



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione lineare intera

Esercizi 1 — Modelli, bound e formulazioni

Esercizi svolti sui capitoli 1–5, con la soluzione completa. Ogni esercizio cita il problema del catalogo che usa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:

fabiofurini.github.io/programmazione-lineare-intera/
github.com/fabiofurini/programmazione-lineare-intera

Anno accademico 2026–2027

Indice

I	Modelli e bound	2
1	La programmazione lineare intera	3
2	Bound primali e duali	11
II	Rafforzare la formulazione	20
3	Formulazioni ideali	21
4	Disuguaglianze valide	29
5	Disuguaglianze di cover	37
5.1	Separazione delle cover	37
5.2	Separazione delle cover in tre dimensioni	49
5.3	Chiusura e separazione	73



Parte I

Modelli e bound



La programmazione lineare intera

Esercizio 1.1 — Programmazione lineare intera (P7)

Consideriamo i seguenti dati di un problema PLI con $n = 2$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Domande

1. Scrivere il problema PLI in forma canonica di massimizzazione.
2. Disegnare la regione ammissibile del problema PLI ed elencare tutte le sue soluzioni ammissibili.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima e verificarla per enumerazione completa.

Soluzione

1. Il problema PLI in forma canonica di massimizzazione, con $n = 2$ variabili intere non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale, è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

2. Entrambi i vincoli hanno coefficienti non negativi, quindi ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_1 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ (vincolo 2). Per ogni valore di x_1 i vincoli danno i valori interi di x_2 :

x_1	bound su x_2	punti ammissibili
0	$x_2 \leq 3, \quad x_2 \leq 5$	$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)$
1	$x_2 \leq \frac{11}{4}, \quad x_2 \leq 3$	$(1, 0), (1, 1), (1, 2)$
2	$x_2 \leq \frac{5}{2}, \quad x_2 \leq 1$	$(2, 0), (2, 1)$

La regione ammissibile F è fatta dei 9 punti neri della figura, i punti interi del poliedro P (rosso):

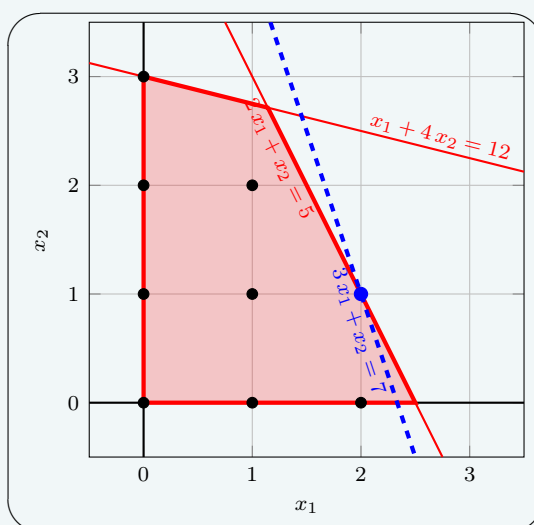


Figura 1.1: Regione ammissibile del problema PLI: i punti interi (neri) dentro il poliedro dei vincoli (rosso). La soluzione ottima $(2, 1)$ è in blu, con la retta obiettivo $3x_1 + x_2 = 7$ (tratteggiata).

3. Il gradiente della funzione obiettivo è $\nabla f = (3, 1)$. Spostando la linea di livello $3x_1 + x_2 = z$ nella direzione di ∇f , l'ultimo punto di F raggiunto è $(2, 1)$, sulla linea tratteggiata $3x_1 + x_2 = 7$ della figura; nessun altro punto di F giace su questa linea. L'enumerazione completa delle 9 soluzioni ammissibili lo conferma (l'ottimo in grassetto):

x_1	x_2	z	x_1	x_2	z	x_1	x_2	z
0	0	0	0	3	3	1	2	5
0	1	1	1	0	3	2	0	6
0	2	2	1	1	4	2	1	7

Il problema PLI ha l'**unica** soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}) = (2, 1)$, con valore ottimo $z(\text{ILP}) = 7$.

Esercizio 1.2 — Forma canonica di massimizzazione (P13)

Consideriamo il seguente problema PLI con $n = 2$ variabili intere:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & -x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Scrivere il problema PLI in forma canonica di massimizzazione e dare i suoi dati $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$.
2. Disegnare la regione ammissibile. È un insieme finito?
3. Spiegare perché il problema PLI ha una soluzione ottima e trovarla graficamente.

Soluzione

1. Minimizzare $x_1 + 3x_2$ equivale a massimizzare $-x_1 - 3x_2$, con $\min\{x_1 + 3x_2\} = -\max\{-x_1 - 3x_2\}$. Ogni vincolo $\geq$ si moltiplica per -1 :

$$x_1 + 2x_2 \geq 6 \iff -x_1 - 2x_2 \leq -6, \quad -x_1 + 4x_2 \geq 6 \iff x_1 - 4x_2 \leq -6.$$

Il problema PLI in forma canonica di massimizzazione (problema P13 del catalogo) è

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 3x_2 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -6 \\ & x_1 - 4x_2 \leq -6 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

con dati

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Il poliedro dei vincoli è disegnato in rosso dentro il riquadro $0 \leq x_1, x_2 \leq 5$; prosegue verso l'alto senza limite.

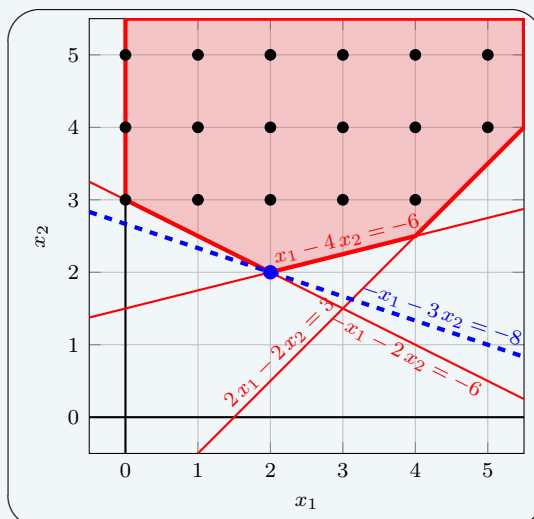


Figura 1.2: Regione ammissibile di $P13$ dentro il riquadro (rosso), i suoi punti interi (neri) e la soluzione ottima $(2, 2)$ (blu), con la retta obiettivo $-x_1 - 3x_2 = -8$ (tratteggiata).

La regione ammissibile **non è finita**: per ogni intero $k \geq 3$ il punto $(0, k)$ soddisfa $-2k \leq -6$, $-4k \leq -6$ e $-2k \leq 3$, quindi appartiene a F .

3. Tutti i costi del problema di massimizzazione sono negativi e $x_1, x_2 \geq 0$, quindi $-x_1 - 3x_2 \leq 0$ su F : la funzione obiettivo è limitata superiormente. Il punto ammissibile $(0, 3)$ ha valore -9 , e solo i punti, in numero finito, con $x_1 + 3x_2 < 9$ possono fare meglio: esiste una soluzione ottima.

Il gradiente è $\nabla f = (-1, -3)$: la linea di livello si sposta verso l'origine. L'ultimo punto di F raggiunto è $(2, 2)$, sulla linea tratteggiata $-x_1 - 3x_2 = -8$. La riga $x_2 = 1$ non contiene punti ammissibili, perché $x_1 + 2 \geq 6$ richiede $x_1 \geq 4$ e $-x_1 + 4 \geq 6$ richiede $x_1 \leq -2$.

Il problema PLI ha l'**unica** soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}) = (2, 2)$, con valore ottimo $z(\text{ILP}) = -8$ in forma canonica di massimizzazione, cioè un valore minimo $x_1 + 3x_2 = 8$ del problema originale.

Esercizio 1.3 — Enumerazione completa ($P43$)

Consideriamo i seguenti dati di un problema PLI con $n = 3$ variabili e $m = 2$ vincoli:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Domande

1. Scrivere il problema PLI in forma canonica di massimizzazione.

2. Ricavare dai vincoli un upper bound su ciascuna variabile ed elencare tutte le soluzioni ammissibili.
3. Trovare una soluzione ottima per enumerazione completa. È unica?

Soluzione

1. Il problema PLI in forma canonica di massimizzazione, con $n = 3$ variabili intere non negative e $m = 2$ vincoli lineari di minore o uguale, è il seguente:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & & \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

2. Tutti i coefficienti sono non negativi, quindi ogni variabile è al più il termine noto diviso per il suo coefficiente, arrotondato per difetto:

$$x_1 \leq \lfloor 2/1 \rfloor = 2, \quad x_2 \leq \lfloor 2/1 \rfloor = 2, \quad x_3 \leq \min \{ \lfloor 2/2 \rfloor, \lfloor 2/2 \rfloor \} = 1.$$

- Se $x_3 = 1$, i vincoli diventano $x_1 \leq 0$ e $x_2 \leq 0$: l'unico punto è $(0, 0, 1)$.
- Se $x_3 = 0$, i vincoli diventano $x_1 \leq 2$ e $x_2 \leq 2$: i 9 punti $(x_1, x_2, 0)$ con $x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}$.

La regione ammissibile ha 10 punti.

3. I valori della funzione obiettivo $x_1 + 2x_2 + 7x_3$ sono (l'ottimo in grassetto):

x_1	x_2	x_3	z	x_1	x_2	x_3	z
0	0	0	0	1	2	0	5
0	1	0	2	2	0	0	2
0	2	0	4	2	1	0	4
1	0	0	1	2	2	0	6
1	1	0	3	0	0	1	7

Il punto migliore con $x_3 = 0$ è $(2, 2, 0)$, di valore 6: è peggiore di $(0, 0, 1)$, di valore 7.

L'enumerazione completa dà l'**unica** soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}) = (0, 0, 1)$, con valore ottimo $z(\text{ILP}) = 7$.

Esercizio 1.4 — Esiti possibili: un problema PLI inammissibile

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 4$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Disegnare il poliedro P dei vincoli e stabilire se il problema LP con gli stessi dati (con $x_1, x_2 \geq 0$ al posto di $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) è ammissibile.
2. Stabilire l'esito del problema PLI.
3. Trovare una soluzione ottima del problema LP con gli stessi dati.

Soluzione

1. I quattro vincoli sono $-\frac{1}{2} \leq x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \leq x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}$: il poliedro P è il quadrato di vertici $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$.

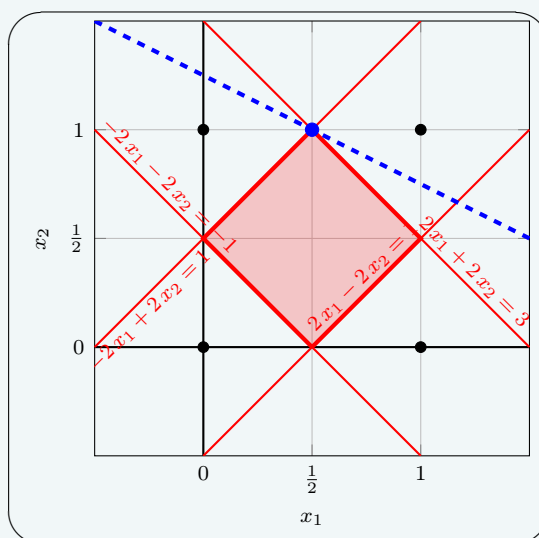


Figura 1.3: Il poliedro P (rosso) non contiene punti interi: i quattro punti interi più vicini (neri) sono fuori. La soluzione ottima $(\frac{1}{2}, 1)$ del problema LP è in blu, con la retta obiettivo $x_1 + 2x_2 = \frac{5}{2}$ (tratteggiata).

Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ soddisfa tutti i vincoli, quindi il problema LP è **ammissibile**.

2. • Dai primi due vincoli, un punto intero ha $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ e $|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2}$, quindi $x_1 = x_2$.
- Con $x_1 = x_2$ gli ultimi due vincoli diventano $1 \leq 4x_1 \leq 3$, cioè $\frac{1}{4} \leq x_1 \leq \frac{3}{4}$: nessun valore intero di x_1 li soddisfa.

La regione ammissibile $F = P \cap \mathbb{Z}^2$ è vuota: il problema PLI è **inammissibile**, anche se il problema LP con gli stessi dati è ammissibile.

3. Il poliedro P è limitato e non vuoto, quindi il problema LP ha un vertice ottimo. I valori di $x_1 + 2x_2$ nei quattro vertici sono

$$(0, \frac{1}{2}) \mapsto 1, \quad (\frac{1}{2}, 0) \mapsto \frac{1}{2}, \quad (\frac{1}{2}, 1) \mapsto \frac{5}{2}, \quad (1, \frac{1}{2}) \mapsto 2$$

quindi la soluzione ottima è $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{1}{2}, 1)$, con $z(\text{LP}) = \frac{5}{2}$ (si veda la figura).

Esercizio 1.5 — Esiti possibili: una regione ammissibile illimitata

Consideriamo i vincoli

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

e i tre problemi PLI in forma canonica di massimizzazione con questi vincoli e le funzioni obiettivo

$$(a) \max x_1 + x_2, \quad (b) \max -2x_1 + x_2, \quad (c) \max x_1 - 3x_2.$$

Domande

1. Disegnare la regione ammissibile. È un insieme finito?
2. Stabilire l'esito di ciascuno dei tre problemi PLI (a), (b) e (c), e dare una soluzione ottima quando esiste.

Soluzione

1. La regione ammissibile **non è finita**: per ogni $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ il punto $(2k, k)$ soddisfa $-2k + k = -k \leq 2$ e $2k - 2k = 0 \leq 2$.

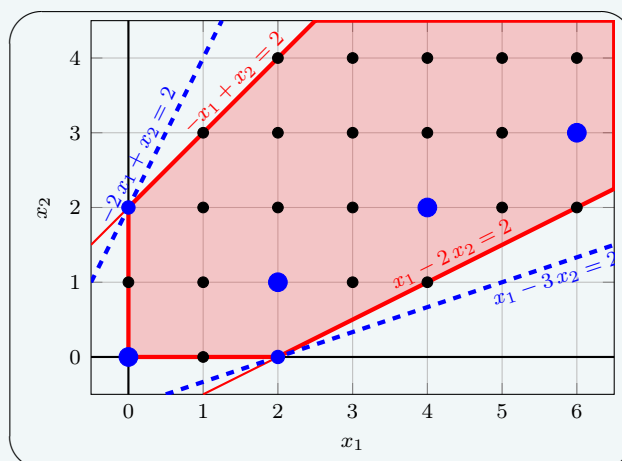


Figura 1.4: Regione ammissibile dentro il riquadro $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 4$ (rosso), i suoi punti interi (neri), i punti $(2k, k)$ (cerchi blu) e le soluzioni ottime $(0, 2)$ di (b) e $(2, 0)$ di (c) (blu) con le loro rette obiettivo (tratteggiate).

2.
 - (a) I punti $(2k, k)$ sono ammissibili con valore $3k$, che cresce senza limite: il problema PLI (a) è **illimitato**.
 - (b) Per ogni punto ammissibile, $-2x_1 + x_2 = (-x_1 + x_2) - x_1 \leq 2 - x_1 \leq 2$. Il valore 2 richiede $x_1 = 0$ e $-x_1 + x_2 = 2$, cioè il punto $(0, 2)$, che è ammissibile: l'**unica** soluzione ottima è $(0, 2)$, con valore ottimo 2.
 - (c) Per ogni punto ammissibile, $x_1 - 3x_2 = (x_1 - 2x_2) - x_2 \leq 2 - x_2 \leq 2$. Il valore 2 richiede $x_2 = 0$ e $x_1 - 2x_2 = 2$, cioè il punto $(2, 0)$: l'**unica** soluzione ottima è $(2, 0)$, con valore ottimo 2.

Con la stessa regione ammissibile illimitata, il problema (a) è **illimitato**, mentre i problemi (b) e (c) hanno una **soluzione ottima**: $(0, 2)$ e $(2, 0)$, entrambe di valore 2.

Bound primali e duali

Esercizio 2.1 — Bound primali e bound duali (P5)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Applicare l'euristica a una variabile e l'euristica a due fasi, in entrambi gli ordini delle variabili, e dare il bound primale LB migliore.
2. Risolvere graficamente il rilassamento lineare e dare il bound duale UB che fornisce.
3. Calcolare il gap di ottimalità. La migliore soluzione euristica è certificata ottima?

Soluzione

1. L'**euristica a una variabile** porta una sola variabile al suo valore massimo, con le altre variabili uguali a 0. L'**euristica a due fasi** porta prima una variabile al suo valore massimo, e poi l'altra al suo valore massimo con i **termini noti residui**.

