
$$x_3 = \frac{125}{4} + \frac{3}{4}(1 + 3x_6 + 8x_7) + \frac{75}{4}x_6 = 32 + 21x_6 + 6x_7$$
$$x_5 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}(1 + 3x_6 + 8x_7) + \frac{3}{8}x_6 = 0 - x_7$$
$$z = \frac{45}{4} - \frac{1}{4}(1 + 3x_6 + 8x_7) - \frac{9}{4}x_6 = 11 - 3x_6 - 2x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 4 &&&& - x_7 \\ x_2 &= 1 &- x_6 \\ x_3 &= 32 &+ 21\,x_6 &+ 6\,x_7 \\ x_4 &= 1 &+ 3\,x_6 &+ 8\,x_7 \\ x_5 &= 0 &&&& - x_7 \\ z &= 11 &- 3\,x_6 &- 2\,x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 7\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 32, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0,$$
$$\tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 11$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_6 = 3, \quad \tilde{\pi}_7 = 2 \quad \text{di valore} \quad 11$$

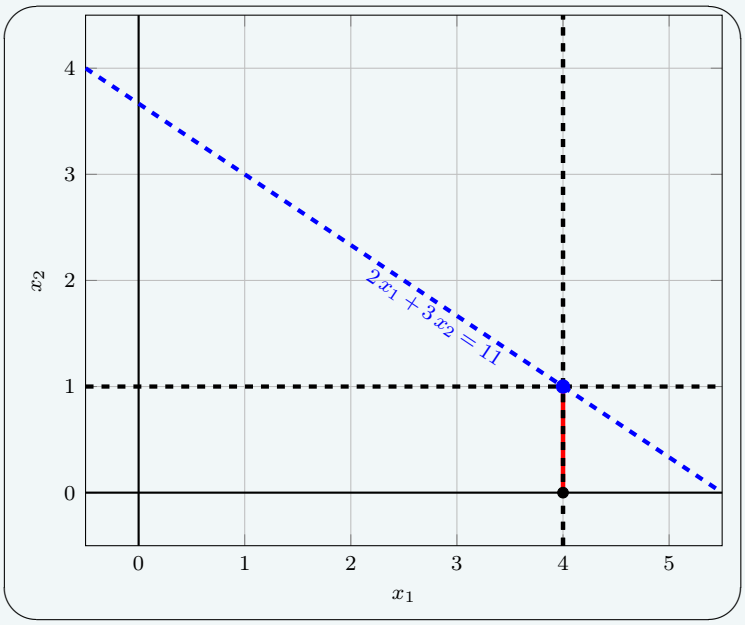


Figura 7.21: Nodo 6: regione ammissibile di LP_6 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_6) = 11$$

Il problema LP_6 è **ammissibile** e abbiamo

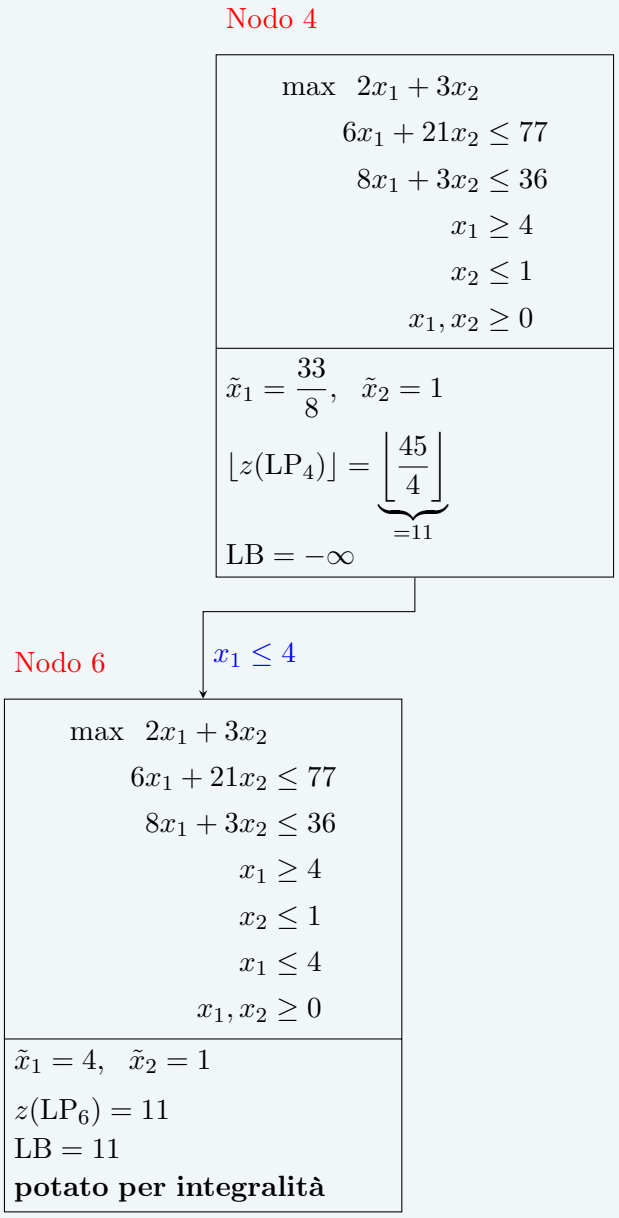
$$\lfloor z(\mathrm{LP}_6) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 11 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 11 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 1$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della terza iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 4 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 6. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non viene risolto, poiché dopo il Nodo 6 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la parte dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$11 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{101}{7} \right\rfloor}_{=14}$$

- **Iterazione 4**

Il problema LP_2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{59}{21} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{59}{21} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_7 e LP_8.

(a) Soluzione del problema LP_7

Consideriamo il problema LP_7 in forma standard:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & \\
& 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 77 \\
& 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 36 \\
& x_1 & & & & & & & + & x_5 & & = & 3 \\
& & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 2 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 2 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 2 - \left(\frac{59}{21} - \frac{1}{21}\, x_3 + \frac{2}{7}\, x_5 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{17}{21} + \frac{1}{21}\, x_3 - \frac{2}{7}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = 3 - x_5 \\
x_2 = \frac{59}{21} - \frac{1}{21}\, x_3 + \frac{2}{7}\, x_5 \\
x_4 = \frac{25}{7} + \frac{1}{7}\, x_3 + \frac{50}{7}\, x_5 \\
x_6 = -\frac{17}{21} + \frac{1}{21}\, x_3 - \frac{2}{7}\, x_5 \\
z = \frac{101}{7} - \frac{1}{7}\, x_3 - \frac{8}{7}\, x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = \frac{59}{21}, \quad \bar{x}_4 = \frac{25}{7}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{17}{21},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{101}{7}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{7}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{8}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{101}{7}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{7} - \frac{1}{21}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{8}{7} + \frac{2}{7}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{21}\pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{8}{7} + \frac{2}{7}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 3 \\ \pi_6 &\geq -4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 3, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{17}{21} + \frac{1}{21}x_3 - \frac{2}{7}x_5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 17 + 6\,x_5 + 21\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{59}{21} - \frac{1}{21}(17 + 6\,x_5 + 21\,x_6) + \frac{2}{7}x_5 = 2 - x_6$$
$$x_4 = \frac{25}{7} + \frac{1}{7}(17 + 6\,x_5 + 21\,x_6) + \frac{50}{7}x_5 = 6 + 8\,x_5 + 3\,x_6$$
$$z = \frac{101}{7} - \frac{1}{7}(17 + 6\,x_5 + 21\,x_6) - \frac{8}{7}x_5 = 12 - 2\,x_5 - 3\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 3 &- x_5 \\ x_2 &= 2 & &- x_6 \\ x_3 &= 17 &+ 6\,x_5 &+ 21\,x_6 \\ x_4 &= 6 &+ 8\,x_5 &+ 3\,x_6 \\ z &= 12 &- 2\,x_5 &- 3\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 17, \quad \tilde{x}_4 = 6,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 12$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 2, \quad \tilde{\pi}_6 = 3 \quad \text{di valore} \quad 12$$

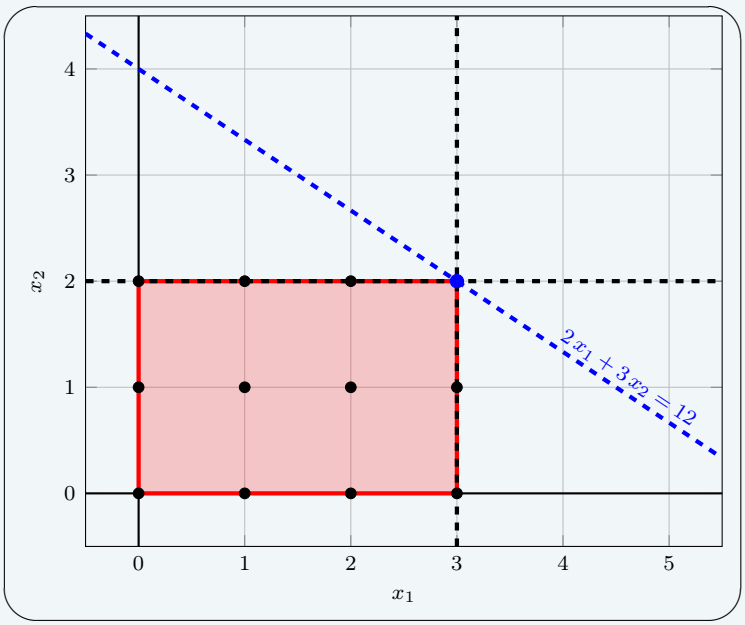


Figura 7.22: Nodo 7: regione ammissibile di LP_7 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_7)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo è:

$$z(\text{LP}_7) = 12$$

Il problema LP_7 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\text{LP}_7) \rfloor > \text{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 12 > 11$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_7)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 12 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 2$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

(b) Soluzione del problema LP_8

Consideriamo il problema LP_8 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 77 \\
 & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 36 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_6 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -3 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -3 + \left(\frac{59}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{4}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = 3 - x_5 \\
x_2 = \frac{59}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_5 \\
x_4 = \frac{25}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{4}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_5 \\
z = \frac{101}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{8}{7}\,x_5
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = \frac{59}{21}, \quad \bar{x}_4 = \frac{25}{7}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{4}{21}, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{101}{7}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = \frac{1}{7}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{8}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{101}{7}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{7} + \frac{1}{21}\,\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{8}{7} - \frac{2}{7}\,\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{21}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{8}{7} - \frac{2}{7}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\geq -3 \\ \pi_6 &\leq 4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 4, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_5 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_5 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{4}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 3 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}\,x_3 - \frac{7}{2}\,x_6$$

$$x_2 = \frac{59}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6\right) = 3 + x_6$$

$$x_4 = \frac{25}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6\right) = \frac{25}{3} + \frac{4}{3}\,x_3 + 25\,x_6$$

$$z = \frac{101}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{8}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6\right) = \frac{41}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 4\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{7}{3} &- \frac{1}{6}\,x_3 &- \frac{7}{2}\,x_6 \\ x_2 &= 3 &&+ x_6 \\ x_4 &= \frac{25}{3} &+ \frac{4}{3}\,x_3 &+ 25\,x_6 \\ x_5 &= \frac{2}{3} &+ \frac{1}{6}\,x_3 &+ \frac{7}{2}\,x_6 \\ z &= \frac{41}{3} &- \frac{1}{3}\,x_3 &- 4\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_4 = \frac{25}{3}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{2}{3},$$
$$\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{41}{3}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_6 = 4 \quad \text{di valore} \quad \frac{41}{3}$$

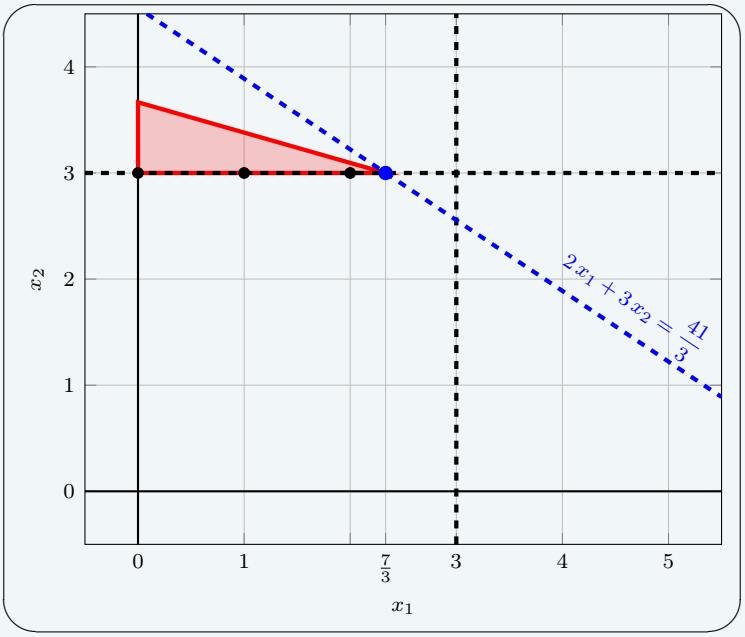


Figura 7.23: Nodo 8: regione ammissibile di LP_8 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \geq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_8)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_8) = \frac{41}{3}$$

Il problema LP_8 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_8) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{41}{3} \right\rfloor}_{=13} > 12$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_8)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_8 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

Alla fine della quarta iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 7, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 8. Il Nodo 7 è potato per integralità, mentre il Nodo 8 è inserito nella lista L. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{59}{21}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{101}{7} \right\rfloor}_{=14}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_2 \leq 2$ | $x_2 \geq 3$

Nodo 7

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 2$

$z(\mathrm{LP}_7) = 12$

$\mathrm{LB} = 12$

potato per integralità

Nodo 8

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \dfrac{7}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_8) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{41}{3} \right\rfloor}_{=13}$

$\mathrm{LB} = 12$

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$12 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{41}{3} \right\rfloor}_{=13}$$

- **Iterazione 5**

Il problema LP_8 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_9 e LP_{10}.

(a) Soluzione del problema LP_9

Consideriamo il problema LP_9 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 77 \\
 & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 36 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & + \; x_7 = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & \; x_7 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_7 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = 2 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 2 - \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}\,x_3 - \frac{7}{2}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}\,x_3 - \frac{7}{2}\,x_6 \\
x_2 = 3 + x_6 \\
x_4 = \frac{25}{3} + \frac{4}{3}\,x_3 + 25\,x_6 \\
x_5 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6 \\
x_7 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,x_3 + \frac{7}{2}\,x_6 \\
z = \frac{41}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 4\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{3}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_4 = \frac{25}{3}, \quad \bar{x}_5 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{1}{3},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{41}{3}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_6 = 4 \quad \text{di valore} \quad \frac{41}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi_7 \\ \pi_6 &= 4 - \frac{7}{2}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi_7 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{4 - \frac{7}{2}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 2 \\ \pi_7 &\leq \frac{8}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a $\min\left\{2, \frac{8}{7}\right\} = \frac{8}{7}$, il valore di π_6 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 entra nella base duale e, di conseguenza, x_7 esce dalla base primale.
π_6 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_6 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x_3 + \frac{7}{2}x_6 \quad \Rightarrow \quad x_6 = \frac{2}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{7}{2}\left(\frac{2}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7\right) = 2 - x_7$$

$$x_2 = 3 + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7\right) = \frac{65}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7$$

$$x_4 = \frac{25}{3} + \frac{4}{3}x_3 + 25\left(\frac{2}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7\right) = \frac{75}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{50}{7}x_7$$

$$x_5 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}x_3 + \frac{7}{2}\left(\frac{2}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7\right) = 1 + x_7$$

$$z = \frac{41}{3} - \frac{1}{3}x_3 - 4\left(\frac{2}{21} - \frac{1}{21}x_3 + \frac{2}{7}x_7\right) = \frac{93}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{8}{7}x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_7 \\ x_2 = \frac{65}{21} - \frac{1}{21} x_3 + \frac{2}{7} x_7 \\ x_4 = \frac{75}{7} + \frac{1}{7} x_3 + \frac{50}{7} x_7 \\ x_5 = 1 + x_7 \\ x_6 = \frac{2}{21} - \frac{1}{21} x_3 + \frac{2}{7} x_7 \\ z = \frac{93}{7} - \frac{1}{7} x_3 - \frac{8}{7} x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 7\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{65}{21}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{75}{7}, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = \frac{2}{21},$$
$$\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{93}{7}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_3 = \frac{1}{7}, \quad \tilde{\pi}_7 = \frac{8}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{93}{7}$$

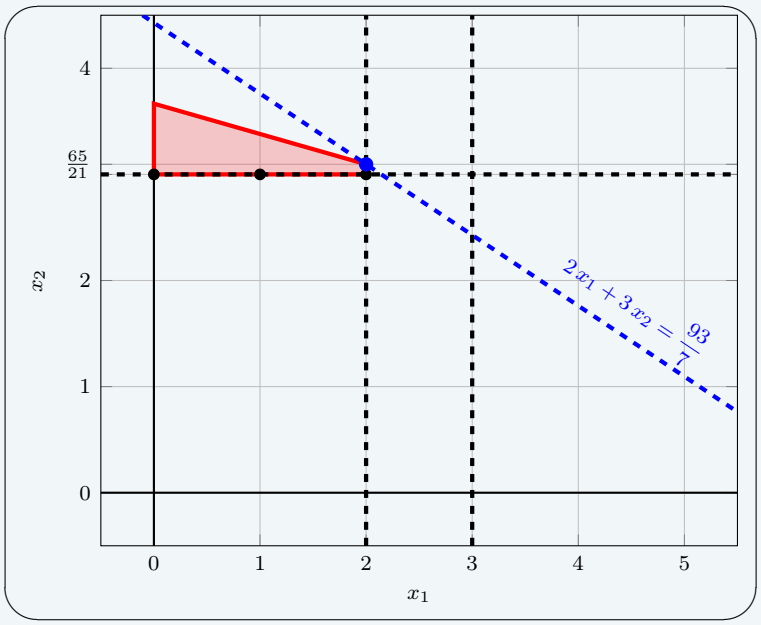


Figura 7.24: Nodo 9: regione ammissibile di LP_9 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_9)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{65}{21}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_9) = \frac{93}{7}$$

Il problema LP_9 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_9) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{93}{7} \right\rfloor}_{=13} > 12$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_9)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_9 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_{10}

Consideriamo il problema LP_{10} in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
& 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 77 \\
& 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 36 \\
& x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 3 \\
& & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 3 \\
& x_1 & & & & & & & & & & - \; x_7 & = & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_7 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -3 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = -3 + \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}\, x_3 - \frac{7}{2}\, x_6 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\, x_3 - \frac{7}{2}\, x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}\, x_3 - \frac{7}{2}\, x_6 \\
x_2 = 3 + x_6 \\
x_4 = \frac{25}{3} + \frac{4}{3}\, x_3 + 25\, x_6 \\
x_5 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\, x_3 + \frac{7}{2}\, x_6 \\
x_7 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\, x_3 - \frac{7}{2}\, x_6 \\
z = \frac{41}{3} - \frac{1}{3}\, x_3 - 4\, x_6
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{3}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_4 = \frac{25}{3}, \quad \bar{x}_5 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{2}{3},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{41}{3}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_6 = 4 \quad \text{di valore} \quad \frac{41}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\pi_7 \\ \pi_6 &= 4 + \frac{7}{2}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\pi_7 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{4 + \frac{7}{2}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\geq -2 \\ \pi_7 &\geq -\frac{8}{7} \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_7 senza violare l'ammissibilità duale: il problema duale è **illimitato**. Ne segue che il problema primale LP_{10} è **inammissibile** e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della quinta iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 8 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 9, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 10. Il Nodo 9 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 10 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 8

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{7}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_8) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{41}{3} \right\rfloor}_{=13}$

$\mathrm{LB} = 12$

$x_1 \leq 2$ | $x_1 \geq 3$

Nodo 9

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{65}{21}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_9) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{93}{7} \right\rfloor}_{=13}$

$\mathrm{LB} = 12$

Nodo 10

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

potato per inammissibilità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$12 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{93}{7} \right\rfloor}_{=13}$$

- **Iterazione 6**

Il problema LP_9 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{65}{21} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{65}{21} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con il primo vincolo di branching si crea il problema LP_{11} (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_{11}

Consideriamo il problema LP_{11} in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & & \\
 & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & = & 77 \\
 & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 36 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & & & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & + & x_7 & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & & & + \; x_8 = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_8 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_8 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_8 = 3 - \left(\frac{65}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_7\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_8 = -\frac{2}{21} + \frac{1}{21}\,x_3 - \frac{2}{7}\,x_7$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = 2 - x_7 \\
x_2 = \frac{65}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_7 \\
x_4 = \frac{75}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{50}{7}\,x_7 \\
x_5 = 1 + x_7 \\
x_6 = \frac{2}{21} - \frac{1}{21}\,x_3 + \frac{2}{7}\,x_7 \\
x_8 = -\frac{2}{21} + \frac{1}{21}\,x_3 - \frac{2}{7}\,x_7 \\
z = \frac{93}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{8}{7}\,x_7
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 7\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = \frac{65}{21}, \quad \bar{x}_4 = \frac{75}{7},$$
$$\bar{x}_5 = 1, \quad \bar{x}_6 = \frac{2}{21}, \quad \bar{x}_8 = -\frac{2}{21},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{93}{7}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_8 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{7}, \quad \bar{\pi}_7 = \frac{8}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{93}{7}$$

Se aumentiamo il valore di π_8, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{7} - \frac{1}{21}\pi_8 \\ \pi_7 &= \frac{8}{7} + \frac{2}{7}\pi_8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{21}\pi_8 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{8}{7} + \frac{2}{7}\pi_8 \geq 0}_{\pi_7 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_8 &\leq 3 \\ \pi_8 &\geq -4 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_8 fino a 3, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_8 entra nella base duale e, di conseguenza, x_8 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_8 = -\frac{2}{21} + \frac{1}{21}x_3 - \frac{2}{7}x_7 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2 + 6\,x_7 + 21\,x_8$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{65}{21} - \frac{1}{21}(2 + 6\,x_7 + 21\,x_8) + \frac{2}{7}x_7 = 3 - x_8$$
$$x_4 = \frac{75}{7} + \frac{1}{7}(2 + 6\,x_7 + 21\,x_8) + \frac{50}{7}x_7 = 11 + 8\,x_7 + 3\,x_8$$
$$x_6 = \frac{2}{21} - \frac{1}{21}(2 + 6\,x_7 + 21\,x_8) + \frac{2}{7}x_7 = 0 - x_8$$
$$z = \frac{93}{7} - \frac{1}{7}(2 + 6\,x_7 + 21\,x_8) - \frac{8}{7}x_7 = 13 - 2\,x_7 - 3\,x_8$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$
\begin{cases}
x_1 &= 2 &- & x_7 & & \\
x_2 &= 3 & & & - & x_8 \\
x_3 &= 2 &+ 6\, & x_7 &+ 21\, & x_8 \\
x_4 &= 11 &+ 8\, & x_7 &+ 3\, & x_8 \\
x_5 &= 1 &+ & x_7 & & \\
x_6 &= 0 & & & - & x_8 \\
z &= 13 &- 2\, & x_7 &- 3\, & x_8
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{7, 8\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 2,$$
$$\tilde{x}_4 = 11, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = 0,$$
$$\tilde{x}_7 = 0, \quad \tilde{x}_8 = 0 \quad \text{di valore} \quad 13$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_7 = 2, \quad \tilde{\pi}_8 = 3 \quad \text{di valore} \quad 13$$

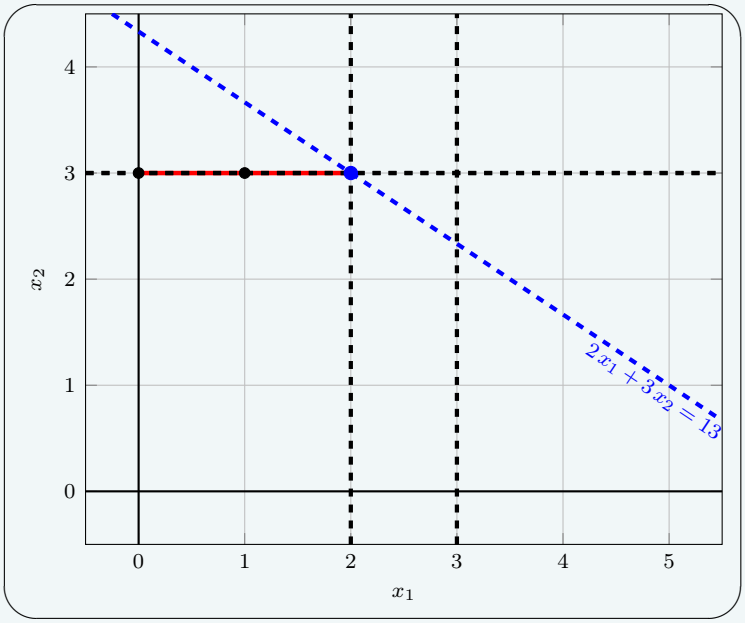


Figura 7.25: Nodo 11: regione ammissibile di LP_{11} (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_{11})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_{11}) = 13$$

Il problema LP_{11} è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_{11}) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 13 > 12$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_{11})$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 13 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 3$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della sesta iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 9 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 11. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non viene risolto, poiché dopo il Nodo 11 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_9) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la parte dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:

Nodo 9

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{65}{21}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_9) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{93}{7} \right\rfloor}_{=13}$

$\mathrm{LB} = 12$

$x_2 \leq 3$

Nodo 11

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$z(\mathrm{LP}_{11}) = 13$

$\mathrm{LB} = 13$

potato per integralità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

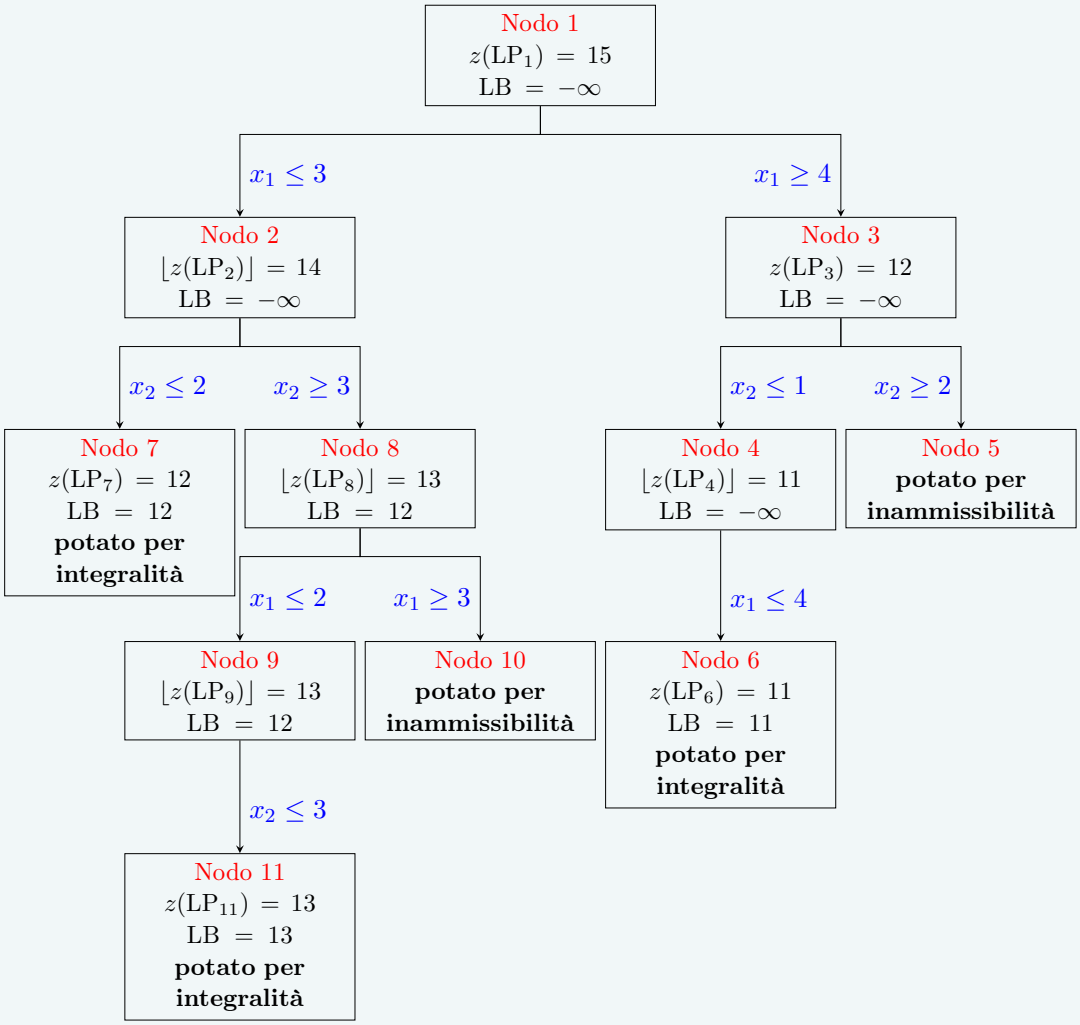
$$13 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 13$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 13$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 2, \tilde{x}_2 = 3$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching vengono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\mathrm{LP}_1) = 15$: si effettua il branching su x_1.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = 14$: si effettua il branching su x_2.
- Il Nodo 3 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\mathrm{LP}_3) = 12$: si effettua il branching su x_2.
- Il Nodo 4 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor = 11$: si effettua il branching su x_1.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 4 non viene risolto né disegnato, poiché $\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor = 11 \leq \mathrm{LB} = 11$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 5 è potato per inammissibilità: il problema LP_5 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 6 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6) = (4, 1)$ è intera, con valore 11, e diventa la soluzione incumbent.

- Il Nodo 7 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_7) = (3, 2)$ è intera, con valore 12, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 8 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_8) \rfloor = 13$: si effettua il branching su x_1.
- Il Nodo 9 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_9) \rfloor = 13$: si effettua il branching su x_2.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 9 non viene risolto né disegnato, poiché $\lfloor z(\mathrm{LP}_9) \rfloor = 13 \leq \mathrm{LB} = 13$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 10 è potato per inammissibilità: il problema LP_{10} non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 11 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_{11}) = (2, 3)$ è intera, con valore 13, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 13$ e l'algoritmo di branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (2, 3)$.

Esercizio 7.6 — Algoritmo di branch-and-bound ($P6$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & x_1 & + & x_2 & & & \\ & 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & \leq & 70 & \\ & 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 52 & \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{95}{28} + \dfrac{1}{56}\,x_3 - \dfrac{5}{56}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{79}{21} - \dfrac{1}{14}\,x_3 + \dfrac{1}{42}\,x_4 \\ z = \dfrac{601}{84} - \dfrac{3}{56}\,x_3 - \dfrac{11}{168}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;

(c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;

(d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non viene eseguito alcun algoritmo euristico).

Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.