- Solo x_1 ($x_2 = 0$): $\bar{x}_1 = \min\{\lfloor \frac{77}{6} \rfloor, \lfloor \frac{9}{2} \rfloor\} = 4$, quindi $\bar{x} = (4, 0)$ e $LB = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$.
- Solo x_2 ($x_1 = 0$): $\bar{x}_2 = \min\{\lfloor \frac{11}{3} \rfloor, \lfloor 12 \rfloor\} = 3$, quindi $\bar{x} = (0, 3)$ e $LB = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$.
- Prima x_1 : $\bar{x}_1 = \min\{\lfloor \frac{77}{6} \rfloor, \lfloor \frac{9}{2} \rfloor\} = 4$, e lascia i termini noti residui 53 e 4. Poi $\bar{x}_2 = \min\{\lfloor \frac{53}{21} \rfloor, \lfloor \frac{4}{3} \rfloor\} = 1$, quindi $\bar{x} = (4, 1)$ e $LB = 11$.
- Prima x_2 : $\bar{x}_2 = \min\{\lfloor \frac{11}{3} \rfloor, \lfloor 12 \rfloor\} = 3$, e lascia i termini noti residui 14 e 27. Poi $\bar{x}_1 = \min\{\lfloor \frac{7}{3} \rfloor, \lfloor \frac{27}{8} \rfloor\} = 2$, quindi $\bar{x} = (2, 3)$ e $LB = 13$.

Euristica	Ordine	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	LB
a una variabile	x_1	4	0	8
a una variabile	x_2	0	3	9
a due fasi	prima x_1	4	1	11
a due fasi	prima x_2	2	3	13

Il bound primale migliore è $LB = 13$, dato da $\bar{x} = (2, 3)$.

2. Graficamente abbiamo:

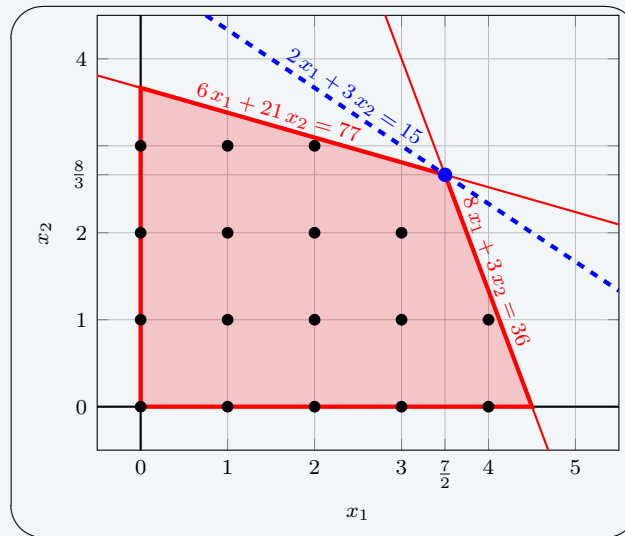


Figura 2.1: Regione ammissibile del rilassamento lineare (rossa), punti interi (neri) e soluzione ottima del rilassamento lineare (blu), con la retta obiettivo che vi passa (tratteggiata).

Il vertice ottimo è l'intersezione delle rette dei vincoli 1 e 2:

$$\begin{cases} 6x_1 + 21x_2 = 77 \\ 8x_1 + 3x_2 = 36 \end{cases} \implies x_1 = \frac{7}{2}, \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

Il valore ottimo è $z(LP) = 2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{8}{3} = 15$. I dati sono interi, quindi il bound duale è

$$z(ILP) \leq z(LP) = 15$$

3. Con $LB = 13$ e $UB = 15$ il gap di ottimalità è

$$\frac{UB - LB}{|LB|} = \frac{15 - 13}{13} = \frac{2}{13} \approx 15.4\%$$

Il gap non è zero: i bound danno solo $13 \leq z(ILP) \leq 15$, e $\bar{x} = (2, 3)$ **non è certificata** ottima.

$LB = 13$ dall'euristica a due fasi, $UB = 15$ dal rilassamento lineare, gap di ottimalità $\frac{2}{13}$. L'enumerazione completa mostra che $z(ILP) = 13$: la soluzione euristica $(2, 3)$ è ottima, ma i due bound non lo dimostrano.

Esercizio 2.2 — Arrotondamento e certificati (P4)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare e dare il bound duale UB.
2. Arrotondare la soluzione ottima del rilassamento lineare nei quattro modi possibili (ogni componente per difetto o per eccesso). Quali punti arrotondati sono ammissibili? Dare il bound primale LB migliore ottenuto per arrotondamento.
3. Calcolare il gap di ottimalità.
4. Mostrare che il punto $(6, 2)$ è ammissibile e certificare che è una soluzione ottima.

Soluzione

1. Graficamente abbiamo:

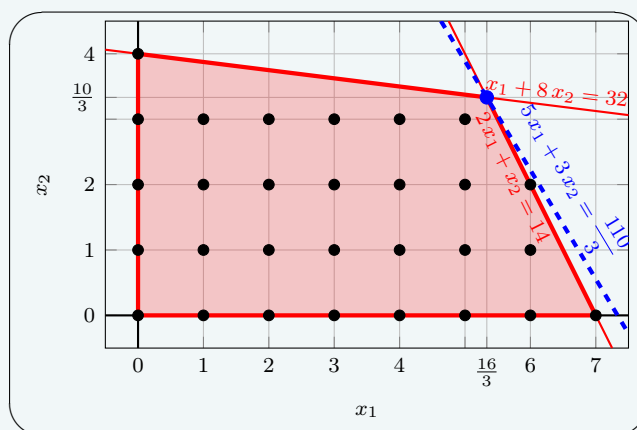


Figura 2.2: Regione ammissibile del rilassamento lineare (rossa), punti interi (neri) e soluzione ottima del rilassamento lineare (blu), con la retta obiettivo che vi passa (tratteggiata).

Il vertice ottimo è l'intersezione delle rette dei vincoli 1 e 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 + 8x_2 = 32 \end{cases} \implies x_1 = \frac{16}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

Il valore ottimo è $z(\text{LP}) = 5 \cdot \frac{16}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{110}{3}$. I dati sono interi, quindi

$$z(\text{ILP}) \leq \lfloor z(\text{LP}) \rfloor = \left\lfloor \frac{110}{3} \right\rfloor = 36$$

2. La soluzione ottima del rilassamento lineare è $(\frac{16}{3}, \frac{10}{3})$, e il suo arrotondamento al punto intero più vicino è $(5, 3)$. I quattro punti arrotondati sono:

Punto arrotondato	ammissibile	vincolo violato	valore
$(5, 3)$	sì	–	34
$(5, 4)$	no	$1 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 37 > 32$	–
$(6, 3)$	no	$2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 15 > 14$	–
$(6, 4)$	no	$2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 16 > 14$	–

Solo $(5, 3)$ è ammissibile, quindi l'arrotondamento dà $\text{LB} = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 34$.

3. Con $\text{LB} = 34$ e $\text{UB} = 36$ il gap di ottimalità è

$$\frac{\text{UB} - \text{LB}}{|\text{LB}|} = \frac{36 - 34}{34} = \frac{1}{17} \approx 5.9\%$$

4. Il punto $(6, 2)$ soddisfa i vincoli, $2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 14 \leq 14$, $1 \cdot 6 + 8 \cdot 2 = 22 \leq 32$, e il suo valore è $5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 36$. Quindi $\text{LB} = 36 = \text{UB}$: il gap di ottimalità è zero.

La soluzione ammissibile $(6, 2)$ ha valore $36 = \lfloor z(\text{LP}) \rfloor$: è **certificata ottima**, $z(\text{ILP}) = 36$. L'arrotondamento della soluzione del rilassamento lineare dà solo $(5, 3)$, di valore 34.

Esercizio 2.3 — L'arrotondamento fallisce

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 7x_2 \\ & 6x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ & -6x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Risolvere graficamente il rilassamento lineare e dare il bound duale UB.

2. Arrotondare la soluzione ottima del rilassamento lineare nei quattro modi possibili. L'arrotondamento per difetto è ammissibile? L'arrotondamento al punto intero più vicino è ammissibile? Dare il bound primale migliore ottenuto per arrotondamento.
3. Trovare graficamente una soluzione ottima del problema PLI e confrontarla con la soluzione del rilassamento lineare.

Soluzione

1. Graficamente abbiamo:

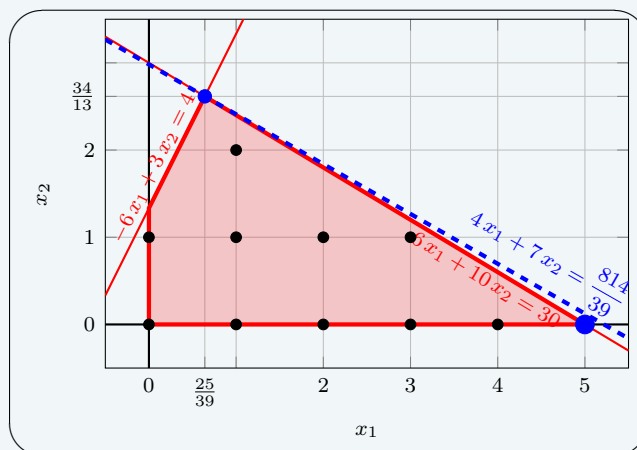


Figura 2.3: Regione ammissibile del rilassamento lineare (rossa), i suoi punti interi (neri), la soluzione ottima del rilassamento lineare (blu) con la retta obiettivo che vi passa (tratteggiata), e la soluzione ottima del problema PLI (5, 0) (cerchio blu).

Il vertice ottimo è l'intersezione delle rette dei vincoli 1 e 2:

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 = 30 \\ -6x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases} \implies x_1 = \frac{25}{39}, \quad x_2 = \frac{34}{13}$$

con $z(\text{LP}) = 4 \cdot \frac{25}{39} + 7 \cdot \frac{34}{13} = \frac{814}{39} \approx 20.87$. I dati sono interi, quindi

$$z(\text{ILP}) \leq \lfloor z(\text{LP}) \rfloor = \left\lfloor \frac{814}{39} \right\rfloor = 20$$

2. I quattro arrotondamenti di $(\frac{25}{39}, \frac{34}{13}) \approx (0.64, 2.62)$ sono:

Punto arrotondato	ammissibile	vincolo violato	valore
(0, 2)	no	$-6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6 > 4$	–
(0, 3)	no	$-6 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9 > 4$	–
(1, 2)	sì	–	18
(1, 3)	no	$6 \cdot 1 + 10 \cdot 3 = 36 > 30$	–

L'arrotondamento per difetto $(0, 2)$ e l'arrotondamento al punto più vicino $(1, 3)$ sono entrambi **inammissibili**. L'unico arrotondamento ammissibile è $(1, 2)$, con $LB = 18$.

3. Il gradiente della funzione obiettivo è $\nabla f = (4, 7)$. I punti interi vicini all'ottimo del rilassamento lineare stanno sotto la retta ripida del vincolo 2, e l'ultimo punto di F raggiunto dalla linea di livello è $(5, 0)$, sulla retta $4x_1 + 7x_2 = 20$. Il suo valore 20 è uguale a $UB = 20$, quindi è certificato ottimo.

La soluzione ottima del problema PLI $\tilde{x}(\text{ILP}) = (5, 0)$, con $z(\text{ILP}) = 20$, è lontana da $\tilde{x}(\text{LP}) \approx (0.64, 2.62)$: **nessun arrotondamento** la trova, mentre il bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 20$ è esatto.

Esercizio 2.4 — Bound duali (P2)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ & -4x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$, con $z(\text{LP}) = 16$.

Domande

1. Moltiplicare i vincoli per i moltiplicatori (π_1, π_2) elencati qui sotto. Quali moltiplicatori sono validi, e quale upper bound su $z(\text{ILP})$ dà ciascuna scelta valida?

$$(0, 3), \quad (\frac{1}{2}, 1), \quad (\frac{3}{10}, 0), \quad (\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$$

2. Scrivere il problema duale $D(\text{LP})$ del rilassamento lineare e verificare che $\tilde{\pi} = (\frac{4}{17}, \frac{11}{17})$ è una soluzione duale ottima.
3. Ricavare dai vincoli upper bound sulle variabili. Migliorano il bound del rilassamento lineare?

Soluzione

1. Con i moltiplicatori $\pi_1, \pi_2 \geq 0$ la somma dei vincoli è

$$(-4\pi_1 + 3\pi_2)x_1 + (10\pi_1 + \pi_2)x_2 \leq 35\pi_1 + 12\pi_2,$$

e dà un upper bound quando i coefficienti sono almeno pari ai costi: $-4\pi_1 + 3\pi_2 \geq 1$ e $10\pi_1 + \pi_2 \geq 3$.

(π_1, π_2)	coefficienti di x_1, x_2	moltiplicatori validi	upper bound $35\pi_1 + 12\pi_2$
$(0, 3)$	9, 3	sì	36
$(\frac{1}{2}, 1)$	1, 6	sì	$\frac{59}{2}$
$(\frac{3}{10}, 0)$	$-\frac{6}{5}, 3$	no: $-\frac{6}{5} < 1$	—
$(\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$	1, $\frac{19}{6}$	sì	$\frac{67}{4}$

Il migliore di questi bound è $\frac{67}{4}$, dato da $(\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$. I moltiplicatori $(\frac{3}{10}, 0)$ non sono validi: nel primo vincolo il coefficiente di x_1 è negativo.

2. Il problema duale D(LP) è

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 35\pi_1 + 12\pi_2 \\
 & -4\pi_1 + 3\pi_2 \geq 1 \\
 & 10\pi_1 + \pi_2 \geq 3 \\
 & \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

Il punto $(\frac{4}{17}, \frac{11}{17})$ è ammissibile, poiché $-4 \cdot \frac{4}{17} + 3 \cdot \frac{11}{17} = 1 \geq 1$ e $10 \cdot \frac{4}{17} + 1 \cdot \frac{11}{17} = 3 \geq 3$, e il suo valore è $35 \cdot \frac{4}{17} + 12 \cdot \frac{11}{17} = 16 = z(\text{LP})$. Per la dualità debole nessuna soluzione duale ammissibile ha un valore più piccolo, quindi è ottima.

3. Solo il vincolo 2, $3x_1 + x_2 \leq 12$, ha coefficienti non negativi; il vincolo 1 ha un coefficiente negativo e non dà alcun bound. Dal vincolo 2:

$$x_1 \leq \lfloor 12/3 \rfloor = 4, \quad x_2 \leq \lfloor 12/1 \rfloor = 12.$$

La soluzione ottima del rilassamento lineare $(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ soddisfa entrambi i bound, quindi non viene tagliata e $z(\text{LP}) = 16$ non cambia.

I moltiplicatori migliori $\tilde{\pi} = (\frac{4}{17}, \frac{11}{17})$ danno il bound $16 = z(\text{LP})$, che gli upper bound sulle variabili non migliorano: $z(\text{ILP}) \leq 16$ (in realtà $z(\text{ILP}) = 14$).

Esercizio 2.5 — Bound con tre variabili (P46)

Consideriamo il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 3$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\ & 9x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 16 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}) = (\frac{17}{25}, \frac{49}{25}, \frac{12}{25})$, con $z(\text{LP}) = \frac{499}{25}$.

Domande

1. Dare il bound duale UB fornito dal rilassamento lineare.
2. Arrotondare per difetto la soluzione ottima del rilassamento lineare. Il punto arrotondato è ammissibile, e quale bound primale dà?
3. Applicare l'euristica a due fasi (estesa a tre fasi) con le variabili in ordine di costo decrescente, x_3, x_2, x_1 .
4. Calcolare il gap di ottimalità con il bound primale migliore.

Soluzione

1. I dati sono interi, quindi

$$z(\text{ILP}) \leq \lfloor z(\text{LP}) \rfloor = \left\lfloor \frac{499}{25} \right\rfloor = 19$$

2. L'arrotondamento per difetto dà $(0, 1, 0)$, che è ammissibile: $9 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 \leq 11$, $2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 6 \leq 16$, $4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 2 \leq 10$. Il suo valore dà $\text{LB} = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 10 \cdot 0 = 6$, lontano dall'upper bound.
3. Ogni variabile, nell'ordine x_3, x_2, x_1 , prende il suo valore massimo con i termini noti residui:

(a) $\bar{x}_3 = \min\{\lfloor \frac{11}{2} \rfloor, \lfloor \frac{8}{3} \rfloor, \lfloor \frac{10}{7} \rfloor\} = 1$; i termini noti residui diventano 9, 10, 3.

(b) $\bar{x}_2 = \min\{\lfloor \frac{9}{2} \rfloor, \lfloor \frac{5}{3} \rfloor, \lfloor \frac{3}{2} \rfloor\} = 1$; i termini noti residui diventano 7, 4, 1.

(c) $\bar{x}_1 = \min\{\lfloor \frac{7}{9} \rfloor, \lfloor 2 \rfloor, \lfloor \frac{1}{4} \rfloor\} = 0$; i termini noti residui diventano 7, 4, 1.