2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, mostrando il motivo per cui ciascun nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ & 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & = & 70 \\ & 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & = & 52 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{95}{28} + \dfrac{1}{56}\,x_3 - \dfrac{5}{56}\,x_4 \\ x_2 = \dfrac{79}{21} - \dfrac{1}{14}\,x_3 + \dfrac{1}{42}\,x_4 \\ z = \dfrac{601}{84} - \dfrac{3}{56}\,x_3 - \dfrac{11}{168}\,x_4 \end{cases}$$

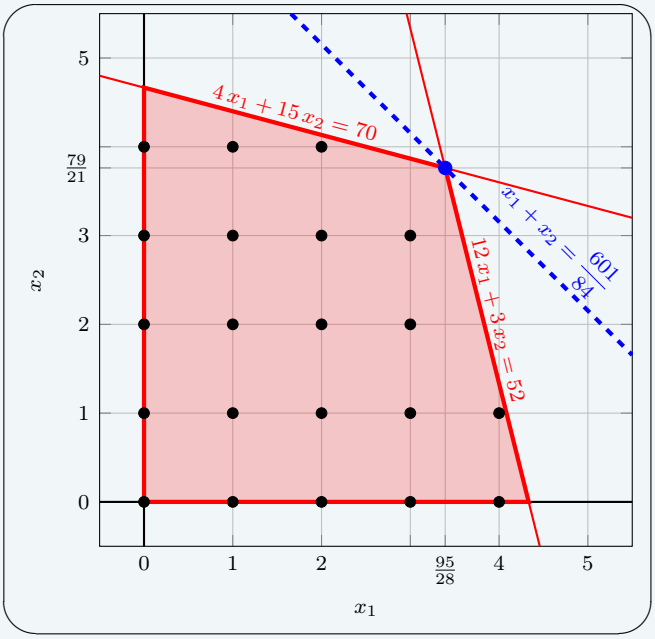


Figura 7.26: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti ammissibili del problema PLI (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{79}{21}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{601}{84}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{601}{84} \right\rfloor}_{=7}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{95}{28} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{95}{28} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ & 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & = & 70 \\ & 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & = & 52 \\ & x_1 & & & & & & & + \; x_5 & = \; 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0 \end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_5 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 3 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 3 - \left(\frac{95}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{11}{28} - \frac{1}{56}\,x_3 + \frac{5}{56}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{95}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4 \\ x_2 = \frac{79}{21} - \frac{1}{14}\,x_3 + \frac{1}{42}\,x_4 \\ x_5 = -\frac{11}{28} - \frac{1}{56}\,x_3 + \frac{5}{56}\,x_4 \\ z = \frac{601}{84} - \frac{3}{56}\,x_3 - \frac{11}{168}\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \bar{x}_2 = \frac{79}{21}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{11}{28}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{601}{84}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{3}{56}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{11}{168} \quad \text{di valore} \quad \frac{601}{84}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \dfrac{3}{56} + \dfrac{1}{56}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \dfrac{11}{168} - \dfrac{5}{56}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{3}{56} + \dfrac{1}{56}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{11}{168} - \dfrac{5}{56}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\geq -3 \\ \pi_5 &\leq \dfrac{11}{15} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\dfrac{11}{15}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{11}{28} - \frac{1}{56}\,x_3 + \frac{5}{56}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{22}{5} + \frac{1}{5}\,x_3 + \frac{56}{5}\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{95}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\left(\frac{22}{5} + \frac{1}{5}\,x_3 + \frac{56}{5}\,x_5\right) = 3 - x_5$$

$$x_2 = \frac{79}{21} - \frac{1}{14}\,x_3 + \frac{1}{42}\left(\frac{22}{5} + \frac{1}{5}\,x_3 + \frac{56}{5}\,x_5\right) = \frac{58}{15} - \frac{1}{15}\,x_3 + \frac{4}{15}\,x_5$$

$$z = \frac{601}{84} - \frac{3}{56}\,x_3 - \frac{11}{168}\left(\frac{22}{5} + \frac{1}{5}\,x_3 + \frac{56}{5}\,x_5\right) = \frac{103}{15} - \frac{1}{15}\,x_3 - \frac{11}{15}\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 3 &&- x_5 \\ x_2 &= \dfrac{58}{15} - \dfrac{1}{15}\,x_3 &&+ \dfrac{4}{15}\,x_5 \\ x_4 &= \dfrac{22}{5} + \dfrac{1}{5}\,x_3 &&+ \dfrac{56}{5}\,x_5 \\ z &= \dfrac{103}{15} - \dfrac{1}{15}\,x_3 &&- \dfrac{11}{15}\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{58}{15}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{22}{5}, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{103}{15}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{15}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{11}{15} \quad \text{di valore} \quad \frac{103}{15}$$

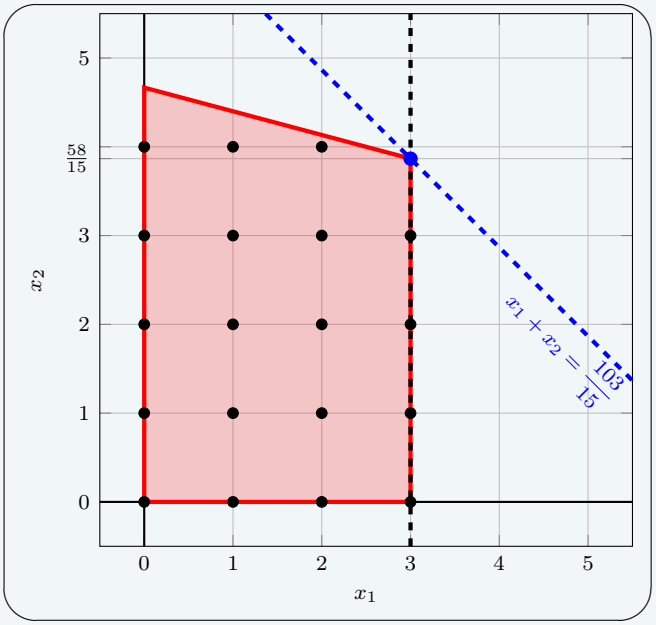


Figura 7.27: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{58}{15}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{103}{15}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{103}{15} \right\rfloor}_{=6} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_2 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
& 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 70 \\
& 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 52 \\
& x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_5 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -4 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = -4 + \left(\frac{95}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4\right) \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{17}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{95}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4 \\ x_2 &= \frac{79}{21} - \frac{1}{14}\,x_3 + \frac{1}{42}\,x_4 \\ x_5 &= -\frac{17}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4 \\ z &= \frac{601}{84} - \frac{3}{56}\,x_3 - \frac{11}{168}\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \bar{x}_2 = \frac{79}{21}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{17}{28}, \qquad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{601}{84}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{3}{56}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{11}{168} \quad \text{di valore} \quad \frac{601}{84}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{3}{56} - \frac{1}{56}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \frac{11}{168} + \frac{5}{56}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{56} - \frac{1}{56}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{11}{168} + \frac{5}{56}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq 3 \\ \pi_5 &\geq -\frac{11}{15} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a 3, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{17}{28} + \frac{1}{56}\,x_3 - \frac{5}{56}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 34 + 5\,x_4 + 56\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{95}{28} + \frac{1}{56}\,(34 + 5\,x_4 + 56\,x_5) - \frac{5}{56}\,x_4 = 4 + x_5$$

$$x_2 = \frac{79}{21} - \frac{1}{14}\,(34 + 5\,x_4 + 56\,x_5) + \frac{1}{42}\,x_4 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 4\,x_5$$

$$z = \frac{601}{84} - \frac{3}{56}(34 + 5\,x_4 + 56\,x_5) - \frac{11}{168}\,x_4 = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 3\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_5 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 4\,x_5 \\ x_3 = 34 + 5\,x_4 + 56\,x_5 \\ z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 3\,x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 34, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_5 = 3 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

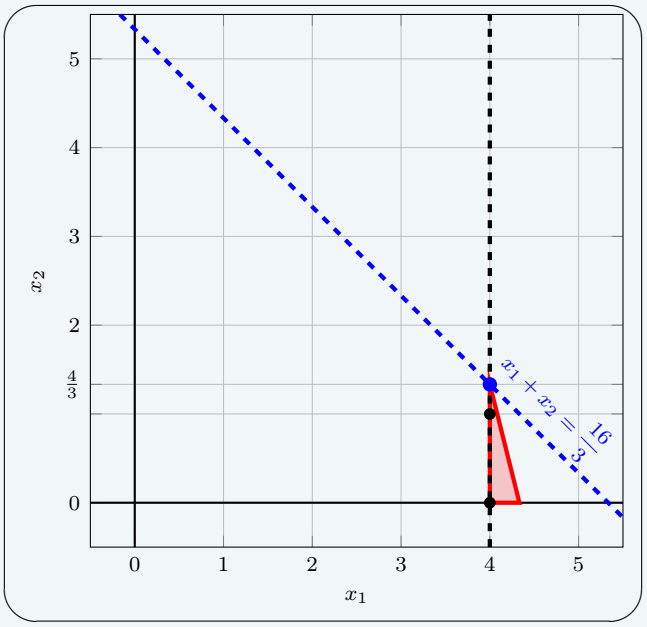


Figura 7.28: Nodo 3: regione ammissibile di LP_3 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \geq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_3) = \frac{16}{3}$$

Il problema LP_3 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor}_{=5} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_3 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Entrambi i nodi sono inseriti nella lista L. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 1

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 15x_2 \leq 70 \\ & 12x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \dfrac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{79}{21}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_1) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{601}{84} \right\rfloor}_{=7}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_1 \leq 3$ | $x_1 \geq 4$

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 15x_2 \leq 70 \\ & 12x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{58}{15}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{103}{15} \right\rfloor}_{=6}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

Nodo 3

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 15x_2 \leq 70 \\ & 12x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{4}{3}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{16}{3} \right\rfloor}_{=5}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{103}{15} \right\rfloor}_{=6}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_3 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor}_{=1} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 1}_{=2}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
& 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 70 \\
& 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 52 \\
& x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & 4 \\
& & & x_2 & & & & & & + \; x_6 & = & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, \quad x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 1 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, x_4 - 4\, x_5 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_4 + 4\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = 4 + x_5 \\
x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, x_4 - 4\, x_5 \\
x_3 = 34 + 5\, x_4 + 56\, x_5 \\
x_6 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, x_4 + 4\, x_5 \\
z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\, x_4 - 3\, x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 4, \quad \bar{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_3 = 34, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{3},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_5 = 3 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_6 \\ \pi_5 &= 3 - 4\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{3 - 4\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 1 \\ \pi_6 &\leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{1, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_5 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_5 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + 4x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 4 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6\right) = \frac{49}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6$$

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_4 - 4\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6\right) = 1 - x_6$$

$$x_3 = 34 + 5x_4 + 56\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6\right) = \frac{116}{3} + \frac{1}{3}x_4 + 14x_6$$

$$z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x_4 - 3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6\right) = \frac{61}{12} - \frac{1}{12}x_4 - \frac{3}{4}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{49}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_2 = 1 - x_6 \\ x_3 = \frac{116}{3} + \frac{1}{3}x_4 + 14x_6 \\ x_5 = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}x_4 + \frac{1}{4}x_6 \\ z = \frac{61}{12} - \frac{1}{12}x_4 - \frac{3}{4}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{49}{12}, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{116}{3}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{1}{12},$$
$$\tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{12}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_4 = \frac{1}{12}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{3}{4} \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{12}$$

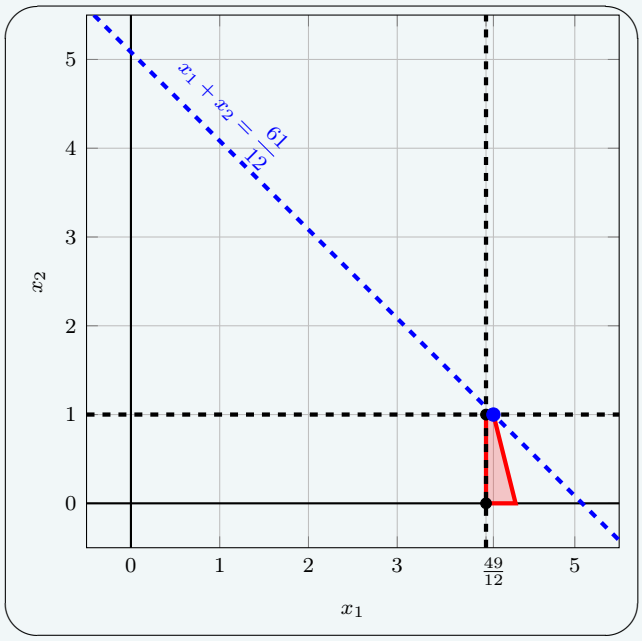


Figura 7.29: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 1$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{49}{12}, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = \frac{61}{12}$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{61}{12} \right\rfloor}_{=5} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **frazionaria**; di conseguenza, il problema LP_4 viene **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & \\
& 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 70 \\
& 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 52 \\
& x_1 & & & & & & & - & x_5 & & & = & 4 \\
& & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 2 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_6 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -2 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 4\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 4\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = 4 + x_5 \\
x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 4\,x_5 \\
x_3 = 34 + 5\,x_4 + 56\,x_5 \\
x_6 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 4\,x_5 \\
z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - 3\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 4, \quad \bar{x}_2 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_3 = 34, \quad \bar{x}_6 = -\frac{2}{3},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_5 = 3 \quad \text{di valore} \quad \frac{16}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_6 \\ \pi_5 &= 3 + 4\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{3 + 4\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\geq -1 \\ \pi_6 &\geq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_6 senza violare l'ammissibilità duale: il problema duale è **illimitato**. Ne segue che il problema primale LP_5 è **inammissibile** e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 3 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Il Nodo 4 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 5 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 3

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 15x_2 \leq 70 \\ & 12x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor}_{=5}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_2 \leq 1$ | $x_2 \geq 2$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 15x_2 \leq 70 \\ & 12x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{49}{12}, \quad \tilde{x}_2 = 1$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{61}{12} \right\rfloor}_{=5}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 15x_2 \leq 70 \\ & 12x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

potato per inammissibilità

Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{103}{15} \right\rfloor}_{=6}$$

- **Iterazione 3**

Il problema LP_4 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{49}{12} \right\rfloor}_{=4} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{49}{12} \right\rfloor + 1}_{=5}$$

Con il primo vincolo di branching si crea il problema LP_6 (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_6

Consideriamo il problema LP_6 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & \\
& 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 70 \\
& 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 52 \\
& x_1 & & & & & & & - & x_5 & & & = & 4 \\
& & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
& x_1 & & & & & & & & & & & + & x_7 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_7 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = 4 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 4 - \left(\frac{49}{12} - \frac{1}{12}\,x_4 + \frac{1}{4}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{49}{12} - \dfrac{1}{12}\,x_4 + \dfrac{1}{4}\,x_6 \\
x_2 = 1 - x_6 \\
x_3 = \dfrac{116}{3} + \dfrac{1}{3}\,x_4 + 14\,x_6 \\
x_5 = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{12}\,x_4 + \dfrac{1}{4}\,x_6 \\
x_7 = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12}\,x_4 - \dfrac{1}{4}\,x_6 \\
z = \dfrac{61}{12} - \dfrac{1}{12}\,x_4 - \dfrac{3}{4}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{49}{12}, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = \frac{116}{3}, \quad \bar{x}_5 = \frac{1}{12}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{1}{12},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{12}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{1}{12}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{3}{4} \quad \text{di valore} \quad \frac{61}{12}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{12}\,\pi_7 \\ \pi_6 &= \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\,\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{12}\,\pi_7 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\,\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 1 \\ \pi_7 &\geq -3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a 1, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 entra nella base duale e, di conseguenza, x_7 esce dalla base primale.

π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_6 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1 + 3\,x_6 + 12\,x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{49}{12} - \frac{1}{12}\,(1 + 3\,x_6 + 12\,x_7) + \frac{1}{4}\,x_6 = 4 - x_7$$
$$x_3 = \frac{116}{3} + \frac{1}{3}\,(1 + 3\,x_6 + 12\,x_7) + 14\,x_6 = 39 + 15\,x_6 + 4\,x_7$$
$$x_5 = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\,(1 + 3\,x_6 + 12\,x_7) + \frac{1}{4}\,x_6 = 0 - x_7$$
$$z = \frac{61}{12} - \frac{1}{12}\,(1 + 3\,x_6 + 12\,x_7) - \frac{3}{4}\,x_6 = 5 - x_6 - x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 4 &&&& - && x_7 \\ x_2 &= 1 &- && x_6 \\ x_3 &= 39 &+ & 15\,x_6 &+ & 4\,x_7 \\ x_4 &= 1 &+ & 3\,x_6 &+ & 12\,x_7 \\ x_5 &= 0 &&&& - && x_7 \\ z &= 5 &- && x_6 &- && x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 7\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 39, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0,$$
$$\tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 5$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_6 = 1, \quad \tilde{\pi}_7 = 1 \quad \text{di valore} \quad 5$$

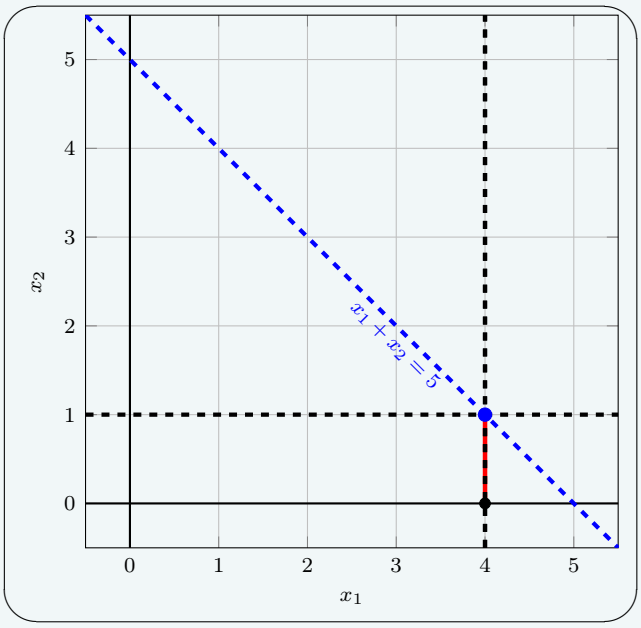


Figura 7.30: Nodo 6: regione ammissibile di LP_6 (in rosso), con il vincolo di branching $x_1 \leq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_6) = 5$$

Il problema LP_6 è **ammissibile** e abbiamo

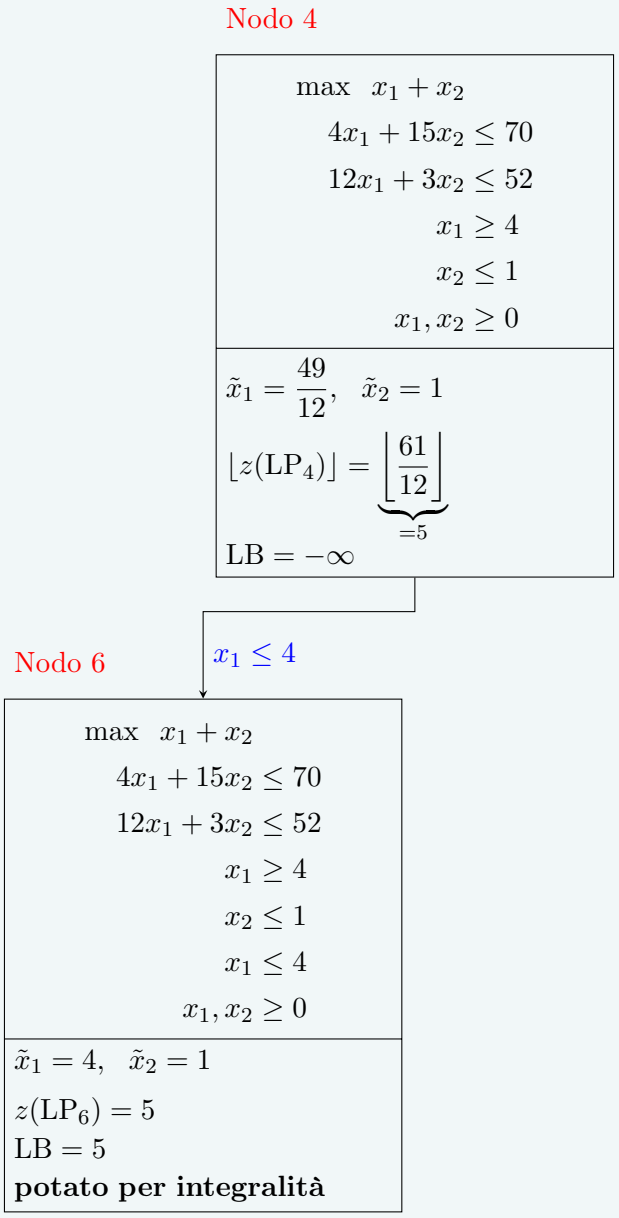
$$\lfloor z(\mathrm{LP}_6) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 5 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 5 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 1$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della terza iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 4 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 6. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non viene risolto, poiché dopo il Nodo 6 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la parte dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$5 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{103}{15} \right\rfloor}_{=6}$$

- **Iterazione 4**

Il problema LP_2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{58}{15} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{58}{15} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con il primo vincolo di branching si crea il problema LP_7 (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_7

Consideriamo il problema LP_7 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & \\
& 4\,x_1 & + & 15\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 70 \\
& 12\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 52 \\
& x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 3 \\
& & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 3 - \left(\frac{58}{15} - \frac{1}{15}\, x_3 + \frac{4}{15}\, x_5 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{13}{15} + \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{4}{15}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al dizionario ottimo precedente e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = 3 - x_5 \\
x_2 = \frac{58}{15} - \frac{1}{15}\, x_3 + \frac{4}{15}\, x_5 \\
x_4 = \frac{22}{5} + \frac{1}{5}\, x_3 + \frac{56}{5}\, x_5 \\
x_6 = -\frac{13}{15} + \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{4}{15}\, x_5 \\
z = \frac{103}{15} - \frac{1}{15}\, x_3 - \frac{11}{15}\, x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = \frac{58}{15}, \quad \bar{x}_4 = \frac{22}{5}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{13}{15},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{103}{15}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{15}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{11}{15} \quad \text{di valore} \quad \frac{103}{15}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{1}{15} - \frac{1}{15}\pi_6 \\ \pi_5 = \frac{11}{15} + \frac{4}{15}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{15} - \frac{1}{15}\pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{11}{15} + \frac{4}{15}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \leq 1 \\ \pi_6 \geq -\frac{11}{4} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 1, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.
π_3 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_3 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{13}{15} + \frac{1}{15}x_3 - \frac{4}{15}x_5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 13 + 4\,x_5 + 15\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{58}{15} - \frac{1}{15}(13 + 4\,x_5 + 15\,x_6) + \frac{4}{15}x_5 = 3 - x_6$$
$$x_4 = \frac{22}{5} + \frac{1}{5}(13 + 4\,x_5 + 15\,x_6) + \frac{56}{5}x_5 = 7 + 12\,x_5 + 3\,x_6$$
$$z = \frac{103}{15} - \frac{1}{15}(13 + 4\,x_5 + 15\,x_6) - \frac{11}{15}x_5 = 6 - x_5 - x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_5 \\ x_2 = 3 - x_6 \\ x_3 = 13 + 4\,x_5 + 15\,x_6 \\ x_4 = 7 + 12\,x_5 + 3\,x_6 \\ z = 6 - x_5 - x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 13, \quad \tilde{x}_4 = 7,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 6$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 1, \quad \tilde{\pi}_6 = 1 \quad \text{di valore} \quad 6$$

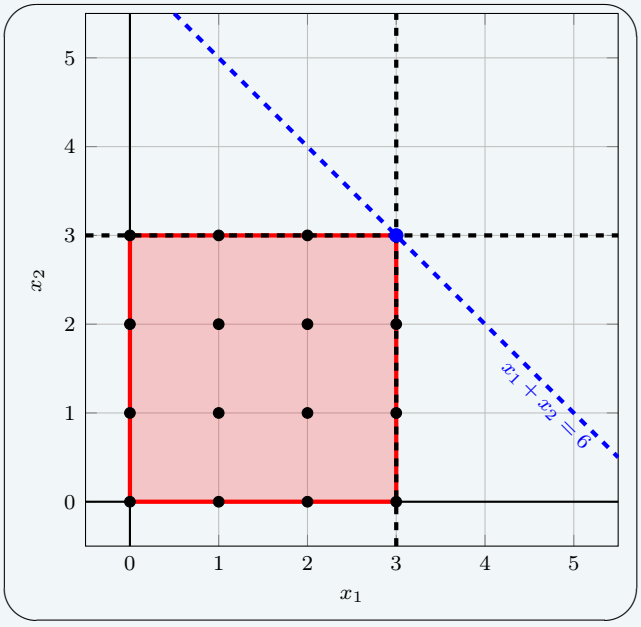


Figura 7.31: Nodo 7: regione ammissibile di LP_7 (in rosso), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (in blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_7)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\text{LP}_7) = 6$$

Il problema LP_7 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\text{LP}_7) \rfloor > \text{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 6 > 5$$

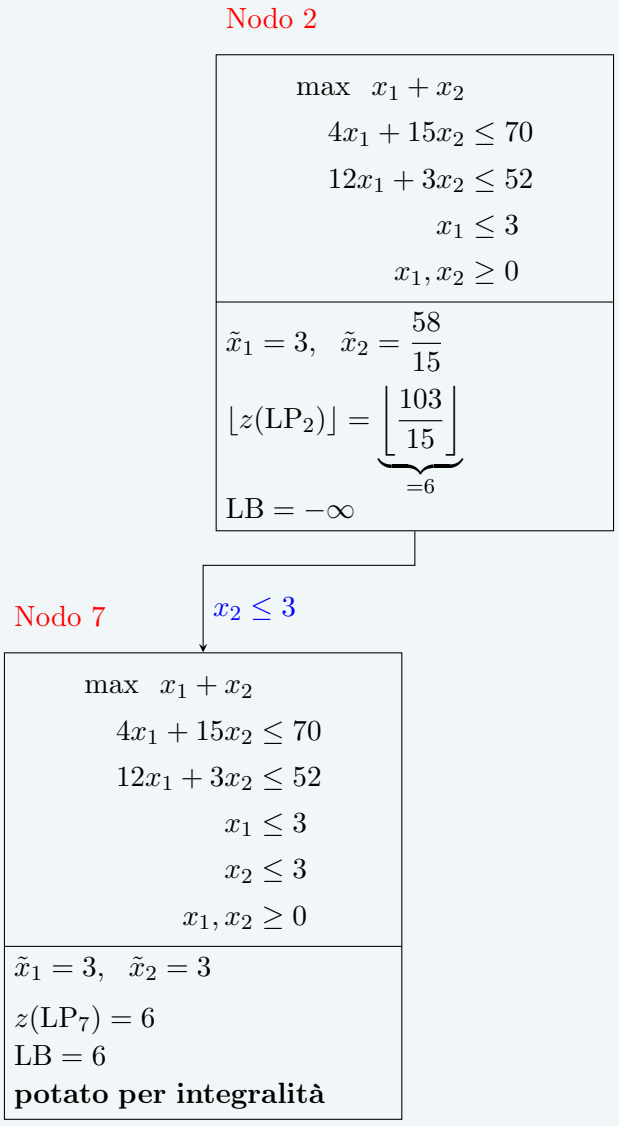
La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_7)$ è **intera**; di conseguenza, il lower bound LB diventa 6 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 3$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della quarta iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 7. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non viene risolto, poiché dopo il Nodo 7 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor \leq \text{LB}.$$

Questa è la parte dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:



Con il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

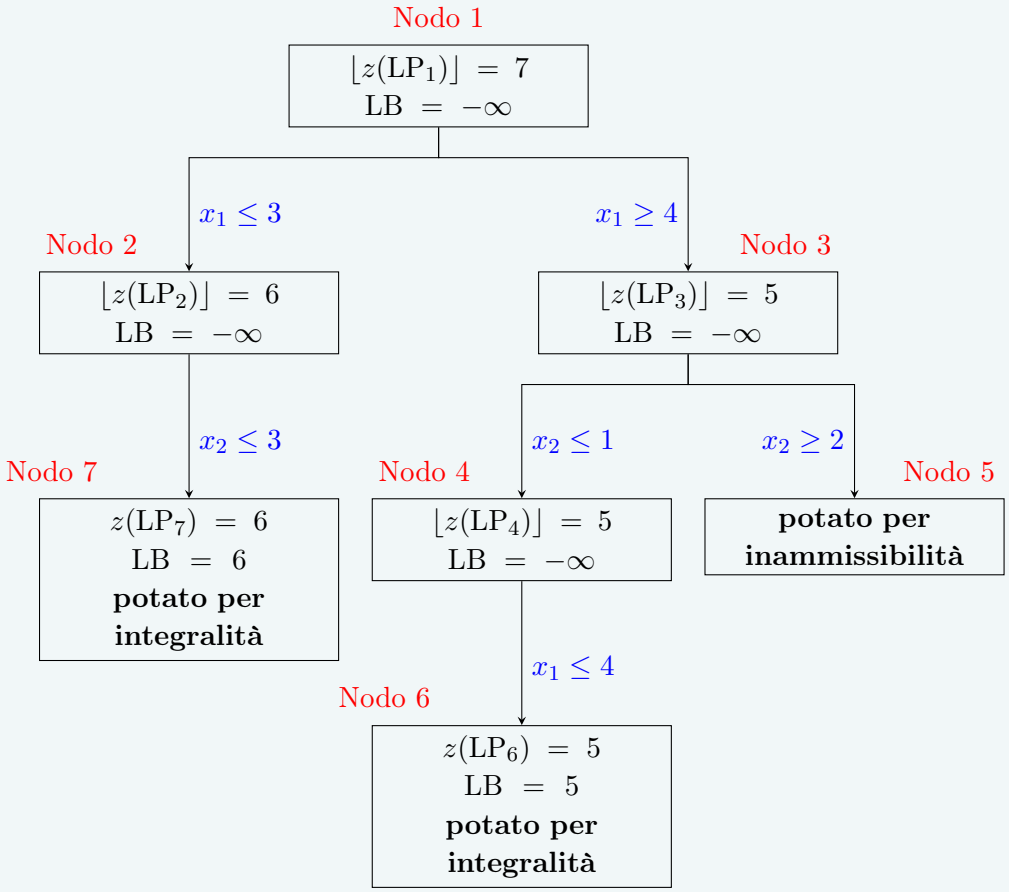
$$6 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 6$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 6$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 3, \tilde{x}_2 = 3$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching vengono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_1) \rfloor = 7$: si effettua il branching su x_1.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = 6$: si effettua il branching su x_2.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 2 non viene risolto né disegnato, poiché $\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = 6 \leq \mathrm{LB} = 6$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 3 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor = 5$: si effettua il branching su x_2.
- Il Nodo 4 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor = 5$: si effettua il branching su x_1.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 4 non viene risolto né disegnato, poiché $\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor = 5 \leq \mathrm{LB} = 5$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 5 è potato per inammissibilità: il problema LP_5 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 6 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6) = (4, 1)$ è intera, con valore 5, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 7 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_7) = (3, 3)$ è intera, con valore 6, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 6$ e l'algoritmo di branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (3, 3)$. La soluzione ottima **non è unica**: anche $(2, 4)$ ha valore 6. Con le regole indicate nella domanda, l'algoritmo trova $(3, 3)$.

Esercizio 7.7 — Algoritmo branch-and-bound ($P7$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 3\,x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 4\,x_2 & \leq & 12 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_4 \\ x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \\ z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{3}{2}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola FIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non si esegue alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, indicando il motivo per cui ogni nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 3\,x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
 & x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & & & = & 12 \\
 & 2\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\,x_2 - \dfrac{1}{2}\,x_4 \\
x_3 = \dfrac{19}{2} - \dfrac{7}{2}\,x_2 + \dfrac{1}{2}\,x_4 \\
z = \dfrac{15}{2} - \dfrac{1}{2}\,x_2 - \dfrac{3}{2}\,x_4
\end{cases}
$$

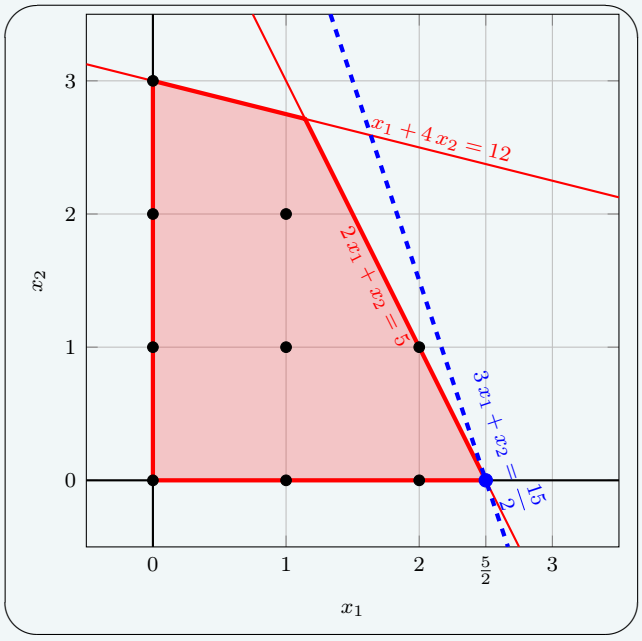


Figura 7.32: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{15}{2}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor}_{=7}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Il problema LP_2 si crea con il primo vincolo di branching (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\max & 3\,x_1 & + & & x_2 & & & & & & & & \\
& x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 12 \\
& 2\,x_1 & + & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 5 \\
& x_1 & & & & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
& x_1, & & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_5 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 2 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 2 - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_4 \\ x_3 &= \frac{19}{2} - \frac{7}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \\ x_5 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \\ z &= \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{3}{2}\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{19}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{15}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{3}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{15}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq 1 \\ \pi_5 &\leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\{1, 3\} = 1$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_5 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_5 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_2 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_4 + 2\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,(1 - x_4 + 2\,x_5) - \frac{1}{2}\,x_4 = 2 - x_5$$

$$x_3 = \frac{19}{2} - \frac{7}{2}\,(1 - x_4 + 2\,x_5) + \frac{1}{2}\,x_4 = 6 + 4\,x_4 - 7\,x_5$$

$$z = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\,(1 - x_4 + 2\,x_5) - \frac{3}{2}\,x_4 = 7 - x_4 - x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_5 \\ x_2 = 1 - x_4 + 2\,x_5 \\ x_3 = 6 + 4\,x_4 - 7\,x_5 \\ z = 7 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = 6, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 7$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = 1, \quad \tilde{\pi}_5 = 1 \quad \text{di valore} \quad 7$$

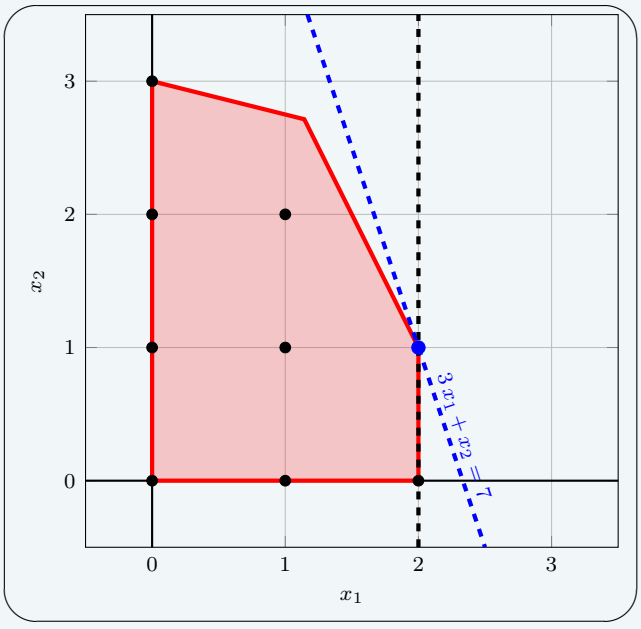


Figura 7.33: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = 7$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

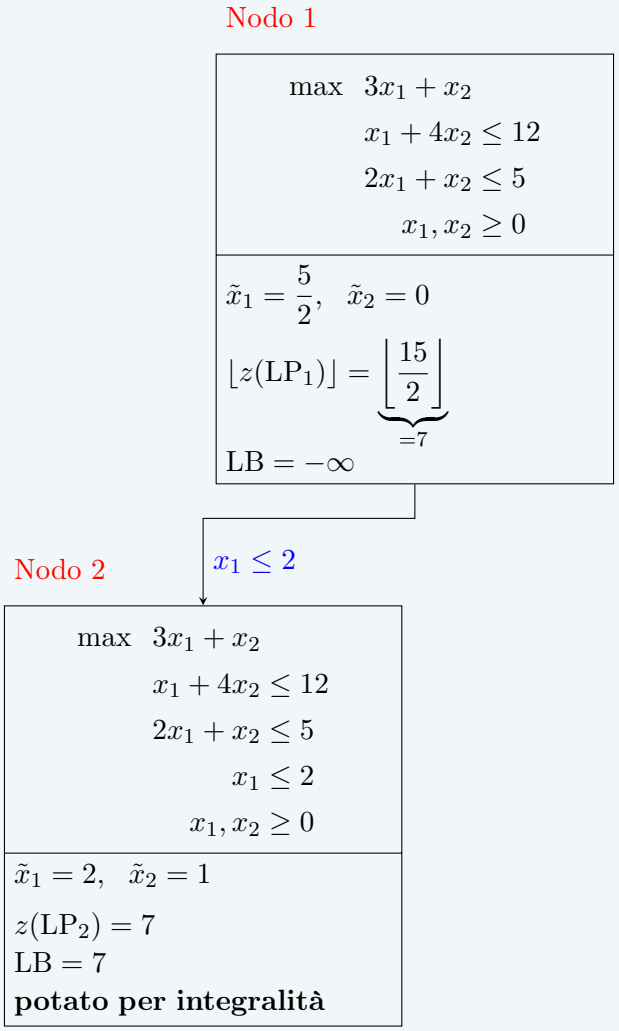
$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 7 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 7 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 1$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non è risolto, poiché dopo il Nodo 2 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_1) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la porzione dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

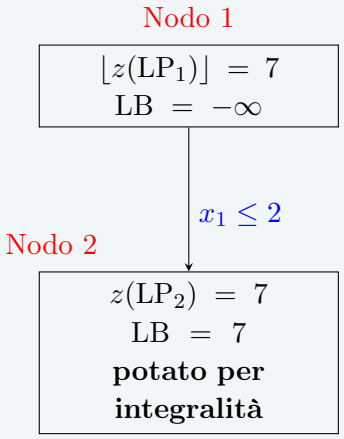
$$7 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 7$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 7$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 2, \tilde{x}_2 = 1$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_1) \rfloor = 7$: si esegue il branching su x_1.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 1 non è risolto, e non è disegnato, poiché $\lfloor z(\text{LP}_1) \rfloor = 7 \leq \text{LB} = 7$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 2 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_2) = (2, 1)$ è intera, con valore 7, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 7$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (2, 1)$.