La soluzione euristica è $\bar{\mathbf{x}} = (0, 1, 1)$, con $\text{LB} = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 16$.

4. Con $\text{LB} = 16$ e $\text{UB} = 19$ il gap di ottimalità è

$$\frac{\text{UB} - \text{LB}}{|\text{LB}|} = \frac{19 - 16}{16} = \frac{3}{16} \approx 18.8\%$$

$16 \leq z(\text{ILP}) \leq 19$. L'enumerazione completa mostra che la soluzione euristica $(0, 1, 1)$ è ottima, $z(\text{ILP}) = 16$, ma il gap $\frac{3}{16}$ non lo certifica.

Parte II

Rafforzare la formulazione

Formulazioni ideali

Esercizio 3.1 — Inviluppo convesso e formulazione ideale (P8)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Elencare le soluzioni ammissibili e calcolare l'inviluppo convesso $\text{conv}(F)$ della regione ammissibile. Classificare le soluzioni ammissibili in vertici, punti del bordo e punti interni dell'inviluppo.
2. Descrivere $\text{conv}(F)$ con disuguaglianze lineari e scrivere la formulazione ideale corrispondente.
3. Risolvere il rilassamento lineare della formulazione data e il problema LP sulla formulazione ideale, e confrontare i due upper bound.

Soluzione

1. Per $x_2 = 0$ i vincoli danno $x_1 \leq 3$, per $x_2 = 1$ danno $x_1 \leq 2$, e per $x_2 = 2$ richiedono $x_1 \geq 2$ e $x_1 \leq 1$. La regione ammissibile ha i 7 punti

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (2, 0), \quad (3, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 1), \quad (2, 1).$$

Graficamente:

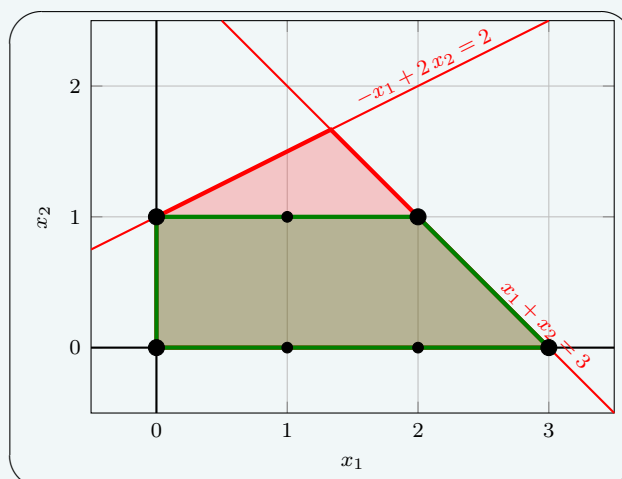


Figura 3.1: Il poliedro della formulazione (rosso) e l'involuppo convesso dei punti interi (verde): i vertici dell'involuppo sono i quadrati neri, gli altri punti interi i punti neri.

L'involuppo convesso $\text{conv}(F)$ è il quadrilatero con

- i 4 **vertici** $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$;
- 3 punti sul bordo, $(1,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$;
- nessun punto all'interno.

2. I lati dell'involuppo stanno sulle rette

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_2 = 1,$$

insieme agli assi $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. La formulazione ideale è quindi

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

I suoi punti interi sono gli stessi 7 punti di F , e il suo poliedro ha solo vertici interi.

3. Per la formulazione data il vertice ottimo è l'intersezione delle rette dei vincoli 1 e 2:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \implies x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}$$

con $z(\text{LP}) = \frac{14}{3}$ e il bound $\lfloor z(\text{LP}) \rfloor = 4$. Sulla formulazione ideale il vertice ottimo è il punto intero $(2,1)$, di valore 4.

Il problema LP sulla formulazione ideale dà $z = 4 = z(\text{ILP})$ nel vertice intero $(2,1)$; la formulazione data dà solo il bound $z(\text{LP}) = \frac{14}{3}$, arrotondato per difetto a 4.

Esercizio 3.2 — Formulazione ideale ($P3$)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

1. Calcolare l'involuppo convesso $\text{conv}(F)$ della regione ammissibile e classificare le soluzioni ammissibili in vertici, punti del bordo e punti interni.
2. Scrivere una formulazione ideale del problema PLI.
3. La soluzione ottima del rilassamento lineare della formulazione data è $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$. Mostrare che non appartiene a $\text{conv}(F)$, e concludere che la formulazione data non è ideale.
4. Confrontare gli upper bound delle due formulazioni.

Soluzione

1. La regione ammissibile ha 9 punti. Graficamente:

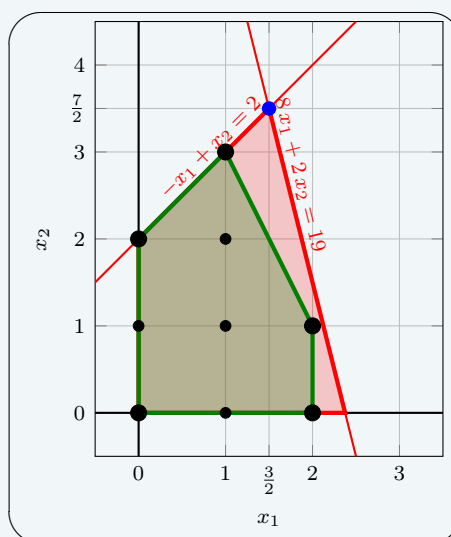


Figura 3.2: Il poliedro della formulazione data (rosso), l'involuppo convesso dei punti interi (verde) con i suoi vertici (quadrati neri), e la soluzione ottima del rilassamento lineare (blu), fuori dall'involuppo.

L'involuppo convesso $\text{conv}(F)$ è un poligono con

- i 5 **vertici** $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$;
- 2 punti sul bordo, $(1, 0)$, $(0, 1)$;
- 2 punti all'interno, $(1, 1)$, $(1, 2)$.

2. I lati dell'involuppo stanno sulle rette $x_1 = 2$, $2x_1 + x_2 = 5$, $-x_1 + x_2 = 2$ e sugli assi. La formulazione ideale è

$$\begin{array}{rcll} \max & 2x_1 & + & 4x_2 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 5 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq 2 \\ & x_1, & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

3. Il punto $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ viola la disuguaglianza $2x_1 + x_2 \leq 5$ dell'involuppo: $2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{7}{2} = \frac{13}{2} > 5$. Ogni punto di $\text{conv}(F)$ soddisfa questa disuguaglianza, quindi $\tilde{x}(\text{LP}) \notin \text{conv}(F)$ e $\text{conv}(F) \subsetneq P$: la formulazione data **non è ideale**.
4. La formulazione data dà $z(\text{LP}) = 17$, quindi $z(\text{ILP}) \leq 17$. La formulazione ideale ha il vertice ottimo $(1, 3)$, di valore 14.

La formulazione ideale dà il valore esatto $z(\text{ILP}) = 14$, raggiunto nel vertice intero $(1, 3)$; la formulazione data dà il bound più debole 17.

Esercizio 3.3 — Confronto tra formulazioni (P23)

Si consideri il problema PLI in forma canonica di massimizzazione

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & 4x_2 \\ & 3x_1 & + & 8x_2 \leq 24 \\ & -x_1 & & \leq -1 \\ & & & -x_2 \leq -1 \\ & x_1, & & x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}$$

e i due poliedri (entrambi con $x_1, x_2 \geq 0$)

$$P_A = \{3x_1 + 8x_2 \leq 24, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\},$$

$$P_B = \{x_1 + 3x_2 \leq 8, x_1 \leq 5, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}.$$

Domande

1. Mostrare che P_A e P_B sono due formulazioni dello stesso problema PLI.
2. Calcolare i vertici di P_A e P_B , e stabilire quale formulazione è più forte.

3. Confrontare gli upper bound dati dai rilassamenti lineari delle due formulazioni.
4. P_B è una formulazione ideale?

Soluzione

1. In entrambi i poliedri $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 1$. In P_A , $x_2 = 1$ dà $3x_1 \leq 16$, cioè $x_1 \leq 5$, e $x_2 = 2$ dà $x_1 \leq 2$; $x_2 \geq 3$ è impossibile. In P_B , $x_2 = 1$ dà $x_1 \leq 5$, e $x_2 = 2$ dà $x_1 \leq 2$; $x_2 \geq 3$ è impossibile. Entrambi contengono esattamente i 7 punti interi

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (1, 2), (2, 2),$$

quindi $P_A \cap \mathbb{Z}^2 = P_B \cap \mathbb{Z}^2 = F$.

2. I vertici sono

$$P_A : (1, 1), (1, \frac{21}{8}), (\frac{16}{3}, 1), \quad P_B : (1, 1), (1, \frac{7}{3}), (5, 1).$$

Ogni vertice di P_B soddisfa i vincoli di P_A , quindi $P_B \subseteq P_A$ (entrambi sono convessi). Il vertice $(1, \frac{21}{8})$ di P_A viola $x_1 + 3x_2 \leq 8$ ($1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{21}{8} = \frac{71}{8} > 8$), quindi $P_B \subsetneq P_A$: P_B è più forte.

Graficamente:

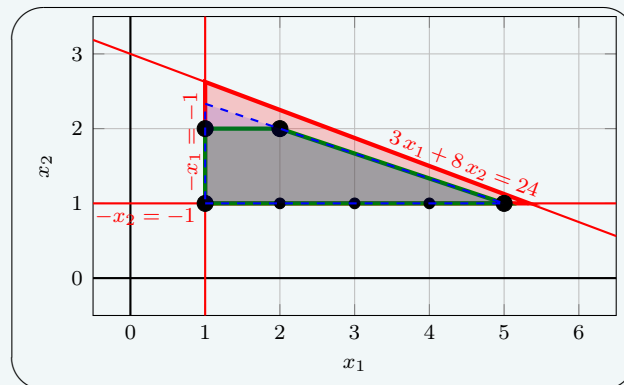


Figura 3.3: La formulazione P_A (rosso), la formulazione P_B (blu, tratteggiata) e l'involuppo convesso dei punti interi (verde), con i suoi vertici (quadrati neri).

3. I rilassamenti lineari danno $\tilde{x} = (1, \frac{21}{8})$ con $z = \frac{23}{2}$ su P_A , e $\tilde{x} = (1, \frac{7}{3})$ con $z = \frac{31}{3}$ su P_B . I bound arrotondati sono 11 e 10. Il punto ammissibile $(2, 2)$ ha valore 10, quindi P_B ne certifica l'ottimalità, mentre P_A lascia un gap.
4. No: il vertice $(1, \frac{7}{3})$ di P_B è frazionario. L'involuppo convesso ha i vertici $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$ e i lati su $x_2 \geq 1$, $x_1 + 3x_2 \leq 8$, $x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 1$.

$P_B \subsetneq P_A$: la formulazione P_B è più forte e il suo bound $\lfloor \frac{31}{3} \rfloor = 10$ certifica $z(\text{ILP}) = 10$, ma non è ideale.

Esercizio 3.4 — Riconoscere una formulazione ideale

Si considerino i tre poliedri (tutti con $x_1, x_2 \geq 0$)

$$P_C = \{x_1 + x_2 \leq 3, x_1 \leq 2\},$$

$$P_D = \{x_1 + 4x_2 \leq 12, 2x_1 + x_2 \leq 5\},$$

$$P_E = \{x_1 + x_2 \leq 3, 2x_1 + x_2 \leq 5\}.$$

Domande

1. Mostrare che P_C , P_D e P_E contengono gli stessi punti interi, e quindi sono formulazioni dello stesso problema PLI.
2. Calcolare i vertici dei tre poliedri. Quale formulazione è ideale? Ordinare le formulazioni dalla più forte alla più debole.
3. Con la funzione obiettivo $x_1 + 5x_2$, il problema LP su P_D ha una soluzione ottima intera. Questo dimostra che P_D è ideale? Usare la funzione obiettivo $x_1 + x_2$ per rispondere.

Soluzione

1. Un punto intero di uno qualsiasi dei tre poliedri ha $x_1 \leq 2$ ($x_1 \leq 2$ in P_C , $2x_1 \leq 5$ in P_D e P_E). Per $x_1 = 0, 1, 2$ il massimo valore intero di x_2 è

$$P_C : 3 - x_1 = 3, 2, 1,$$

$$P_D : \min\{\lfloor (12 - x_1)/4 \rfloor, 5 - 2x_1\} = 3, 2, 1,$$

$$P_E : \min\{3 - x_1, 5 - 2x_1\} = 3, 2, 1.$$

Le tre formulazioni hanno gli stessi 9 punti interi

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1).$$

2. I vertici sono

$$P_C : (0, 0), (0, 3), (2, 0), (2, 1)$$

$$P_D : (0, 0), (0, 3), (\frac{8}{7}, \frac{19}{7}), (\frac{5}{2}, 0)$$

$$P_E : (0, 0), (0, 3), (2, 1), (\frac{5}{2}, 0)$$

Solo P_C ha tutti i vertici interi: $P_C = \text{conv}(F)$ è la formulazione **ideale**. Ogni vertice di P_C appartiene a P_E e ogni vertice di P_E appartiene a P_D , quindi

$$\text{conv}(F) = P_C \subsetneq P_E \subsetneq P_D,$$

e l'ordine dalla formulazione più forte alla più debole è P_C, P_E, P_D . Graficamente:

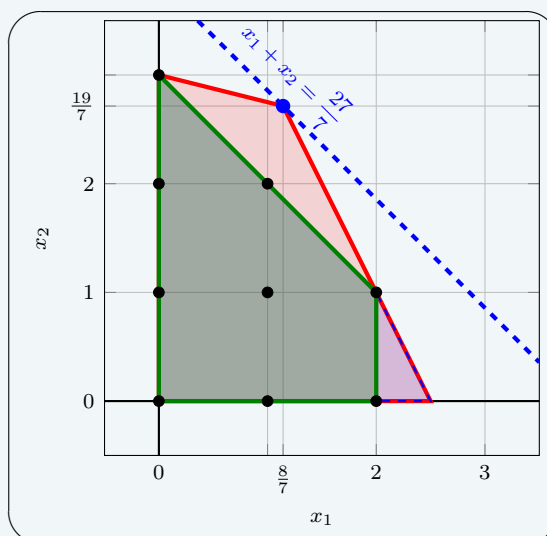


Figura 3.4: Le formulazioni P_D (rosso), P_E (blu, tratteggiata) e P_C (verde), i 9 punti interi (neri), e la soluzione ottima $(\frac{8}{7}, \frac{19}{7})$ del problema LP su P_D con l'obiettivo $x_1 + x_2$ (blu), con la sua retta obiettivo (tratteggiata).

- Con $x_1 + 5x_2$ il vertice ottimo di P_D è $(0, 3)$, di valore 15: è intero. Con $x_1 + x_2$, invece, il vertice ottimo di P_D è $(\frac{8}{7}, \frac{19}{7})$, di valore $\frac{27}{7}$, mentre il miglior punto intero ha valore 3.

Un ottimo LP intero per una funzione obiettivo **non** dimostra che una formulazione è ideale: P_D ha il vertice frazionario $(\frac{8}{7}, \frac{19}{7})$, ottimo per $x_1 + x_2$. Solo P_C dà un vertice ottimo intero per ogni funzione obiettivo.

Esercizio 3.5 — Una formulazione ideale in tre dimensioni (P_{43})

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 3$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ & x_1 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Domande

- Calcolare tutti i vertici del poliedro P del rilassamento lineare.
- La formulazione è ideale? Che cosa implica per il rilassamento lineare con una funzione obiettivo qualsiasi?
- Risolvere il rilassamento lineare con la funzione obiettivo data e dare $z(\text{ILP})$.

Soluzione

1. Un vertice di $P \subseteq \mathbb{R}^3$ è un punto ammissibile in cui 3 vincoli linearmente indipendenti (tra i 2 vincoli e i 3 vincoli di non negatività) sono soddisfatti all'uguaglianza. Risolvendo tutti i sistemi 3×3 e tenendo le soluzioni ammissibili si ottengono i vertici

$$(0, 0, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 2, 0), \quad (2, 0, 0), \quad (2, 2, 0).$$

Per esempio, $x_1 = 0$, $x_1 + 2x_3 = 2$ e $x_2 + 2x_3 = 2$ danno $(0, 0, 1)$. I sistemi impossibili, o la cui soluzione viola un vincolo, non danno alcun vertice.