Esercizio 7.8 — Algoritmo branch-and-bound ($P9$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2\,x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 6\,x_1 & + & 4\,x_2 & \leq & 39 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{2} - \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4 \\ x_3 = \frac{15}{2} - \frac{5}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4 \\ z = 13 - \frac{1}{3}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non si esegue alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, indicando il motivo per cui ogni nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

- **Inizializzazione**

  Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & 6\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 39 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{2} - \dfrac{2}{3}\,x_2 - \dfrac{1}{6}\,x_4 \\ x_3 = \dfrac{15}{2} - \dfrac{5}{3}\,x_2 - \dfrac{1}{6}\,x_4 \\ z = 13 - \dfrac{1}{3}\,x_2 - \dfrac{1}{3}\,x_4 \end{cases}$$

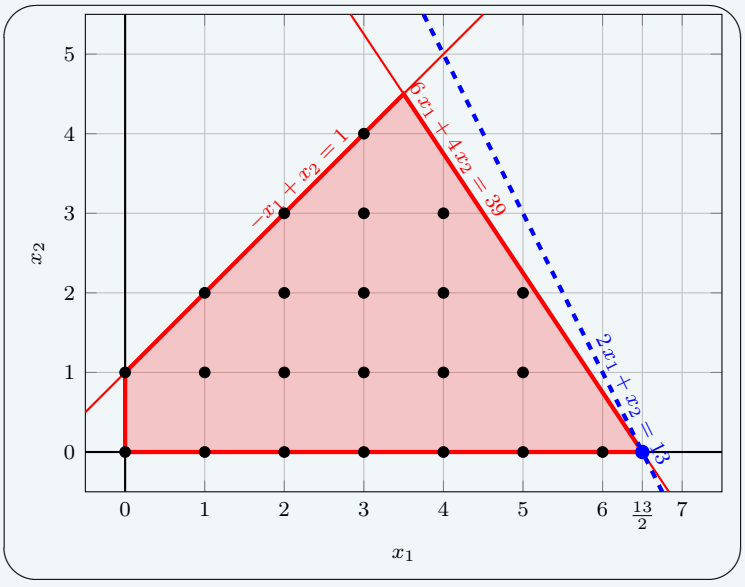


Figura 7.34: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 13$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad 13$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor}_{=6} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor + 1}_{=7}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
& -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
& 6\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 39 \\
& x_1 & & & & & & & + \; x_5 \; = & 6 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \; \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_5 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = 6 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = 6 - \left(\frac{13}{2} - \frac{2}{3}\, x_2 - \frac{1}{6}\, x_4 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\, x_2 + \frac{1}{6}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{13}{2} - \dfrac{2}{3}\, x_2 - \dfrac{1}{6}\, x_4 \\
x_3 = \dfrac{15}{2} - \dfrac{5}{3}\, x_2 - \dfrac{1}{6}\, x_4 \\
x_5 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\, x_2 + \dfrac{1}{6}\, x_4 \\
z = 13 - \dfrac{1}{3}\, x_2 - \dfrac{1}{3}\, x_4
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{15}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 13$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{3} \quad \text{di valore} \quad 13$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_2 &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\pi_5 \\ \pi_4 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\pi_5 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq \frac{1}{2} \\ \pi_5 &\leq 2 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\left\{\frac{1}{2}, 2\right\} = \frac{1}{2}$, il valore di π_2 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_5 diventa una variabile primale fuori base.

π_2 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_2 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{2}x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{13}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{2}x_5\right) - \frac{1}{6}x_4 = 6 - x_5$$

$$x_3 = \frac{15}{2} - \frac{5}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{2}x_5\right) - \frac{1}{6}x_4 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{2}x_5$$

$$z = 13 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{2}x_5\right) - \frac{1}{3}x_4 = \frac{51}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 6 &&&- x_5 \\ x_2 &= \frac{3}{4} &- \frac{1}{4}x_4 &+ \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 &= \frac{25}{4} &+ \frac{1}{4}x_4 &- \frac{5}{2}x_5 \\ z &= \frac{51}{4} &- \frac{1}{4}x_4 &- \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{4}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{25}{4}, \qquad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \qquad \text{di valore} \quad \frac{51}{4}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \qquad \tilde{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{1}{2} \qquad \text{di valore} \quad \frac{51}{4}$$

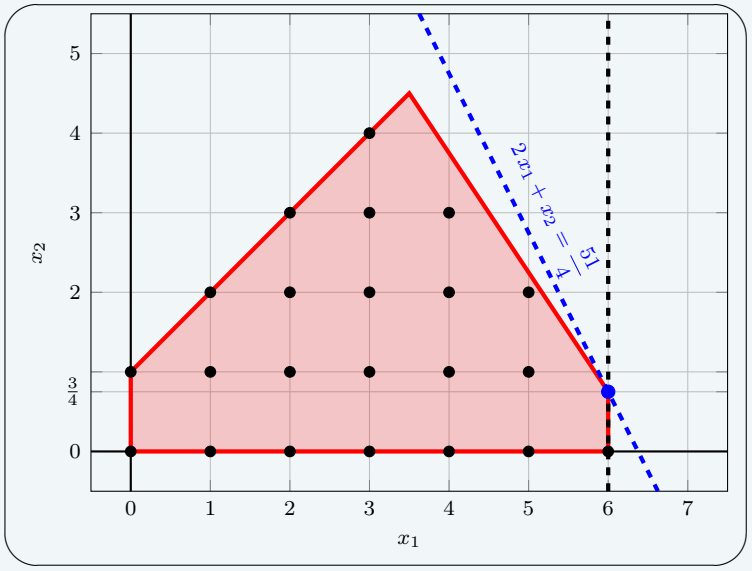


Figura 7.35: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 6$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{4}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{51}{4}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{51}{4} \right\rfloor}_{=12} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_2 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & 6\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 39 \\
 & x_1 & & & & & & - & x_5 = & 7 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_5 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_5 = -7 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_5 = -7 + \left(\frac{13}{2} - \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4\right) \quad \Rightarrow \quad x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{13}{2} - \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4 \\
x_3 = \frac{15}{2} - \frac{5}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4 \\
x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,x_2 - \frac{1}{6}\,x_4 \\
z = 13 - \frac{1}{3}\,x_2 - \frac{1}{3}\,x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{2, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{15}{2}, \quad \bar{x}_5 = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad 13$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

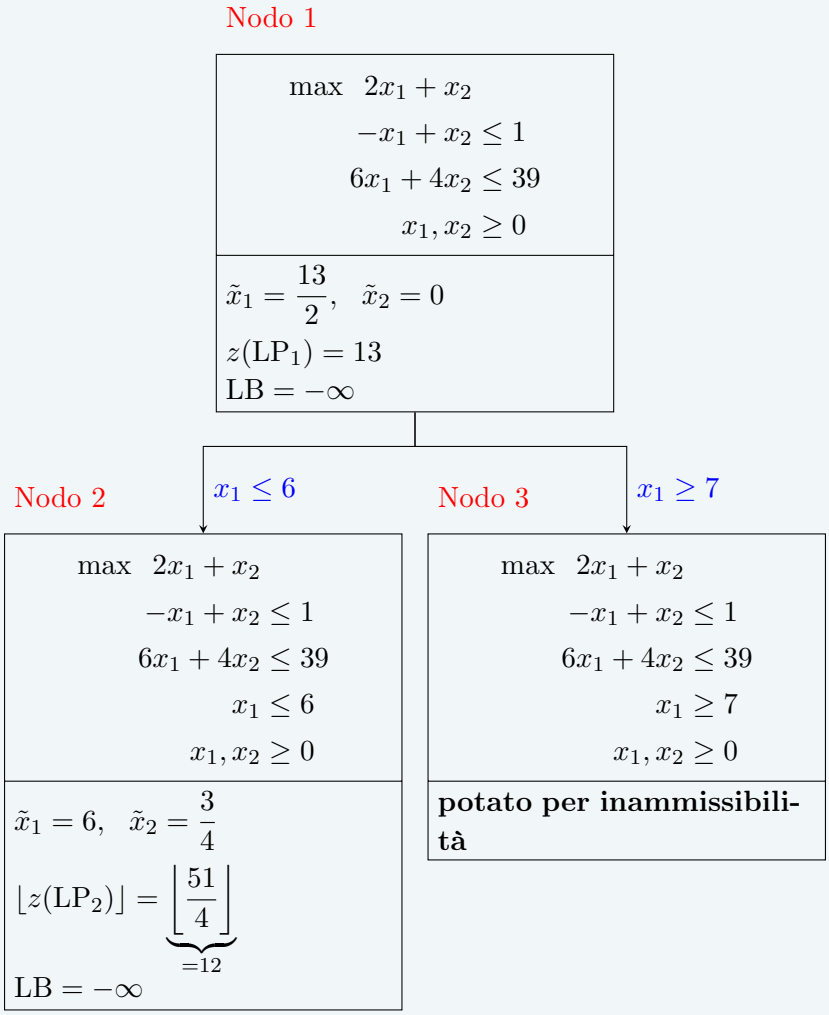
$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \qquad \bar{\pi}_2 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{3} \quad \text{di valore} \quad 13$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$
\begin{cases}
\pi_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\pi_5 \\
\pi_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,\pi_5
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_2 \geq 0} \\
\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_5 \geq -\frac{1}{2} \\
\pi_5 \geq -2
\end{cases}
$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_5 senza violare l'ammissibilità duale, il che implica che il problema duale è **illimitato**. Di conseguenza, il problema primale LP_3 è **inammissibile**, e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{51}{4} \right\rfloor}_{=12}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor}_{=0} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor + 1}_{=1}$$

Il problema LP_4 si crea con il primo vincolo di branching (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 1 \\
 & 6\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 39 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 6 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 0 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 0 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 0 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{3}{2}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{3}{2}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = 6 - x_5 \\
x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{3}{2}\,x_5 \\
x_3 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{5}{2}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{3}{2}\,x_5 \\
z = \frac{51}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{2}\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 6, \quad \bar{x}_2 = \frac{3}{4}, \quad \bar{x}_3 = \frac{25}{4}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{3}{4},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{4}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{4}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 1 \\ \pi_6 &\geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 1, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.

π_4 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3 + 6\,x_5 + 4\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(3 + 6\,x_5 + 4\,x_6) + \frac{3}{2}x_5 = 0 - x_6$$
$$x_3 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4}(3 + 6\,x_5 + 4\,x_6) - \frac{5}{2}x_5 = 7 - x_5 + x_6$$
$$z = \frac{51}{4} - \frac{1}{4}(3 + 6\,x_5 + 4\,x_6) - \frac{1}{2}x_5 = 12 - 2\,x_5 - x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 6 &- & x_5 & & \\ x_2 &= 0 & & & - & x_6 \\ x_3 &= 7 &- & x_5 & + & x_6 \\ x_4 &= 3 &+ & 6\,x_5 & + & 4\,x_6 \\ z &= 12 &- & 2\,x_5 & - & x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 7, \quad \tilde{x}_4 = 3,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 12$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 2, \quad \tilde{\pi}_6 = 1 \quad \text{di valore} \quad 12$$

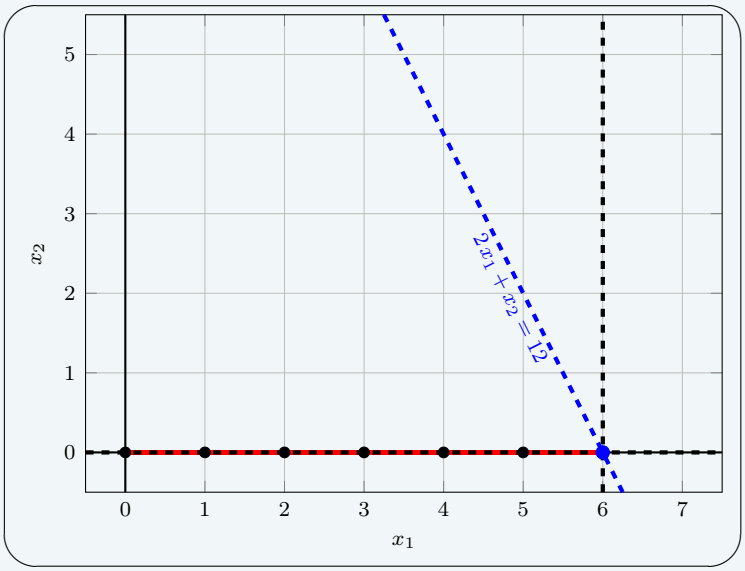


Figura 7.36: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 0$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 12$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 12 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 12 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 6, \bar{x}_2 = 0$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non è risolto, poiché dopo il Nodo 4 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la porzione dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 39 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{3}{4}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{51}{4} \right\rfloor}_{=12}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_2 \leq 0$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 39 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 0$

$z(\mathrm{LP}_4) = 12$

$\mathrm{LB} = 12$

potato per integralità

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

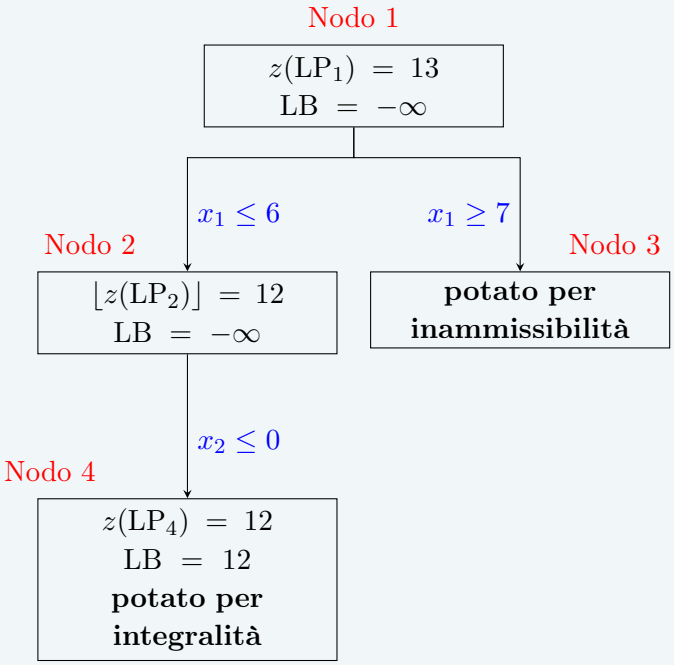
$$12 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 12$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 12$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 6, \tilde{x}_2 = 0$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\text{LP}_1) = 13$: si esegue il branching su x_1.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 12$: si esegue il branching su x_2.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 2 non è risolto, e non è disegnato, poiché $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 12 \leq \text{LB} = 12$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 3 è potato per inammissibilità: il problema LP_3 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (6, 0)$ è intera, con valore 12, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 12$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (6, 0)$. La soluzione ottima **non è unica**: anche $(5, 2)$ ha valore 12. Con le regole indicate nella domanda, l'algoritmo trova $(6, 0)$.

Esercizio 7.9 — Algoritmo branch-and-bound ($P10$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 12 \\ & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\,x_4 - \frac{5}{8}\,x_5 \\ z = 32 - 2\,x_4 - x_5 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice massimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola FIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non si esegue alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, indicando il motivo per cui ogni nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 8 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$
\begin{cases}
x_1 = 5 - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{4}\,x_5 \\
x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,x_5 \\
x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\,x_4 - \frac{5}{8}\,x_5 \\
z = 32 - 2\,x_4 - x_5
\end{cases}
$$

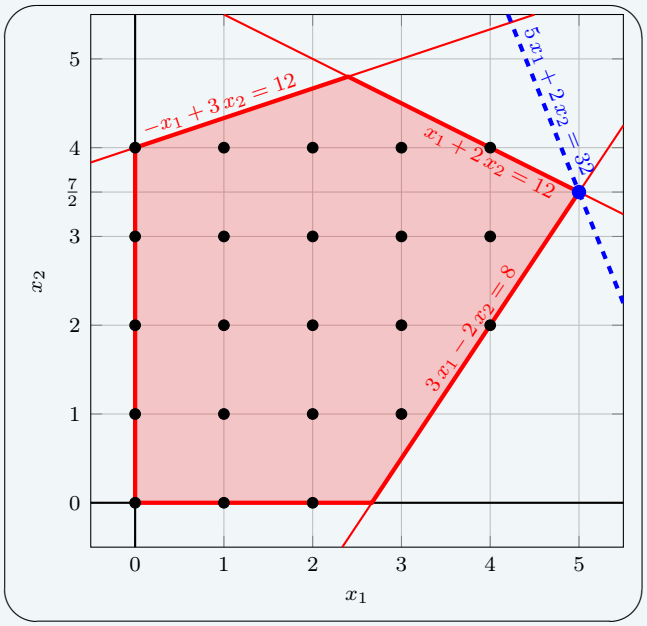


Figura 7.37: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 32$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 32$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 8 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 3 - \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\,x_4 - \frac{1}{8}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{4} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8} x_4 + \frac{1}{8} x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8} x_4 - \frac{5}{8} x_5 \\ x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{8} x_5 \\ z = 32 - 2 x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{13}{2}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 32$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = 2, \quad \bar{\pi}_5 = 1 \quad \text{di valore} \quad 32$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = 2 - \frac{3}{8} \pi_6 \\ \pi_5 = 1 + \frac{1}{8} \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{2 - \frac{3}{8} \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{1 + \frac{1}{8} \pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \leq \frac{16}{3} \\ \pi_6 \geq -8 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\frac{16}{3}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_4 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{8} x_5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} x_5 + \frac{8}{3} x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 5 - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} x_5 + \frac{8}{3} x_6 \right) - \frac{1}{4} x_5 = \frac{14}{3} - \frac{1}{3} x_5 - \frac{2}{3} x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{8}{3}x_6\right) + \frac{1}{8}x_5 = 3 - x_6$$

$$x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{8}{3}x_6\right) - \frac{5}{8}x_5 = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{7}{3}x_6$$

$$z = 32 - 2\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{8}{3}x_6\right) - x_5 = \frac{88}{3} - \frac{5}{3}x_5 - \frac{16}{3}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 \\ x_2 = 3 - x_6 \\ x_3 = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{7}{3}x_6 \\ x_4 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{8}{3}x_6 \\ z = \frac{88}{3} - \frac{5}{3}x_5 - \frac{16}{3}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{14}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = \frac{23}{3}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{4}{3},$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{88}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{16}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{88}{3}$$

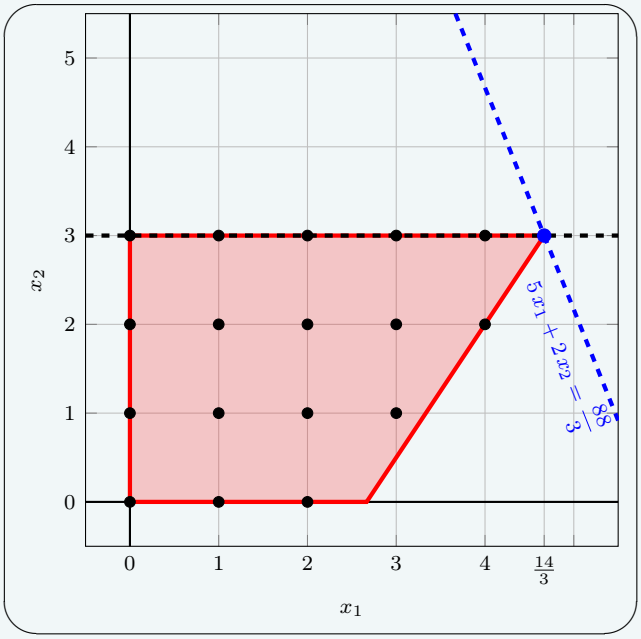


Figura 7.38: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{14}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{88}{3}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{88}{3} \right\rfloor}_{=29} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_2 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & \\
& -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 12 \\
& x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 12 \\
& 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 8 \\
& & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_6 = 4 \qquad \Rightarrow \quad x_6 = -4 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -4 + \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{8}\, x_4 + \frac{1}{8}\, x_5\right) \qquad \Rightarrow \quad x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\, x_4 + \frac{1}{8}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{1}{4}\, x_4 - \frac{1}{4}\, x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\, x_4 + \frac{1}{8}\, x_5 \\ x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\, x_4 - \frac{5}{8}\, x_5 \\ x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\, x_4 + \frac{1}{8}\, x_5 \\ z = 32 - 2\, x_4 - x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{13}{2}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad 32$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = 2, \quad \bar{\pi}_5 = 1 \quad \text{di valore} \quad 32$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = 2 + \frac{3}{8}\, \pi_6 \\ \pi_5 = 1 - \frac{1}{8}\, \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{2 + \frac{3}{8}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{1 - \frac{1}{8}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \geq -\frac{16}{3} \\ \pi_6 \leq 8 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 8, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.

π_5 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_5 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 4 + 3\,x_4 + 8\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 5 - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{4}\,(4 + 3\,x_4 + 8\,x_6) = 4 - x_4 - 2\,x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{8}\,x_4 + \frac{1}{8}\,(4 + 3\,x_4 + 8\,x_6) = 4 + x_6$$

$$x_3 = \frac{13}{2} + \frac{7}{8}\,x_4 - \frac{5}{8}\,(4 + 3\,x_4 + 8\,x_6) = 4 - x_4 - 5\,x_6$$

$$z = 32 - 2\,x_4 - (4 + 3\,x_4 + 8\,x_6) = 28 - 5\,x_4 - 8\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_4 - 2\,x_6 \\ x_2 = 4 + x_6 \\ x_3 = 4 - x_4 - 5\,x_6 \\ x_5 = 4 + 3\,x_4 + 8\,x_6 \\ z = 28 - 5\,x_4 - 8\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 4, \quad \tilde{x}_5 = 4,$$
$$\tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 28$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_4 = 5, \quad \tilde{\pi}_6 = 8 \quad \text{di valore} \quad 28$$

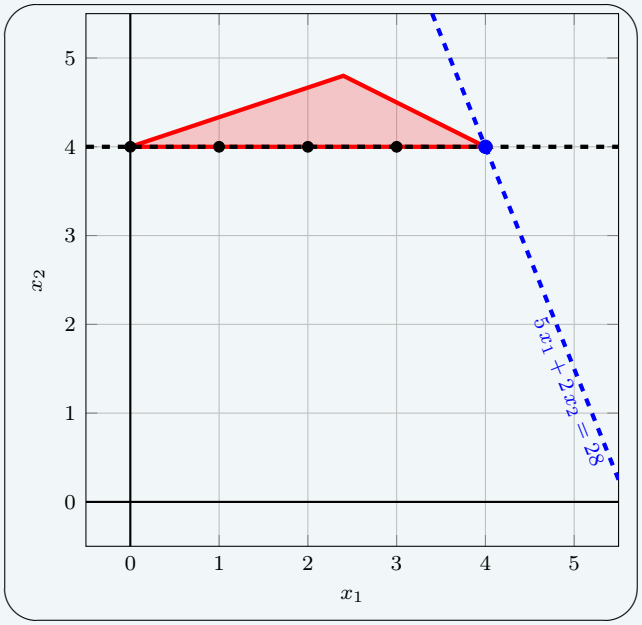


Figura 7.39: Nodo 3: regione ammissibile di LP_3 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \geq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

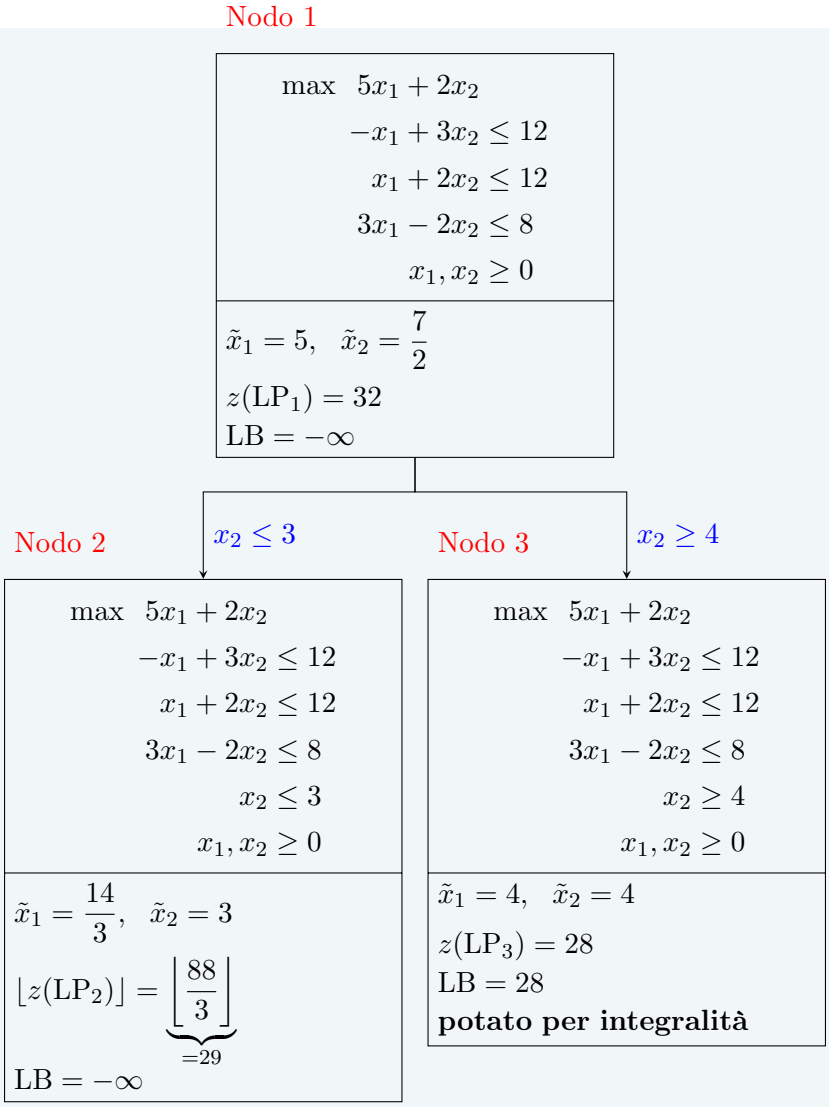
$$z(\mathrm{LP}_3) = 28$$

Il problema LP_3 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 28 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 28 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 4$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per integralità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$28 \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{88}{3} \right\rfloor}_{=29}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor}_{=4} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor + 1}_{=5}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & & = & 8 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & + \; x_7 & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7 \; \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_7 = 4 \qquad \Rightarrow \quad x_7 = 4 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 4 - \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 - \frac{2}{3}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \quad x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_5 + \frac{2}{3}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 - \frac{2}{3}\,x_6 \\
x_2 = 3 - x_6 \\
x_3 = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 + \frac{7}{3}\,x_6 \\
x_4 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\,x_5 + \frac{8}{3}\,x_6 \\
x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_5 + \frac{2}{3}\,x_6 \\
z = \frac{88}{3} - \frac{5}{3}\,x_5 - \frac{16}{3}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{14}{3}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_3 = \frac{23}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{2}{3},$$
$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{88}{3}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = \frac{5}{3}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{16}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{88}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_5 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\pi_7 \\ \pi_6 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\pi_7 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 \leq 5 \\ \pi_7 \leq 8 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a $\min\{5, 8\} = 5$, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_7 diventa una variabile primale fuori base.

π_5 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_5 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 2 - 2x_6 + 3x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}(2 - 2x_6 + 3x_7) - \frac{2}{3}x_6 = 4 - x_7$$
$$x_3 = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}(2 - 2x_6 + 3x_7) + \frac{7}{3}x_6 = 7 + 3x_6 - x_7$$
$$x_4 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}(2 - 2x_6 + 3x_7) + \frac{8}{3}x_6 = 2 + 2x_6 + x_7$$
$$z = \frac{88}{3} - \frac{5}{3}(2 - 2x_6 + 3x_7) - \frac{16}{3}x_6 = 26 - 2x_6 - 5x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_7 \\ x_2 = 3 - x_6 \\ x_3 = 7 + 3x_6 - x_7 \\ x_4 = 2 + 2x_6 + x_7 \\ x_5 = 2 - 2x_6 + 3x_7 \\ z = 26 - 2x_6 - 5x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 7\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 7, \quad \tilde{x}_4 = 2, \quad \tilde{x}_5 = 2,$$
$$\tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 26$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_6 = 2, \quad \tilde{\pi}_7 = 5 \quad \text{di valore} \quad 26$$

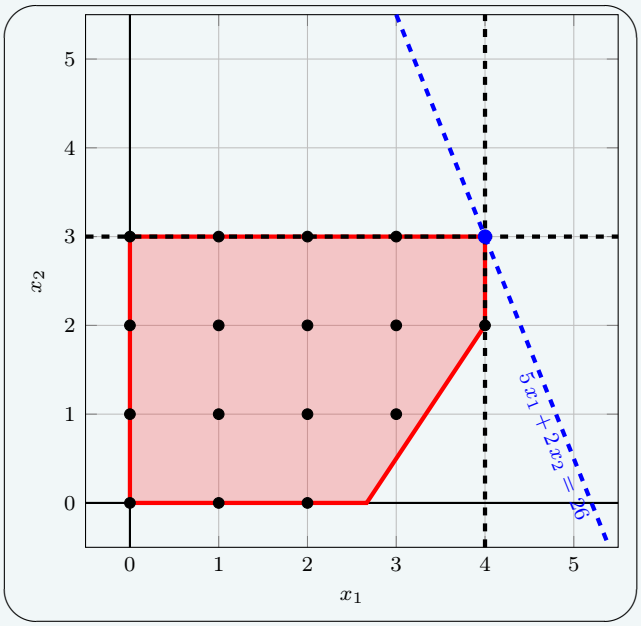


Figura 7.40: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 26$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor \leq \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 26 \leq 28$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**, ma il suo valore non migliora il lower bound LB, che rimane 28.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr}
\max & 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 12 \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 12 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & + & x_5 & & = & 8 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + \quad x_6 & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & & & & & - \quad x_7 & = & 5 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & x_6, \quad x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_7 = 5 \qquad \Rightarrow \quad x_7 = -5 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = -5 + \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 - \frac{2}{3}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \quad x_7 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 - \frac{2}{3}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 - \frac{2}{3}\,x_6 \\
x_2 = 3 - x_6 \\
x_3 = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 + \frac{7}{3}\,x_6 \\
x_4 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\,x_5 + \frac{8}{3}\,x_6 \\
x_7 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,x_5 - \frac{2}{3}\,x_6 \\
z = \frac{88}{3} - \frac{5}{3}\,x_5 - \frac{16}{3}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{14}{3}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_3 = \frac{23}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{1}{3},$$
$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{88}{3}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

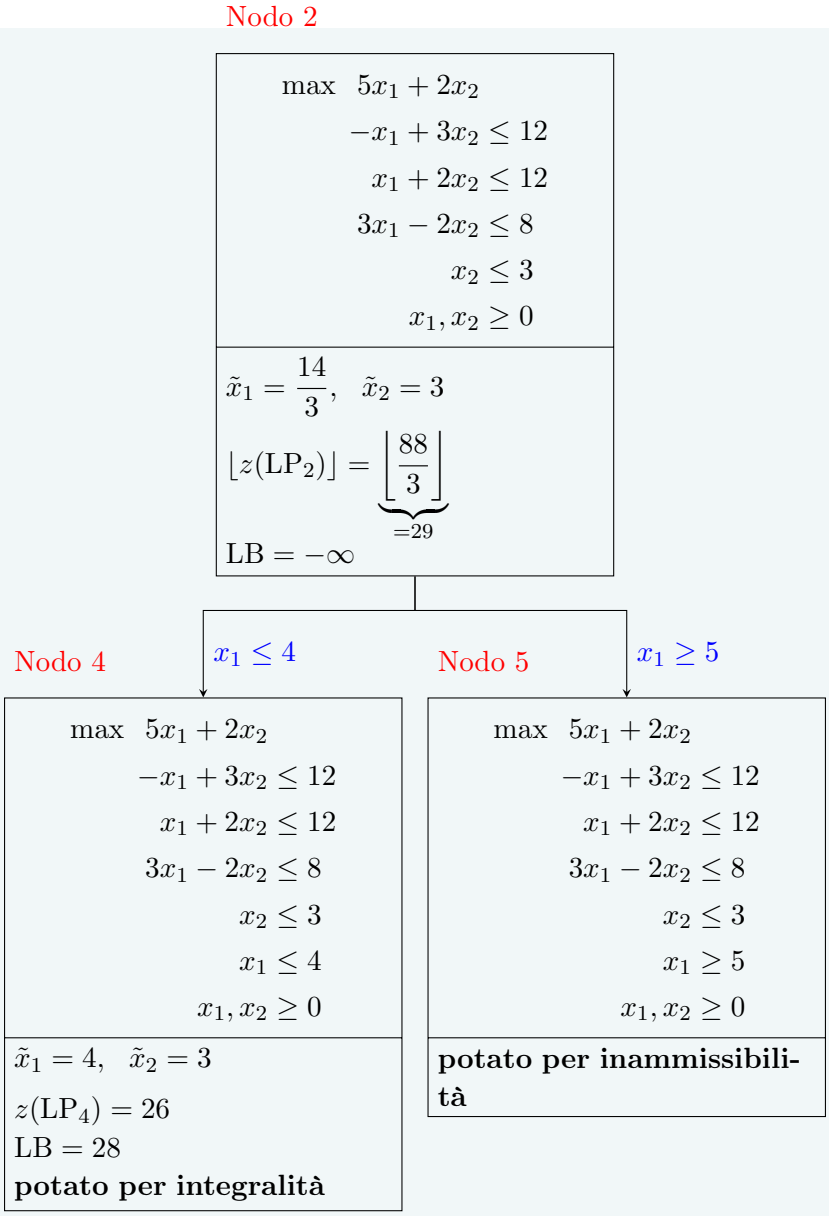
$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = \frac{5}{3}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{16}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{88}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_5 &= \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\pi_7 \\ \pi_6 &= \frac{16}{3} + \frac{2}{3}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\pi_7 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{16}{3} + \frac{2}{3}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\geq -5 \\ \pi_7 &\geq -8 \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_7 senza violare l'ammissibilità duale, il che implica che il problema duale è **illimitato**. Di conseguenza, il problema primale LP_5 è **inammissibile**, e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Il Nodo 4 è potato per integralità, mentre il Nodo 5 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

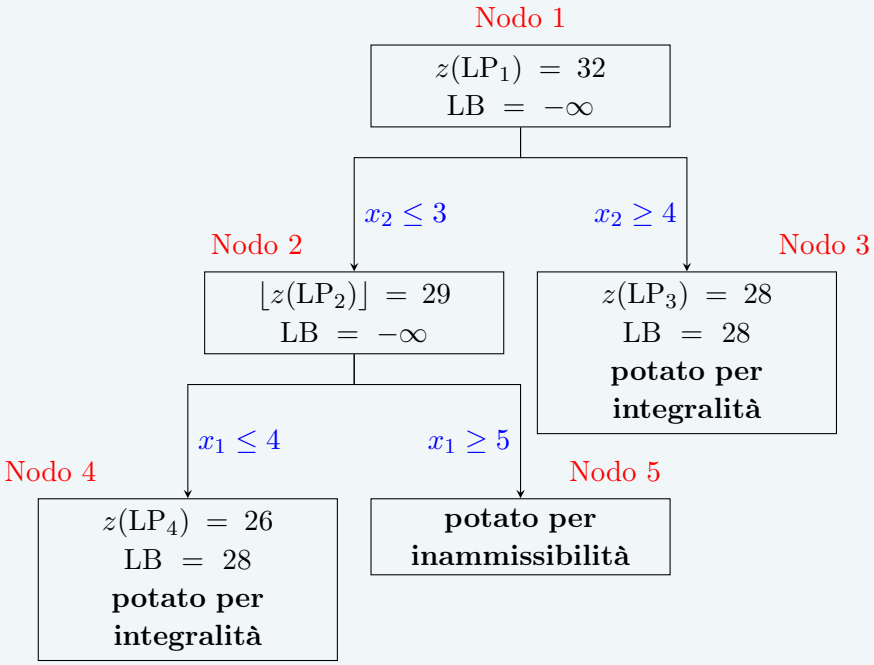
$$28 \quad \leq \quad z(\text{ILP}) \quad \leq \quad 28$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 28$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 4, \tilde{x}_2 = 4$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\text{LP}_1) = 32$: si esegue il branching su x_2.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 29$: si esegue il branching su x_1.
- Il Nodo 3 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_3) = (4, 4)$ è intera, con valore 28, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (4, 3)$ è intera, con valore 26, che non migliora il lower bound $\text{LB} = 28$.
- Il Nodo 5 è potato per inammissibilità: il problema LP_5 non ha soluzioni ammissibili.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 28$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (4, 4)$.

Esercizio 7.10 — Algoritmo branch-and-bound ($P21$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 21 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\,x_4 - \frac{2}{11}\,x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11}\,x_4 - \frac{3}{11}\,x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\,x_4 - \frac{5}{11}\,x_5 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice massimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non si esegue alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, indicando il motivo per cui ogni nodo di branching viene potato.
3. Eseguire di nuovo l'algoritmo branch-and-bound cambiando solo la strategia di selezione della variabile di branching: usare la regola dell'indice minimo. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound corrispondente.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{22}\,x_4 - \dfrac{1}{11}\,x_5 \\
x_2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{22}\,x_4 - \dfrac{2}{11}\,x_5 \\
x_3 = 5 - \dfrac{2}{11}\,x_4 - \dfrac{3}{11}\,x_5 \\
z = \dfrac{21}{2} - \dfrac{3}{22}\,x_4 - \dfrac{5}{11}\,x_5
\end{cases}
$$

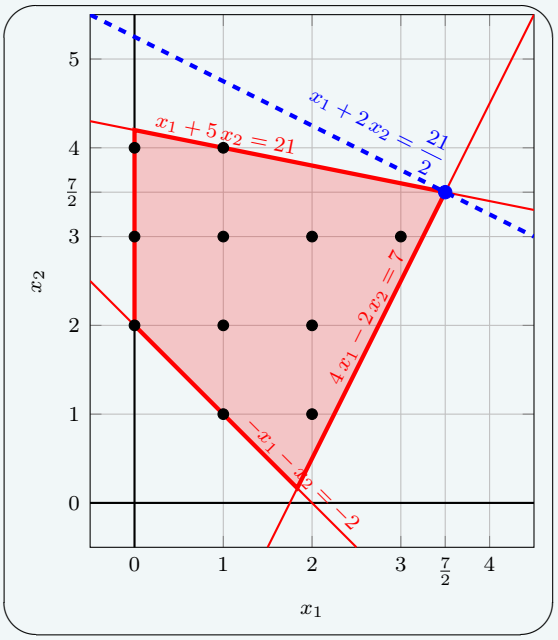


Figura 7.41: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{21}{2}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor}_{=10}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & = & 21 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 3 - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5\right) \quad \Rightarrow \quad x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{22}\, x_4 + \frac{2}{11}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\, x_4 - \frac{1}{11}\, x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11}\, x_4 - \frac{3}{11}\, x_5 \\ x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{22}\, x_4 + \frac{2}{11}\, x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\, x_4 - \frac{5}{11}\, x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{3}{22}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{5}{11} \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = \frac{3}{22} + \frac{1}{22}\, \pi_6 \\ \pi_5 = \frac{5}{11} - \frac{2}{11}\, \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{22} + \frac{1}{22}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{5}{11} - \frac{2}{11}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \geq -3 \\ \pi_6 \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\frac{5}{2}$, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.

π_5 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_5 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{22}\,x_4 + \frac{2}{11}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{11}{2}\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\left(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{11}{2}\,x_6\right) = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{2}\,x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\,x_4 - \frac{2}{11}\left(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{11}{2}\,x_6\right) = 3 - x_6$$

$$x_3 = 5 - \frac{2}{11}\,x_4 - \frac{3}{11}\left(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{11}{2}\,x_6\right) = \frac{17}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{3}{2}\,x_6$$

$$z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\,x_4 - \frac{5}{11}\left(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{11}{2}\,x_6\right) = \frac{37}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{5}{2}\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{1}{2}\,x_6 \\ x_2 = 3 - x_6 \\ x_3 = \frac{17}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{3}{2}\,x_6 \\ x_5 = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\,x_4 + \frac{11}{2}\,x_6 \\ z = \frac{37}{4} - \frac{1}{4}\,x_4 - \frac{5}{2}\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{4}, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = \frac{17}{4}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{11}{4},$$
$$\tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{37}{4}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_4 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{5}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{37}{4}$$

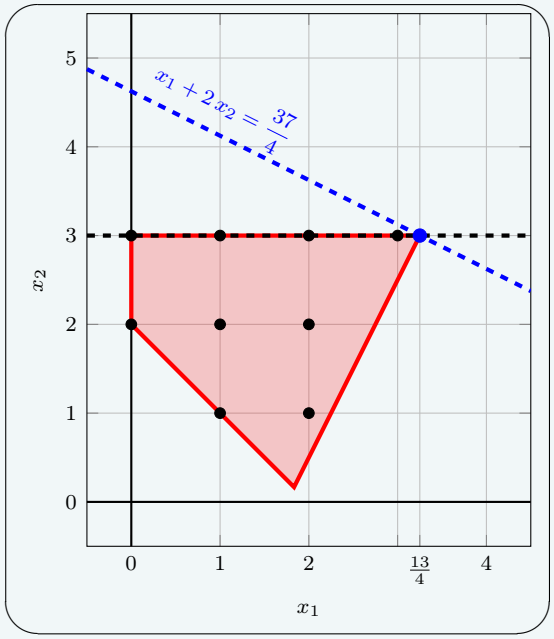


Figura 7.42: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{4}, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{37}{4}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{37}{4} \right\rfloor}_{=9} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_2 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & \\
& -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & -2 \\
& 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 7 \\
& x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 21 \\
& & & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_6 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -4 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\, x_4 - \frac{1}{11}\, x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11}\, x_4 - \frac{3}{11}\, x_5 \\ x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\, x_4 - \frac{5}{11}\, x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{3}{22}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{5}{11} \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = \frac{3}{22} - \frac{1}{22}\, \pi_6 \\ \pi_5 = \frac{5}{11} + \frac{2}{11}\, \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{22} - \frac{1}{22}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{5}{11} + \frac{2}{11}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \leq 3 \\ \pi_6 \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a 3, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.

π_4 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{22}\,x_4 - \frac{2}{11}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 11 + 4\,x_5 + 22\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,(11 + 4\,x_5 + 22\,x_6) - \frac{1}{11}\,x_5 = 1 - x_5 - 5\,x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\,(11 + 4\,x_5 + 22\,x_6) - \frac{2}{11}\,x_5 = 4 + x_6$$

$$x_3 = 5 - \frac{2}{11}\,(11 + 4\,x_5 + 22\,x_6) - \frac{3}{11}\,x_5 = 3 - x_5 - 4\,x_6$$

$$z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\,(11 + 4\,x_5 + 22\,x_6) - \frac{5}{11}\,x_5 = 9 - x_5 - 3\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_5 - 5\,x_6 \\ x_2 = 4 + x_6 \\ x_3 = 3 - x_5 - 4\,x_6 \\ x_4 = 11 + 4\,x_5 + 22\,x_6 \\ z = 9 - x_5 - 3\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 3, \quad \tilde{x}_4 = 11,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad 9$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 1, \quad \tilde{\pi}_6 = 3 \quad \text{di valore} \quad 9$$

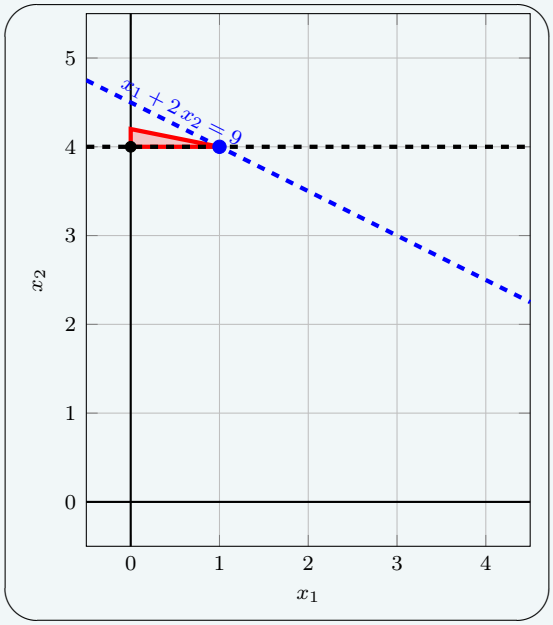


Figura 7.43: Nodo 3: regione ammissibile di LP_3 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \geq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_3) = 9$$

Il problema LP_3 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_3) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 9 > -\infty$$

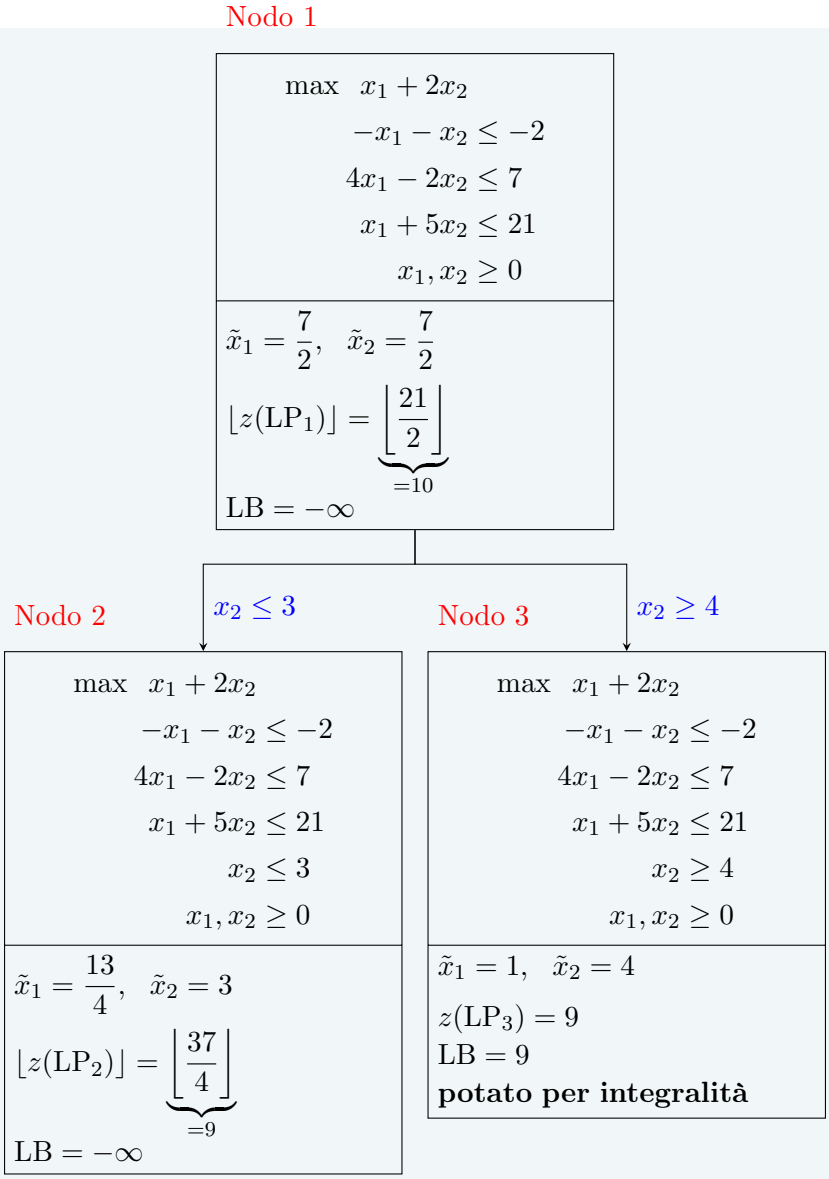
La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 9 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 4$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Il Nodo 2 viene rimosso dalla lista dei problemi L (potato per bound), poiché ora

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = 9 \leq \mathrm{LB} = 9$$

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per integralità. Il Nodo 2 viene quindi rimosso dalla lista dei problemi L (potato per bound). L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

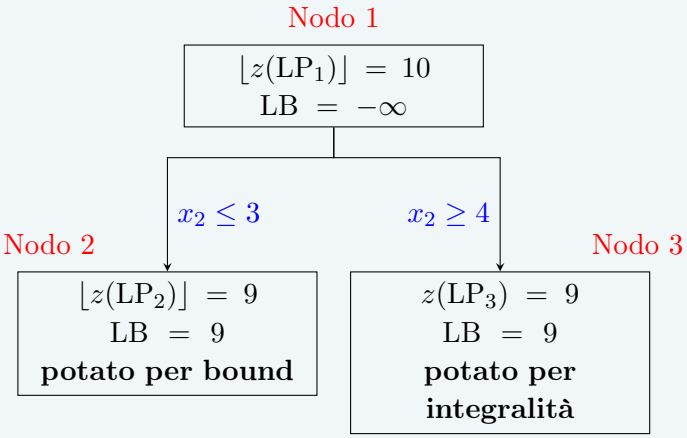
$$9 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 9$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 9$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 4$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\mathrm{LP}_1) \rfloor = 10$: si esegue il branching su x_2.
- Il Nodo 2 è potato per bound: dopo un miglioramento del lower bound viene rimosso dalla lista, poiché $\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = 9 \leq \mathrm{LB} = 9$.
- Il Nodo 3 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_3) = (1, 4)$ è intera, con valore 9, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 9$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (1, 4)$. La soluzione ottima **non è unica**: anche $(3, 3)$ ha valore 9. Con le regole indicate nella domanda, l'algoritmo trova $(1, 4)$.

3. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound con la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22} x_4 - \frac{1}{11} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22} x_4 - \frac{2}{11} x_5 \\ x_3 = 5 - \frac{2}{11} x_4 - \frac{3}{11} x_5 \\ z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22} x_4 - \frac{5}{11} x_5 \end{cases}$$

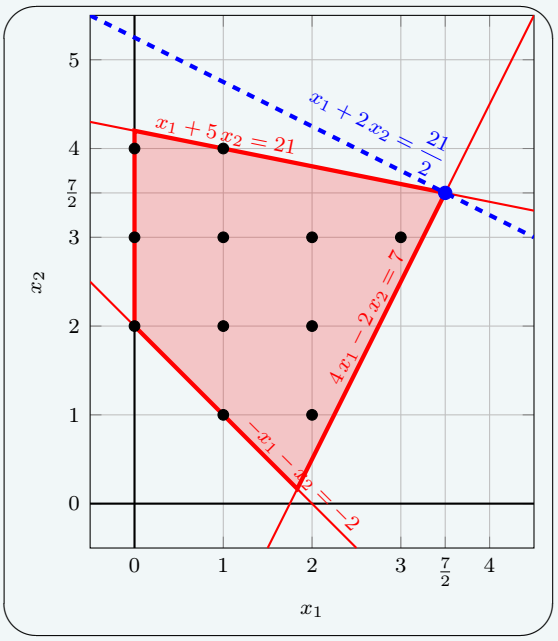


Figura 7.44: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{21}{2}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \leq z(\mathrm{ILP}) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor}_{=10}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_6 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 3 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 3 - \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{22}\, x_4 - \frac{1}{11}\, x_5 \right) \quad \Rightarrow \quad x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{22}\, x_4 + \frac{1}{11}\, x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\, x_4 - \frac{1}{11}\, x_5 \\
x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\, x_4 - \frac{2}{11}\, x_5 \\
x_3 = 5 - \frac{2}{11}\, x_4 - \frac{3}{11}\, x_5 \\
x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{22}\, x_4 + \frac{1}{11}\, x_5 \\
z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\, x_4 - \frac{5}{11}\, x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{3}{22}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{5}{11} \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 &= \dfrac{3}{22} - \dfrac{5}{22}\,\pi_6 \\ \pi_5 &= \dfrac{5}{11} - \dfrac{1}{11}\,\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{3}{22} - \dfrac{5}{22}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{5}{11} - \dfrac{1}{11}\,\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq \dfrac{3}{5} \\ \pi_6 &\leq 5 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{\frac{3}{5}, 5\right\} = \frac{3}{5}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_4 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{22}\,x_4 + \frac{1}{11}\,x_5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6\right) - \frac{1}{11}\,x_5 = 3 - x_6$$

$$x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6\right) - \frac{2}{11}\,x_5 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6$$

$$x_3 = 5 - \frac{2}{11}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6\right) - \frac{3}{11}\,x_5 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 - \frac{4}{5}\,x_6$$

$$z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6\right) - \frac{5}{11}\,x_5 = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 - \frac{3}{5}\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_6 \\ x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 \\ x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}x_5 - \frac{4}{5}x_6 \\ x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}x_6 \\ z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{23}{5}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{11}{5},$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = \frac{2}{5}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

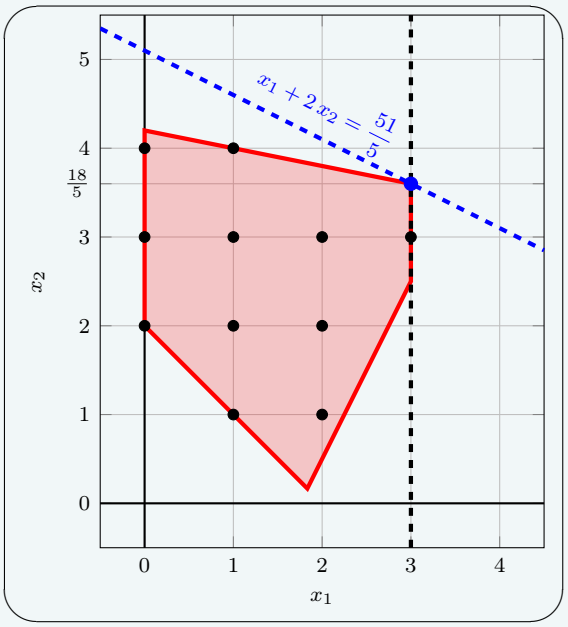


Figura 7.45: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{18}{5}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{51}{5}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{51}{5} \right\rfloor}_{=10} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_2 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & \\
& -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & = & -2 \\
& 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 7 \\
& x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & = & 21 \\
& x_1 & & & & & & & & & - & x_6 = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_6 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -4 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -4 + \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5 \\
x_2 = \frac{7}{2} + \frac{1}{22}\,x_4 - \frac{2}{11}\,x_5 \\
x_3 = 5 - \frac{2}{11}\,x_4 - \frac{3}{11}\,x_5 \\
x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\,x_4 - \frac{1}{11}\,x_5 \\
z = \frac{21}{2} - \frac{3}{22}\,x_4 - \frac{5}{11}\,x_5
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{4, 5\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{x}_6 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

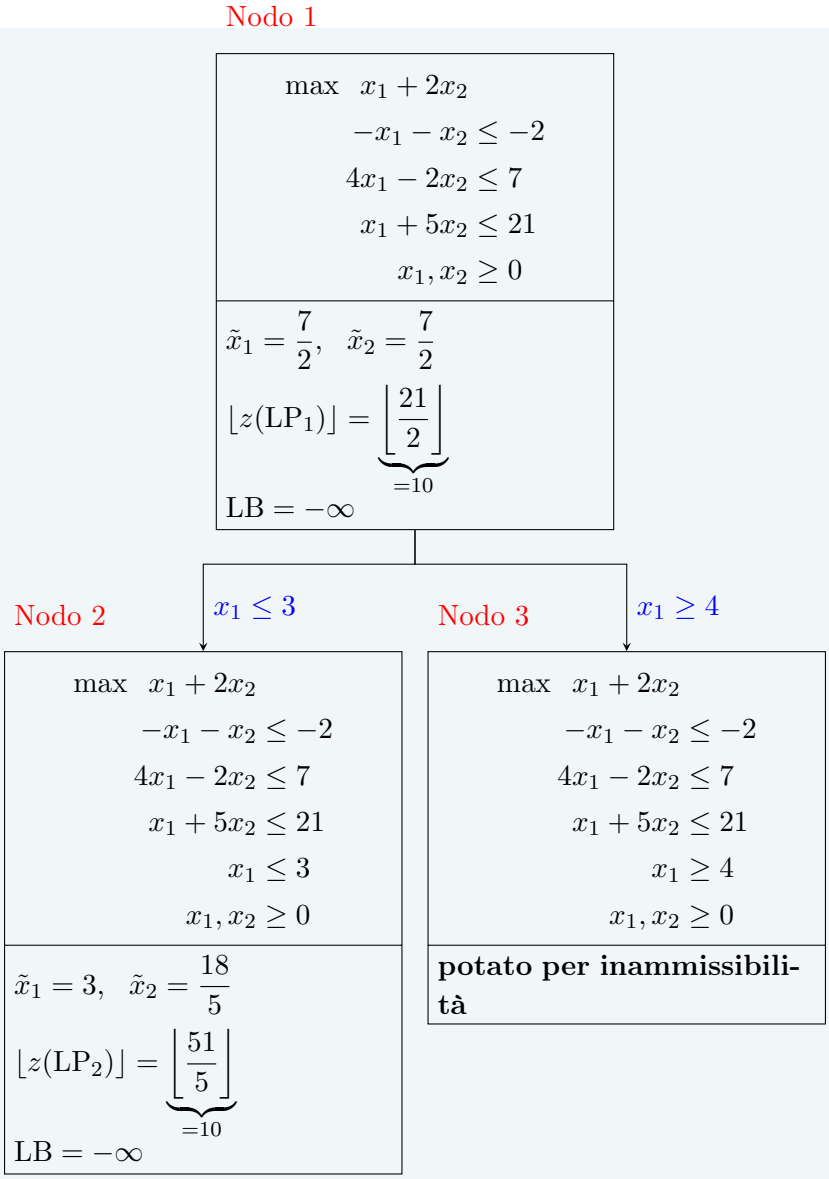
$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_4 = \frac{3}{22}, \quad \bar{\pi}_5 = \frac{5}{11} \quad \text{di valore} \quad \frac{21}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_4 = \frac{3}{22} + \frac{5}{22}\pi_6 \\ \pi_5 = \frac{5}{11} + \frac{1}{11}\pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{22} + \frac{5}{22}\pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{5}{11} + \frac{1}{11}\pi_6 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \geq -\frac{3}{5} \\ \pi_6 \geq -5 \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_6 senza violare l'ammissibilità duale, il che implica che il problema duale è **illimitato**. Di conseguenza, il problema primale LP_3 è **inammissibile**, e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{51}{5} \right\rfloor}_{=10}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & & & = & 21 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_7 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 3 - \left(\frac{18}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,x_5 - \frac{1}{5}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = 3 - x_6 \\
x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6 \\
x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 - \frac{4}{5}\,x_6 \\
x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6 \\
x_7 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,x_5 - \frac{1}{5}\,x_6 \\
z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 - \frac{3}{5}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \bar{x}_3 = \frac{23}{5}, \quad \bar{x}_4 = \frac{11}{5}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{3}{5},$$
$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = \frac{2}{5}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_5 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\pi_7 \\ \pi_6 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\pi_7 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 \leq 2 \\ \pi_7 \geq -3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a 2, il valore di π_5 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_7 diventa una variabile primale fuori base.

π_5 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_5 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 3 + x_6 + 5\,x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}(3 + x_6 + 5\,x_7) + \frac{1}{5}x_6 = 3 - x_7$$
$$x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}(3 + x_6 + 5\,x_7) - \frac{4}{5}x_6 = 4 - x_6 - x_7$$
$$x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}(3 + x_6 + 5\,x_7) + \frac{22}{5}x_6 = 1 + 4\,x_6 - 2\,x_7$$
$$z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}(3 + x_6 + 5\,x_7) - \frac{3}{5}x_6 = 9 - x_6 - 2\,x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_6 \\ x_2 = 3 - x_7 \\ x_3 = 4 - x_6 - x_7 \\ x_4 = 1 + 4\,x_6 - 2\,x_7 \\ x_5 = 3 + x_6 + 5\,x_7 \\ z = 9 - x_6 - 2\,x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 7\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 4, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 3,$$
$$\tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 9$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_6 = 1, \quad \tilde{\pi}_7 = 2 \quad \text{di valore} \quad 9$$

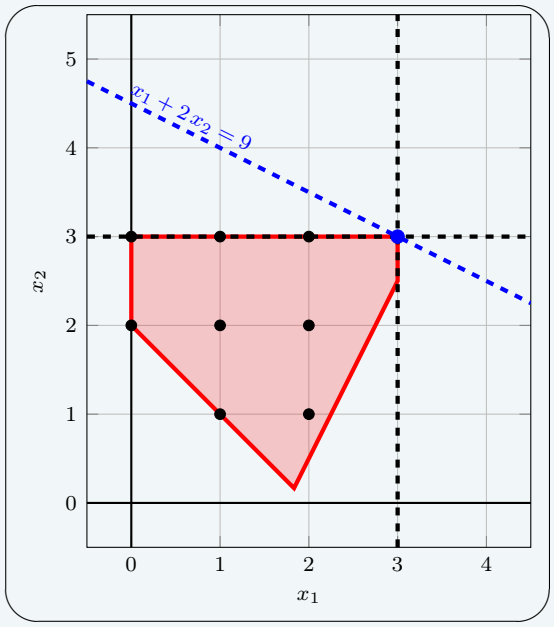


Figura 7.46: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 9$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 9 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 9 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 3$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & & = & -2 \\
 & 4\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 7 \\
 & x_1 & + & 5\,x_2 & & & & & + & x_5 & & = & 21 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & & & x_2 & & & & & & & - & x_7 & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & x_7 \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_7 = 4 \qquad \Rightarrow \quad x_7 = -4 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = -4 + \left(\frac{18}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \quad x_7 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = 3 - x_6 \\
x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6 \\
x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 - \frac{4}{5}\,x_6 \\
x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 + \frac{22}{5}\,x_6 \\
x_7 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,x_5 + \frac{1}{5}\,x_6 \\
z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}\,x_5 - \frac{3}{5}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 6\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 3, \quad \bar{x}_2 = \frac{18}{5}, \quad \bar{x}_3 = \frac{23}{5}, \quad \bar{x}_4 = \frac{11}{5}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{2}{5},$$
$$\bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_3 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = \frac{2}{5}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{3}{5} \quad \text{di valore} \quad \frac{51}{5}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_5 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\pi_7 \\ \pi_6 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\pi_7 \geq 0}_{\pi_5 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 \geq -2 \\ \pi_7 \leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a 3, il valore di π_6 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_7 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_7 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_6 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 2 + x_5 + 5\,x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 3 - (2 + x_5 + 5\,x_7) = 1 - x_5 - 5\,x_7$$
$$x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}(2 + x_5 + 5\,x_7) = 4 + x_7$$
$$x_3 = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}x_5 - \frac{4}{5}(2 + x_5 + 5\,x_7) = 3 - x_5 - 4\,x_7$$
$$x_4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_5 + \frac{22}{5}(2 + x_5 + 5\,x_7) = 11 + 4\,x_5 + 22\,x_7$$
$$z = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}(2 + x_5 + 5\,x_7) = 9 - x_5 - 3\,x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_5 - 5\,x_7 \\ x_2 = 4 + x_7 \\ x_3 = 3 - x_5 - 4\,x_7 \\ x_4 = 11 + 4\,x_5 + 22\,x_7 \\ x_6 = 2 + x_5 + 5\,x_7 \\ z = 9 - x_5 - 3\,x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 7\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 3, \quad \tilde{x}_4 = 11, \quad \tilde{x}_6 = 2,$$
$$\tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 9$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 1, \quad \tilde{\pi}_7 = 3 \quad \text{di valore} \quad 9$$

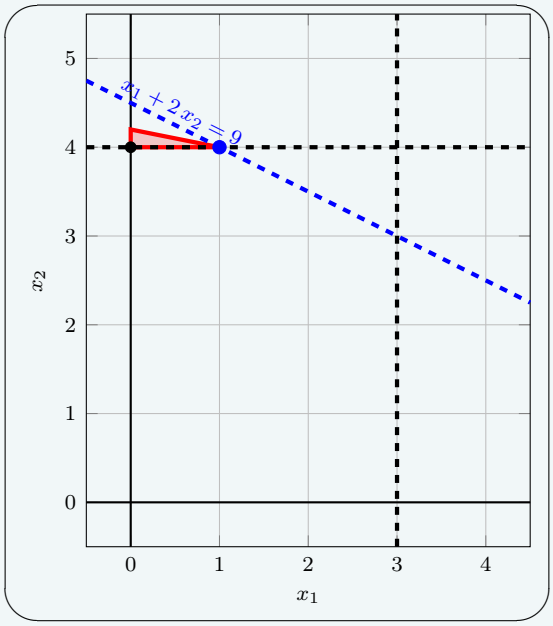


Figura 7.47: Nodo 5: regione ammissibile di LP_5 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \geq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_5) = 9$$

Il problema LP_5 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_5) \rfloor \leq \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 9 \leq 9$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è **intera**, ma il suo valore non migliora il lower bound LB, che rimane 9.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Entrambi i nodi sono potati per integralità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{18}{5}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{51}{5} \right\rfloor}_{=10}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_2 \leq 3$ | $x_2 \geq 4$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$z(\mathrm{LP}_4) = 9$

$\mathrm{LB} = 9$

potato per integralità

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4$

$z(\mathrm{LP}_5) = 9$

$\mathrm{LB} = 9$

potato per integralità

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

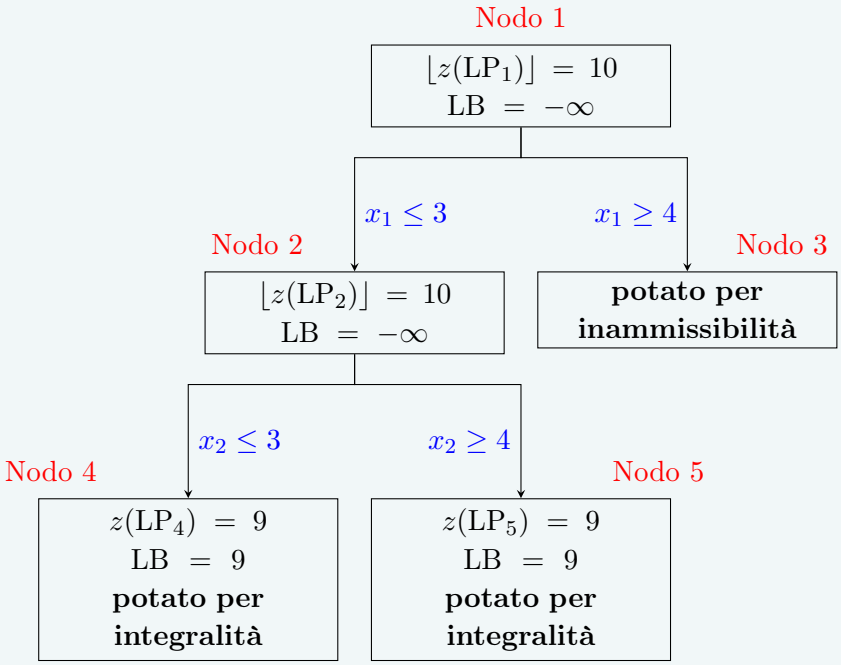
$$9 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 9$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 9$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 3, \tilde{x}_2 = 3$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

L'albero di branch-and-bound finale di questa seconda esecuzione è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_1) \rfloor = 10$: si esegue il branching su x_1.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 10$: si esegue il branching su x_2.
- Il Nodo 3 è potato per inammissibilità: il problema LP_3 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (3, 3)$ è intera, con valore 9, e diventa la soluzione incumbent.
- Il Nodo 5 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_5) = (1, 4)$ è intera, con valore 9, che non migliora il lower bound LB $= 9$.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 9$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (3, 3)$. La soluzione ottima **non è unica**: anche $(1, 4)$ ha valore 9. Con le regole indicate nella domanda, l'algoritmo trova $(3, 3)$.

Le due esecuzioni restituiscono due soluzioni ottime diverse, $(1, 4)$ e $(3, 3)$, con lo stesso valore ottimo 9.

Esercizio 7.11 — Algoritmo branch-and-bound ($P23$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 4\ x_2 & & \\ & 3\ x_1 & + & 8\ x_2 & \leq & 24 \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & & & -x_2 & \leq & -1 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

I vincoli $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 1$ sono scritti in forma canonica come $-x_1 \leq -1$ e $-x_2 \leq -1$.