2. Tutti i vertici sono interi e appartengono a F . Il poliedro P è limitato, quindi è l'involuppo convesso dei suoi vertici: $P = \text{conv}(\text{vertici}) \subseteq \text{conv}(F) \subseteq P$, quindi $P = \text{conv}(F)$ e la formulazione è **ideale**. Per ogni funzione obiettivo il rilassamento lineare ha un vertice ottimo intero, per esempio:

Funzione obiettivo	vertice ottimo	valore ottimo
$x_1 + 2x_2 + 7x_3$	$(0, 0, 1)$	7
$x_1 + x_2 + 3x_3$	$(2, 2, 0)$	4
$3x_1 + 2x_2 + 9x_3$	$(2, 2, 0)$	10
$x_1 + x_2 + x_3$	$(2, 2, 0)$	4

e l'enumerazione completa dà gli stessi valori.

3. I valori di $x_1 + 2x_2 + 7x_3$ nei cinque vertici sono 0, 7, 4, 2, 6: il vertice ottimo è $(0, 0, 1)$, di valore 7.

La formulazione è ideale: il vertice ottimo $(0, 0, 1)$ del rilassamento lineare è intero, e $z(\text{LP}) = z(\text{ILP}) = 7$.

Disuguaglianze valide

Esercizio 4.1 — Una disuguaglianza valida per arrotondamento ($P2$)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ & -4x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$, con $z(\text{LP}) = 16$.

Domande

1. Usando i moltiplicatori $(\frac{3}{34}, \frac{2}{17})$, mostrare che $x_2 \leq 4$ è una disuguaglianza valida.
2. La disuguaglianza è saturata? Taglia la soluzione ottima del rilassamento lineare?
3. Aggiungere la disuguaglianza alla formulazione e calcolare il nuovo upper bound.

Soluzione

1. Moltiplicando i vincoli per i moltiplicatori non negativi $(\frac{3}{34}, \frac{2}{17})$ e sommando, $\frac{3}{34} \cdot (-4x_1 + 10x_2 \leq 35) + \frac{2}{17} \cdot (3x_1 + x_2 \leq 12)$, otteniamo

$$x_2 \leq \frac{9}{2}.$$

Poiché $x_j \geq 0$ e i coefficienti $0 \geq 0$, $1 \geq 1$ sono almeno quelli di x_2 , ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_2 \leq x_2 \leq \frac{9}{2}$. Il membro sinistro è intero, quindi

$$x_2 \leq \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$$

è una **disuguaglianza valida**.

2. La soluzione ammissibile $(2, 4)$ soddisfa $x_2 = 4$, quindi la disuguaglianza è **saturata**. La disuguaglianza **taglia** $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}) = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$, perché $0 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2} > 4$.
3. Graficamente:

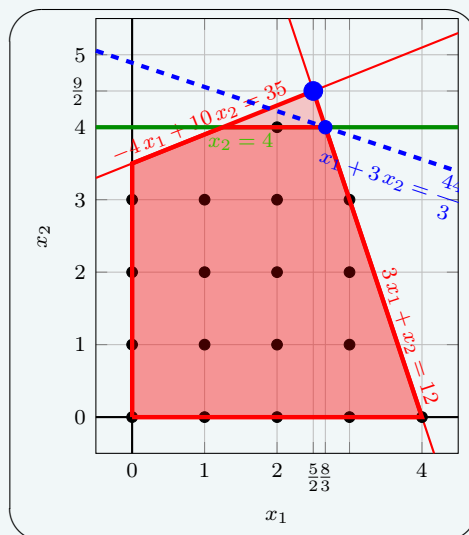


Figura 4.1: Il rilassamento lineare con la disuguaglianza valida $x_2 \leq 4$ (verde): la soluzione ottima $(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ del rilassamento lineare originale (cerchio blu) è tagliata, e la nuova soluzione ottima è in blu, con la sua retta obiettivo (tratteggiata).

Formulazione	$\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP})$	$z(\text{LP})$	upper bound
originale	$(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$	16	16
con $x_2 \leq 4$	$(\frac{8}{3}, 4)$	$\frac{44}{3}$	14

$x_2 \leq 4$ è valida e saturata, taglia $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP})$, e l'upper bound migliora da 16 a 14 (il valore ottimo è $z(\text{ILP}) = 14$).

Esercizio 4.2 — Valida o non valida (P4)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 32 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{16}{3}, \frac{10}{3})$, con $z(\text{LP}) = \frac{110}{3}$.

Domande

1. $x_1 + x_2 \leq 7$ è una disuguaglianza valida?
2. Mostrare che $x_1 + x_2 \leq 8$ è una disuguaglianza valida, usando i moltiplicatori $(\frac{7}{15}, \frac{1}{15})$. Taglia la soluzione ottima del rilassamento lineare?
3. Aggiungere $x_1 + x_2 \leq 8$ alla formulazione e risolvere il nuovo rilassamento lineare. Che cosa si può concludere?

Soluzione

1. No. Il punto $(6, 2)$ è ammissibile, $2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 14 \leq 14$, $1 \cdot 6 + 8 \cdot 2 = 22 \leq 32$, e viola la disuguaglianza: $6 + 2 = 8 > 7$; lo stesso vale per il punto ammissibile $(5, 3)$. Una disuguaglianza valida deve essere soddisfatta da **tutte** le soluzioni ammissibili.
2. Moltiplicando i vincoli per i moltiplicatori non negativi $(\frac{7}{15}, \frac{1}{15})$ e sommando, $\frac{7}{15} \cdot (2x_1 + x_2 \leq 14) + \frac{1}{15} \cdot (x_1 + 8x_2 \leq 32)$, otteniamo

$$x_1 + x_2 \leq \frac{26}{3}.$$

Poiché $x_j \geq 0$ e i coefficienti $1 \geq 1$, $1 \geq 1$ sono almeno quelli di $x_1 + x_2$, ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2 \leq \frac{26}{3}$. Il membro sinistro è intero, quindi

$$x_1 + x_2 \leq \left\lfloor \frac{26}{3} \right\rfloor = 8$$

è una **disuguaglianza valida**. La disuguaglianza **taglia** $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{16}{3}, \frac{10}{3})$, perché $1 \cdot \frac{16}{3} + 1 \cdot \frac{10}{3} = \frac{26}{3} > 8$.

3. Graficamente:

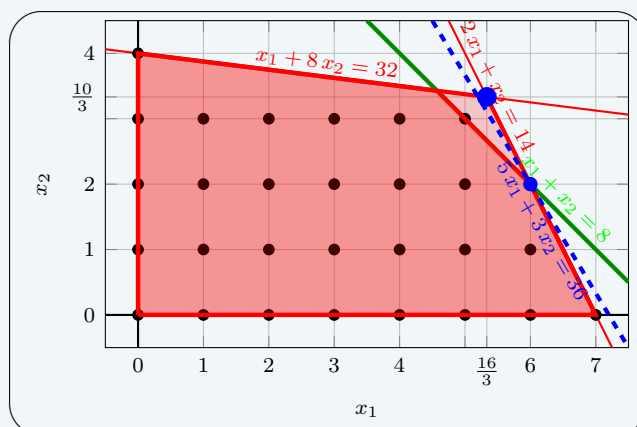


Figura 4.2: Il rilassamento lineare con la disuguaglianza valida $x_1 + x_2 \leq 8$ (verde): la vecchia soluzione ottima (cerchio blu) è tagliata e la nuova soluzione ottima $(6, 2)$ (blu) è intera.

Formulazione	$\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP})$	$z(\text{LP})$	upper bound
originale	$(\frac{16}{3}, \frac{10}{3})$	$\frac{110}{3}$	36
con $x_1 + x_2 \leq 8$	$(6, 2)$	36	36

Il nuovo rilassamento lineare ha la soluzione ottima **intera** $(6, 2)$: è una soluzione ottima del problema PLI, $z(\text{ILP}) = 36$, e la disuguaglianza $x_1 + x_2 \leq 7$, che la elimina, non è valida.

Esercizio 4.3 — Arrotondamento e saturazione ($P5$)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 2$ vincoli:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
 & 6x_1 + 21x_2 \leq 77 \\
 & 8x_1 + 3x_2 \leq 36 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}) = (\frac{7}{2}, \frac{8}{3})$, con $z(\text{LP}) = 15$.

Domande

1. Moltiplicare entrambi i vincoli per $\frac{1}{7}$, sommarli, e ricavare per arrotondamento una disuguaglianza valida $2x_1 + 3x_2 \leq \beta$. Taglia la soluzione ottima del rilassamento lineare?

2. Rendere la disuguaglianza saturata con il Passo 1 dell'algoritmo del capitolo: diminuire β finché un punto intero ammissibile non sta sulla retta $2x_1 + 3x_2 = \beta$.
3. Aggiungere la disuguaglianza saturata alla formulazione. Qual è il nuovo upper bound?

Soluzione

1. Moltiplicando i vincoli per i moltiplicatori non negativi $(\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ e sommando, $\frac{1}{7} \cdot (6x_1 + 21x_2 \leq 77) + \frac{1}{7} \cdot (8x_1 + 3x_2 \leq 36)$, otteniamo

$$2x_1 + \frac{24}{7}x_2 \leq \frac{113}{7}.$$

Poiché $x_j \geq 0$ e i coefficienti $2 \geq 2$, $\frac{24}{7} \geq 3$ sono almeno quelli di $2x_1 + 3x_2$, ogni soluzione ammissibile soddisfa $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + \frac{24}{7}x_2 \leq \frac{113}{7}$. Il membro sinistro è intero, quindi

$$2x_1 + 3x_2 \leq \left\lfloor \frac{113}{7} \right\rfloor = 16$$

è una **disuguaglianza valida**. La disuguaglianza **non** taglia $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{7}{2}, \frac{8}{3})$, perché $2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{8}{3} = 15 \leq 16$. La disuguaglianza è valida ma inutile per il bound.

2. Con due variabili i punti interi della retta $2x_1 + 3x_2 = \beta$ con $x_1, x_2 \geq 0$ sono in numero finito, e li controlliamo uno per uno sui vincoli.
 - $\beta = 16$. I punti interi di $2x_1 + 3x_2 = 16$ con $x \geq 0$: $(2, 4)$ viola il vincolo 1 ($6 \cdot 2 + 21 \cdot 4 = 96 > 77$); $(5, 2)$ viola il vincolo 2 ($8 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 46 > 36$); $(8, 0)$ viola il vincolo 2 ($8 \cdot 8 + 3 \cdot 0 = 64 > 36$). Quindi nessun punto è ammissibile: poniamo $\beta = 15$.
 - $\beta = 15$. I punti interi di $2x_1 + 3x_2 = 15$ con $x \geq 0$: $(0, 5)$ viola il vincolo 1 ($6 \cdot 0 + 21 \cdot 5 = 105 > 77$); $(3, 3)$ viola il vincolo 1 ($6 \cdot 3 + 21 \cdot 3 = 81 > 77$); $(6, 1)$ viola il vincolo 2 ($8 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 51 > 36$). Quindi nessun punto è ammissibile: poniamo $\beta = 14$.
 - $\beta = 14$. I punti interi di $2x_1 + 3x_2 = 14$ con $x \geq 0$: $(1, 4)$ viola il vincolo 1 ($6 \cdot 1 + 21 \cdot 4 = 90 > 77$); $(4, 2)$ viola il vincolo 2 ($8 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 38 > 36$); $(7, 0)$ viola il vincolo 2 ($8 \cdot 7 + 3 \cdot 0 = 56 > 36$). Quindi nessun punto è ammissibile: poniamo $\beta = 13$.
 - $\beta = 13$. I punti interi di $2x_1 + 3x_2 = 13$ con $x \geq 0$: $(2, 3)$ è ammissibile; $(5, 1)$ viola il vincolo 2 ($8 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 43 > 36$). Quindi esiste un punto ammissibile: la disuguaglianza è saturata. **STOP**.

La disuguaglianza valida saturata è $2x_1 + 3x_2 \leq 13$. La disuguaglianza **taglia** $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{7}{2}, \frac{8}{3})$, perché $2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{8}{3} = 15 > 13$.

3. La disuguaglianza saturata ha gli stessi coefficienti della funzione obiettivo, quindi il nuovo rilassamento lineare ha valore ottimo $z(\text{LP}) = 13$, raggiunto per esempio in $(\frac{23}{6}, \frac{16}{9})$.

Formulazione	$\tilde{x}(\text{LP})$	$z(\text{LP})$	upper bound
originale	$(\frac{7}{2}, \frac{8}{3})$	15	15
con $2x_1 + 3x_2 \leq 13$	$(\frac{23}{6}, \frac{16}{9})$	13	13

L'arrotondamento dà $2x_1 + 3x_2 \leq 16$, che non taglia l'ottimo del rilassamento lineare; la versione saturata $2x_1 + 3x_2 \leq 13$ dà $\text{UB} = 13$, uguale al valore del punto ammissibile $(2, 3)$: $z(\text{ILP}) = 13$ è certificato.

Esercizio 4.4 — Raggiungere l'involuppo convesso per arrotondamento (P1)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 2$ variabili intere e $m = 1$ vincolo:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{x}(\text{LP}) = (0, \frac{8}{3})$, con $z(\text{LP}) = \frac{64}{3}$.

Domande

1. Ricavare una disuguaglianza valida $x_2 \leq \beta_1$ con il moltiplicatore $\frac{1}{6}$, e una disuguaglianza valida $x_1 + 2x_2 \leq \beta_2$ con il moltiplicatore $\frac{1}{3}$.
2. Calcolare l'upper bound dato dal rilassamento lineare dopo aver aggiunto ciascuna disuguaglianza da sola, e dopo averle aggiunte entrambe.
3. Mostrare che la formulazione con entrambe le disuguaglianze è ideale.

Soluzione

1. • Moltiplicando i vincoli per i moltiplicatori non negativi $(\frac{1}{6})$ e sommando, $\frac{1}{6} \cdot (3x_1 + 6x_2 \leq 16)$, otteniamo

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{8}{3}.$$

Poiché $x_j \geq 0$ e i coefficienti $\frac{1}{2} \geq 0$, $1 \geq 1$ sono almeno quelli di x_2 , ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_2 \leq \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{8}{3}$. Il membro sinistro è intero, quindi

$$x_2 \leq \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor = 2$$

è una **disuguaglianza valida**.

- Moltiplicando i vincoli per i moltiplicatori non negativi ($\frac{1}{3}$) e sommando, $\frac{1}{3} \cdot (3x_1 + 6x_2 \leq 16)$, otteniamo

$$x_1 + 2x_2 \leq \frac{16}{3}.$$

Poiché $x_j \geq 0$ e i coefficienti $1 \geq 1$, $2 \geq 2$ sono almeno quelli di $x_1 + 2x_2$, ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_1 + 2x_2 \leq x_1 + 2x_2 \leq \frac{16}{3}$. Il membro sinistro è intero, quindi

$$x_1 + 2x_2 \leq \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor = 5$$

è una **disuguaglianza valida**.

2. Graficamente:

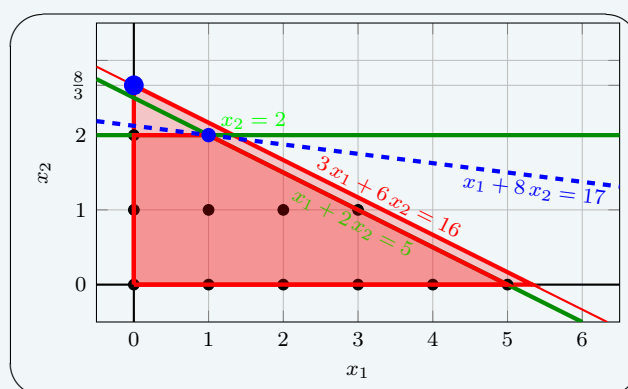


Figura 4.3: Il rilassamento lineare (rosso chiaro) con le disuguaglianze valide $x_2 \leq 2$ e $x_1 + 2x_2 \leq 5$ (verde): il nuovo poliedro (rosso) ha il vertice ottimo intero $(1, 2)$ (blu); la vecchia soluzione ottima è il cerchio blu.

Formulazione	$\tilde{x}(\text{LP})$	$z(\text{LP})$	upper bound
originale	$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{64}{3}$	21
con $x_2 \leq 2$	$(\frac{4}{3}, 2)$	$\frac{52}{3}$	17
con $x_1 + 2x_2 \leq 5$	$(0, \frac{5}{2})$	20	20
con entrambe	$(1, 2)$	17	17

Ciascuna disuguaglianza da sola taglia $\tilde{x}(\text{LP})$ ma lascia un ottimo frazionario; insieme danno l'ottimo intero $(1, 2)$.

3. Il poliedro con entrambe le disuguaglianze ha i vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(5, 0)$, tutti interi: è l'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili, quindi la formulazione è **ideale**.

Con $x_2 \leq 2$ e $x_1 + 2x_2 \leq 5$, entrambe ottenute per arrotondamento, il rilassamento lineare dà $z(\text{LP}) = 17 = z(\text{ILP})$ nel vertice intero $(1, 2)$.

Esercizio 4.5 — Arrotondamento con tre variabili (P42)

Si consideri il seguente problema PLI in forma canonica di massimizzazione con $n = 3$ variabili intere e $m = 3$ vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

La soluzione ottima del suo rilassamento lineare è $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, con $z(\text{LP}) = \frac{21}{2}$.

Domande

1. Moltiplicare il secondo vincolo per $\frac{1}{2}$, arrotondare per difetto i suoi coefficienti e il suo termine noto, e mostrare che il risultato è una disuguaglianza valida.
2. La disuguaglianza taglia la soluzione ottima del rilassamento lineare?
3. Aggiungere la disuguaglianza alla formulazione. Il nuovo rilassamento lineare ha la soluzione ottima $(2, 2, 0)$: che cosa si può concludere?

Soluzione

1. Il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{1}{2}$ è $x_1 + \frac{3}{2}x_3 \leq \frac{5}{2}$. Arrotondando per difetto i coefficienti si ottiene $x_1 + x_3$, i cui coefficienti non sono più grandi. Moltiplicando i vincoli per i moltiplicatori non negativi $(0, \frac{1}{2}, 0)$ e sommando, $\frac{1}{2} \cdot (2x_1 + 3x_3 \leq 5)$, otteniamo

$$x_1 + \frac{3}{2}x_3 \leq \frac{5}{2}.$$

Poiché $x_j \geq 0$ e i coefficienti $1 \geq 1$, $0 \geq 0$, $\frac{3}{2} \geq 1$ sono almeno quelli di $x_1 + x_3$, ogni soluzione ammissibile soddisfa $x_1 + x_3 \leq x_1 + \frac{3}{2}x_3 \leq \frac{5}{2}$. Il membro sinistro è intero, quindi

$$x_1 + x_3 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$$

è una **disuguaglianza valida**.

2. La disuguaglianza **taglia** $\tilde{x}(\text{LP}) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, perché $1 \cdot \frac{5}{2} + 0 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 = \frac{5}{2} > 2$.
3. Il nuovo rilassamento lineare ha la soluzione ottima **intera** $(2, 2, 0)$, di valore 10. Per la proposizione sul rilassamento lineare, è una soluzione ottima del problema PLI.

La disuguaglianza valida $x_1 + x_3 \leq 2$ abbassa l'upper bound da $\lfloor \frac{21}{2} \rfloor = 10$ a 10 e dà la soluzione ottima $(2, 2, 0)$, $z(\text{ILP}) = 10$.

Disuguaglianze di cover

5.1 Separazione delle cover

Esercizio 5.1 — Disuguaglianze di copertura ($P1$)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 8$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	40	42	25	12
a_j	4	7	5	3

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 40x_1 & + & 42x_2 & + & 25x_3 & + & 12x_4 \\
 \text{soggetto a} & 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 \leq 8 \\
 & x_1 & & & & & & \leq 1 \\
 & & x_2 & & & & & \leq 1 \\
 & & & x_3 & & & & \leq 1 \\
 & & & & x_4 & & & \leq 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = 64.$$

Domande

1. Elencare tutte le disuguaglianze di copertura e individuare le coperture minimali.
2. Per il punto $\tilde{x}$, scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$.
3. Applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata.

4. Verificare se la soluzione greedy è ottima.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{x}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{x}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate da $\tilde{x}$.

- Disuguaglianze di copertura**

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 8$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2\}$	11	2	$x_1 + x_2 \leq 1$	sì
$\{1, 3\}$	9	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{2, 3\}$	12	2	$x_2 + x_3 \leq 1$	sì
$\{2, 4\}$	10	2	$x_2 + x_4 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	16	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no
$\{1, 2, 4\}$	14	3	$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$	no
$\{1, 3, 4\}$	12	3	$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{2, 3, 4\}$	15	3	$x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{1, 2, 3, 4\}$	19	4	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$	no

Ci sono 9 coperture, di cui 4 minimali. Le disuguaglianze di copertura delle coperture non minimali sono implicate da quelle delle coperture minimali e dagli upper bound $x_j \leq 1$.

- Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, \frac{3}{7}, 1, 1)$, e il problema di separazione ILP_{CSP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{3}{7} z_2 + z_3 + z_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 4 z_1 + 7 z_2 + 5 z_3 + 3 z_4 \geq 9 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Con $y_j = 1 - z_j$, il termine costante e il termine noto del problema complementare sono

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{17}{7}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 19 - 9 = 10,$$

e il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & \frac{3}{7} y_2 & + & y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 4 y_1 & + & 7 y_2 & + & 5 y_3 & + & 3 y_4 \leq 10 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{17}{7} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

- **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 10:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
4	1	3	$\frac{1}{3}$	$\bar{y}_j = 1$	7
3	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	2
2	$\frac{3}{7}$	7	$\frac{3}{49}$	$\bar{y}_j = 0$	2
1	0	4	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	2

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 1, 1)$, di valore 2. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di coefficiente totale $11 > 8$ e costo $\frac{17}{7} - 2 = \frac{3}{7} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{4}{7} - 1 = \frac{4}{7}$.

- **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3, 4\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 10 sono: $\{2\}$ (valore $\frac{3}{7}$), $\{3\}$ (valore 1), $\{4\}$ (valore 1), $\{2, 4\}$ (valore $\frac{10}{7}$), $\{3, 4\}$ (valore 2). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{3}{7} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{4}{7}$.

Esercizio 5.2 — Disuguaglianze di copertura (P2)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 15$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	24	17	12	6
a_j	10	8	6	5

Il LP associato è:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & 24x_1 & + & 17x_2 & + & 12x_3 & + & 6x_4 \\
 \text{soggetto a} & 10x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & \leq & 15 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{8}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = \frac{277}{8}.$$

Domande

1. Elencare tutte le disuguaglianze di copertura e individuare le coperture minimali.
2. Per il punto $\tilde{\mathbf{x}}$, scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$.
3. Applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata.
4. Verificare se la soluzione greedy è ottima.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{\mathbf{x}}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, \quad z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate da $\tilde{\mathbf{x}}$.

- **Disuguaglianze di copertura**

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 15$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2\}$	18	2	$x_1 + x_2 \leq 1$	sì
$\{1, 3\}$	16	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	24	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no
$\{1, 2, 4\}$	23	3	$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$	no
$\{1, 3, 4\}$	21	3	$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{2, 3, 4\}$	19	3	$x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$	sì
$\{1, 2, 3, 4\}$	29	4	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$	no

Ci sono 7 coperture, di cui 3 minimali. Le disuguaglianze di copertura delle coperture non minimali sono implicate da quelle delle coperture minimali e dagli upper bound $x_j \leq 1$.

- Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, \frac{3}{8}, 1, 1)$, e il problema di separazione ILP_{CSP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{3}{8} z_2 + z_3 + z_4 \\ \text{sogetto a} \quad & 10 z_1 + 8 z_2 + 6 z_3 + 5 z_4 \geq 16 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Con $y_j = 1 - z_j$, il termine costante e il termine noto del problema complementare sono

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{19}{8}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 29 - 16 = 13,$$

e il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{3}{8} y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{sogetto a} \quad & 10 y_1 + 8 y_2 + 6 y_3 + 5 y_4 \leq 13 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{19}{8} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

- Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 13:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
4	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	8
3	1	6	$\frac{1}{6}$	$\bar{y}_j = 1$	2
2	$\frac{3}{8}$	8	$\frac{3}{64}$	$\bar{y}_j = 0$	2
1	0	10	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	2

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 1, 1)$, di valore 2. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di coefficiente totale $18 > 15$ e costo $\frac{19}{8} - 2 = \frac{3}{8} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{5}{8} - 1 = \frac{5}{8}$.

- **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3, 4\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 13 sono: $\{2\}$ (valore $\frac{3}{8}$), $\{3\}$ (valore 1), $\{4\}$ (valore 1), $\{2, 4\}$ (valore $\frac{11}{8}$), $\{3, 4\}$ (valore 2). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{3}{8} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{5}{8}$.

Esercizio 5.3 — Disuguaglianze di copertura (P3)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 12$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	38	14	44	19
a_j	5	2	10	6

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 38x_1 & + & 14x_2 & + & 44x_3 & + & 19x_4 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 6x_4 & \leq & 12 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & x_2 & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_3 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & x_4 & & & & \leq & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = 74.$$

Domande

1. Elencare tutte le disuguaglianze di copertura e individuare le coperture minimali.
2. Per il punto $\tilde{\mathbf{x}}$, scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$.
3. Applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata.

4. Verificare se la soluzione greedy è ottima.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{x}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{x}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate da $\tilde{x}$.

- Disuguaglianze di copertura**

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 12$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 3\}$	15	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{3, 4\}$	16	2	$x_3 + x_4 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	17	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no
$\{1, 2, 4\}$	13	3	$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$	sì
$\{1, 3, 4\}$	21	3	$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{2, 3, 4\}$	18	3	$x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{1, 2, 3, 4\}$	23	4	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$	no

Ci sono 7 coperture, di cui 3 minimali. Le disuguaglianze di copertura delle coperture non minimali sono implicate da quelle delle coperture minimali e dagli upper bound $x_j \leq 1$.

- Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, 0, \frac{1}{2}, 1)$, e il problema di separazione ILP_{CSP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} z_3 + z_4 \\ \text{sogetto a} \quad & 5 z_1 + 2 z_2 + 10 z_3 + 6 z_4 \geq 13 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Con $y_j = 1 - z_j$, il termine costante e il termine noto del problema complementare sono

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{3}{2}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 23 - 13 = 10,$$

e il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & \frac{1}{2} y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 2 y_2 & + & 10 y_3 & + & 6 y_4 & \leq & 10 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{3}{2} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

- **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 10:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
4	1	6	$\frac{1}{6}$	$\bar{y}_j = 1$	4
3	$\frac{1}{2}$	10	$\frac{1}{20}$	$\bar{y}_j = 0$	4
1	0	5	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	4
2	0	2	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	4

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 0, 1)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$, di coefficiente totale $17 > 12$ e costo $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + 1 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

- **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{3, 4\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 10 sono: $\{3\}$ (valore $\frac{1}{2}$), $\{4\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{2} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{1}{2}$.

La copertura $\bar{C}$ non è minimale: rimuovendo un indice con $q_j = 0$ si ottiene la copertura minimale $\{1, 3\}$, con lo stesso costo $\frac{1}{2}$. La sua disuguaglianza di copertura $x_1 + x_3 \leq 1$ ha la stessa violazione $\frac{1}{2}$ ed è più forte.

Esercizio 5.4 — Disuguaglianze di copertura (P4)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 11$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	34	40	31	12
a_j	5	9	9	5

Il LP associato è:

$$\begin{array}{rcllcl}
 \max & 34x_1 & + & 40x_2 & + & 31x_3 & + & 12x_4 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 9x_2 & + & 9x_3 & + & 5x_4 & \leq & 11 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = \frac{182}{3}.$$

Domande

1. Elencare tutte le disuguaglianze di copertura e individuare le coperture minimali.
2. Per il punto $\tilde{x}$, scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$.
3. Applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata.
4. Verificare se la soluzione greedy è ottima.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{x}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{x}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, \quad z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate da $\tilde{x}$.

- **Disuguaglianze di copertura**

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 11$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2\}$	14	2	$x_1 + x_2 \leq 1$	sì
$\{1, 3\}$	14	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{2, 3\}$	18	2	$x_2 + x_3 \leq 1$	sì
$\{2, 4\}$	14	2	$x_2 + x_4 \leq 1$	sì
$\{3, 4\}$	14	2	$x_3 + x_4 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	23	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no
$\{1, 2, 4\}$	19	3	$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$	no
$\{1, 3, 4\}$	19	3	$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{2, 3, 4\}$	23	3	$x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$	no
$\{1, 2, 3, 4\}$	28	4	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$	no

Ci sono 10 coperture, di cui 5 minimali. Le disuguaglianze di copertura delle coperture non minimali sono implicate da quelle delle coperture minimali e dagli upper bound $x_j \leq 1$.

- Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, \frac{1}{3}, 1, 1)$, e il problema di separazione ILP_{CSP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{3} z_2 + z_3 + z_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 z_1 + 9 z_2 + 9 z_3 + 5 z_4 \geq 12 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Con $y_j = 1 - z_j$, il termine costante e il termine noto del problema complementare sono

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{7}{3}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 28 - 12 = 16,$$

e il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{3} y_2 + y_3 + y_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 y_1 + 9 y_2 + 9 y_3 + 5 y_4 \leq 16 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{7}{3} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

- Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 16:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
4	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	11
3	1	9	$\frac{1}{9}$	$\bar{y}_j = 1$	2
2	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{27}$	$\bar{y}_j = 0$	2
1	0	5	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	2

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 1, 1)$, di valore 2. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di coefficiente totale $14 > 11$ e costo $\frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}$.

- **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3, 4\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 16 sono: $\{2\}$ (valore $\frac{1}{3}$), $\{3\}$ (valore 1), $\{4\}$ (valore 1), $\{2, 4\}$ (valore $\frac{4}{3}$), $\{3, 4\}$ (valore 2). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{3} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{2}{3}$.

Esercizio 5.5 — Disuguaglianze di copertura (P5)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 12$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	41	40	24	11
a_j	3	5	5	5

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & 41x_1 & + & 40x_2 & + & 24x_3 & + & 11x_4 \\
 \text{soggetto a} & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & \leq & 12 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & x_2 & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_3 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & x_4 & & & & \leq & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{4}{5}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = \frac{501}{5}.$$

Domande

1. Elencare tutte le disuguaglianze di copertura e individuare le coperture minimali.
2. Per il punto $\tilde{\mathbf{x}}$, scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$.
3. Applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata.

4. Verificare se la soluzione greedy è ottima.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{x}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{x}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate da $\tilde{x}$.

- Disuguaglianze di copertura**

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 12$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2, 3\}$	13	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	sì
$\{1, 2, 4\}$	13	3	$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$	sì
$\{1, 3, 4\}$	13	3	$x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$	sì
$\{2, 3, 4\}$	15	3	$x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$	sì
$\{1, 2, 3, 4\}$	18	4	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$	no

Ci sono 5 coperture, di cui 4 minimali. Le disuguaglianze di copertura delle coperture non minimali sono implicate da quelle delle coperture minimali e dagli upper bound $x_j \leq 1$.

- Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, 0, \frac{1}{5}, 1)$, e il problema di separazione ILP_{CSP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{5} z_3 + z_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 3 z_1 + 5 z_2 + 5 z_3 + 5 z_4 \geq 13 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Con $y_j = 1 - z_j$, il termine costante e il termine noto del problema complementare sono

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{6}{5}, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 18 - 13 = 5,$$

e il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & \frac{1}{5} y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 3 y_1 & + & 5 y_2 & + & 5 y_3 & + & 5 y_4 & \leq & 5 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{6}{5} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

- **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 5:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
4	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	0
3	$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{25}$	$\bar{y}_j = 0$	0
1	0	3	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	0
2	0	5	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	0

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 0, 1)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$, di coefficiente totale $13 > 12$ e costo $\frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + 1 + \frac{4}{5} - 2 = \frac{4}{5}$.

- **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{3, 4\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 5 sono: $\{3\}$ (valore $\frac{1}{5}$), $\{4\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{5} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{4}{5}$.

5.2 Separazione delle cover in tre dimensioni

Esercizio 5.6 — Disuguaglianze di copertura in 3D ($P1$)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 8$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3
c_j	12	4	2
a_j	5	4	3

Il LP associato è:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 12x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

e i seguenti punti della sua regione ammissibile:

$$\begin{array}{ll}
 (a) & \tilde{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{3}{4}, 0\right), \\
 (b) & \tilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{5}, 1, 1\right), \\
 (c) & \tilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).
 \end{array}$$

Domande Per ogni punto:

1. scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$;
2. applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata;
3. verificare se la soluzione greedy è ottima;
4. disegnare il rilassamento lineare insieme alla disuguaglianza di copertura violata, se esiste.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{\mathbf{x}}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate dai tre punti.

- **Disuguaglianze di copertura**

Tutti e tre i punti appartengono al rilassamento lineare; i membri sinistri valgono

$$5 + 4 \cdot \frac{3}{4} + 0 = 8, \quad 5 \cdot \frac{1}{5} + 4 + 3 = 8, \quad 5 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4 \leq 8.$$

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 8$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2\}$	9	2	$x_1 + x_2 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	12	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no

In tutti e tre i casi, il termine noto del problema complementare è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b+1) = 12 - 9 = 3$.