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_4 \\ x_2 = \frac{21}{8} - \frac{1}{8} x_3 - \frac{3}{8} x_4 \\ x_5 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8} x_3 - \frac{3}{8} x_4 \\ z = \frac{23}{2} - \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non si esegue alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.
2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, indicando il motivo per cui ogni nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & \\
 & 3\,x_1 & + & 8\,x_2 & + & x_3 & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & + & x_5 & = & -1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$
\begin{cases}
x_1 = 1 + x_4 \\
x_2 = \dfrac{21}{8} - \dfrac{1}{8}\,x_3 - \dfrac{3}{8}\,x_4 \\
x_5 = \dfrac{13}{8} - \dfrac{1}{8}\,x_3 - \dfrac{3}{8}\,x_4 \\
z = \dfrac{23}{2} - \dfrac{1}{2}\,x_3 - \dfrac{1}{2}\,x_4
\end{cases}
$$

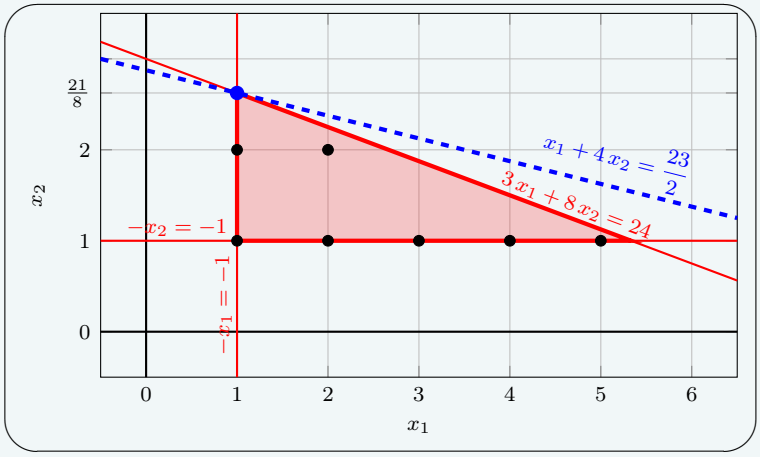


Figura 7.48: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{21}{8}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{23}{2}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.
Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{23}{2} \right\rfloor}_{=11}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{21}{8} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{21}{8} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & 3\,x_1 & + & 8\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & & & & & + & x_4 & & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & + & x_5 & & = & -1 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_6 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = 2 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = 2 - \left(\frac{21}{8} - \frac{1}{8}\, x_3 - \frac{3}{8}\, x_4 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\, x_3 + \frac{3}{8}\, x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 &&&+ x_4 \\ x_2 &= \frac{21}{8} &- \frac{1}{8} x_3 &- \frac{3}{8} x_4 \\ x_5 &= \frac{13}{8} &- \frac{1}{8} x_3 &- \frac{3}{8} x_4 \\ x_6 &= -\frac{5}{8} &+ \frac{1}{8} x_3 &+ \frac{3}{8} x_4 \\ z &= \frac{23}{2} &- \frac{1}{2} x_3 &- \frac{1}{2} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = \frac{21}{8}, \quad \bar{x}_5 = \frac{13}{8}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{5}{8},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{23}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{2}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{23}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \pi_6 \\ \pi_4 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\leq 4 \\ \pi_6 &\leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{4, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_6 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_6 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_4 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} x_3 + \frac{8}{3} x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 1 + \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3} x_3 + \frac{8}{3} x_6\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} x_3 + \frac{8}{3} x_6$$

$$x_2 = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}\,x_3 - \frac{3}{8}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6\right) = 2 - x_6$$

$$x_5 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_3 - \frac{3}{8}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6\right) = 1 - x_6$$

$$z = \frac{23}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6\right) = \frac{32}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{4}{3}\,x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6 \\ x_2 = 2 - x_6 \\ x_4 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6 \\ x_5 = 1 - x_6 \\ z = \frac{32}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{4}{3}\,x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_5 = 1,$$
$$\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{32}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{32}{3}$$

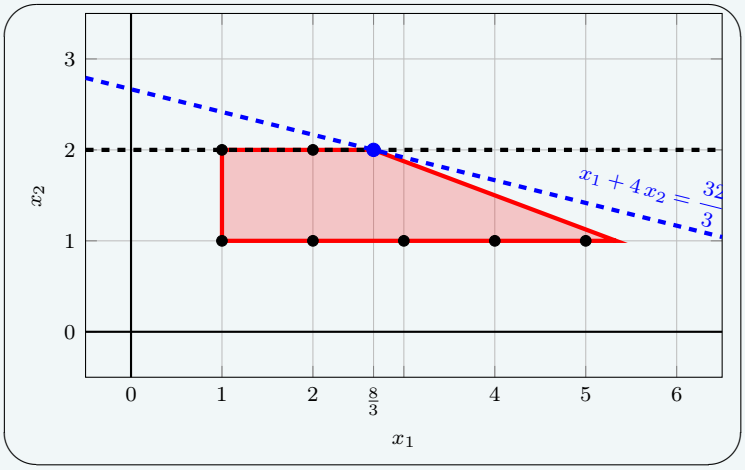


Figura 7.49: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{32}{3}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{32}{3} \right\rfloor}_{=10} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_2 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & & \\
 & 3\,x_1 & + & 8\,x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & & & & & + & x_4 & & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & + & x_5 & & = & -1 \\
 & & & x_2 & & & & & & & - & x_6 = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_6 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -3 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_6 = -3 + \left(\frac{21}{8} - \frac{1}{8}\,x_3 - \frac{3}{8}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_6 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\,x_3 - \frac{3}{8}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 &&&+ x_4 \\ x_2 &= \frac{21}{8} &- \frac{1}{8} x_3 &- \frac{3}{8} x_4 \\ x_5 &= \frac{13}{8} &- \frac{1}{8} x_3 &- \frac{3}{8} x_4 \\ x_6 &= -\frac{3}{8} &- \frac{1}{8} x_3 &- \frac{3}{8} x_4 \\ z &= \frac{23}{2} &- \frac{1}{2} x_3 &- \frac{1}{2} x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = \frac{21}{8}, \quad \bar{x}_5 = \frac{13}{8}, \quad \bar{x}_6 = -\frac{3}{8}, \\ \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{23}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

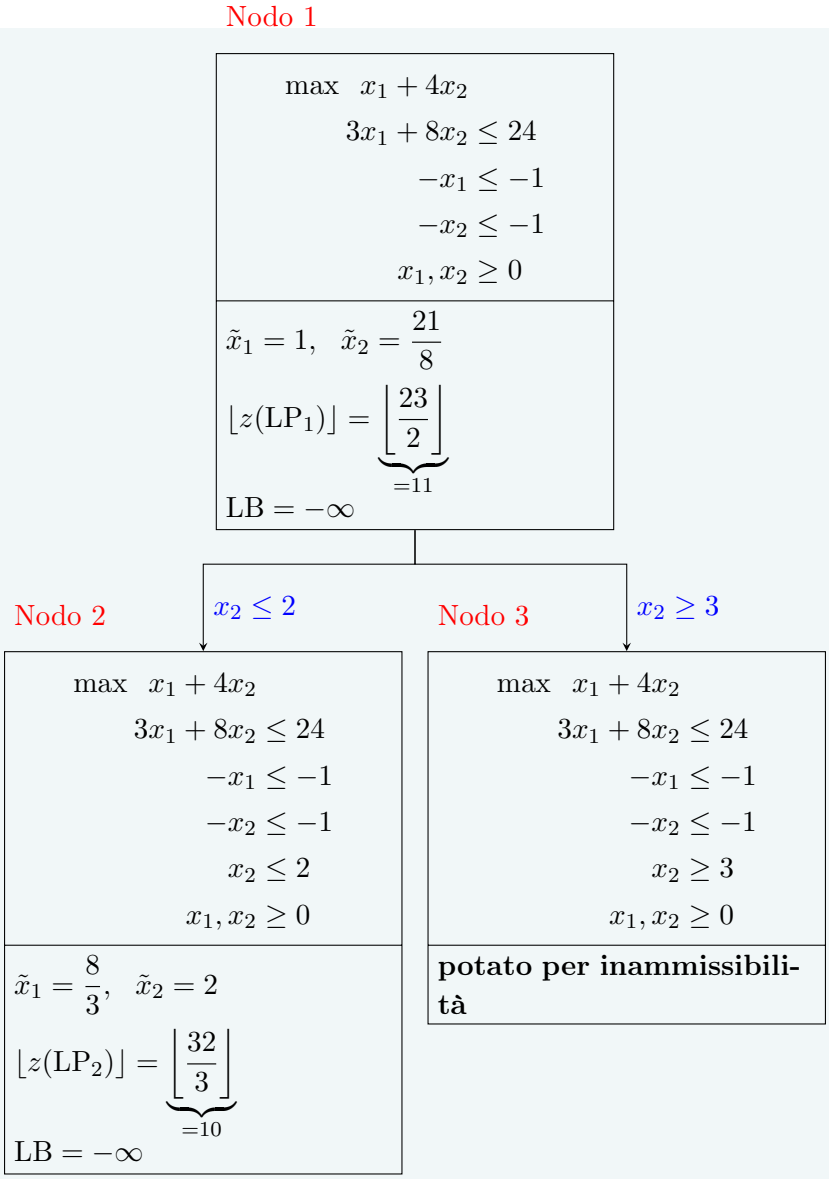
$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \\ \bar{\pi}_3 = \frac{1}{2}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{2} \quad \text{di valore} \quad \frac{23}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \pi_6 \\ \pi_4 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 &\geq -4 \\ \pi_6 &\geq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_6 senza violare l'ammissibilità duale, il che implica che il problema duale è **illimitato**. Di conseguenza, il problema primale LP_3 è **inammissibile**, e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{32}{3} \right\rfloor}_{=10}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Il problema LP_4 si crea con il primo vincolo di branching (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & & & & & \\
 & 3\,x_1 & + & 8\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & + & x_5 & & & & = & -1 \\
 & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & & = & 2 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & + \; x_7 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_7 = 2 \qquad \Rightarrow \quad x_7 = 2 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6\right) \qquad \Rightarrow \quad x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{8}{3}\,x_6$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6 \\
x_2 = 2 - x_6 \\
x_4 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{8}{3}\,x_6 \\
x_5 = 1 - x_6 \\
x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{8}{3}\,x_6 \\
z = \frac{32}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{4}{3}\,x_6
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \bar{x}_2 = 2, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = 1, \quad \bar{x}_7 = -\frac{2}{3},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{32}{3}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\pi}_6 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{32}{3}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_7 \\ \pi_6 &= \frac{4}{3} + \frac{8}{3}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi_7 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\pi_7 \geq 0}_{\pi_6 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 1 \\ \pi_7 &\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a 1, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_7 diventa una variabile primale fuori base.

π_3 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_3 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2 + 8\,x_6 + 3\,x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}(2 + 8\,x_6 + 3\,x_7) + \frac{8}{3}x_6 = 2 - x_7$$
$$x_4 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(2 + 8\,x_6 + 3\,x_7) + \frac{8}{3}x_6 = 1 - x_7$$
$$z = \frac{32}{3} - \frac{1}{3}(2 + 8\,x_6 + 3\,x_7) - \frac{4}{3}x_6 = 10 - 4\,x_6 - x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 &&- x_7 \\ x_2 &= 2 - x_6 \\ x_3 &= 2 + 8\,x_6 + 3\,x_7 \\ x_4 &= 1 &&- x_7 \\ x_5 &= 1 - x_6 \\ z &= 10 - 4\,x_6 - x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 7\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_3 = 2, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 1,$$
$$\tilde{x}_6 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad 10$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_6 = 4, \quad \tilde{\pi}_7 = 1 \quad \text{di valore} \quad 10$$

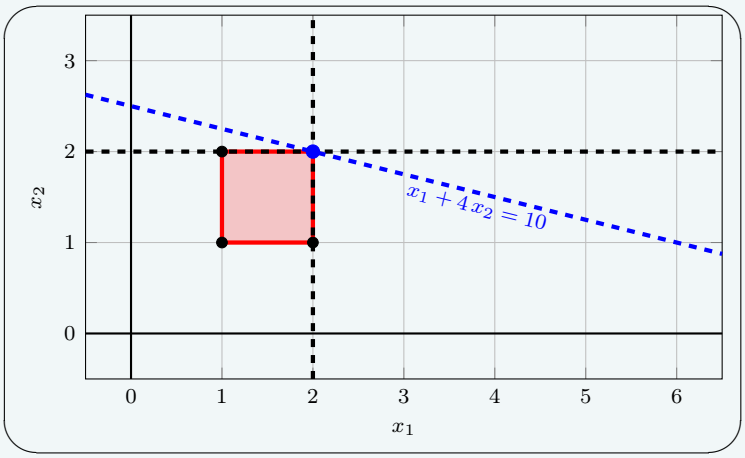


Figura 7.50: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 10$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 10 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 10 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 2$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non è risolto, poiché dopo il Nodo 4 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la porzione dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 4x_2 \\ & 3x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{32}{3} \right\rfloor}_{=10}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_1 \leq 2$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 4x_2 \\ & 3x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 2$

$z(\mathrm{LP}_4) = 10$

$\mathrm{LB} = 10$

potato per integralità

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

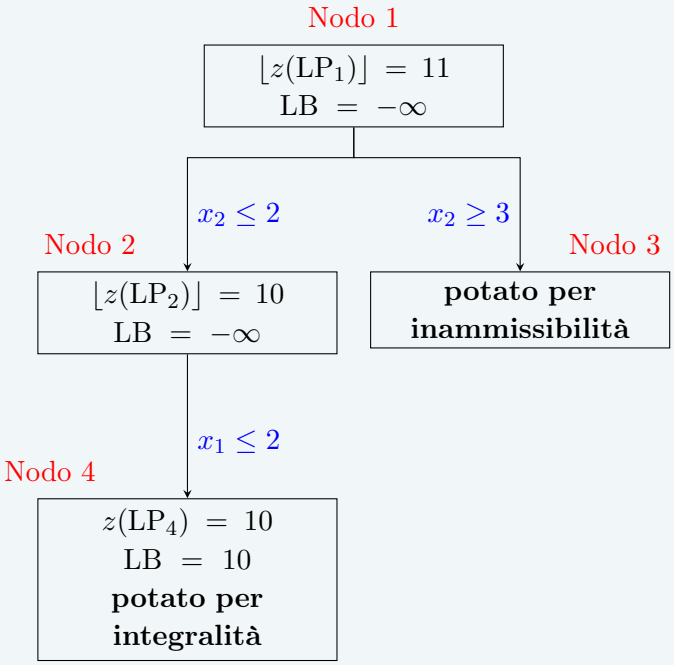
$$10 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 10$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\mathrm{ILP}) = 10$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 2, \tilde{x}_2 = 2$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_1) \rfloor = 11$: si esegue il branching su x_2.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 10$: si esegue il branching su x_1.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 2 non è risolto, e non è disegnato, poiché $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 10 \leq \text{LB} = 10$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 3 è potato per inammissibilità: il problema LP_3 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (2, 2)$ è intera, con valore 10, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 10$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (2, 2)$.

Esercizio 7.12 — Algoritmo branch-and-bound ($P24$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & \\ & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 24 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

I vincoli $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$ sono scritti in forma canonica come $-x_1 \leq -1$ e $-x_2 \leq -2$.

e un dizionario ottimo del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\,x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4 \\ x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\,x_4 \\ x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4 \\ z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10}\,x_3 - \frac{9}{10}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound utilizzando:
   (a) la regola dell'indice massimo come strategia di selezione della variabile di branching;
   (b) la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching;
   (c) risolvere prima il nodo di branching verso il basso e poi il nodo di branching verso l'alto;
   (d) porre il lower bound LB a $-\infty$ (non si esegue alcun algoritmo euristico).

   Risolvere i problemi LP dei nodi di branching con l'algoritmo del simplesso duale. Nell'algoritmo del simplesso duale, la variabile uscente è la variabile in base con valore negativo e indice minimo, e i pareggi nel test dei rapporti si risolvono con l'indice minimo. Mostrare graficamente la soluzione ottima dei problemi LP associati ai nodi di branching.

2. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound, indicando il motivo per cui ogni nodo di branching viene potato.

Soluzione

1. Esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound per risolvere il problema ILP.

   - **Inizializzazione**

     Consideriamo il problema LP_1 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & -2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

     e il suo dizionario ottimo:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\,x_4 \\
x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4 \\
x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\,x_4 \\
x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4 \\
z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10}\,x_3 - \frac{9}{10}\,x_4
\end{cases}
$$

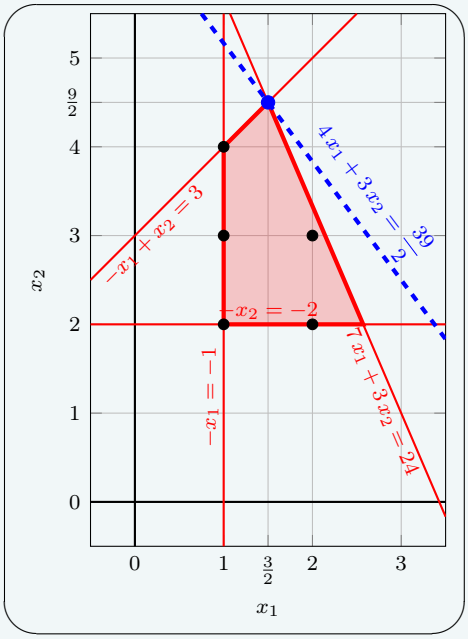


Figura 7.51: Nodo 1: regione ammissibile di LP_1 (rossa), punti ammissibili del problema PLI (neri) e soluzione ottima di LP_1 (blu) con la retta della funzione obiettivo che vi passa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{39}{2}$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è **frazionaria** e il problema LP_1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a $-\infty$.

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{39}{2} \right\rfloor}_{=19}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_1 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor}_{=4} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor + 1}_{=5}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_2 e LP_3.

(a) Soluzione del problema LP_2

Consideriamo il problema LP_2 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & -2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & + \; x_7 \; = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & \quad x_7 \; \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_7 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = 4 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = 4 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{7}{10}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\,x_4 \\
x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4 \\
x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\,x_4 \\
x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4 \\
x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{7}{10}\,x_4 \\
z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10}\,x_3 - \frac{9}{10}\,x_4
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_5 = \frac{1}{2}, \quad \bar{x}_6 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{39}{2}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{7}{10}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{9}{10} \quad \text{di valore} \quad \frac{39}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \dfrac{7}{10} - \dfrac{1}{10}\,\pi_7 \\ \pi_4 &= \dfrac{9}{10} - \dfrac{7}{10}\,\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\dfrac{7}{10} - \dfrac{1}{10}\,\pi_7 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\dfrac{9}{10} - \dfrac{7}{10}\,\pi_7 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 7 \\ \pi_7 &\leq \dfrac{9}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a $\min\left\{7, \frac{9}{7}\right\} = \frac{9}{7}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_7 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_7 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_4 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_4 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{7}{10}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7\right) = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7$$

$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7\right) = 4 - x_7$$

$$x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 + \frac{3}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7\right) = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7$$

$$x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7\right) = 2 - x_7$$

$$z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10}\,x_3 - \frac{9}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7\right) = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}\,x_3 - \frac{9}{7}\,x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ x_2 = 4 - x_7 \\ x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7 \\ x_5 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ x_6 = 2 - x_7 \\ z = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 7\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{12}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_4 = \frac{5}{7}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{5}{7}, \quad \tilde{x}_6 = 2,$$
$$\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_3 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{\pi}_7 = \frac{9}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

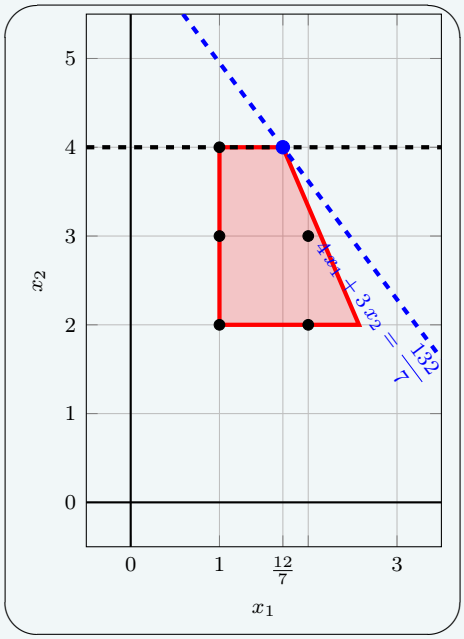


Figura 7.52: Nodo 2: regione ammissibile di LP_2 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 4$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{12}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_2) = \frac{132}{7}$$

Il problema LP_2 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{132}{7} \right\rfloor}_{=18} > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_2)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_2 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_3

Consideriamo il problema LP_3 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & \\
& 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 24 \\
& -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
& -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & -1 \\
& & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & -2 \\
& & & x_2 & & & & & & & & - \; x_7 & = & 5 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, \quad x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_7 = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -5 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_7 = -5 + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_7 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,x_3 - \frac{7}{10}\,x_4$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{3}{10}\, x_4 \\ x_2 &= \frac{9}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 - \frac{7}{10}\, x_4 \\ x_5 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{3}{10}\, x_4 \\ x_6 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 - \frac{7}{10}\, x_4 \\ x_7 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 - \frac{7}{10}\, x_4 \\ z &= \frac{39}{2} - \frac{7}{10}\, x_3 - \frac{9}{10}\, x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_5 = \frac{1}{2}, \quad \bar{x}_6 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_7 = -\frac{1}{2},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{39}{2}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{7}{10}, \quad \bar{\pi}_4 = \frac{9}{10} \quad \text{di valore} \quad \frac{39}{2}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\, \pi_7 \\ \pi_4 &= \frac{9}{10} + \frac{7}{10}\, \pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{7}{10} + \frac{1}{10}\, \pi_7 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{7}{10}\, \pi_7 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\geq -7 \\ \pi_7 &\geq -\frac{9}{7} \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_7 senza violare l'ammissibilità duale, il che implica che il problema duale è **illimitato**. Di conseguenza, il problema primale LP_3 è **inammissibile**, e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della prima iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 1 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 2, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 3. Il Nodo 2 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 3 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 1

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_1) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{39}{2} \right\rfloor}_{=19}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

Nodo 2 — $x_2 \leq 4$

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{12}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 4$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{132}{7} \right\rfloor}_{=18}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

Nodo 3 — $x_2 \geq 5$

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

potato per inammissibilità

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$-\infty \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{132}{7} \right\rfloor}_{=18}$$

- **Iterazione 2**

Il problema LP_2 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor}_{=1} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{12}{7} \right\rfloor + 1}_{=2}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_4 e LP_5.

(a) Soluzione del problema LP_4

Consideriamo il problema LP_4 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & \\
 & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & & = & -2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = & 4 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & & x_8 & = & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_8 = 1 \qquad \Rightarrow \quad x_8 = 1 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_8 = 1 - \left(\frac{12}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7\right) \qquad \Rightarrow \quad x_8 = -\frac{5}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{3}{7}\,x_7$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7 \\
x_2 = 4 - x_7 \\
x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_7 \\
x_5 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7 \\
x_6 = 2 - x_7 \\
x_8 = -\frac{5}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{3}{7}\,x_7 \\
z = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}\,x_3 - \frac{9}{7}\,x_7
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 7\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{12}{7}, \quad \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{7},$$
$$\bar{x}_5 = \frac{5}{7}, \quad \bar{x}_6 = 2, \quad \bar{x}_8 = -\frac{5}{7},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_8 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{4}{7}, \quad \bar{\pi}_7 = \frac{9}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

Se aumentiamo il valore di π_8, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}\pi_8 \\ \pi_7 &= \frac{9}{7} + \frac{3}{7}\pi_8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{4}{7} - \frac{1}{7}\pi_8 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{9}{7} + \frac{3}{7}\pi_8 \geq 0}_{\pi_7 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_8 &\leq 4 \\ \pi_8 &\geq -3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_8 fino a 4, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_8 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_8 diventa una variabile primale fuori base.

π_3 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_3 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_8 = -\frac{5}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_7 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5 + 3x_7 + 7x_8$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}(5 + 3x_7 + 7x_8) + \frac{3}{7}x_7 = 1 - x_8$$

$$x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}(5 + 3x_7 + 7x_8) + \frac{10}{7}x_7 = 0 + x_7 - x_8$$

$$x_5 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}(5 + 3x_7 + 7x_8) + \frac{3}{7}x_7 = 0 - x_8$$

$$z = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}(5 + 3x_7 + 7x_8) - \frac{9}{7}x_7 = 16 - 3x_7 - 4x_8$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_8 \\ x_2 = 4 - x_7 \\ x_3 = 5 + 3\,x_7 + 7\,x_8 \\ x_4 = 0 + x_7 - x_8 \\ x_5 = 0 - x_8 \\ x_6 = 2 - x_7 \\ z = 16 - 3\,x_7 - 4\,x_8 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{7, 8\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\begin{gathered} \tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4, \quad \tilde{x}_3 = 5, \\ \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 2, \\ \tilde{x}_7 = 0, \quad \tilde{x}_8 = 0 \quad \text{di valore} \quad 16 \end{gathered}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\begin{gathered} \tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \\ \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0, \\ \tilde{\pi}_7 = 3, \quad \tilde{\pi}_8 = 4 \quad \text{di valore} \quad 16 \end{gathered}$$

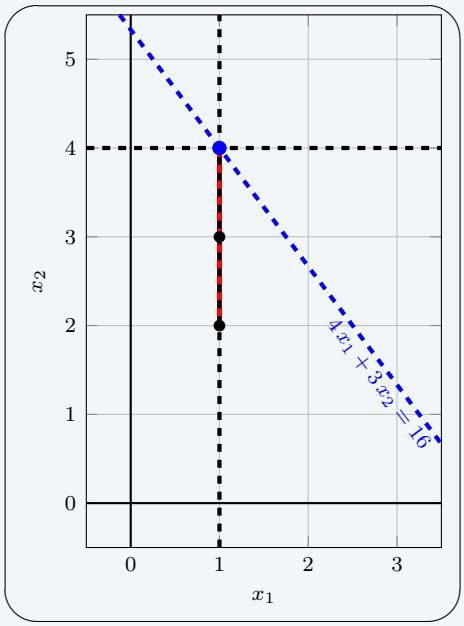


Figura 7.53: Nodo 4: regione ammissibile di LP_4 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 1$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_4) = 16$$

Il problema LP_4 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_4) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 16 > -\infty$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_4)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 16 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 4$.
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

(b) Soluzione del problema LP_5

Consideriamo il problema LP_5 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & & \\
 & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & = & -2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = & 4 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & & - & x_8 & = & 2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 - x_8 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_8 = -2 + x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_8 = -2 + \left(\frac{12}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_8 = -\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_7$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ x_2 = 4 - x_7 \\ x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7 \\ x_5 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ x_6 = 2 - x_7 \\ x_8 = -\frac{2}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ z = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 7\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = \frac{12}{7}, \quad \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{7},$$
$$\bar{x}_5 = \frac{5}{7}, \quad \bar{x}_6 = 2, \quad \bar{x}_8 = -\frac{2}{7},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0,$$
$$\bar{\pi}_5 = 0, \quad \bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_8 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{4}{7}, \quad \bar{\pi}_7 = \frac{9}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

Se aumentiamo il valore di π_8, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{4}{7} + \frac{1}{7}\pi_8 \\ \pi_7 = \frac{9}{7} - \frac{3}{7}\pi_8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\pi_8 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{9}{7} - \frac{3}{7}\pi_8 \geq 0}_{\pi_7 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_8 \geq -4 \\ \pi_8 \leq 3 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_8 fino a 3, il valore di π_7 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_8 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_8 diventa una variabile primale fuori base.

π_7 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_7 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_8 = -\frac{2}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \quad \Rightarrow \quad x_7 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_8$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8\right) = 2 + x_8$$

$$x_2 = 4 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8\right) = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8$$

$$x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{10}{3}\,x_8$$

$$x_5 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8\right) = 1 + x_8$$

$$x_6 = 2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8$$

$$z = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}\,x_3 - \frac{9}{7}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8\right) = 18 - x_3 - 3\,x_8$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases}
x_1 &= 2 &&&+ x_8 \\
x_2 &= \frac{10}{3} &- \frac{1}{3}\,x_3 &- \frac{7}{3}\,x_8 \\
x_4 &= \frac{5}{3} &+ \frac{1}{3}\,x_3 &+ \frac{10}{3}\,x_8 \\
x_5 &= 1 &&&+ x_8 \\
x_6 &= \frac{4}{3} &- \frac{1}{3}\,x_3 &- \frac{7}{3}\,x_8 \\
x_7 &= \frac{2}{3} &+ \frac{1}{3}\,x_3 &+ \frac{7}{3}\,x_8 \\
z &= 18 &- x_3 &- 3\,x_8
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 8\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{5}{3}, \\
\tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_7 = \frac{2}{3}, \\
\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_8 = 0 \quad \text{di valore} \quad 18
\end{aligned}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \\
\tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0, \quad \tilde{\pi}_7 = 0, \\
\tilde{\pi}_3 = 1, \quad \tilde{\pi}_8 = 3 \quad \text{di valore} \quad 18
\end{aligned}$$

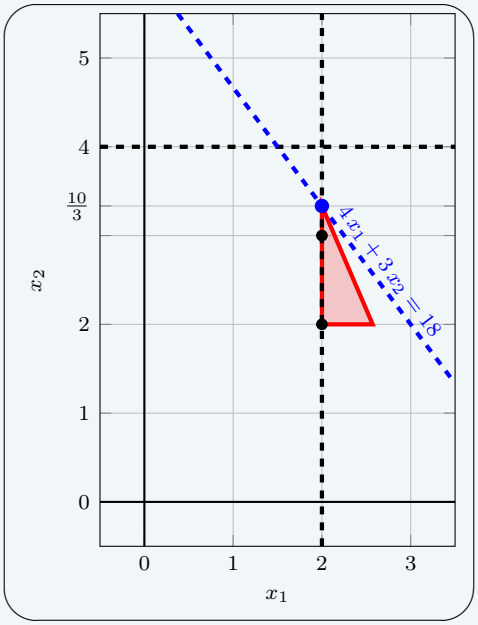


Figura 7.54: Nodo 5: regione ammissibile di LP_5 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \geq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_5) = 18$$

Il problema LP_5 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_5) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 18 > 16$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_5)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_5 è **inserito nella lista dei problemi** L.

Alla fine della seconda iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 2 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 4, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 5. Il Nodo 4 è potato per integralità, mentre il Nodo 5 è inserito nella lista L. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \frac{12}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 4$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_2) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{132}{7} \right\rfloor}_{=18}$

$\mathrm{LB} = -\infty$

$x_1 \leq 1$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 4$

$z(\mathrm{LP}_4) = 16$

$\mathrm{LB} = 16$

potato per integralità

$x_1 \geq 2$

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$

$z(\mathrm{LP}_5) = 18$

$\mathrm{LB} = 16$

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$16 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 18$$

- **Iterazione 3**

Il problema LP_5 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_2. I vincoli di branching sono:

$$x_2 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor}_{=3} \quad \text{e} \quad x_2 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + 1}_{=4}$$

Con questi vincoli di branching si creano i due problemi LP_6 e LP_7.

(a) Soluzione del problema LP_6

Consideriamo il problema LP_6 in forma standard:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & = & 24 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & & & & = & -1 \\
 & & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & & & = & -2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & & & = & 4 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & & & - & x_8 & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & & & & & & & & & & + \; x_9 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8, & & x_9 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 + x_9 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_9 = 3 - x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_9 = 3 - \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_9 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 = 2 + x_8 \\
x_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8 \\
x_4 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{10}{3}\,x_8 \\
x_5 = 1 + x_8 \\
x_6 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8 \\
x_7 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8 \\
x_9 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8 \\
z = 18 - x_3 - 3\,x_8
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 8\}$ e

– la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = 1,$$
$$\bar{x}_6 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_7 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_9 = -\frac{1}{3},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_8 = 0 \quad \text{di valore} \quad 18$$

– la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0,$$
$$\bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0, \quad \bar{\pi}_9 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = 1, \quad \bar{\pi}_8 = 3 \quad \text{di valore} \quad 18$$

Se aumentiamo il valore di π_9, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= 1 - \frac{1}{3}\pi_9 \\ \pi_8 &= 3 - \frac{7}{3}\pi_9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{1 - \frac{1}{3}\pi_9 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{3 - \frac{7}{3}\pi_9 \geq 0}_{\pi_8 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_9 &\leq 3 \\ \pi_9 &\leq \frac{9}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_9 fino a $\min\left\{3, \frac{9}{7}\right\} = \frac{9}{7}$, il valore di π_8 scende a 0. Abbiamo quindi che:

> π_9 diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_9 diventa una variabile primale fuori base.
>
> π_8 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_8 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_9 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_8 \quad \Rightarrow \quad x_8 = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 2 + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9\right) = \frac{15}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9$$

$$x_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9\right) = 3 - x_9$$

$$x_4 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9\right) = \frac{15}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_9$$

$$x_5 = 1 + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9\right) = \frac{8}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9$$

$$x_6 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9\right) = 1 - x_9$$

$$x_7 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_9\right) = 1 + x_9$$

$$z = 18 - x_3 - 3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_9\right) = \frac{123}{7} - \frac{4}{7}\,x_3 - \frac{9}{7}\,x_9$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{15}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_9 \\
x_2 = 3 - x_9 \\
x_4 = \frac{15}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{10}{7}\,x_9 \\
x_5 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_9 \\
x_6 = 1 - x_9 \\
x_7 = 1 + x_9 \\
x_8 = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\,x_3 + \frac{3}{7}\,x_9 \\
z = \frac{123}{7} - \frac{4}{7}\,x_3 - \frac{9}{7}\,x_9
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 9\}$ e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{15}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_4 = \frac{15}{7}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{8}{7},$$
$$\tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{x}_7 = 1, \quad \tilde{x}_8 = \frac{1}{7},$$
$$\tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_9 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{123}{7}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_6 = 0, \quad \tilde{\pi}_7 = 0, \quad \tilde{\pi}_8 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_3 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{\pi}_9 = \frac{9}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{123}{7}$$

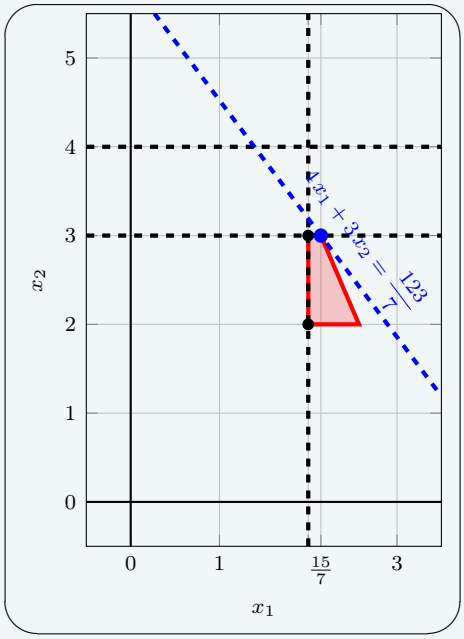


Figura 7.55: Nodo 6: regione ammissibile di LP_6 (rossa), con il vincolo di branching $x_2 \leq 3$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{15}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_6) = \frac{123}{7}$$

Il problema LP_6 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_6) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad \underbrace{\left\lfloor \frac{123}{7} \right\rfloor}_{=17} > 16$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_6)$ è **frazionaria**, di conseguenza il problema LP_6 è **inserito nella lista dei problemi** L.

(b) Soluzione del problema LP_7

Consideriamo il problema LP_7 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & & & \\
& 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & = & 24 \\
& -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & & = & 3 \\
& -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & & & = & -1 \\
& & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & & = & -2 \\
& & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & & = & 4 \\
& x_1 & & & & & & & & & & & & & - & x_8 & = & 2 \\
& & & x_2 & & & & & & & & & & & & x_9 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8, & x_9 & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_2 - x_9 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_9 = -4 + x_2$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_9 = -4 + \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_9 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_8 \\ x_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8 \\ x_4 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{10}{3}\,x_8 \\ x_5 = 1 + x_8 \\ x_6 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8 \\ x_7 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x_3 + \frac{7}{3}\,x_8 \\ x_9 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - \frac{7}{3}\,x_8 \\ z = 18 - x_3 - 3\,x_8 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 8\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = \frac{10}{3}, \quad \bar{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \bar{x}_5 = 1,$$
$$\bar{x}_6 = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_7 = \frac{2}{3}, \quad \bar{x}_9 = -\frac{2}{3},$$
$$\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_8 = 0 \quad \text{di valore} \quad 18$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0,$$
$$\bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0, \quad \bar{\pi}_9 = 0,$$
$$\bar{\pi}_3 = 1, \quad \bar{\pi}_8 = 3 \quad \text{di valore} \quad 18$$

Se aumentiamo il valore di π_9, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= 1 + \frac{1}{3}\pi_9 \\ \pi_8 &= 3 + \frac{7}{3}\pi_9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{1 + \frac{1}{3}\pi_9 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{3 + \frac{7}{3}\pi_9 \geq 0}_{\pi_8 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_9 &\geq -3 \\ \pi_9 &\geq -\frac{9}{7} \end{cases}$$

Di conseguenza, possiamo aumentare il valore di π_9 senza violare l'ammissibilità duale, il che implica che il problema duale è **illimitato**. Di conseguenza, il problema primale LP_7 è **inammissibile**, e il nodo di branching corrispondente è potato per inammissibilità.