- **Caso (a):** $\tilde{x} = (1, \frac{3}{4}, 0)$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, \frac{1}{4}, 1)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{4} z_2 + z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5z_1 + 4z_2 + 3z_3 \geq 9 \\ & z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{1}{4} y_2 + y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{5}{4} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 3:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
3	1	3	$\frac{1}{3}$	$\bar{y}_j = 1$	0
2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{16}$	$\bar{y}_j = 0$	0
1	0	5	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	0

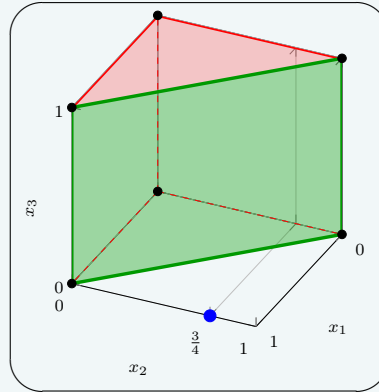
La soluzione greedy è $\bar{y} = (0, 0, 1)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di coefficiente totale $9 > 8$ e costo $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è violata da $\tilde{x}$: $1 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{4}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 3 sono: $\{3\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{4} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{3}{4}$.



Caso (a): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 \leq 1$.

• **Caso (b):** $\tilde{x} = (\frac{1}{5}, 1, 1)$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{4}{5}, 0, 0)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{4}{5} z_1 \\ \text{soggetto a} \quad & 5z_1 + 4z_2 + 3z_3 \geq 9 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{4}{5} y_1 \\ \text{soggetto a} \quad & 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{4}{5} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 3:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
1	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{4}{25}$	$\bar{y}_j = 0$	3
2	0	4	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	3
3	0	3	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	3

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 0)$, di valore 0. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$, di coefficiente totale $12 > 8$ e costo $\frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

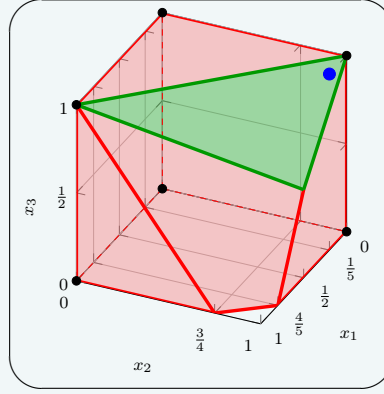
è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $\frac{1}{5} + 1 + 1 - 2 = \frac{1}{5}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Nessun indice con $q_j > 0$ soddisfa da solo il vincolo con termine noto 3, quindi ogni soluzione ammissibile di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha valore 0. Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 0$, la

soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{4}{5} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{1}{5}$.

La copertura $\bar{C}$ non è minimale: rimuovendo un indice con $q_j = 0$ si ottiene la copertura minimale $\{1, 2\}$, con lo stesso costo $\frac{4}{5}$. La sua disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 \leq 1$ ha la stessa violazione $\frac{1}{5}$ ed è più forte.



Caso (b): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$.

• **Caso (c):** $\tilde{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 z_1 + 4 z_2 + 3 z_3 \geq 9 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 y_1 + 4 y_2 + 3 y_3 \leq 3 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2 - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

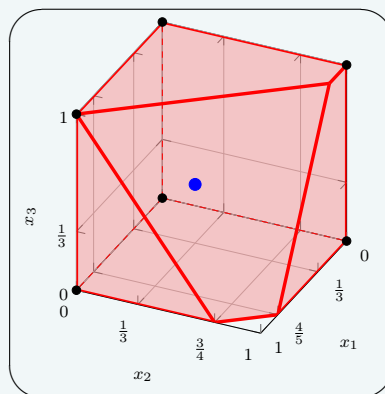
Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 3:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
3	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{2}{9}$	$\bar{y}_j = 1$	0
2	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{1}{6}$	$\bar{y}_j = 0$	0
1	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{15}$	$\bar{y}_j = 0$	0

La soluzione greedy è $\bar{y} = (0, 0, 1)$, di valore $\frac{2}{3}$. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di costo $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 1$: la sua disuguaglianza di copertura non è violata da $\tilde{x}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 3 sono: $\{3\}$ (valore $\frac{2}{3}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{2}{3}$, la soluzione greedy è ottima, e $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{4}{3} \geq 1$: **nessuna** disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.



Caso (c): il rilassamento lineare; nessuna disuguaglianza di copertura è violata dal punto.

Esercizio 5.7 — Disuguaglianze di copertura in 3D ($P2$)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 11$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3
c_j	20	11	4
a_j	2	3	9

Il LP associato è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 20x_1 + 11x_2 + 4x_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 11 \\
 & x_1 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

e i seguenti punti della sua regione ammissibile:

- (a) $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, \frac{2}{3})$,
- (b) $\tilde{\mathbf{x}} = (0, \frac{2}{3}, 1)$,
- (c) $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Domande Per ogni punto:

1. scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$;
2. applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata;
3. verificare se la soluzione greedy è ottima;
4. disegnare il rilassamento lineare insieme alla disuguaglianza di copertura violata, se esiste.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{x}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{x}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate dai tre punti.

- **Disuguaglianze di copertura**

Tutti e tre i punti appartengono al rilassamento lineare; i membri sinistri valgono

$$2 + 3 + 9 \cdot \frac{2}{3} = 11, \quad 0 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 9 = 11, \quad 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3} \leq 11.$$

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 11$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{2, 3\}$	12	2	$x_2 + x_3 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	14	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no

In tutti e tre i casi, il termine noto del problema complementare è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 14 - 12 = 2$.

- **Caso (a): $\tilde{x} = (1, 1, \frac{2}{3})$**

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, 0, \frac{1}{3})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} & \min && \frac{1}{3} z_3 \\ \text{soggetto a} & 2z_1 + 3z_2 + 9z_3 & \geq & 12 \\ & z_1, & z_2, & z_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max \quad \frac{1}{3} y_3 \\ & \text{soggetto a} \quad 2y_1 + 3y_2 + 9y_3 \leq 2 \\ & \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{1}{3} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 2:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
3	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{27}$	$\bar{y}_j = 0$	2
1	0	2	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	2
2	0	3	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	2

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 0)$, di valore 0. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$, di coefficiente totale $14 > 11$ e costo $\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

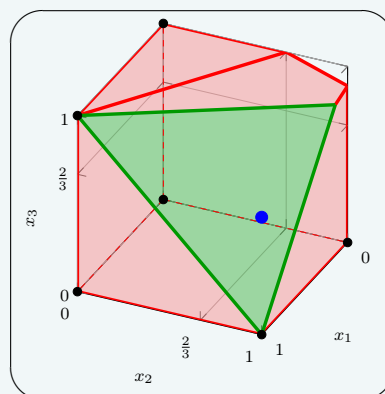
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + 1 + \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Nessun indice con $q_j > 0$ soddisfa da solo il vincolo con termine noto 2, quindi ogni soluzione ammissibile di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha valore 0. Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 0$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{3} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{2}{3}$.

La copertura $\bar{C}$ non è minimale: rimuovendo un indice con $q_j = 0$ si ottiene la copertura minimale $\{2, 3\}$, con lo stesso costo $\frac{1}{3}$. La sua disuguaglianza di copertura $x_2 + x_3 \leq 1$ ha la stessa violazione $\frac{2}{3}$ ed è più forte.



Caso (a): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$.

- **Caso (b):** $\tilde{\mathbf{x}} = (0, \frac{2}{3}, 1)$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (1, \frac{1}{3}, 0)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 + \frac{1}{3} z_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2z_1 + 3z_2 + 9z_3 \geq 12 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & y_1 + \frac{1}{3} y_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 2y_1 + 3y_2 + 9y_3 \leq 2 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{4}{3} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 2:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
1	1	2	$\frac{1}{2}$	$\bar{y}_j = 1$	0
2	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{9}$	$\bar{y}_j = 0$	0
3	0	9	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	0

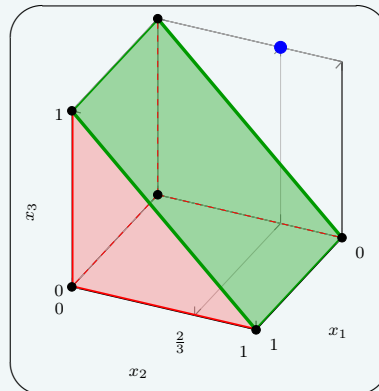
La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (1, 0, 0)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$, di coefficiente totale $12 > 11$ e costo $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $\frac{2}{3} + 1 - 1 = \frac{2}{3}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 2 sono: $\{1\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{3} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{2}{3}$.



Caso (b): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_2 + x_3 \leq 1$.

- **Caso (c):** $\tilde{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 z_1 + 3 z_2 + 9 z_3 \geq 12 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 y_1 + 3 y_2 + 9 y_3 \leq 2 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2 - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

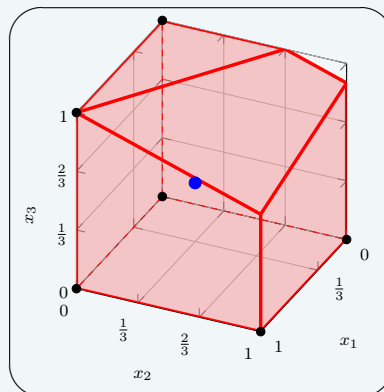
Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 2:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$\bar{y}_j = 1$	0
2	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{2}{9}$	$\bar{y}_j = 0$	0
3	$\frac{2}{3}$	9	$\frac{2}{27}$	$\bar{y}_j = 0$	0

La soluzione greedy è $\bar{y} = (1, 0, 0)$, di valore $\frac{2}{3}$. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$, di costo $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 1$: la sua disuguaglianza di copertura non è violata da $\tilde{x}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 2 sono: $\{1\}$ (valore $\frac{2}{3}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{2}{3}$, la soluzione greedy è ottima, e $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{4}{3} \geq 1$: **nessuna** disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{x}$.



Caso (c): il rilassamento lineare; nessuna disuguaglianza di copertura è violata dal punto.

Esercizio 5.8 — Disuguaglianze di copertura in 3D (P3)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 9$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3
c_j	16	19	8
a_j	5	6	7

Il LP associato è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 16x_1 + 19x_2 + 8x_3 \\
 \text{soggetto a} \quad & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 9 \\
 & x_1 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

e i seguenti punti della sua regione ammissibile:

- (a) $\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{2}{3}, 0)$,
- (b) $\tilde{\mathbf{x}} = (0, \frac{1}{3}, 1)$,
- (c) $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Domande Per ogni punto:

1. scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$;
2. applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata;
3. verificare se la soluzione greedy è ottima;
4. disegnare il rilassamento lineare insieme alla disuguaglianza di copertura violata, se esiste.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{\mathbf{x}}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate dai tre punti.

- Disuguaglianze di copertura**

Tutti e tre i punti appartengono al rilassamento lineare; i membri sinistri valgono

$$5 + 6 \cdot \frac{2}{3} + 0 = 9, \quad 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} + 7 = 9, \quad 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{3} = 6 \leq 9.$$

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 9$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2\}$	11	2	$x_1 + x_2 \leq 1$	sì
$\{1, 3\}$	12	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{2, 3\}$	13	2	$x_2 + x_3 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	18	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no

In tutti e tre i casi, il termine noto del problema complementare è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b+1) = 18 - 10 = 8$.

- Caso (a): $\tilde{x} = (1, \frac{2}{3}, 0)$**

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, \frac{1}{3}, 1)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{3} z_2 + z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 z_1 + 6 z_2 + 7 z_3 \geq 10 \\ & z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{1}{3} y_2 + y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 y_1 + 6 y_2 + 7 y_3 \leq 8 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{4}{3} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 8:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
3	1	7	$\frac{1}{7}$	$\bar{y}_j = 1$	1
2	$\frac{1}{3}$	6	$\frac{1}{18}$	$\bar{y}_j = 0$	1
1	0	5	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	1

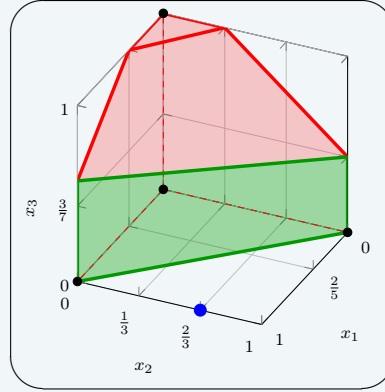
La soluzione greedy è $\bar{y} = (0, 0, 1)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di coefficiente totale $11 > 9$ e costo $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è violata da $\tilde{x}$: $1 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 8 sono: $\{2\}$ (valore $\frac{1}{3}$), $\{3\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{3} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{2}{3}$.



Caso (a): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 \leq 1$.

• **Caso (b): $\tilde{x} = (0, \frac{1}{3}, 1)$**

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (1, \frac{2}{3}, 0)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 + \frac{2}{3} z_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 5z_1 + 6z_2 + 7z_3 \geq 10 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & y_1 + \frac{2}{3} y_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 8 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{5}{3} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 8:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
1	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	3
2	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{1}{9}$	$\bar{y}_j = 0$	3
3	0	7	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	3

La soluzione greedy è $\bar{y} = (1, 0, 0)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$, di coefficiente totale $13 > 9$ e costo $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} < 1$.

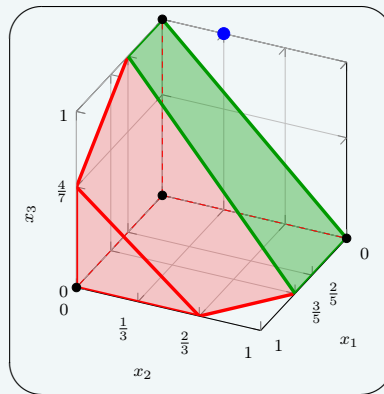
Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

è violata da $\tilde{x}$: $\frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 8 sono: $\{1\}$ (valore 1), $\{2\}$ (valore $\frac{2}{3}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{2}{3} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{1}{3}$.



Caso (b): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_2 + x_3 \leq 1$.

• **Caso (c):** $\tilde{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 z_1 + 6 z_2 + 7 z_3 \geq 10 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 y_1 + 6 y_2 + 7 y_3 \leq 8 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2 - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

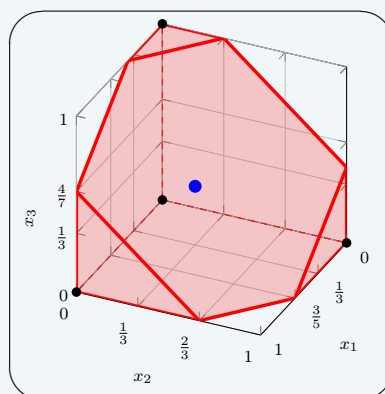
Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 8:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
1	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{15}$	$\bar{y}_j = 1$	3
2	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{1}{9}$	$\bar{y}_j = 0$	3
3	$\frac{2}{3}$	7	$\frac{2}{21}$	$\bar{y}_j = 0$	3

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (1, 0, 0)$, di valore $\frac{2}{3}$. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$, di costo $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 1$: la sua disuguaglianza di copertura non è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 8 sono: $\{1\}$ (valore $\frac{2}{3}$), $\{2\}$ (valore $\frac{2}{3}$), $\{3\}$ (valore $\frac{2}{3}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{2}{3}$, la soluzione greedy è ottima, e $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{4}{3} \geq 1$: **nessuna** disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.



Caso (c): il rilassamento lineare; nessuna disuguaglianza di copertura è violata dal punto.

Esercizio 5.9 — Disuguaglianze di copertura in 3D (P4)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 5$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3
c_j	14	17	8
a_j	2	5	5

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 14x_1 & + & 17x_2 & + & 8x_3 \\
 \text{soggetto a} & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & \leq 5 \\
 & x_1 & & & & & \leq 1 \\
 & & & x_2 & & & \leq 1 \\
 & & & & & x_3 & \leq 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0
 \end{array}$$

e i seguenti punti della sua regione ammissibile:

$$(a) \quad \tilde{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{3}{5}, 0\right),$$

$$(b) \quad \tilde{\mathbf{x}} = \left(1, 0, \frac{3}{5}\right),$$

$$(c) \quad \tilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Domande Per ogni punto:

1. scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$;
2. applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata;
3. verificare se la soluzione greedy è ottima;
4. disegnare il rilassamento lineare insieme alla disuguaglianza di copertura violata, se esiste.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{\mathbf{x}}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate dai tre punti.

- **Disuguaglianze di copertura**

Tutti e tre i punti appartengono al rilassamento lineare; i membri sinistri valgono

$$2 + 5 \cdot \frac{3}{5} + 0 = 5, \quad 2 + 0 + 5 \cdot \frac{3}{5} = 5, \quad 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = 4 \leq 5.$$

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 5$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 2\}$	7	2	$x_1 + x_2 \leq 1$	sì
$\{1, 3\}$	7	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{2, 3\}$	10	2	$x_2 + x_3 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	12	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no

In tutti e tre i casi, il termine noto del problema complementare è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 12 - 6 = 6$.

- **Caso (a):** $\tilde{x} = (1, \frac{3}{5}, 0)$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, \frac{2}{5}, 1)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{5} z_2 + z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 z_1 + 5 z_2 + 5 z_3 \geq 6 \\ & z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{2}{5} y_2 + y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 y_1 + 5 y_2 + 5 y_3 \leq 6 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{7}{5} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 6:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
3	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	1
2	$\frac{2}{5}$	5	$\frac{2}{25}$	$\bar{y}_j = 0$	1
1	0	2	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	1

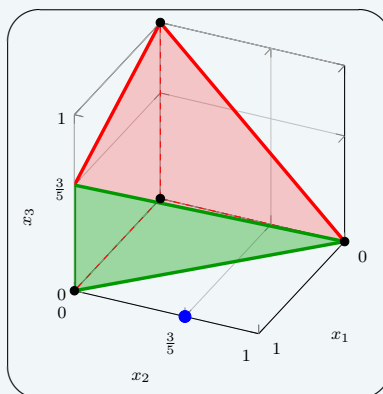
La soluzione greedy è $\bar{y} = (0, 0, 1)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$, di coefficiente totale $7 > 5$ e costo $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è violata da $\tilde{x}$: $1 + \frac{3}{5} - 1 = \frac{3}{5}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 6 sono: $\{2\}$ (valore $\frac{2}{5}$), $\{3\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{2}{5} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{3}{5}$.



Caso (a): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 \leq 1$.

• **Caso (b):** $\tilde{x} = (1, 0, \frac{3}{5})$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, 1, \frac{2}{5})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{array}{ll} \min & z_2 + \frac{2}{5} z_3 \\ \text{soggetto a} & 2 z_1 + 5 z_2 + 5 z_3 \geq 6 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ \max & y_2 + \frac{2}{5} y_3 \\ \text{soggetto a} & 2 y_1 + 5 y_2 + 5 y_3 \leq 6 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{array}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{7}{5} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 6:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
2	1	5	$\frac{1}{5}$	$\bar{y}_j = 1$	1
3	$\frac{2}{5}$	5	$\frac{2}{25}$	$\bar{y}_j = 0$	1
1	0	2	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	1

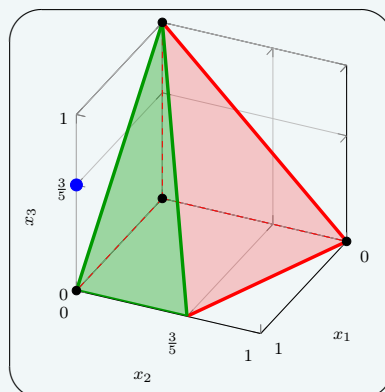
La soluzione greedy è $\bar{y} = (0, 1, 0)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 3\}$, di coefficiente totale $7 > 5$ e costo $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

è violata da $\tilde{x}$: $1 + \frac{3}{5} - 1 = \frac{3}{5}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 6 sono: $\{2\}$ (valore 1), $\{3\}$ (valore $\frac{2}{5}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{2}{5} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{3}{5}$.



Caso (b): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_3 \leq 1$.

• **Caso (c):** $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 z_1 + 5 z_2 + 5 z_3 \geq 6 \\ & z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 2 y_1 + 5 y_2 + 5 y_3 \leq 6 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

con $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2 - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2)$.

b) **Euristica greedy**

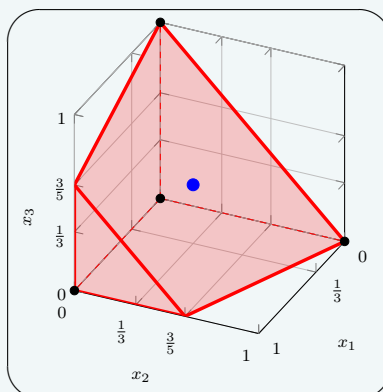
Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 6:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$\bar{y}_j = 1$	4
2	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{15}$	$\bar{y}_j = 0$	4
3	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{15}$	$\bar{y}_j = 0$	4

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (1, 0, 0)$, di valore $\frac{2}{3}$. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$, di costo $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 1$: la sua disuguaglianza di copertura non è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 6 sono: $\{1\}$ (valore $\frac{2}{3}$), $\{2\}$ (valore $\frac{2}{3}$), $\{3\}$ (valore $\frac{2}{3}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{2}{3}$, la soluzione greedy è ottima, e $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{4}{3} \geq 1$: **nessuna** disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.



Caso (c): il rilassamento lineare; nessuna disuguaglianza di copertura è violata dal punto.

Esercizio 5.10 — Disuguaglianze di copertura in 3D (P5)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 10$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3
c_j	13	10	3
a_j	5	4	6

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 13x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & \leq 10 \\
 & x_1 & & & & & \leq 1 \\
 & & & x_2 & & & \leq 1 \\
 & & & & & x_3 & \leq 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0
 \end{array}$$

e i seguenti punti della sua regione ammissibile:

- (a) $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, \frac{1}{6})$,
- (b) $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{4}{5}, 0, 1)$,
- (c) $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Domande Per ogni punto:

- scrivere il problema di separazione ILP_{CSP} e il suo problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$;
- applicare l'euristica greedy a $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ e, se possibile, trovare una disuguaglianza di copertura violata;
- verificare se la soluzione greedy è ottima;

4. disegnare il rilassamento lineare insieme alla disuguaglianza di copertura violata, se esiste.

Un sottoinsieme di indici $C \subseteq \mathcal{J}$ con $\sum_{j \in C} a_j > b$ è una **copertura**, e la disuguaglianza lineare

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

è la **disuguaglianza di copertura** associata a C . Dato un punto $\tilde{x}$, esiste una disuguaglianza di copertura violata da $\tilde{x}$ se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) < 1$, dove

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}) \quad \min \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) z_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j \geq b + 1, z_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura violate dai tre punti.

- **Disuguaglianze di copertura**

Tutti e tre i punti appartengono al rilassamento lineare; i membri sinistri valgono

$$5 + 4 + 6 \cdot \frac{1}{6} = 10, \quad 5 \cdot \frac{4}{5} + 0 + 6 = 10, \quad 5 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 5 \leq 10.$$

Le coperture sono i sottoinsiemi di indici il cui coefficiente totale supera $b = 10$:

C	$\sum_{j \in C} a_j$	$ C $	Disuguaglianza di copertura	Minimale
$\{1, 3\}$	11	2	$x_1 + x_3 \leq 1$	sì
$\{1, 2, 3\}$	15	3	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$	no

In tutti e tre i casi, il termine noto del problema complementare è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 15 - 11 = 4$.

- **Caso (a): $\tilde{x} = (1, 1, \frac{1}{6})$**

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (0, 0, \frac{5}{6})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} & \min && \frac{5}{6} z_3 \\ & \text{soggetto a} && 5z_1 + 4z_2 + 6z_3 \geq 11 \\ & && z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \\ & \max && \frac{5}{6} y_3 \\ & \text{soggetto a} && 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \leq 4 \\ & && y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{5}{6} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 4:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
3	$\frac{5}{6}$	6	$\frac{5}{36}$	$\bar{y}_j = 0$	4
1	0	5	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	4
2	0	4	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	4

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0, 0)$, di valore 0. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$, di coefficiente totale $15 > 10$ e costo $\frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

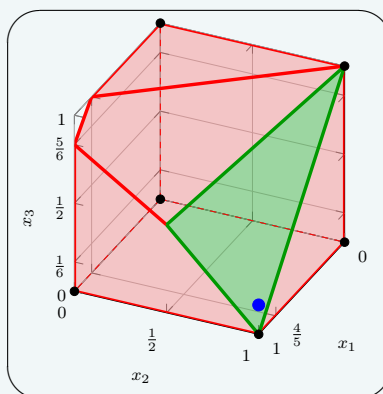
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + 1 + \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{6}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Nessun indice con $q_j > 0$ soddisfa da solo il vincolo con termine noto 4, quindi ogni soluzione ammissibile di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha valore 0. Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 0$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{5}{6} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{1}{6}$.

La copertura $\bar{C}$ non è minimale: rimuovendo un indice con $q_j = 0$ si ottiene la copertura minimale $\{1, 3\}$, con lo stesso costo $\frac{5}{6}$. La sua disuguaglianza di copertura $x_1 + x_3 \leq 1$ ha la stessa violazione $\frac{1}{6}$ ed è più forte.



Caso (a): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$.

- **Caso (b):** $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{4}{5}, 0, 1)$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{1}{5}, 1, 0)$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{5} z_1 + z_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 5z_1 + 4z_2 + 6z_3 \geq 11 \\ & z_1, \quad z_2, \quad z_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{5} y_1 + y_2 \\ \text{soggetto a} \quad & 5 y_1 + 4 y_2 + 6 y_3 \leq 4 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{6}{5} - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 4:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
2	1	4	$\frac{1}{4}$	$\bar{y}_j = 1$	0
1	$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{25}$	$\bar{y}_j = 0$	0
3	0	6	0	$q_j = 0, \bar{y}_j = 0$	0

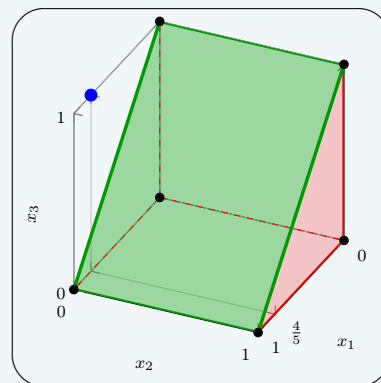
La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)$, di valore 1. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 3\}$, di coefficiente totale $11 > 10$ e costo $\frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} < 1$. Quindi la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $\frac{4}{5} + 1 - 1 = \frac{4}{5}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 4 sono: $\{2\}$ (valore 1). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$, la soluzione greedy è ottima, $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{1}{5} < 1$, e la massima violazione di una disuguaglianza di copertura è $\frac{4}{5}$.



Caso (b): il rilassamento lineare e la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_3 \leq 1$.

- **Caso (c):** $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

a) **Problema di separazione**

I costi $q_j = 1 - \tilde{x}_j$ sono $q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Il problema di separazione ILP_{CSP} (a sinistra) e, con $y_j = 1 - z_j$, il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ (a destra) sono:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{2}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5z_1 + 4z_2 + 6z_3 \geq 11 \\ & z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\} \\ \max \quad & \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ \text{soggetto a} \quad & 5y_1 + 4y_2 + 6y_3 \leq 4 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\text{con } z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2 - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2).$$

b) **Euristica greedy**

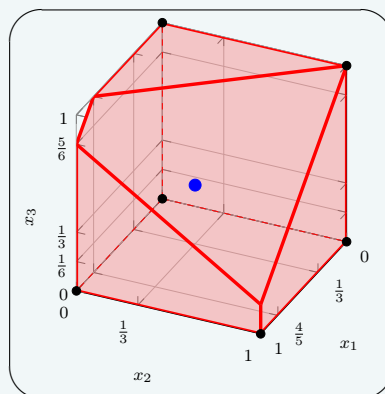
Gli indici vengono scorsi per rapporto q_j/a_j non crescente, partendo dal termine noto residuo 4:

j	q_j	a_j	q_j/a_j	Decisione	Residuo
2	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{1}{6}$	$\bar{y}_j = 1$	0
1	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{15}$	$\bar{y}_j = 0$	0
3	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{1}{9}$	$\bar{y}_j = 0$	0

La soluzione greedy è $\bar{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)$, di valore $\frac{2}{3}$. La copertura corrispondente è $\bar{C} = \{j \in \mathcal{J} : \bar{y}_j = 0\} = \{1, 3\}$, di costo $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \geq 1$: la sua disuguaglianza di copertura non è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

c) **Verifica di ottimalità**

Gli indici con $q_j = 0$ non cambiano il valore di una soluzione. I sottoinsiemi non vuoti degli indici $\{1, 2, 3\}$ con $q_j > 0$ che soddisfano il vincolo con termine noto 4 sono: $\{2\}$ (valore $\frac{2}{3}$). Quindi $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{2}{3}$, la soluzione greedy è ottima, e $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = \frac{4}{3} \geq 1$: **nessuna** disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.



Caso (c): il rilassamento lineare; nessuna disuguaglianza di copertura è violata dal punto.

5.3 Chiusura e separazione

Esercizio 5.11 — Chiusura delle coperture per separazione (P1)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 9$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	22	33	9	13
a_j	5	9	3	6

Il LP associato è:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 22x_1 + 33x_2 + 9x_3 + 13x_4 \\
 \text{soggetto a} \quad & 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 9 \\
 & x_1 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_4 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{9}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = \frac{110}{3}.$$

Domande

1. Partendo da $\tilde{\mathbf{x}}$, separare le disuguaglianze di copertura risolvendo all'ottimo il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$. Aggiungere all'LP la disuguaglianza di copertura massimamente violata, risolverlo di nuovo e ripetere finché nessuna disuguaglianza di copertura è violata. Se $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha più soluzioni ottime, scegliere quella che seleziona il maggior numero di variabili.
2. Qual è il valore ottimo sulla chiusura delle coperture? La soluzione finale è intera?

La **chiusura delle coperture** è il poliedro ottenuto aggiungendo a LP tutte le disuguaglianze di copertura $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$, $C \in \mathcal{C}$. Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, sia $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ una soluzione ottima del problema complementare

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) \quad \max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) y_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j y_j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1), y_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Se $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) < 1$, la copertura $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\}$ è associata alla disuguaglianza di copertura massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$; altrimenti, nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura con il problema complementare; in tutte le iterazioni, il termine noto di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 23 - 10 = 13$.

- Iterazione 1**

La soluzione ottima di LP è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{4}{9}, 0, 0)$, di valore $z(\text{LP}) = \frac{110}{3}$.

I costi sono $q = (0, \frac{5}{9}, 1, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{23}{9}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & \frac{5}{9} y_2 & + & y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 9 y_2 & + & 3 y_3 & + & 6 y_4 \leq 13 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 13 sono: $\{1, 3\}$ (valore 1), $\{1, 4\}$ (valore 1), $\{2, 3\}$ (valore $\frac{14}{9}$), $\{3, 4\}$ (valore 2). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 0$, $\tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{23}{9} - 2 = \frac{5}{9} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{4}{9} - 1 = \frac{4}{9}$.

- Iterazione 2**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_1 :

$$\begin{array}{llllll} \max & 22 x_1 & + & 33 x_2 & + & 9 x_3 & + & 13 x_4 \\ \text{soggetto a} & 5 x_1 & + & 9 x_2 & + & 3 x_3 & + & 6 x_4 \leq 9 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & & & \leq 1 \\ & & & x_2 & & & & \leq 1 \\ & & & & & x_3 & & \leq 1 \\ & & & & & & x_4 & \leq 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_1 è $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0)$, di valore $z(\text{LP}_1) = \frac{135}{4}$.

I costi sono $q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = 2$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & \frac{1}{4} y_1 & + & \frac{3}{4} y_2 & & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 9 y_2 & + & 3 y_3 & + & 6 y_4 \leq 13 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 13 sono: $\{1, 3\}$ (valore $\frac{1}{4}$), $\{1, 4\}$ (valore $\frac{5}{4}$), $\{2, 3\}$ (valore $\frac{3}{4}$), $\{3, 4\}$ (valore 1). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 1$, $\tilde{y}_2 = 0$, $\tilde{y}_3 = 0$, $\tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{5}{4}$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $\frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{4}$.

• **Iterazione 3**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_2 + x_3 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_2 :

$$\begin{array}{llllll} \max & 22x_1 & + & 33x_2 & + & 9x_3 & + & 13x_4 \\ \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 \leq 9 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & \leq 1 \\ & & & x_2 & + & x_3 & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & & & \leq 1 \\ & & & x_2 & & & & \leq 1 \\ & & & & & x_3 & & \leq 1 \\ & & & & & & x_4 & \leq 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_2 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 0, 1, \frac{1}{6})$, di valore $z(\text{LP}_2) = \frac{199}{6}$.

I costi sono $q = (0, 1, 0, \frac{5}{6})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{11}{6}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & y_2 & & + & \frac{5}{6}y_4 \\ \text{soggetto a} & 5y_1 & + & 9y_2 & + & 3y_3 & + & 6y_4 \leq 13 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 13 sono: $\{1, 3\}$ (valore 0), $\{1, 4\}$ (valore $\frac{5}{6}$), $\{2, 3\}$ (valore 1), $\{3, 4\}$ (valore $\frac{5}{6}$). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 1$, $\tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{y}_4 = 0$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 4\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{6}$.

• **Iterazione 4**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_4 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_3 :

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 22x_1 & + & 33x_2 & + & 9x_3 & + & 13x_4 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 \leq 9 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & \leq 1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & & \leq 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 \leq 1 \\
 & x_1 & & & & & & \leq 1 \\
 & & & x_2 & & & & \leq 1 \\
 & & & & & x_3 & & \leq 1 \\
 & & & & & & & x_4 \leq 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_3 è $\tilde{x} = (\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7})$, di valore $z(LP_3) = \frac{232}{7}$.