Alla fine della terza iterazione, il branching su x_2 dal Nodo 5 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 6, e il nodo di branching verso l'alto, Nodo 7. Il Nodo 6 è inserito nella lista L, mentre il Nodo 7 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 5

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \dfrac{10}{3}$

$z(\mathrm{LP}_5) = 18$

$\mathrm{LB} = 16$

$x_2 \leq 3$ | $x_2 \geq 4$

Nodo 6

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{x}_1 = \dfrac{15}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_6) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \dfrac{123}{7} \right\rfloor}_{=17}$

$\mathrm{LB} = 16$

Nodo 7

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq -1 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

potato per inammissibilità

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$16 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{123}{7} \right\rfloor}_{=17}$$

- **Iterazione 4**

Il problema LP_6 viene estratto ed eliminato dalla lista dei problemi L.

La variabile di branching è x_1. I vincoli di branching sono:

$$x_1 \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor}_{=2} \quad \text{e} \quad x_1 \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{15}{7} \right\rfloor + 1}_{=3}$$

Il problema LP_8 si crea con il primo vincolo di branching (il secondo figlio si risolve solo se necessario).

(a) Soluzione del problema LP_8

Consideriamo il problema LP_8 in forma standard:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & & & & & & & & & & \\
& 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & = & 24 \\
& -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & & & = & 3 \\
& -x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & & & & & = & -1 \\
& & & -x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & & & = & -2 \\
& & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & & & = & 4 \\
& x_1 & & & & & & & & & & & & & - & x_8 & = & 2 \\
& & & x_2 & & & & & & & & & & & & & + & x_9 & = & 3 \\
& x_1 & & & & & & & & & & & & & & & & & + & x_{10} & = & 2 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8, & & x_9, & & x_{10} & \geq & 0
\end{array}$$

Per il vincolo di branching abbiamo:

$$x_1 + x_{10} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_{10} = 2 - x_1$$

Usando le equazioni del dizionario ottimo possiamo esprimere questo vincolo di branching in funzione delle variabili fuori base. Sostituendo, otteniamo

$$x_{10} = 2 - \left(\frac{15}{7} - \frac{1}{7}\, x_3 + \frac{3}{7}\, x_9 \right) \qquad \Rightarrow \qquad x_{10} = -\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\, x_3 - \frac{3}{7}\, x_9$$

Aggiungiamo quindi questa equazione al precedente dizionario ottimo e otteniamo il seguente dizionario:

$$
\begin{cases}
x_1 &= \frac{15}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9 \\
x_2 &= 3 - x_9 \\
x_4 &= \frac{15}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_9 \\
x_5 &= \frac{8}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9 \\
x_6 &= 1 - x_9 \\
x_7 &= 1 + x_9 \\
x_8 &= \frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_9 \\
x_{10} &= -\frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_9 \\
z &= \frac{123}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_9
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 9\}$ e

- la soluzione di base primale non ammissibile è:

$$
\bar{x}_1 = \frac{15}{7}, \quad \bar{x}_2 = 3, \quad \bar{x}_4 = \frac{15}{7}, \quad \bar{x}_5 = \frac{8}{7},
$$
$$
\bar{x}_6 = 1, \quad \bar{x}_7 = 1, \quad \bar{x}_8 = \frac{1}{7}, \quad \bar{x}_{10} = -\frac{1}{7},
$$
$$
\bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_9 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{123}{7}
$$

- la soluzione di base duale ammissibile è:

$$
\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 0, \quad \bar{\pi}_4 = 0, \quad \bar{\pi}_5 = 0,
$$
$$
\bar{\pi}_6 = 0, \quad \bar{\pi}_7 = 0, \quad \bar{\pi}_8 = 0, \quad \bar{\pi}_{10} = 0,
$$
$$
\bar{\pi}_3 = \frac{4}{7}, \quad \bar{\pi}_9 = \frac{9}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{123}{7}
$$

Se aumentiamo il valore di π_{10}, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$
\begin{cases}
\pi_3 &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}\pi_{10} \\
\pi_9 &= \frac{9}{7} + \frac{3}{7}\pi_{10}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\underbrace{\frac{4}{7} - \frac{1}{7}\pi_{10} \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\
\underbrace{\frac{9}{7} + \frac{3}{7}\pi_{10} \geq 0}_{\pi_9 \geq 0}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\pi_{10} &\leq 4 \\
\pi_{10} &\geq -3
\end{cases}
$$

Aumentando il valore di π_{10} fino a 4, il valore di π_3 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_{10} diventa una variabile duale in base e, di conseguenza, x_{10} diventa una variabile primale fuori base.

π_3 diventa una variabile duale fuori base e, di conseguenza, x_3 diventa una variabile primale in base.

Abbiamo:

$$x_{10} = -\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\,x_3 - \frac{3}{7}\,x_9 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10}$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{15}{7} - \frac{1}{7}\,(1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10}) + \frac{3}{7}\,x_9 = 2 - x_{10}$$

$$x_4 = \frac{15}{7} - \frac{1}{7}\,(1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10}) + \frac{10}{7}\,x_9 = 2 + x_9 - x_{10}$$

$$x_5 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7}\,(1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10}) + \frac{3}{7}\,x_9 = 1 - x_{10}$$

$$x_8 = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\,(1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10}) + \frac{3}{7}\,x_9 = 0 - x_{10}$$

$$z = \frac{123}{7} - \frac{4}{7}\,(1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10}) - \frac{9}{7}\,x_9 = 17 - 3\,x_9 - 4\,x_{10}$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases}
x_1 = 2 - x_{10} \\
x_2 = 3 - x_9 \\
x_3 = 1 + 3\,x_9 + 7\,x_{10} \\
x_4 = 2 + x_9 - x_{10} \\
x_5 = 1 - x_{10} \\
x_6 = 1 - x_9 \\
x_7 = 1 + x_9 \\
x_8 = 0 - x_{10} \\
z = 17 - 3\,x_9 - 4\,x_{10}
\end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $\mathcal{N} = \{9, 10\}$ e

– la soluzione di base primale ottima è:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 2, \\
&\tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{x}_7 = 1, \quad \tilde{x}_8 = 0, \\
&\tilde{x}_9 = 0, \quad \tilde{x}_{10} = 0 \quad \text{di valore} \quad 17
\end{aligned}$$

– la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_5 = 0, \quad \tilde{\pi}_6 = 0, \quad \tilde{\pi}_7 = 0, \quad \tilde{\pi}_8 = 0,$$
$$\tilde{\pi}_9 = 3, \quad \tilde{\pi}_{10} = 4 \quad \text{di valore} \quad 17$$

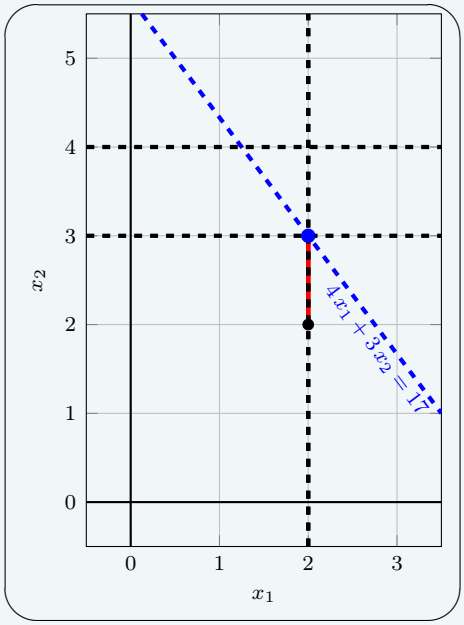


Figura 7.56: Nodo 8: regione ammissibile di LP_8 (rossa), con il vincolo di branching $x_1 \leq 2$ (tratteggiato), e la sua soluzione ottima (blu).

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_8)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_8) = 17$$

Il problema LP_8 è **ammissibile** e abbiamo

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_8) \rfloor > \mathrm{LB} \qquad \text{poiché} \qquad 17 > 16$$

La soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_8)$ è **intera**, di conseguenza il lower bound LB diventa 17 e la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP})$ diventa $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 3$.

Di conseguenza, il nodo di branching è potato per integralità.

Alla fine della quarta iterazione, il branching su x_1 dal Nodo 6 ha generato il nodo di branching verso il basso, Nodo 8. Questo nodo è potato per integralità. Il nodo di branching verso l'alto non è risolto, poiché dopo il Nodo 8 il lower bound soddisfa

$$\lfloor z(\mathrm{LP}_6) \rfloor \leq \mathrm{LB}.$$

Questa è la porzione dell'albero di branch-and-bound che mostra i problemi LP dei nodi di branching risolti:

Nodo 6

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\
& 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& -x_1 \leq -1 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 2 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\tilde{x}_1 = \frac{15}{7}, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$\lfloor z(\mathrm{LP}_6) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{123}{7} \right\rfloor}_{=17}$

$\mathrm{LB} = 16$

$x_1 \leq 2$

Nodo 8

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\
& 7x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& -x_1 \leq -1 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 2 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 3$

$z(\mathrm{LP}_8) = 17$

$\mathrm{LB} = 17$

potato per integralità

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

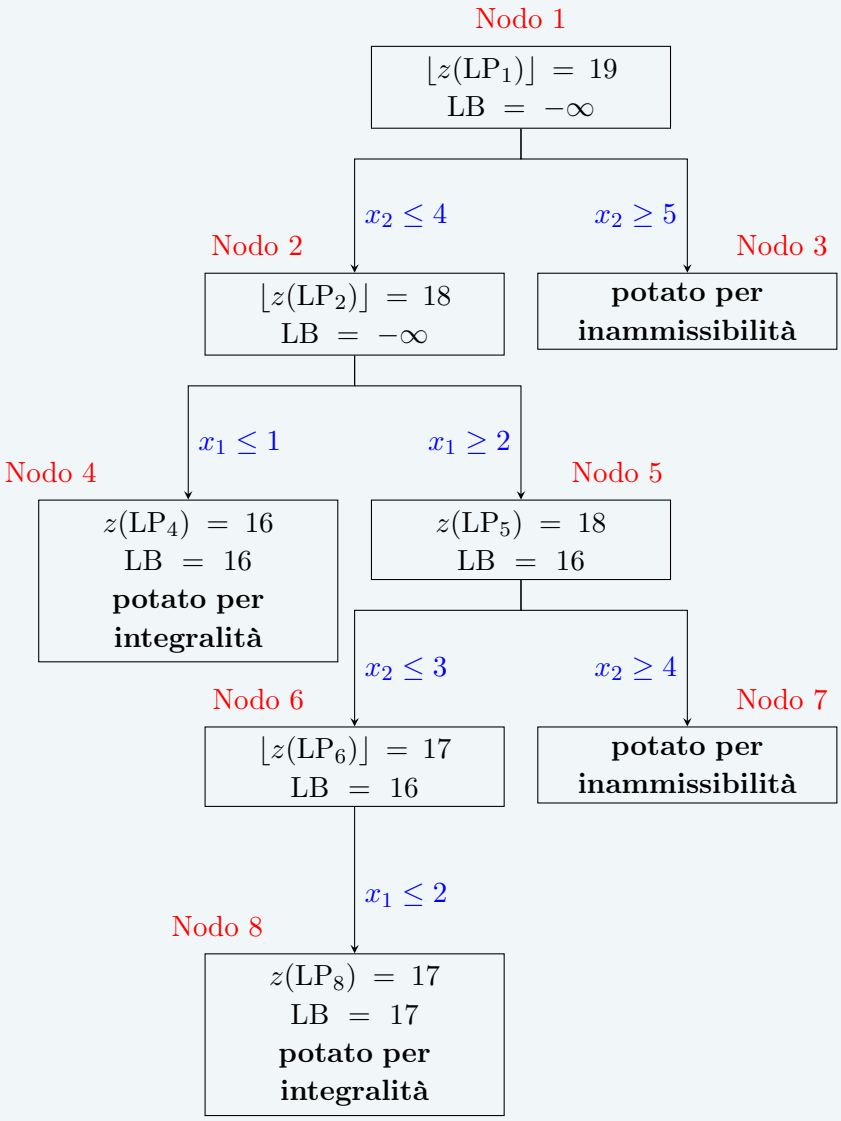
$$17 \quad \leq \quad z(\mathrm{ILP}) \quad \leq \quad 17$$

- **Terminazione**

Poiché la lista L è vuota, il lower bound LB è uguale all'upper bound UB e il problema ILP è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 17$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$ è $\tilde{x}_1 = 2, \tilde{x}_2 = 3$ (la soluzione incumbent $\bar{\boldsymbol{x}}(\text{ILP})$).

2. L'albero di branch-and-bound finale è:



I motivi per cui i nodi di branching sono potati sono i seguenti.

- Il Nodo 1 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_1) \rfloor = 19$: si esegue il branching su x_2.
- Il Nodo 2 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_2) \rfloor = 18$: si esegue il branching su x_1.
- Il Nodo 3 è potato per inammissibilità: il problema LP_3 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 4 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_4) = (1, 4)$ è intera, con valore 16, e diventa la soluzione incumbent.

- Il Nodo 5 ha una soluzione ottima frazionaria con $z(\text{LP}_5) = 18$: si esegue il branching su x_2.
- Il Nodo 6 ha una soluzione ottima frazionaria con $\lfloor z(\text{LP}_6) \rfloor = 17$: si esegue il branching su x_1.
- Il nodo di branching verso l'alto del Nodo 6 non è risolto, e non è disegnato, poiché $\lfloor z(\text{LP}_6) \rfloor = 17 \leq \text{LB} = 17$ dopo il suo primo figlio.
- Il Nodo 7 è potato per inammissibilità: il problema LP_7 non ha soluzioni ammissibili.
- Il Nodo 8 è potato per integralità: $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_8) = (2, 3)$ è intera, con valore 17, e diventa la soluzione incumbent.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 17$ e l'algoritmo branch-and-bound restituisce la soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (2, 3)$.

7.2 Strong branching

Esercizio 7.13 — Strong branching ($P1$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 8\ x_2 & & \\ & 3\ x_1 & + & 6\ x_2 & \leq & 16 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\text{LP}_1) - z(\text{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\text{LP}_1) - z(\text{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

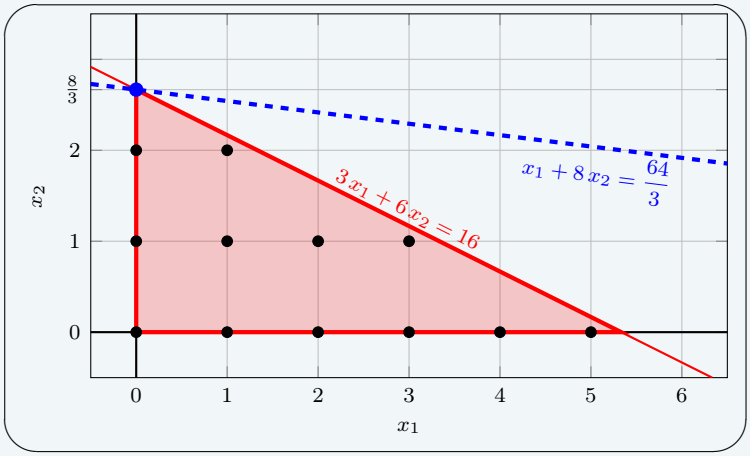


Figura 7.57: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{64}{3}$$

Solo x_2 è frazionaria: è l'unica variabile candidata per il branching, e lo strong branching ne calcola comunque il punteggio.

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_2:

   - Con $x_2 \leq 2$, una soluzione ottima di LP_2 è

   $$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{52}{3},$$

   di conseguenza

   $$\delta_1^d(x_2) = \frac{64}{3} - \frac{52}{3} = 4.$$

   - Con $x_2 \geq 3$, il problema LP_3 è **inammissibile**, di conseguenza

   $$\delta_1^u(x_2) = +\infty$$

   Per la variabile x_2 abbiamo:

   $$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\{4,\, +\infty\} = 4.$$

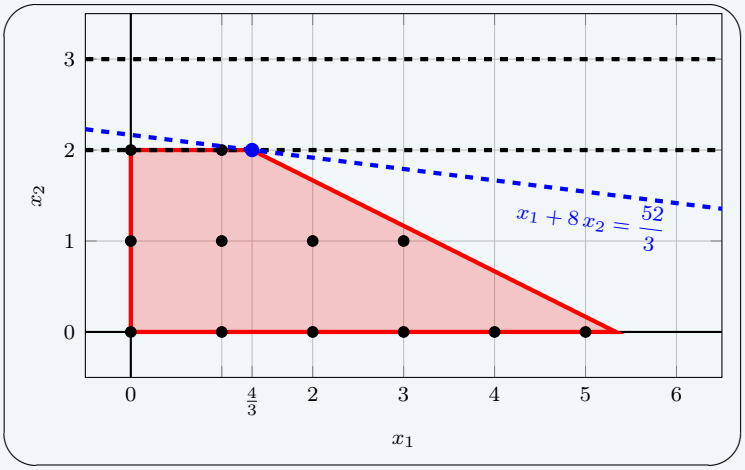


Figura 7.58: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 2$) e LP_3 ($x_2 \geq 3$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_2, l'unica variabile frazionaria, con punteggio 4.

Esercizio 7.14 — Strong branching ($P2$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 3\ x_2 & & \\ & -4\ x_1 & + & 10\ x_2 & \leq & 35 \\ & 3\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

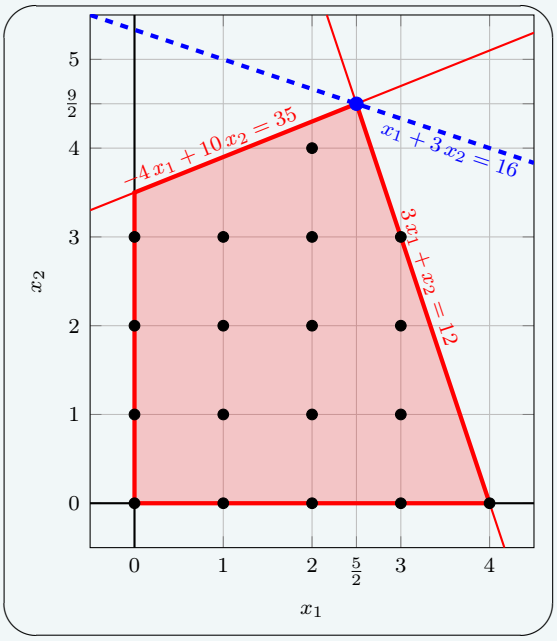


Figura 7.59: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{9}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 16$$

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 2$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{43}{10} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{149}{10},$$

   di conseguenza

$$\delta_1^d(x_1) = 16 - \frac{149}{10} = \frac{11}{10}.$$

- Con $x_1 \geq 3$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 12,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = 16 - 12 = 4.$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{11}{10},\, 4\right\} = \frac{11}{10}.$$

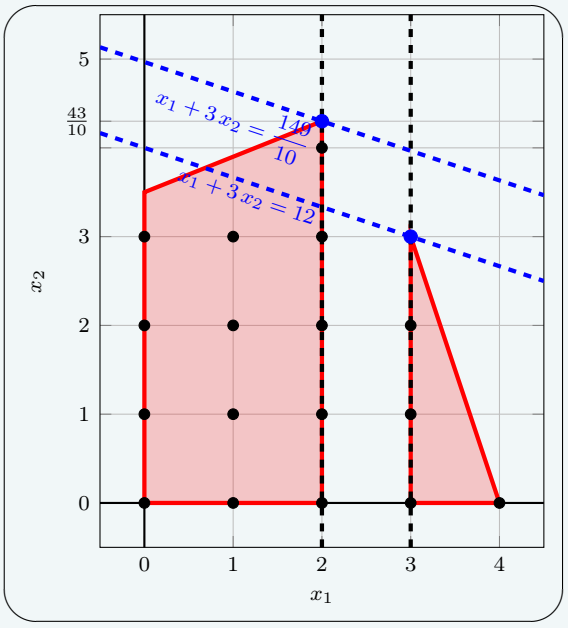


Figura 7.60: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 2$) e LP_3 ($x_1 \geq 3$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

(b) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 4$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{44}{3},$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = 16 - \frac{44}{3} = \frac{4}{3}.$$

- Con $x_2 \geq 5$, il problema LP_3 è **inammissibile**, di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = +\infty$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{4}{3},\, +\infty\right\} = \frac{4}{3}.$$

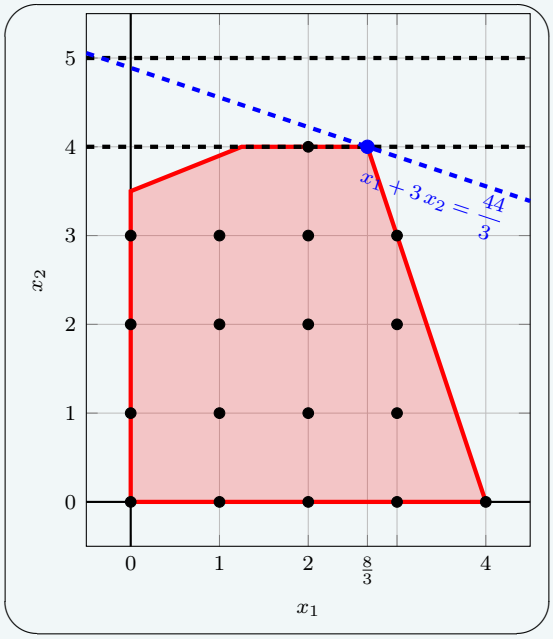


Figura 7.61: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 4$) e LP_3 ($x_2 \geq 5$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_2, perché il suo punteggio è il più alto:

$$\frac{4}{3} > \frac{11}{10}.$$

Esercizio 7.15 — Strong branching ($P3$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & 8\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 19 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

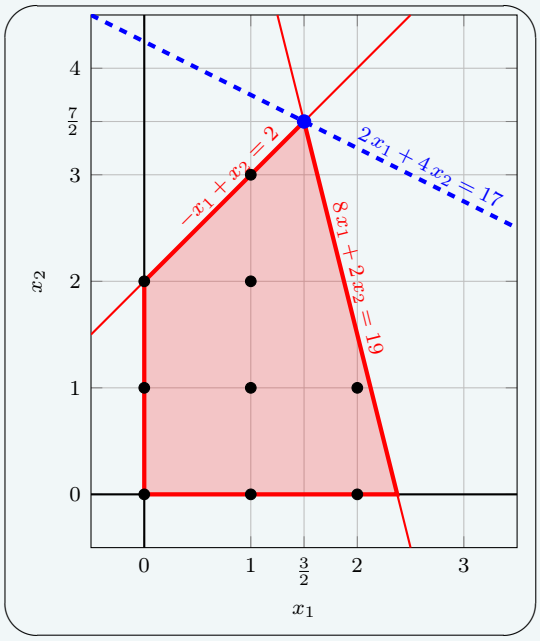


Figura 7.62: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 17$$

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 1$, una soluzione ottima di LP_2 è

   $$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = 14,$$

   di conseguenza

   $$\delta_1^d(x_1) = 17 - 14 = 3.$$

- Con $x_1 \geq 2$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 10,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = 17 - 10 = 7.$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\{3,\, 7\} = 3.$$

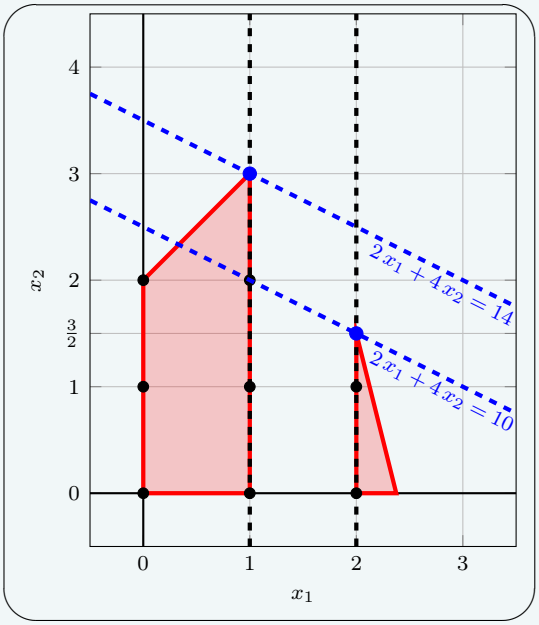


Figura 7.63: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 1$) e LP_3 ($x_1 \geq 2$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

(b) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 3$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{61}{4},$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = 17 - \frac{61}{4} = \frac{7}{4}.$$

- Con $x_2 \geq 4$, il problema LP_3 è **inammissibile**, di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = +\infty$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{7}{4},\, +\infty\right\} = \frac{7}{4}.$$

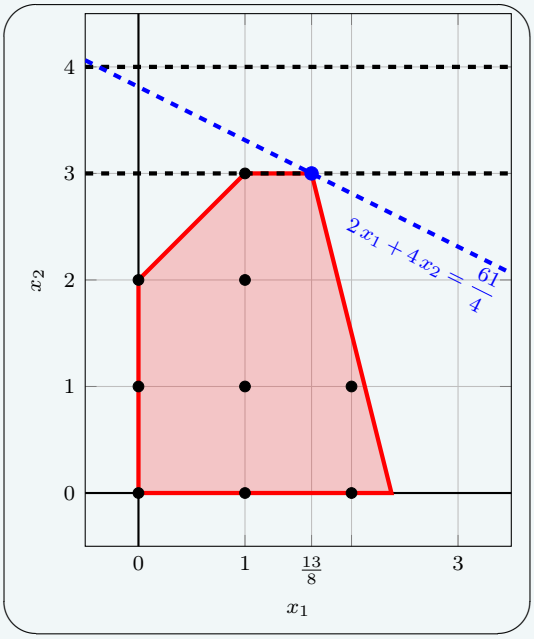


Figura 7.64: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 3$) e LP_3 ($x_2 \geq 4$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_1, perché il suo punteggio è il più alto:

$$3 > \frac{7}{4}.$$

Esercizio 7.16 — Strong branching ($P4$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 5\ x_1 & + & 3\ x_2 & & \\ & 2\ x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ & x_1 & + & 8\ x_2 & \leq & 32 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

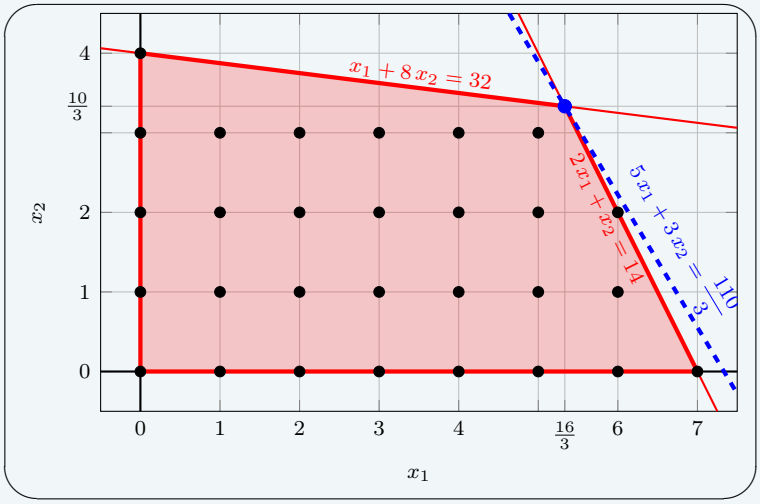


Figura 7.65: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.
Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{16}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{10}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{110}{3}$$

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 5$, una soluzione ottima di LP_2 è

     $$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{27}{8} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{281}{8},$$

     di conseguenza

     $$\delta_1^d(x_1) = \frac{110}{3} - \frac{281}{8} = \frac{37}{24}.$$

   - Con $x_1 \geq 6$, una soluzione ottima di LP_3 è

     $$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = 2 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 36,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = \frac{110}{3} - 36 = \frac{2}{3}.$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{37}{24},\, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

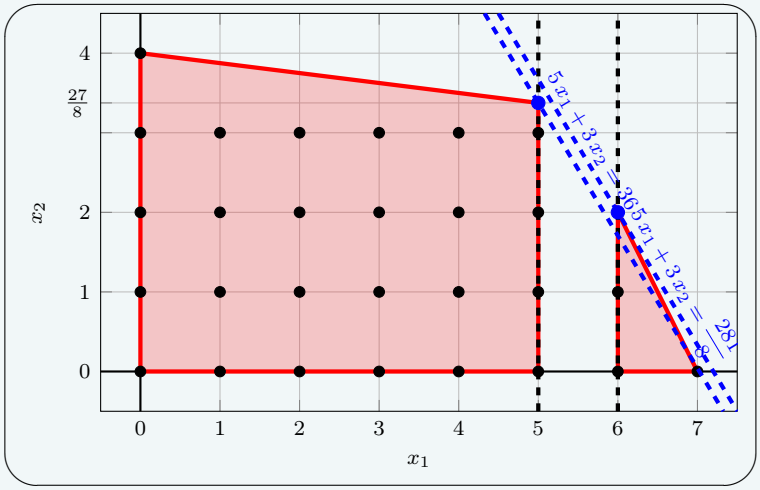


Figura 7.66: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 5$) e LP_3 ($x_1 \geq 6$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

(b) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 3$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{11}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{73}{2},$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = \frac{110}{3} - \frac{73}{2} = \frac{1}{6}.$$

- Con $x_2 \geq 4$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 12,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = \frac{110}{3} - 12 = \frac{74}{3}.$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{1}{6},\, \frac{74}{3}\right\} = \frac{1}{6}.$$

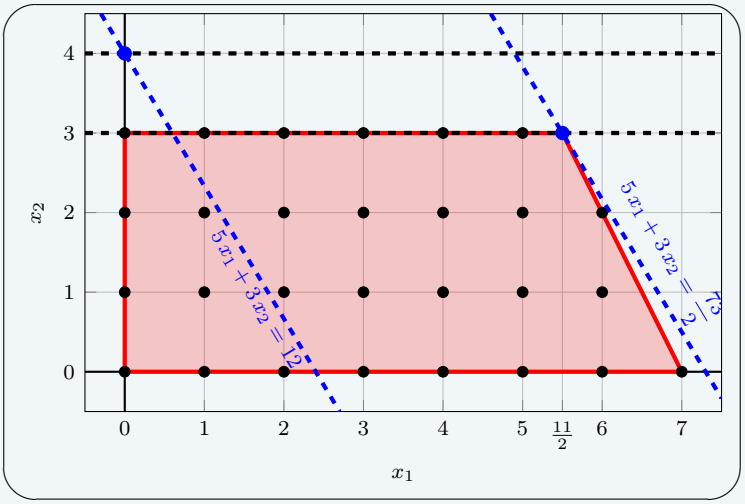


Figura 7.67: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 3$) e LP_3 ($x_2 \geq 4$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_1, perché il suo punteggio è il più alto:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{6}.$$

Esercizio 7.17 — Strong branching ($P5$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2\ x_1 & + & 3\ x_2 & & \\ & 6\ x_1 & + & 21\ x_2 & \leq & 77 \\ & 8\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 36 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

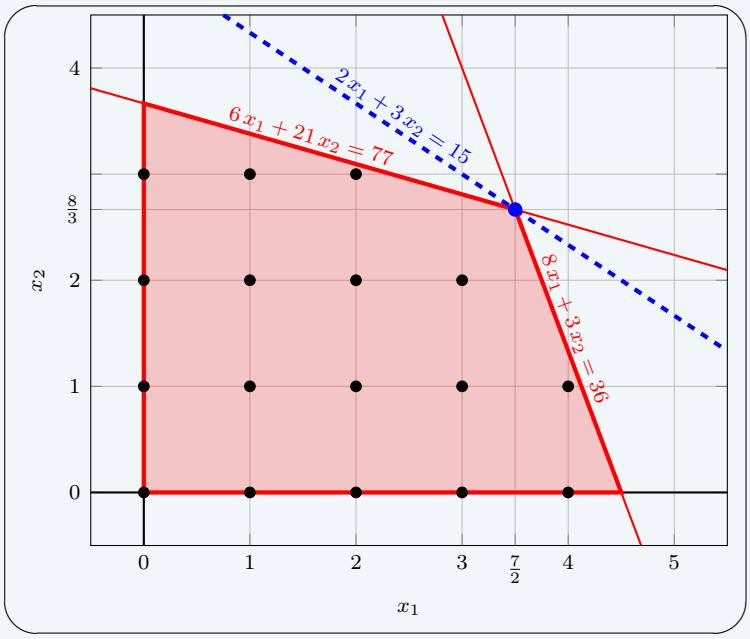


Figura 7.68: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{8}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 15$$

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 3$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{59}{21} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{101}{7},$$

   di conseguenza

$$\delta_1^d(x_1) = 15 - \frac{101}{7} = \frac{4}{7}.$$

- Con $x_1 \geq 4$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 12,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = 15 - 12 = 3.$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{4}{7},\, 3\right\} = \frac{4}{7}.$$

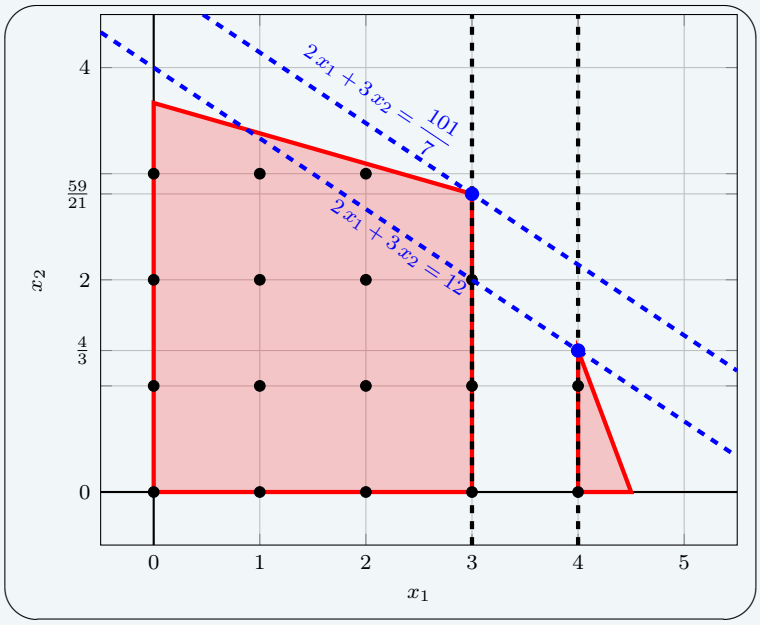


Figura 7.69: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 3$) e LP_3 ($x_1 \geq 4$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

(b) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 2$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{15}{4}, \quad \tilde{x}_2 = 2 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{27}{2},$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = 15 - \frac{27}{2} = \frac{3}{2}.$$

- Con $x_2 \geq 3$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = \frac{41}{3},$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = 15 - \frac{41}{3} = \frac{4}{3}.$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{3}{2},\, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3}.$$

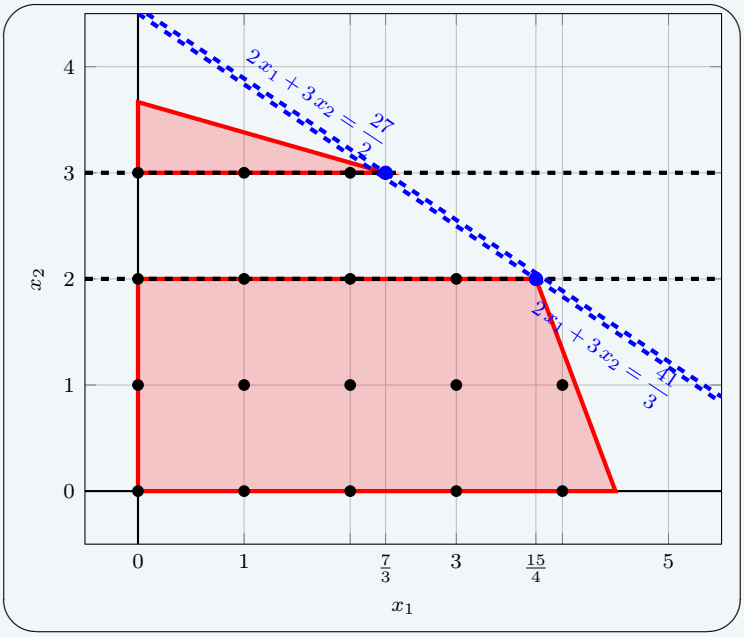


Figura 7.70: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 2$) e LP_3 ($x_2 \geq 3$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_2, perché il suo punteggio è il più alto:

$$\frac{4}{3} > \frac{4}{7}.$$

Esercizio 7.18 — Strong branching ($P6$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & 4\ x_1 & + & 15\ x_2 & \leq & 70 \\ & 12\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 52 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

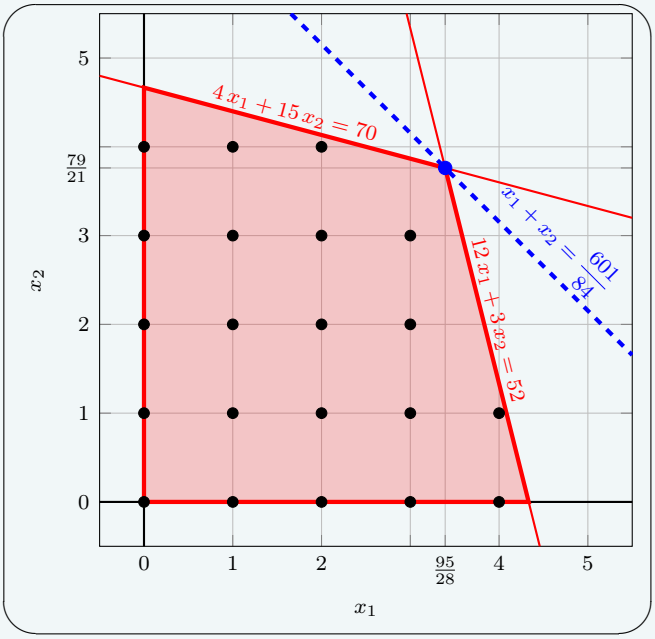


Figura 7.71: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{95}{28}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{79}{21}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{601}{84}$$

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 3$, una soluzione ottima di LP_2 è

   $$\tilde{x}_1 = 3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{58}{15} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{103}{15},$$

   di conseguenza

   $$\delta_1^d(x_1) = \frac{601}{84} - \frac{103}{15} = \frac{121}{420}.$$

- Con $x_1 \geq 4$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = \frac{16}{3},$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = \frac{601}{84} - \frac{16}{3} = \frac{51}{28}.$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{121}{420},\, \frac{51}{28}\right\} = \frac{121}{420}.$$

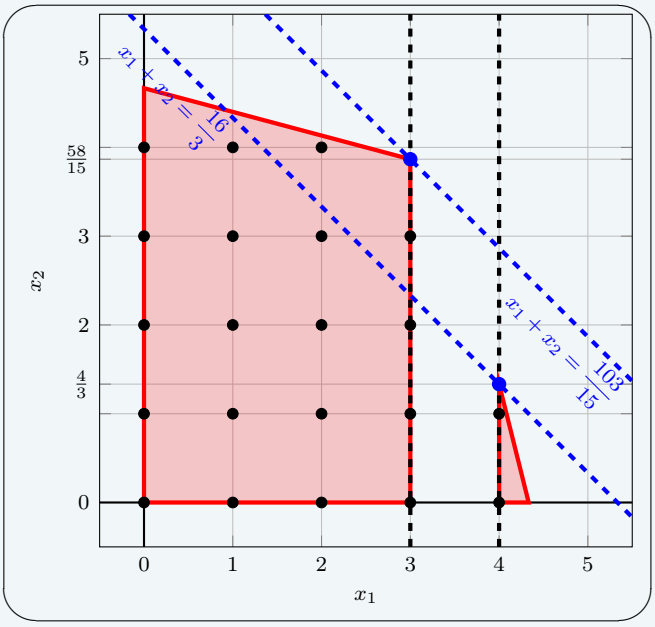


Figura 7.72: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 3$) e LP_3 ($x_1 \geq 4$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

(b) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 3$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{43}{12}, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{79}{12},$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = \frac{601}{84} - \frac{79}{12} = \frac{4}{7}.$$

- Con $x_2 \geq 4$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = \frac{13}{2},$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = \frac{601}{84} - \frac{13}{2} = \frac{55}{84}.$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{4}{7},\, \frac{55}{84}\right\} = \frac{4}{7}.$$

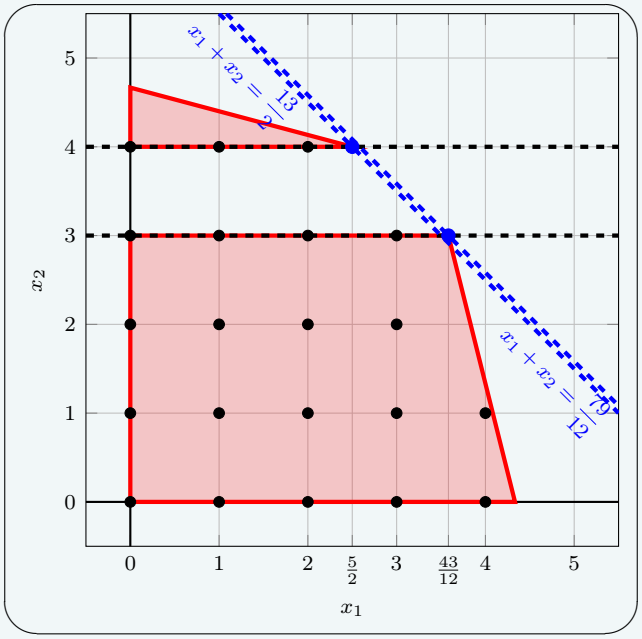


Figura 7.73: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 3$) e LP_3 ($x_2 \geq 4$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_2, perché il suo punteggio è il più alto:

$$\frac{4}{7} > \frac{121}{420}.$$

Esercizio 7.19 — Strong branching ($P7$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 3\,x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 4\,x_2 & \leq & 12 \\ & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

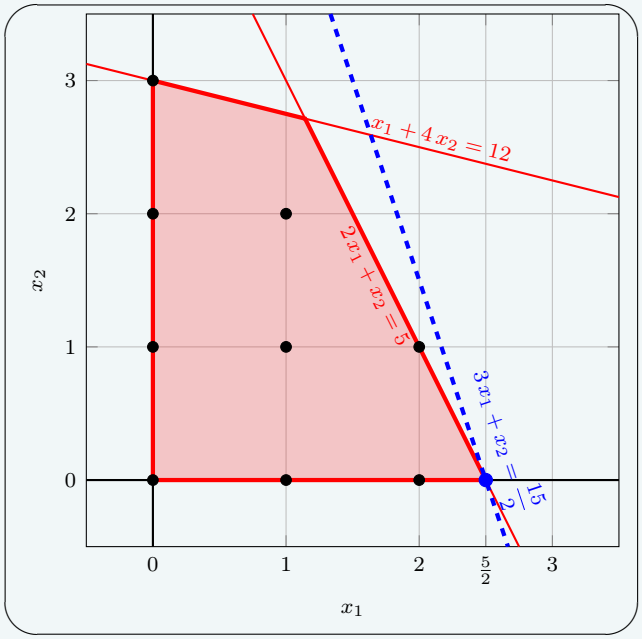


Figura 7.74: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{5}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{15}{2}$$

Solo x_1 è frazionaria: è l'unica variabile candidata per il branching, e lo strong branching ne calcola comunque il punteggio.

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 2$, una soluzione ottima di LP_2 è

   $$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = 7,$$

   di conseguenza

   $$\delta_1^d(x_1) = \frac{15}{2} - 7 = \frac{1}{2}.$$

- Con $x_1 \geq 3$, il problema LP_3 è **inammissibile**, di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = +\infty$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{1}{2},\, +\infty\right\} = \frac{1}{2}.$$

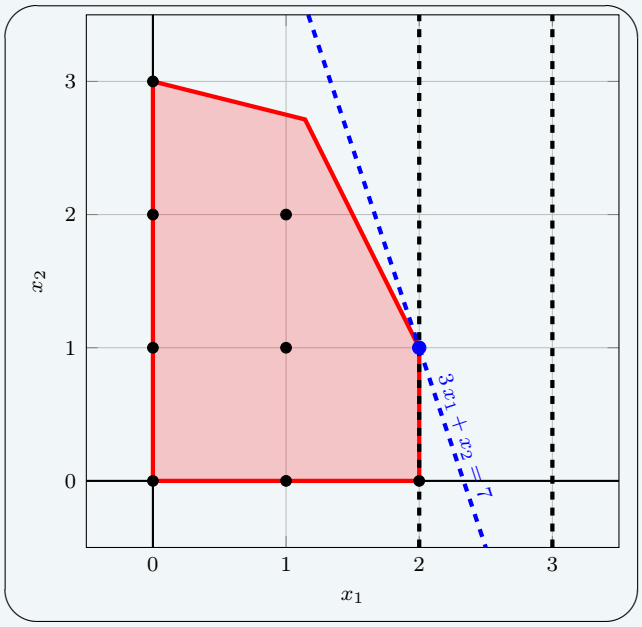


Figura 7.75: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 2$) e LP_3 ($x_1 \geq 3$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_1, l'unica variabile frazionaria, con punteggio $\frac{1}{2}$.

Esercizio 7.20 — Strong branching ($P8$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\ & -x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.

2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

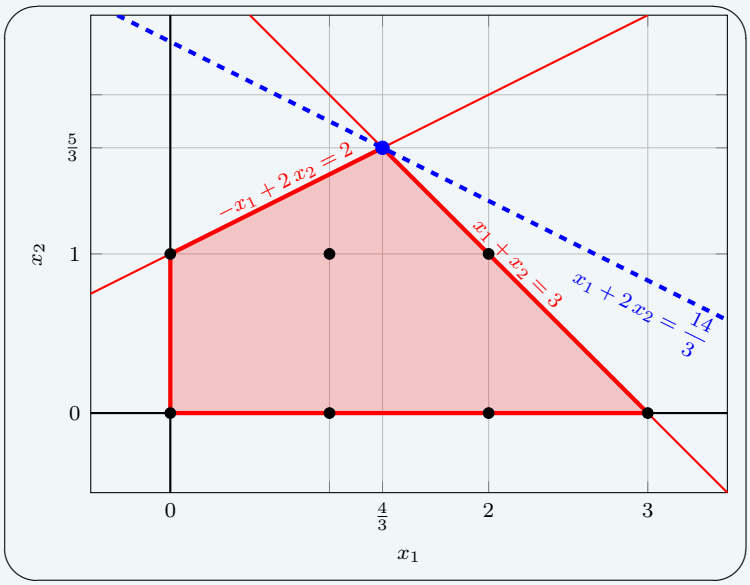


Figura 7.76: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{3}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = \frac{14}{3}$$

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 1$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = 4,$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_1) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

- Con $x_1 \geq 2$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 4,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{2}{3},\, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

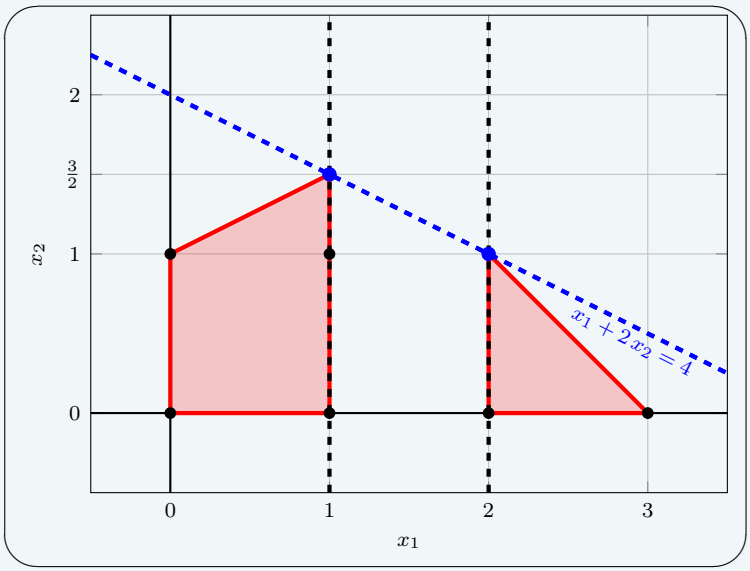


Figura 7.77: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 1$) e LP_3 ($x_1 \geq 2$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

(b) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 1$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = 4,$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

- Con $x_2 \geq 2$, il problema LP_3 è **inammissibile**, di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = +\infty$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{2}{3},\, +\infty\right\} = \frac{2}{3}.$$

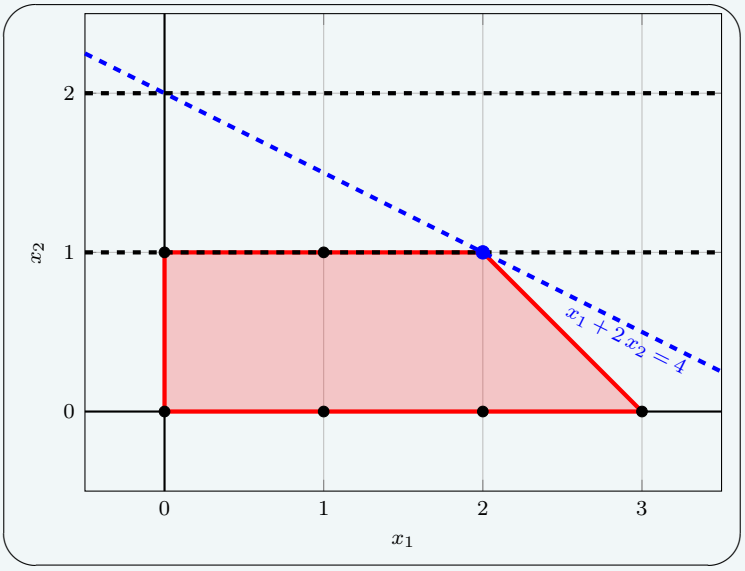


Figura 7.78: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 1$) e LP_3 ($x_2 \geq 2$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Le due variabili hanno lo stesso punteggio $\frac{2}{3}$: con la regola di spareggio (indice minimo), lo strong branching seleziona x_1.

Esercizio 7.21 — Strong branching ($P9$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 6\,x_1 & + & 4\,x_2 & \leq & 39 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.
2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j), \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

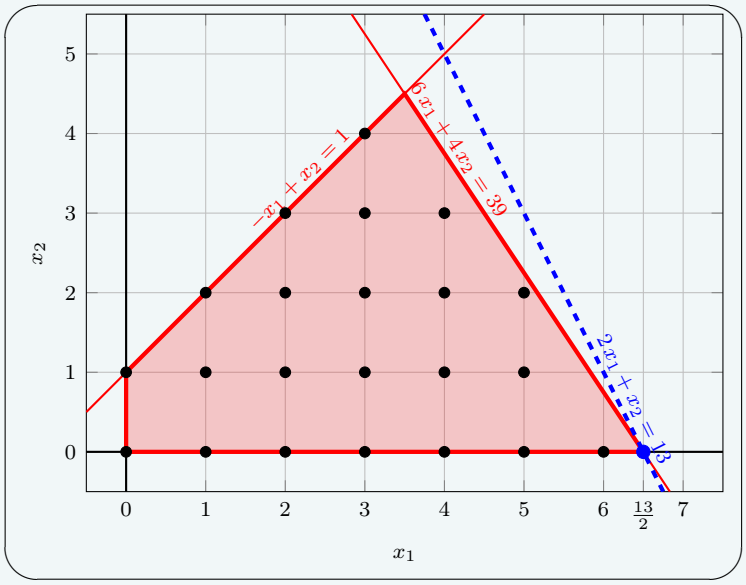


Figura 7.79: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{2}, \quad \tilde{x}_2 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 13$$

Solo x_1 è frazionaria: è l'unica variabile candidata per il branching, e lo strong branching ne calcola comunque il punteggio.

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_1:

   - Con $x_1 \leq 6$, una soluzione ottima di LP_2 è

   $$\tilde{x}_1 = 6, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{51}{4},$$

   di conseguenza

   $$\delta_1^d(x_1) = 13 - \frac{51}{4} = \frac{1}{4}.$$

- Con $x_1 \geq 7$, il problema LP_3 è **inammissibile**, di conseguenza

$$\delta_1^u(x_1) = +\infty$$

Per la variabile x_1 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_1),\, \delta_1^u(x_1)\right\} = \min\left\{\frac{1}{4},\, +\infty\right\} = \frac{1}{4}.$$

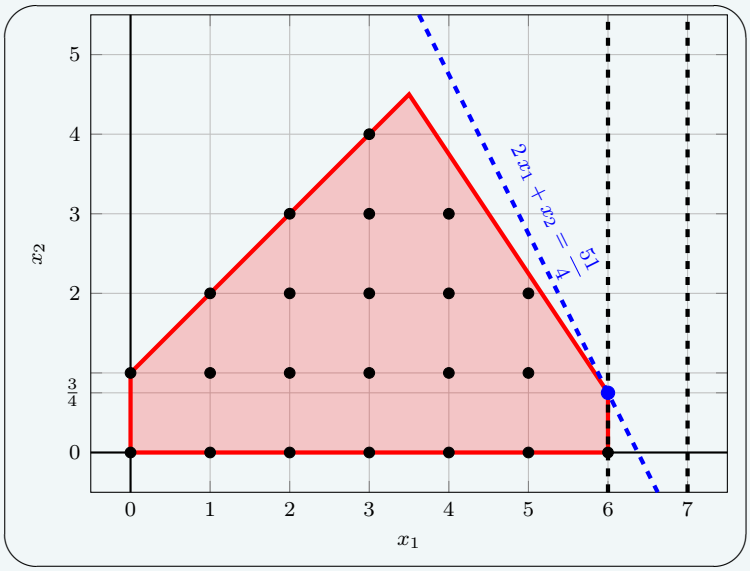


Figura 7.80: Branching su x_1: regioni ammissibili di LP_2 ($x_1 \leq 6$) e LP_3 ($x_1 \geq 7$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_1, l'unica variabile frazionaria, con punteggio $\frac{1}{4}$.

Esercizio 7.22 — Strong branching ($P10$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 5\ x_1 & + & 2\ x_2 & & \\ & -x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 12 \\ & 3\ x_1 & - & 2\ x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare LP_1 del problema PLI.

2. Determinare la variabile di branching con la strategia di selezione della variabile di branching strong branching (in caso di pareggio, scegliere la variabile di indice minimo). Risolvere graficamente i problemi LP dei nodi di branching.

Soluzione

Per una variabile frazionaria x_j di $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$, i due nodi di branching sono LP_2 (con $x_j \leq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor$) e LP_3 (con $x_j \geq \lfloor \tilde{x}_j \rfloor + 1$), e

$$\delta_1^d(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_2), \qquad \delta_1^u(x_j) = z(\mathrm{LP}_1) - z(\mathrm{LP}_3),$$

con $\delta = +\infty$ per un nodo inammissibile. Lo strong branching seleziona la variabile con il punteggio più alto $\min\{\delta_1^d(x_j),\, \delta_1^u(x_j)\}$.

1. Per il problema LP_1, graficamente abbiamo:

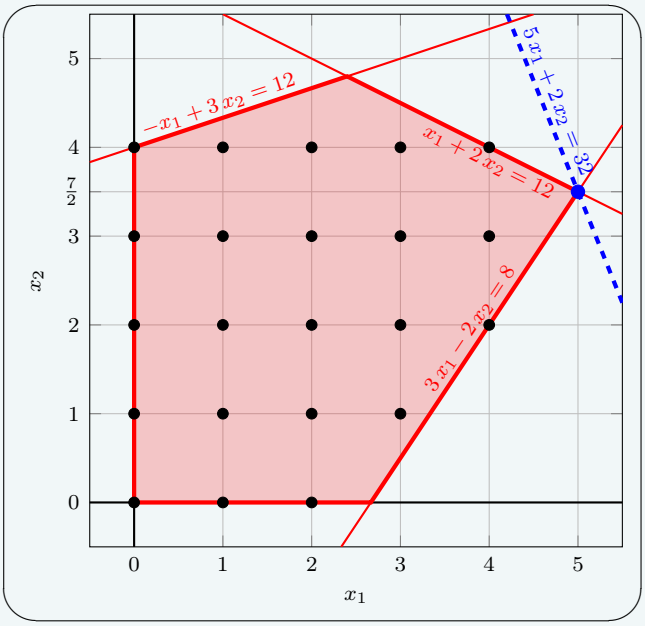


Figura 7.81: Regione ammissibile di LP_1 (in rosso), punti interi (in nero) e soluzione ottima di LP_1 (in blu) con la retta della funzione obiettivo che passa per essa.

Una soluzione ottima $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{2}$$

il valore ottimo è:

$$z(\mathrm{LP}_1) = 32$$

Solo x_2 è frazionaria: è l'unica variabile candidata per il branching, e lo strong branching ne calcola comunque il punteggio.

2. Strong branching. Graficamente abbiamo:

   (a) Branching su x_2:

- Con $x_2 \leq 3$, una soluzione ottima di LP_2 è

$$\tilde{x}_1 = \frac{14}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_2) = \frac{88}{3},$$

di conseguenza

$$\delta_1^d(x_2) = 32 - \frac{88}{3} = \frac{8}{3}.$$

- Con $x_2 \geq 4$, una soluzione ottima di LP_3 è

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 4 \quad \text{e} \quad z(\mathrm{LP}_3) = 28,$$

di conseguenza

$$\delta_1^u(x_2) = 32 - 28 = 4.$$

Per la variabile x_2 abbiamo:

$$\min\left\{\delta_1^d(x_2),\, \delta_1^u(x_2)\right\} = \min\left\{\frac{8}{3},\, 4\right\} = \frac{8}{3}.$$

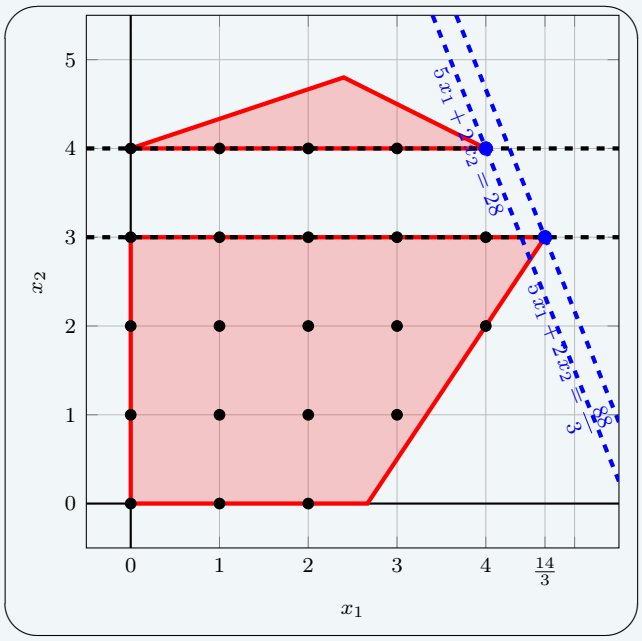


Figura 7.82: Branching su x_2: regioni ammissibili di LP_2 ($x_2 \leq 3$) e LP_3 ($x_2 \geq 4$) in rosso, punti interi (in nero) e soluzioni ottime (in blu).

Quindi lo strong branching seleziona x_2, l'unica variabile frazionaria, con punteggio $\frac{8}{3}$.

Il branch-and-cut

Esercizio 8.1 — Cut-and-branch ($P1$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 8\,x_2 & & \\ & 3\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 16 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}\,x_1 - \dfrac{1}{6}\,x_3 \\ z = \dfrac{64}{3} - 3\,x_1 - \dfrac{4}{3}\,x_3 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound usando la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching, la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching, il nodo di branching verso il basso risolto per primo, e $\mathrm{LB} = -\infty$ all'inizio (nessun algoritmo euristico). Dare l'albero di branch-and-bound e il numero di problemi LP risolti.

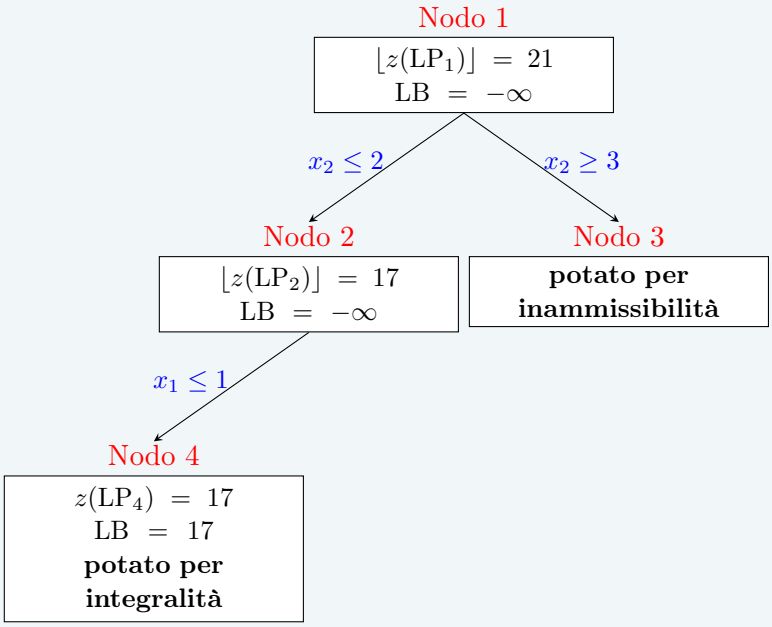
2. Eseguire un round di un algoritmo cut-and-branch nel nodo radice: generare il taglio frazionario di Gomory della riga con il termine noto frazionario più grande (in caso di pareggio, l'indice minimo della variabile in base, con la riga della funzione obiettivo per ultima), scritto nelle variabili originali e reso primitivo prima di aggiungere la sua variabile di scarto.

3. Riottimizzare il problema LP del nodo radice con il taglio, usando l'algoritmo del simplesso duale (variabile uscente: la variabile in base con valore negativo e indice minimo; pareggi nel test dei rapporti risolti con l'indice minimo). Mostrare graficamente l'effetto del taglio.

4. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound sul problema rafforzato, con le stesse regole, e confrontare il numero di problemi LP risolti con quello della prima domanda.

Soluzione

1. Il problema LP_1 ha la soluzione ottima $(0, \frac{8}{3})$ con $z(\mathrm{LP}_1) = \dfrac{64}{3}$. L'algoritmo branch-and-bound risolve 4 problemi LP:



Nodo	Padre	Branching	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_k)$	$z(\mathrm{LP}_k)$	LB	Esito
1	–	–	$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{64}{3}$	$-\infty$	branching su x_2
2	1	$x_2 \leq 2$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$\frac{52}{3}$	$-\infty$	branching su x_1
3	1	$x_2 \geq 3$	–	–	$-\infty$	potato per inammissibilità
4	2	$x_1 \leq 1$	$(1, 2)$	17	17	potato per integralità

La soluzione ottima è $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (1, 2)$, con $z(\mathrm{ILP}) = 17$.

2. Le righe candidate sono quelle del dizionario ottimo con termine noto frazionario:

Riga	parte frazionaria del termine noto
x_2	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{1}{3}$

La parte frazionaria più grande è $\frac{2}{3}$, nella riga di x_2.

In forma di equazione, la riga di x_2 si scrive

$$x_2 + \tfrac{1}{2}\, x_1 + \tfrac{1}{6}\, x_3 = \frac{8}{3},$$

e il taglio frazionario di Gomory generato da questa riga è

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - \left\lfloor \tfrac{1}{2} \right\rfloor\right)}_{=\frac{1}{2}}\, x_1 + \underbrace{\left(\tfrac{1}{6} - \left\lfloor \tfrac{1}{6} \right\rfloor\right)}_{=\frac{1}{6}}\, x_3 \;\geq\; \underbrace{\tfrac{8}{3} - \left\lfloor \tfrac{8}{3} \right\rfloor}_{=\frac{2}{3}},$$

cioè

$$\frac{1}{2}\, x_1 + \frac{1}{6}\, x_3 \geq \frac{2}{3}.$$

Sostituendo le variabili di scarto con le loro espressioni nelle variabili originali, il taglio diventa

$$x_2 \leq 2.$$

I coefficienti hanno massimo comun divisore 1: il taglio $x_2 \leq 2$ è primitivo.

Nel nodo radice non c'è alcun vincolo di branching, quindi il taglio è **globale**. Esclude $(0, \frac{8}{3})$: $0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3} > 2$.

3. Il taglio $x_2 \leq 2$ si aggiunge con la sua variabile di scarto $x_4 = 2 - x_2 \geq 0$. Esprimendolo con le variabili fuori base e aggiungendolo al dizionario ottimo otteniamo un dizionario duale ammissibile ma non primale ammissibile:

$$\begin{cases} x_2 &= \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\, x_1 - \frac{1}{6}\, x_3 \\ x_4 &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\, x_1 + \frac{1}{6}\, x_3 \\ z &= \frac{64}{3} - 3\, x_1 - \frac{4}{3}\, x_3 \end{cases}$$

Se aumentiamo il valore di π_4, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_1 &= 3 - \frac{1}{2}\, \pi_4 \\ \pi_3 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\, \pi_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{3 - \frac{1}{2}\, \pi_4 \geq 0}_{\pi_1 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\, \pi_4 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_4 &\leq 6 \\ \pi_4 &\leq 8 \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_4 fino a $\min\{6, 8\} = 6$, il valore di π_1 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_4 entra nella base duale e, di conseguenza, x_4 esce dalla base primale.

π_1 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_1 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{6}\,x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4\right) - \frac{1}{6}\,x_3 = 2 - x_4$$

$$z = \frac{64}{3} - 3\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4\right) - \frac{4}{3}\,x_3 = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 6\,x_4$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 + 2\,x_4 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ z = \frac{52}{3} - \frac{1}{3}\,x_3 - 6\,x_4 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$, e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{52}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_4 = 6 \quad \text{di valore} \quad \frac{52}{3}$$

La nuova soluzione ottima di LP_1 è $(\frac{4}{3}, 2)$, con $z(\mathrm{LP}_1) = \dfrac{52}{3}$ e upper bound 17. Graficamente, abbiamo:

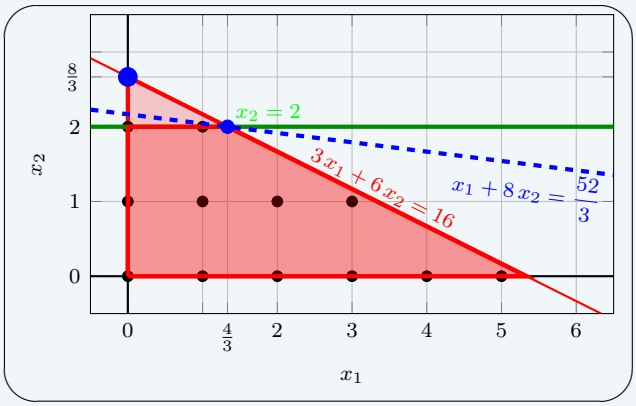
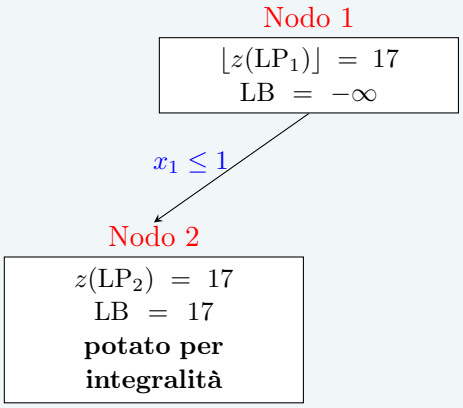


Figura 8.1: Il problema LP della radice con il taglio di Gomory (in verde): la vecchia soluzione ottima (cerchio blu) è esclusa, e la nuova soluzione ottima è in blu, con la sua retta di livello della funzione obiettivo (tratteggiata).

4. Ogni nodo eredita il taglio. Ora l'algoritmo branch-and-bound risolve 2 problemi LP:



Nodo	Padre	Branching	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_k)$	$z(\mathrm{LP}_k)$	LB	Esito
1	–	–	$(\frac{4}{3}, 2)$	$\frac{52}{3}$	$-\infty$	branching su x_1
2	1	$x_1 \leq 1$	$(1, 2)$	17	17	potato per integralità

Branch-and-bound: 4 problemi LP; cut-and-branch con un taglio di Gomory: 2 problemi LP. Il taglio abbassa il bound della radice e **riduce** l'albero. Entrambi trovano $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (1, 2)$, $z(\mathrm{ILP}) = 17$.

Esercizio 8.2 — Cut-and-branch ($P23$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 4\,x_2 & & \\ & 3\,x_1 & + & 8\,x_2 & \leq & 24 \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & & & -x_2 & \leq & -1 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

I vincoli $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 1$ si scrivono in forma canonica come $-x_1 \leq -1$ e $-x_2 \leq -1$. e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_4 \\ x_2 = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}\,x_3 - \frac{3}{8}\,x_4 \\ x_5 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}\,x_3 - \frac{3}{8}\,x_4 \\ z = \frac{23}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 - \frac{1}{2}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound usando la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching, la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching, il nodo di branching verso il basso risolto per primo, e $\mathrm{LB} = -\infty$ all'inizio (nessun algoritmo euristico). Dare l'albero di branch-and-bound e il numero di problemi LP risolti.

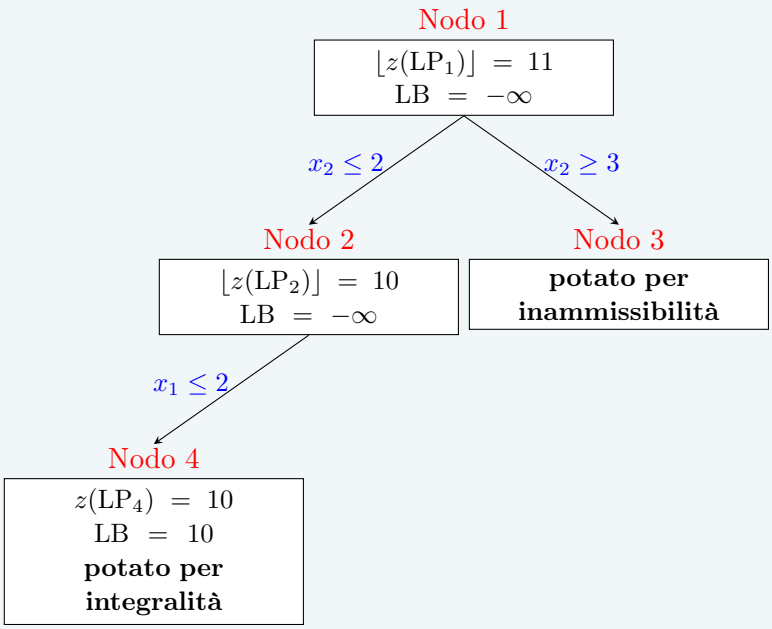
2. Eseguire un round di un algoritmo cut-and-branch nel nodo radice: generare il taglio frazionario di Gomory della riga con il termine noto frazionario più grande (in caso di pareggio, l'indice minimo della variabile in base, con la riga della funzione obiettivo per ultima), scritto nelle variabili originali e reso primitivo prima di aggiungere la sua variabile di scarto.

3. Riottimizzare il problema LP del nodo radice con il taglio, usando l'algoritmo del simplesso duale (variabile uscente: la variabile in base con valore negativo e indice minimo; pareggi nel test dei rapporti risolti con l'indice minimo). Mostrare graficamente l'effetto del taglio.

4. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound sul problema rafforzato, con le stesse regole, e confrontare il numero di problemi LP risolti con quello della prima domanda.

Soluzione

1. Il problema LP_1 ha la soluzione ottima $(1, \frac{21}{8})$ con $z(\mathrm{LP}_1) = \dfrac{23}{2}$. L'algoritmo branch-and-bound risolve 4 problemi LP:



Nodo	Padre	Branching	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_k)$	$z(\mathrm{LP}_k)$	LB	Esito
1	–	–	$(1, \frac{21}{8})$	$\frac{23}{2}$	$-\infty$	branching su x_2
2	1	$x_2 \leq 2$	$(\frac{8}{3}, 2)$	$\frac{32}{3}$	$-\infty$	branching su x_1
3	1	$x_2 \geq 3$	–	–	$-\infty$	potato per inammissibilità
4	2	$x_1 \leq 2$	$(2, 2)$	10	10	potato per integralità

La soluzione ottima è $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (2, 2)$, con $z(\mathrm{ILP}) = 10$.

2. Le righe candidate sono quelle del dizionario ottimo con termine noto frazionario:

Riga	parte frazionaria del termine noto
x_2	$\frac{5}{8}$
x_5	$\frac{5}{8}$
z	$\frac{1}{2}$

La parte frazionaria più grande è $\frac{5}{8}$, nella riga di x_2.

In forma di equazione, la riga di x_2 si scrive

$$x_2 + \tfrac{1}{8}\, x_3 + \tfrac{3}{8}\, x_4 = \frac{21}{8},$$

e il taglio frazionario di Gomory generato da questa riga è

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{8} - \left\lfloor \tfrac{1}{8} \right\rfloor\right)}_{=\frac{1}{8}}\, x_3 + \underbrace{\left(\tfrac{3}{8} - \left\lfloor \tfrac{3}{8} \right\rfloor\right)}_{=\frac{3}{8}}\, x_4 \;\geq\; \underbrace{\tfrac{21}{8} - \left\lfloor \tfrac{21}{8} \right\rfloor}_{=\frac{5}{8}},$$

cioè

$$\frac{1}{8}\, x_3 + \frac{3}{8}\, x_4 \geq \frac{5}{8}.$$

Sostituendo le variabili di scarto con le loro espressioni nelle variabili originali, il taglio diventa

$$x_2 \leq 2.$$

I coefficienti hanno massimo comun divisore 1: il taglio $x_2 \leq 2$ è primitivo.

Nel nodo radice non c'è alcun vincolo di branching, quindi il taglio è **globale**. Esclude $(1, \frac{21}{8})$: $0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{21}{8} = \frac{21}{8} > 2$.

3. Il taglio $x_2 \leq 2$ si aggiunge con la sua variabile di scarto $x_6 = 2 - x_2 \geq 0$. Esprimendolo con le variabili fuori base e aggiungendolo al dizionario ottimo otteniamo un dizionario duale ammissibile ma non primale ammissibile:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 &&&+ x_4 \\ x_2 &= \frac{21}{8} &- \frac{1}{8}\, x_3 &- \frac{3}{8}\, x_4 \\ x_5 &= \frac{13}{8} &- \frac{1}{8}\, x_3 &- \frac{3}{8}\, x_4 \\ x_6 &= -\frac{5}{8} &+ \frac{1}{8}\, x_3 &+ \frac{3}{8}\, x_4 \\ z &= \frac{23}{2} &- \frac{1}{2}\, x_3 &- \frac{1}{2}\, x_4 \end{cases}$$

Se aumentiamo il valore di π_6, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\, \pi_6 \\ \pi_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\, \pi_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\, \pi_6 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_6 \leq 4 \\ \pi_6 \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_6 fino a $\min\left\{4, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_6 entra nella base duale e, di conseguenza, x_6 esce dalla base primale.

π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_6 = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = 1 + \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6$$

$$x_2 = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}x_3 - \frac{3}{8}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6\right) = 2 - x_6$$

$$x_5 = \frac{13}{8} - \frac{1}{8}x_3 - \frac{3}{8}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6\right) = 1 - x_6$$

$$z = \frac{23}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6\right) = \frac{32}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6 \\ x_2 = 2 - x_6 \\ x_4 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_6 \\ x_5 = 1 - x_6 \\ z = \frac{32}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_6 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 6\}$, e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{8}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 2, \quad \tilde{x}_4 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{x}_5 = 1, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{32}{3}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \quad \tilde{\pi}_5 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\pi}_6 = \frac{4}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{32}{3}$$

La nuova soluzione ottima di LP_1 è $(\frac{8}{3}, 2)$, con $z(\text{LP}_1) = \frac{32}{3}$ e upper bound 10. Graficamente, abbiamo:

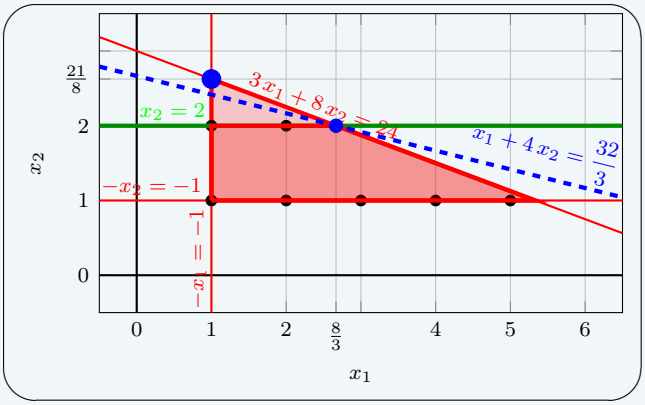
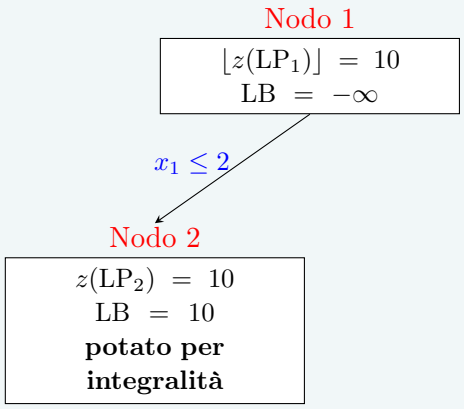


Figura 8.2: Il problema LP della radice con il taglio di Gomory (in verde): la vecchia soluzione ottima (cerchio blu) è esclusa, e la nuova soluzione ottima è in blu, con la sua retta di livello della funzione obiettivo (tratteggiata).

4. Ogni nodo eredita il taglio. Ora l'algoritmo branch-and-bound risolve 2 problemi LP:



Nodo	Padre	Branching	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_k)$	$z(\text{LP}_k)$	LB	Esito
1	–	–	$(\frac{8}{3}, 2)$	$\frac{32}{3}$	$-\infty$	branching su x_1
2	1	$x_1 \leq 2$	$(2, 2)$	10	10	potato per integralità

Branch-and-bound: 4 problemi LP; cut-and-branch con un taglio di Gomory: 2 problemi LP. Il taglio abbassa il bound della radice e **riduce** l'albero. Entrambi trovano $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (2, 2)$, $z(\text{ILP}) = 10$.

Esercizio 8.3 — Cut-and-branch ($P24$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{array}{rrrrrrr} \max & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & \\ & 7\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 24 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

I vincoli $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$ si scrivono in forma canonica come $-x_1 \leq -1$ e $-x_2 \leq -2$. e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10} x_3 + \frac{3}{10} x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10} x_3 - \frac{7}{10} x_4 \\ x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} x_3 + \frac{3}{10} x_4 \\ x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10} x_3 - \frac{7}{10} x_4 \\ z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10} x_3 - \frac{9}{10} x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound usando la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching, la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching, il nodo di branching verso il basso risolto per primo, e $\mathrm{LB} = -\infty$ all'inizio (nessun algoritmo euristico). Dare l'albero di branch-and-bound e il numero di problemi LP risolti.

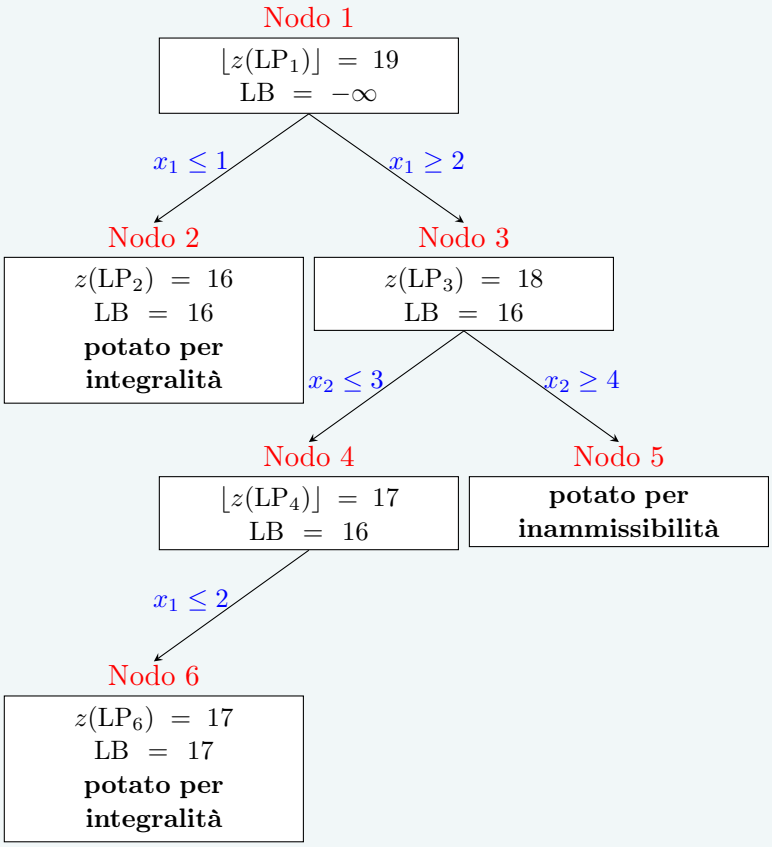
2. Eseguire un round di un algoritmo cut-and-branch nel nodo radice: generare il taglio frazionario di Gomory della riga con il termine noto frazionario più grande (in caso di pareggio, l'indice minimo della variabile in base, con la riga della funzione obiettivo per ultima), scritto nelle variabili originali e reso primitivo prima di aggiungere la sua variabile di scarto.

3. Riottimizzare il problema LP del nodo radice con il taglio, usando l'algoritmo del simplesso duale (variabile uscente: la variabile in base con valore negativo e indice minimo; pareggi nel test dei rapporti risolti con l'indice minimo). Mostrare graficamente l'effetto del taglio.

4. Eseguire l'algoritmo branch-and-bound sul problema rafforzato, con le stesse regole, e confrontare il numero di problemi LP risolti con quello della prima domanda.

Soluzione

1. Il problema LP_1 ha la soluzione ottima $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ con $z(\mathrm{LP}_1) = \dfrac{39}{2}$. L'algoritmo branch-and-bound risolve 6 problemi LP:



Nodo	Padre	Branching	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_k)$	$z(\mathrm{LP}_k)$	LB	Esito
1	–	–	$(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$	$\frac{39}{2}$	$-\infty$	branching su x_1
2	1	$x_1 \leq 1$	$(1, 4)$	16	16	potato per integralità
3	1	$x_1 \geq 2$	$(2, \frac{10}{3})$	18	16	branching su x_2
4	3	$x_2 \leq 3$	$(\frac{15}{7}, 3)$	$\frac{123}{7}$	16	branching su x_1
5	3	$x_2 \geq 4$	–	–	16	potato per inammissibilità
6	4	$x_1 \leq 2$	$(2, 3)$	17	17	potato per integralità

La soluzione ottima è $\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{ILP}) = (2, 3)$, con $z(\mathrm{ILP}) = 17$.

2. Le righe candidate sono quelle del dizionario ottimo con termine noto frazionario:

Riga	parte frazionaria del termine noto
x_1	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{1}{2}$
x_6	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{1}{2}$

La parte frazionaria più grande è $\frac{1}{2}$, nella riga di x_1.

In forma di equazione, la riga di x_1 si scrive

$$x_1 + \tfrac{1}{10}\, x_3 - \tfrac{3}{10}\, x_4 = \frac{3}{2},$$

e il taglio frazionario di Gomory generato da questa riga è

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{10} - \left\lfloor \tfrac{1}{10} \right\rfloor\right)}_{=\frac{1}{10}}\, x_3 + \underbrace{\left(-\tfrac{3}{10} - \left\lfloor -\tfrac{3}{10} \right\rfloor\right)}_{=\frac{7}{10}}\, x_4 \;\geq\; \underbrace{\tfrac{3}{2} - \left\lfloor \tfrac{3}{2} \right\rfloor}_{=\frac{1}{2}},$$

cioè

$$\frac{1}{10}\, x_3 + \frac{7}{10}\, x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Sostituendo le variabili di scarto con le loro espressioni nelle variabili originali, il taglio diventa

$$x_2 \leq 4.$$

I coefficienti hanno massimo comun divisore 1: il taglio $x_2 \leq 4$ è primitivo.

Nel nodo radice non c'è alcun vincolo di branching, quindi il taglio è **globale**. Esclude $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$: $0 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2} > 4$.

3. Il taglio $x_2 \leq 4$ si aggiunge con la sua variabile di scarto $x_7 = 4 - x_2 \geq 0$. Esprimendolo con le variabili fuori base e aggiungendolo al dizionario ottimo otteniamo un dizionario duale ammissibile ma non primale ammissibile:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{3}{10}\, x_4 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 - \frac{7}{10}\, x_4 \\ x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{3}{10}\, x_4 \\ x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}\, x_3 - \frac{7}{10}\, x_4 \\ x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\, x_3 + \frac{7}{10}\, x_4 \\ z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10}\, x_3 - \frac{9}{10}\, x_4 \end{cases}$$

Se aumentiamo il valore di π_7, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{7}{10} - \frac{1}{10}\pi_7 \\ \pi_4 &= \frac{9}{10} - \frac{7}{10}\pi_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{7}{10} - \frac{1}{10}\pi_7 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{9}{10} - \frac{7}{10}\pi_7 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_7 &\leq 7 \\ \pi_7 &\leq \frac{9}{7} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_7 fino a $\min\left\{7, \frac{9}{7}\right\} = \frac{9}{7}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_7 entra nella base duale e, di conseguenza, x_7 esce dalla base primale.
π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}x_3 + \frac{7}{10}x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}x_3 + \frac{3}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7\right) = \frac{12}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7$$

$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}x_3 - \frac{7}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7\right) = 4 - x_7$$

$$x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}x_3 + \frac{3}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7\right) = \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7$$

$$x_6 = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}x_3 - \frac{7}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7\right) = 2 - x_7$$

$$z = \frac{39}{2} - \frac{7}{10}x_3 - \frac{9}{10}\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7\right) = \frac{132}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_7$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{12}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ x_2 &= 4 - x_7 \\ x_4 &= \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_7 \\ x_5 &= \frac{5}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_7 \\ x_6 &= 2 - x_7 \\ z &= \frac{132}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{9}{7}x_7 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 7\}$, e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{12}{7},\ \tilde{x}_2 = 4,\ \tilde{x}_4 = \frac{5}{7},\ \tilde{x}_5 = \frac{5}{7},\ \tilde{x}_6 = 2,\quad \tilde{x}_3 = 0,\ \tilde{x}_7 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0,\ \tilde{\pi}_2 = 0,\ \tilde{\pi}_4 = 0,\ \tilde{\pi}_5 = 0,\ \tilde{\pi}_6 = 0,\quad \tilde{\pi}_3 = \frac{4}{7},\ \tilde{\pi}_7 = \frac{9}{7} \quad \text{di valore} \quad \frac{132}{7}$$

La nuova soluzione ottima di LP_1 è $(\frac{12}{7}, 4)$, con $z(\mathrm{LP}_1) = \frac{132}{7}$ e upper bound 18. Graficamente, abbiamo:

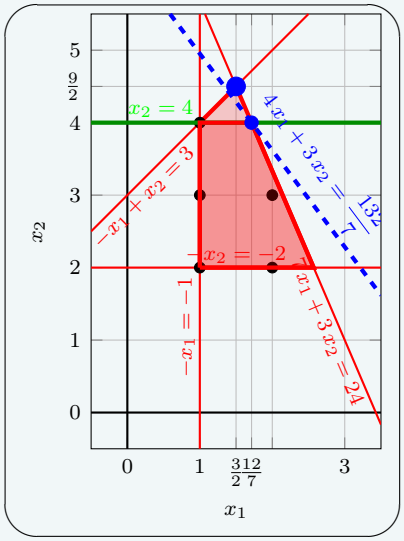
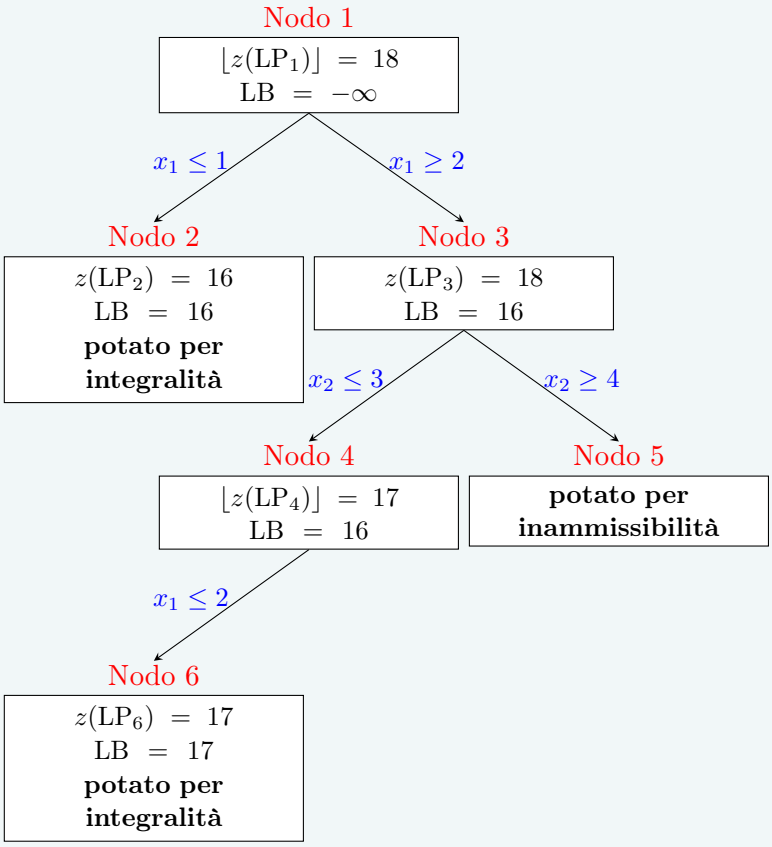


Figura 8.3: Il problema LP della radice con il taglio di Gomory (in verde): la vecchia soluzione ottima (cerchio blu) è esclusa, e la nuova soluzione ottima è in blu, con la sua retta di livello della funzione obiettivo (tratteggiata).

4. Ogni nodo eredita il taglio. Ora l'algoritmo branch-and-bound risolve 6 problemi LP:



Nodo	Padre	Branching	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{LP}_k)$	$z(\text{LP}_k)$	LB	Esito
1	–	–	$(\frac{12}{7}, 4)$	$\frac{132}{7}$	$-\infty$	branching su x_1
2	1	$x_1 \leq 1$	$(1, 4)$	16	16	potato per integralità
3	1	$x_1 \geq 2$	$(2, \frac{10}{3})$	18	16	branching su x_2
4	3	$x_2 \leq 3$	$(\frac{15}{7}, 3)$	$\frac{123}{7}$	16	branching su x_1
5	3	$x_2 \geq 4$	–	–	16	potato per inammissibilità
6	4	$x_1 \leq 2$	$(2, 3)$	17	17	potato per integralità

Branch-and-bound: 6 problemi LP; cut-and-branch con un taglio di Gomory: 6 problemi LP. Il taglio abbassa il bound della radice ma **non** riduce l'albero: conta la qualità del taglio. Entrambi trovano $\tilde{\boldsymbol{x}}(\text{ILP}) = (2, 3)$, $z(\text{ILP}) = 17$.

Esercizio 8.4 — Tagli globali e locali

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & \\ & 5\,x_1 & + & x_2 & \leq & 22 & \\ & 3\,x_1 & + & 9\,x_2 & \leq & 35 & \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} & \end{array}$$

L'algoritmo branch-and-bound (con la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching, la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching, il nodo di branching verso il basso risolto per primo, e $\mathrm{LB} = -\infty$ all'inizio, senza algoritmo euristico) fa branching nella radice su x_1. Il Nodo 2 è il nodo di branching verso il basso, con il vincolo di branching $x_1 \leq 3$ e la sua variabile di scarto $x_5 = 3 - x_1$. Il dizionario ottimo di LP_2 è:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_5 \\ x_2 = \frac{26}{9} - \frac{1}{9}\,x_4 + \frac{1}{3}\,x_5 \\ x_3 = \frac{37}{9} + \frac{1}{9}\,x_4 + \frac{14}{3}\,x_5 \\ z = \frac{44}{3} - \frac{1}{3}\,x_4 - x_5 \end{cases}$$

Domande

1. Generare nel Nodo 2 il taglio frazionario di Gomory della riga con il termine noto frazionario più grande (in caso di pareggio, l'indice minimo della variabile in base, con la riga della funzione obiettivo per ultima), scritto nelle variabili originali e reso primitivo prima di aggiungere la sua variabile di scarto.
2. In base alla sua derivazione, il taglio è un taglio globale o un taglio locale del Nodo 2?
3. Verificare per enumerazione se il taglio è soddisfatto dalle soluzioni intere ammissibili del Nodo 2 e da tutte le soluzioni intere ammissibili del problema PLI.
4. Che cosa succederebbe se il taglio fosse memorizzato nel pool globale e usato in ogni nodo?

Soluzione

1. Una soluzione ottima di LP_2 è $(3, \frac{26}{9})$, con $z(\mathrm{LP}_2) = \frac{44}{3}$. Le righe candidate sono:

Riga	parte frazionaria del termine noto
x_2	$\frac{8}{9}$
x_3	$\frac{1}{9}$
z	$\frac{2}{3}$

La parte frazionaria più grande è $\frac{8}{9}$, nella riga di x_2.

In forma di equazione, la riga di x_2 si scrive

$$x_2 + \tfrac{1}{9}\,x_4 - \tfrac{1}{3}\,x_5 = \frac{26}{9},$$

e il taglio frazionario di Gomory generato da questa riga è

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{9} - \left\lfloor \tfrac{1}{9} \right\rfloor\right)}_{=\frac{1}{9}}\,x_4 + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{3} - \left\lfloor -\tfrac{1}{3} \right\rfloor\right)}_{=\frac{2}{3}}\,x_5 \;\geq\; \underbrace{\tfrac{26}{9} - \left\lfloor \tfrac{26}{9} \right\rfloor}_{=\frac{8}{9}},$$

cioè

$$\frac{1}{9}\,x_4 + \frac{2}{3}\,x_5 \geq \frac{8}{9}.$$

Sostituendo le variabili di scarto con le loro espressioni nelle variabili originali, il taglio diventa

$$x_1 + x_2 \leq 5.$$

I coefficienti hanno massimo comun divisore 1: il taglio $x_1 + x_2 \leq 5$ è primitivo.

2. La riga usata contiene la variabile di scarto x_5 del vincolo di branching $x_1 \leq 3$, con coefficiente non nullo $\frac{2}{3}$ nel taglio: la sua derivazione usa il vincolo di branching, quindi l'algoritmo lo tratta come un **taglio locale** del Nodo 2, valido solo nel sottoalbero del Nodo 2.

3. Le soluzioni ammissibili del Nodo 2 sono i 15 punti di F con $x_1 \leq 3$: tutti soddisfano $x_1 + x_2 \leq 5$ (il valore massimo di $x_1 + x_2$ fra di essi è 5). Fra tutte le 18 soluzioni ammissibili, invece, $(4, 2)$ viola il taglio. Graficamente, abbiamo:

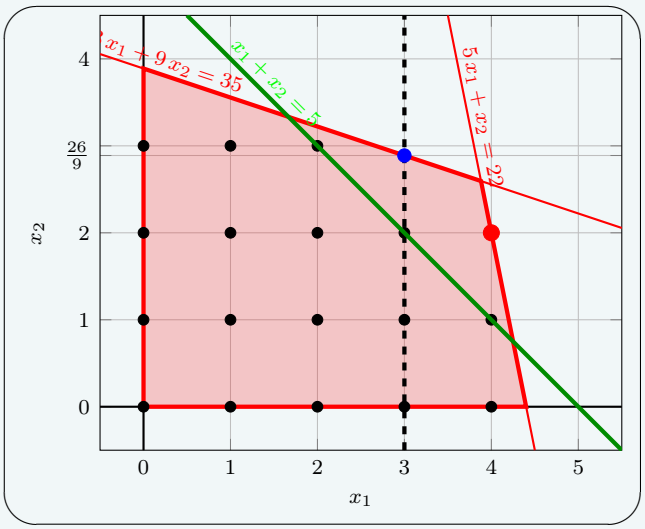


Figura 8.4: Il rilassamento lineare (in rosso), il vincolo di branching $x_1 = 3$ (tratteggiato), il taglio $x_1 + x_2 = 5$ (in verde), la soluzione ottima di LP_2 (in blu) e le soluzioni ammissibili che violano il taglio (quadrati rossi).

Il taglio è localmente valido nel Nodo 2 ma **non** globalmente valido.

4. Il punto $(4, 2)$ è l'unica soluzione ottima del problema PLI, di valore 14. Con il taglio nel pool globale verrebbe eliminato anche dal Nodo 3 ($x_1 \geq 4$), e l'algoritmo restituirebbe $(2, 3)$, di valore 13.

   Il taglio di Gomory $x_1 + x_2 \leq 5$ del Nodo 2 è **locale**: deve restare nel sottoalbero del Nodo 2. Usato globalmente escluderebbe la soluzione ottima $(4, 2)$, e l'algoritmo restituirebbe una soluzione di valore 13 invece di 14.

Esercizio 8.5 — Round di tagli ($P5$)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimo con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & \\ & 6\,x_1 & + & 21\,x_2 & \leq & 77 \\ & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 36 \\ & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e il seguente dizionario ottimo del simplesso del suo rilassamento lineare in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\,x_4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\,x_3 + \frac{1}{25}\,x_4 \\ z = 15 - \frac{3}{25}\,x_3 - \frac{4}{25}\,x_4 \end{cases}$$

Domande

1. Generare il primo taglio di Gomory del nodo radice: il taglio frazionario di Gomory della riga con il termine noto frazionario più grande (in caso di pareggio, l'indice minimo della variabile in base, con la riga della funzione obiettivo per ultima), scritto nelle variabili originali e reso primitivo prima di aggiungere la sua variabile di scarto.

2. Un algoritmo cut-and-branch esegue R round di tagli di Gomory nella radice (un taglio per round, con la stessa regola), e poi l'algoritmo branch-and-bound con la regola dell'indice minimo come strategia di selezione della variabile di branching, la regola LIFO come strategia di selezione del nodo di branching, il nodo di branching verso il basso risolto per primo, e $\mathrm{LB} = -\infty$ all'inizio (nessun algoritmo euristico). La tabella seguente riporta, per ogni R, l'ultimo taglio aggiunto, il problema LP della

radice e il numero di problemi LP risolti. Verificare la riga $R = 1$ e commentare la tabella.

Round	ultimo taglio aggiunto	$\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{LP}_1)$	$z(\mathrm{LP}_1)$	UB nella radice	problemi LP risolti
0	–	$(\frac{7}{2}, \frac{8}{3})$	15	15	11
1	$2\,x_1 + x_2 \leq 9$	$(\frac{28}{9}, \frac{25}{9})$	$\frac{131}{9}$	14	8
2	$x_1 + x_2 \leq 5$	$(\frac{28}{15}, \frac{47}{15})$	$\frac{197}{15}$	13	3
3	$3\,x_1 + 10\,x_2 \leq 36$	$(2, 3)$	13	13	1

3. Quanti round servono per risolvere il problema nel nodo radice? Quali tagli aggiungeresti in pratica?

Soluzione

1. Le righe candidate sono:

Riga	parte frazionaria del termine noto
x_1	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{2}{3}$

La parte frazionaria più grande è $\frac{2}{3}$, nella riga di x_2.

In forma di equazione, la riga di x_2 si scrive

$$x_2 + \tfrac{4}{75}\,x_3 - \tfrac{1}{25}\,x_4 = \frac{8}{3},$$

e il taglio frazionario di Gomory generato da questa riga è

$$\underbrace{\left(\tfrac{4}{75} - \left\lfloor \tfrac{4}{75} \right\rfloor\right)}_{=\frac{4}{75}}\,x_3 + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{25} - \left\lfloor -\tfrac{1}{25} \right\rfloor\right)}_{=\frac{24}{25}}\,x_4 \;\geq\; \underbrace{\tfrac{8}{3} - \left\lfloor \tfrac{8}{3} \right\rfloor}_{=\frac{2}{3}},$$

cioè

$$\frac{4}{75}\,x_3 + \frac{24}{25}\,x_4 \geq \frac{2}{3}.$$

Sostituendo le variabili di scarto con le loro espressioni nelle variabili originali, il taglio diventa

$$8\,x_1 + 4\,x_2 \leq 38.$$

Dividendo per il massimo comun divisore $g = 4$ dei coefficienti e arrotondando per difetto il termine noto otteniamo il taglio primitivo

$$2\,x_1 + x_2 \leq 9.$$

2. Il taglio $2\,x_1 + x_2 \leq 9$ si aggiunge con la sua variabile di scarto $x_5 = 9 - 2\,x_1 - x_2 \geq 0$. Esprimendolo con le variabili fuori base e aggiungendolo al dizionario ottimo otteniamo un dizionario duale ammissibile ma non primale ammissibile:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{7}{2} &+ \frac{1}{50}\,x_3 &- \frac{7}{50}\,x_4 \\ x_2 &= \frac{8}{3} &- \frac{4}{75}\,x_3 &+ \frac{1}{25}\,x_4 \\ x_5 &= -\frac{2}{3} &+ \frac{1}{75}\,x_3 &+ \frac{6}{25}\,x_4 \\ z &= 15 &- \frac{3}{25}\,x_3 &- \frac{4}{25}\,x_4 \end{cases}$$

Se aumentiamo il valore di π_5, possiamo ottenere una soluzione duale migliore. Abbiamo:

$$\begin{cases} \pi_3 &= \frac{3}{25} - \frac{1}{75}\,\pi_5 \\ \pi_4 &= \frac{4}{25} - \frac{6}{25}\,\pi_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{3}{25} - \frac{1}{75}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_3 \geq 0} \\ \underbrace{\frac{4}{25} - \frac{6}{25}\,\pi_5 \geq 0}_{\pi_4 \geq 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_5 &\leq 9 \\ \pi_5 &\leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di π_5 fino a $\min\left\{9, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, il valore di π_4 scende a 0. Abbiamo quindi che:

π_5 entra nella base duale e, di conseguenza, x_5 esce dalla base primale.

π_4 esce dalla base duale e, di conseguenza, x_4 entra nella base primale.

Abbiamo:

$$x_5 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{75}\,x_3 + \frac{6}{25}\,x_4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{25}{9} - \frac{1}{18}\,x_3 + \frac{25}{6}\,x_5$$

Sostituendo nelle altre equazioni del dizionario primale, otteniamo:

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{50}\,x_3 - \frac{7}{50}\left(\frac{25}{9} - \frac{1}{18}\,x_3 + \frac{25}{6}\,x_5\right) = \frac{28}{9} + \frac{1}{36}\,x_3 - \frac{7}{12}\,x_5$$

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{75}\,x_3 + \frac{1}{25}\left(\frac{25}{9} - \frac{1}{18}\,x_3 + \frac{25}{6}\,x_5\right) = \frac{25}{9} - \frac{1}{18}\,x_3 + \frac{1}{6}\,x_5$$

$$z = 15 - \frac{3}{25}\,x_3 - \frac{4}{25}\left(\frac{25}{9} - \frac{1}{18}\,x_3 + \frac{25}{6}\,x_5\right) = \frac{131}{9} - \frac{1}{9}\,x_3 - \frac{2}{3}\,x_5$$

Di conseguenza, abbiamo ora il seguente dizionario primale aggiornato:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{9} + \frac{1}{36} x_3 - \frac{7}{12} x_5 \\ x_2 = \frac{25}{9} - \frac{1}{18} x_3 + \frac{1}{6} x_5 \\ x_4 = \frac{25}{9} - \frac{1}{18} x_3 + \frac{25}{6} x_5 \\ z = \frac{131}{9} - \frac{1}{9} x_3 - \frac{2}{3} x_5 \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$, e

- la soluzione di base primale ottima è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{28}{9}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{25}{9}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{25}{9}, \qquad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0 \quad \text{di valore} \quad \frac{131}{9}$$

- la soluzione di base duale ottima è:

$$\tilde{\pi}_1 = 0, \quad \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_4 = 0, \qquad \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{9}, \quad \tilde{\pi}_5 = \frac{2}{3} \quad \text{di valore} \quad \frac{131}{9}$$

Il problema LP della radice con il taglio ha la soluzione ottima $(\frac{28}{9}, \frac{25}{9})$ e $z(\text{LP}_1) = \frac{131}{9}$, come nella riga $R = 1$. Il numero di problemi LP scende da 11 a 8, 3 e 1: ogni round abbassa un po' $z(\text{LP}_1)$, e l'albero si riduce.

3. Dopo 3 round la soluzione ottima del problema LP della radice è intera e l'albero si riduce al nodo radice. Il primo round da solo cambia appena il bound; in pratica un algoritmo cut-and-branch smette di tagliare quando la diminuzione di $z(\text{LP}_1)$ diventa piccola (tailing off), perché ogni round rende più grande il problema LP di ogni nodo.

   Con $0, 1, 2, 3$ round di tagli di Gomory l'algoritmo risolve $11, 8, 3, 1$ problemi LP: su $P5$ i tagli convengono, e 3 round risolvono il problema nella radice, $z(\text{ILP}) = 13$.