I costi sono $q = (\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{6}{7})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = 2$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & \frac{1}{7}y_1 & + & \frac{6}{7}y_2 & + & \frac{1}{7}y_3 & + & \frac{6}{7}y_4 \\
 \text{soggetto a} & 5y_1 & + & 9y_2 & + & 3y_3 & + & 6y_4 \leq 13 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 13 sono: $\{1, 3\}$ (valore $\frac{2}{7}$), $\{1, 4\}$ (valore 1), $\{2, 3\}$ (valore 1), $\{3, 4\}$ (valore 1). Il valore ottimo di ILP_{CSP}^2 è $z(ILP_{CSP}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(ILP_{CSP}^2) = 2 - 1 = 1 \geq 1.$$

Nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{x} = (\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7})$: la separazione si ferma dopo 3 disuguaglianze di copertura. Il valore ottimo sulla chiusura delle coperture è

$$z(LP^{cov}) = z(LP_3) = \frac{232}{7} < z(LP) = \frac{110}{3},$$

e $\tilde{x}$ è **frazionario**: la chiusura delle coperture non coincide con l'involuppo convesso delle soluzioni intere.

Esercizio 5.12 — Chiusura delle coperture per separazione ($P2$)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 17$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di

$n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	29	29	27	21
a_j	5	10	10	8

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 29x_1 & + & 29x_2 & + & 27x_3 & + & 21x_4 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & + & 8x_4 & \leq & 17 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{5}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = \frac{317}{5}.$$

Domande

1. Partendo da $\tilde{\mathbf{x}}$, separare le disuguaglianze di copertura risolvendo all'ottimo il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$. Aggiungere all'LP la disuguaglianza di copertura massimamente violata, risolverlo di nuovo e ripetere finché nessuna disuguaglianza di copertura è violata. Se $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha più soluzioni ottime, scegliere quella che seleziona il maggior numero di variabili.
2. Qual è il valore ottimo sulla chiusura delle coperture? La soluzione finale è intera?

La **chiusura delle coperture** è il poliedro ottenuto aggiungendo a LP tutte le disuguaglianze di copertura $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$, $C \in \mathcal{C}$. Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, sia $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ una soluzione ottima del problema complementare

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) \quad \max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) y_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j y_j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1), y_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Se $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) < 1$, la copertura $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\}$ è associata alla disuguaglianza di copertura massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$; altrimenti, nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura con il problema complementare; in tutte le iterazioni, il termine noto di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 33 - 18 = 15$.

• **Iterazione 1**

La soluzione ottima di LP è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$, di valore $z(\text{LP}) = \frac{317}{5}$.

I costi sono $q = (0, 0, \frac{4}{5}, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{9}{5}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & \frac{4}{5} y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 10 y_2 & + & 10 y_3 & + & 8 y_4 & \leq & 15 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore 0), $\{1, 3\}$ (valore $\frac{4}{5}$), $\{1, 4\}$ (valore 1). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 1, \tilde{y}_2 = 0, \tilde{y}_3 = 0, \tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{2, 3\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5}$.

• **Iterazione 2**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_2 + x_3 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_1 :

$$\begin{array}{llllllll} \max & 29 x_1 & + & 29 x_2 & + & 27 x_3 & + & 21 x_4 \\ \text{soggetto a} & 5 x_1 & + & 10 x_2 & + & 10 x_3 & + & 8 x_4 & \leq & 17 \\ & & & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 1 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & & & & \leq & 1 \\ & & & x_3 & & & & & \leq & 1 \\ & & & & x_4 & & & & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_1 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, \frac{1}{4})$, di valore $z(\text{LP}_1) = \frac{253}{4}$.

I costi sono $q = (0, 0, 1, \frac{3}{4})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{7}{4}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & y_3 & + & \frac{3}{4} y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 10 y_2 & + & 10 y_3 & + & 8 y_4 & \leq & 15 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore 0), $\{1, 3\}$ (valore 1), $\{1, 4\}$ (valore $\frac{3}{4}$). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 1, \tilde{y}_2 = 0, \tilde{y}_3 = 1, \tilde{y}_4 = 0$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{2, 4\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_2 + x_4 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

• Iterazione 3

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_2 + x_4 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_2 :

$$\begin{array}{llllll} \max & 29x_1 & + & 29x_2 & + & 27x_3 & + & 21x_4 \\ \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & + & 8x_4 \leq 17 \\ & & & x_2 & + & x_3 & & \leq 1 \\ & & & x_2 & & & + & x_4 \leq 1 \\ & x_1 & & & & & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & & \leq 1 \\ & & & & x_3 & & & \leq 1 \\ & & & & & & x_4 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & & \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_2 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, di valore $z(\text{LP}_2) = \frac{251}{4}$.

I costi sono $q = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{7}{4}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & \frac{1}{4}y_2 & + & \frac{3}{4}y_3 & + & \frac{3}{4}y_4 \\ \text{soggetto a} & 5y_1 & + & 10y_2 & + & 10y_3 & + & 8y_4 \leq 15 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore $\frac{1}{4}$), $\{1, 3\}$ (valore $\frac{3}{4}$), $\{1, 4\}$ (valore $\frac{3}{4}$). Il valore ottimo di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{3}{4}$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1 \geq 1.$$

Nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$: la separazione si ferma dopo 2 disuguaglianze di copertura. Il valore ottimo sulla chiusura delle coperture è

$$z(\text{LP}^{\text{cov}}) = z(\text{LP}_2) = \frac{251}{4} < z(\text{LP}) = \frac{317}{5},$$

e $\tilde{\mathbf{x}}$ è **frazionario**: la chiusura delle coperture non coincide con l'involuppo convesso delle soluzioni intere.

Esercizio 5.13 — Chiusura delle coperture per separazione (P3)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 15$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	30	8	9	6
a_j	5	2	9	9

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 30x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 6x_4 \\
 \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & + & 9x_4 & \leq & 15 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{8}{9}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = 46.$$

Domande

1. Partendo da $\tilde{\mathbf{x}}$, separare le disuguaglianze di copertura risolvendo all'ottimo il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$. Aggiungere all'LP la disuguaglianza di copertura massimamente violata, risolverlo di nuovo e ripetere finché nessuna disuguaglianza di copertura è violata. Se $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha più soluzioni ottime, scegliere quella che seleziona il maggior numero di variabili.
2. Qual è il valore ottimo sulla chiusura delle coperture? La soluzione finale è intera?

La **chiusura delle coperture** è il poliedro ottenuto aggiungendo a LP tutte le disuguaglianze di copertura $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$, $C \in \mathcal{C}$. Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, sia $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ una soluzione ottima del problema complementare

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) \quad \max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) y_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j y_j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1), y_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Se $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) < 1$, la copertura $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\}$ è associata alla disuguaglianza di copertura massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$; altrimenti, nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura con il problema complementare; in tutte le iterazioni, il termine noto di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 25 - 16 = 9$.

- Iterazione 1**

La soluzione ottima di LP è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, \frac{8}{9}, 0)$, di valore $z(\text{LP}) = 46$.

I costi sono $q = (0, 0, \frac{1}{9}, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{10}{9}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & \frac{1}{9} y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 2 y_2 & + & 9 y_3 & + & 9 y_4 & \leq & 9 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 9 sono: $\{3\}$ (valore $\frac{1}{9}$), $\{4\}$ (valore 1), $\{1, 2\}$ (valore 0). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 0, \tilde{y}_2 = 0, \tilde{y}_3 = 0, \tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 2, 3\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + 1 + \frac{8}{9} - 2 = \frac{8}{9}$.

- Iterazione 2**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_1 :

$$\begin{array}{llllllll} \max & 30 x_1 & + & 8 x_2 & + & 9 x_3 & + & 6 x_4 \\ \text{soggetto a} & 5 x_1 & + & 2 x_2 & + & 9 x_3 & + & 9 x_4 & \leq & 15 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\ & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_1 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, \frac{8}{9})$, di valore $z(\text{LP}_1) = \frac{130}{3}$.

I costi sono $q = (0, 0, 1, \frac{1}{9})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{10}{9}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & y_3 & + & \frac{1}{9} y_4 \\ \text{soggetto a} & 5 y_1 & + & 2 y_2 & + & 9 y_3 & + & 9 y_4 & \leq & 9 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 9 sono: $\{3\}$ (valore 1), $\{4\}$ (valore $\frac{1}{9}$), $\{1, 2\}$ (valore 0). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 0$, $\tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{y}_4 = 0$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 2, 4\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + 1 + \frac{8}{9} - 2 = \frac{8}{9}$.

- **Iterazione 3**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_2 :

$$\begin{array}{llllll} \max & 30x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 6x_4 \\ \text{soggetto a} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & + & 9x_4 & \leq & 15 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_2 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, di valore $z(\text{LP}_2) = \frac{83}{2}$.

I costi sono $q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{3}{2}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & \frac{1}{2}y_2 & + & \frac{1}{2}y_3 & + & \frac{1}{2}y_4 \\ \text{soggetto a} & 5y_1 & + & 2y_2 & + & 9y_3 & + & 9y_4 & \leq & 9 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 9 sono: $\{3\}$ (valore $\frac{1}{2}$), $\{4\}$ (valore $\frac{1}{2}$), $\{1, 2\}$ (valore $\frac{1}{2}$). Il valore ottimo di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{1}{2}$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \geq 1.$$

Nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{x} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: la separazione si ferma dopo 2 disuguaglianze di copertura. Il valore ottimo sulla chiusura delle coperture è

$$z(\text{LP}^{\text{cov}}) = z(\text{LP}_2) = \frac{83}{2} < z(\text{LP}) = 46,$$

e $\tilde{x}$ è **frazionario**: la chiusura delle coperture non coincide con l'involuppo convesso delle soluzioni intere.

Esercizio 5.14 — Chiusura delle coperture per separazione (P4)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 9$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	31	13	5	9
a_j	8	6	3	8

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 31x_1 & + & 13x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 \\
 \text{soggetto a} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 9 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{x}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = \frac{199}{6}.$$

Domande

1. Partendo da $\tilde{x}$, separare le disuguaglianze di copertura risolvendo all'ottimo il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$. Aggiungere all'LP la disuguaglianza di copertura massimamente violata, risolverlo di nuovo e ripetere finché nessuna disuguaglianza di copertura è violata. Se $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha più soluzioni ottime, scegliere quella che seleziona il maggior numero di variabili.
2. Qual è il valore ottimo sulla chiusura delle coperture? La soluzione finale è intera?

La **chiusura delle coperture** è il poliedro ottenuto aggiungendo a LP tutte le disuguaglianze di copertura $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$, $C \in \mathcal{C}$. Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, sia $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ una soluzione ottima del problema complementare

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) \quad \max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) y_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j y_j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1), y_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Se $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) < 1$, la copertura $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\}$ è associata alla disuguaglianza di copertura massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$; altrimenti, nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura con il problema complementare; in tutte le iterazioni, il termine noto di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 25 - 10 = 15$.

- **Iterazione 1**

La soluzione ottima di LP è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, \frac{1}{6}, 0, 0)$, di valore $z(\text{LP}) = \frac{199}{6}$.

I costi sono $q = (0, \frac{5}{6}, 1, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{17}{6}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & \frac{5}{6} y_2 & + & y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 8 y_1 & + & 6 y_2 & + & 3 y_3 & + & 8 y_4 \leq 15 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore $\frac{5}{6}$), $\{1, 3\}$ (valore 1), $\{2, 3\}$ (valore $\frac{11}{6}$), $\{2, 4\}$ (valore $\frac{11}{6}$), $\{3, 4\}$ (valore 2). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 0$, $\tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{17}{6} - 2 = \frac{5}{6} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 2\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{6}$.

- **Iterazione 2**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_2 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_1 :

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 31x_1 & + & 13x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 \\
 \text{soggetto a} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 9 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_1 è $\tilde{x} = (1, 0, \frac{1}{3}, 0)$, di valore $z(LP_1) = \frac{98}{3}$.

I costi sono $q = (0, 1, \frac{2}{3}, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{8}{3}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & & y_2 & + & \frac{2}{3}y_3 & + & y_4 \\
 \text{soggetto a} & 8y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & + & 8y_4 & \leq & 15 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\}
 \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore 1), $\{1, 3\}$ (valore $\frac{2}{3}$), $\{2, 3\}$ (valore $\frac{5}{3}$), $\{2, 4\}$ (valore 2), $\{3, 4\}$ (valore $\frac{5}{3}$). Una soluzione ottima di ILP_{CSP}^2 è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 1$, $\tilde{y}_3 = 0$, $\tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(ILP_{CSP}^2) = 2$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(ILP_{CSP}^2) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 3\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{x}$: $1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.

- Iterazione 3**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_3 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_2 :

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 31x_1 & + & 13x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 \\
 \text{soggetto a} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 9 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & + & x_3 & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_2 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 0, 0, \frac{1}{8})$, di valore $z(LP_2) = \frac{257}{8}$.

I costi sono $q = (0, 1, 1, \frac{7}{8})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{23}{8}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & y_2 & + & y_3 & + & \frac{7}{8} y_4 \\ \text{soggetto a} & 8 y_1 & + & 6 y_2 & + & 3 y_3 & + & 8 y_4 & \leq & 15 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore 1), $\{1, 3\}$ (valore 1), $\{2, 3\}$ (valore 2), $\{2, 4\}$ (valore $\frac{15}{8}$), $\{3, 4\}$ (valore $\frac{15}{8}$). Una soluzione ottima di ILP_{CSP}^2 è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 1$, $\tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{y}_4 = 0$, di valore $z(ILP_{CSP}^2) = 2$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(ILP_{CSP}^2) = \frac{23}{8} - 2 = \frac{7}{8} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 4\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{1}{8} - 1 = \frac{1}{8}$.

• Iterazione 4

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_4 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_3 :

$$\begin{array}{llllll} \max & 31 x_1 & + & 13 x_2 & + & 5 x_3 & + & 9 x_4 \\ \text{soggetto a} & 8 x_1 & + & 6 x_2 & + & 3 x_3 & + & 8 x_4 & \leq & 9 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 1 \\ & x_1 & & & + & x_3 & & & \leq & 1 \\ & x_1 & & & & & + & x_4 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_3 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 0, 0, 0)$, di valore $z(LP_3) = 31$.

I costi sono $q = (0, 1, 1, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = 3$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 8 y_1 & + & 6 y_2 & + & 3 y_3 & + & 8 y_4 & \leq & 15 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 15 sono: $\{1, 2\}$ (valore 1), $\{1, 3\}$ (valore 1), $\{2, 3\}$ (valore 2), $\{2, 4\}$ (valore 2), $\{3, 4\}$ (valore 2). Il valore ottimo di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 2$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 3 - 2 = 1 \geq 1.$$

Nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 0, 0, 0)$: la separazione si ferma dopo 3 disuguaglianze di copertura. Il valore ottimo sulla chiusura delle coperture è

$$z(\text{LP}^{\text{cov}}) = z(\text{LP}_3) = 31 < z(\text{LP}) = \frac{199}{6},$$

e $\tilde{\mathbf{x}}$ è **intero**, quindi è ottimo anche per il problema binario.

Esercizio 5.15 — Chiusura delle coperture per separazione (P5)

Consideriamo un problema binario con un vincolo $\sum_j a_j x_j \leq b$, con coefficienti interi positivi a_j e termine noto $b = 12$, sulle variabili binarie indicizzate dall'insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di $n = 4$ variabili, con i seguenti coefficienti dell'obiettivo e del vincolo:

j	1	2	3	4
c_j	38	16	14	4
a_j	7	4	7	6

Il LP associato è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 38x_1 & + & 16x_2 & + & 14x_3 & + & 4x_4 \\ \text{soggetto a} & 7x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 6x_4 & \leq & 12 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & & & & \leq & 1 \\ & & & x_3 & & & & & \leq & 1 \\ & & & & x_4 & & & & \leq & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}$ di LP e il suo valore sono:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{7}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}) = 56.$$

Domande

1. Partendo da $\tilde{\mathbf{x}}$, separare le disuguaglianze di copertura risolvendo all'ottimo il problema complementare $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$. Aggiungere all'LP la disuguaglianza di copertura massimamente violata, risolverlo di nuovo e ripetere finché nessuna disuguaglianza di copertura è violata. Se $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ ha più soluzioni ottime, scegliere quella che seleziona il maggior numero di variabili.

2. Qual è il valore ottimo sulla chiusura delle coperture? La soluzione finale è intera?

La **chiusura delle coperture** è il poliedro ottenuto aggiungendo a LP tutte le disuguaglianze di copertura $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$, $C \in \mathcal{C}$. Dato un punto $\tilde{\mathbf{x}}$, sia $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ una soluzione ottima del problema complementare

$$(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) \quad \max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} (1 - \tilde{x}_j) y_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j y_j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1), y_j \in \{0, 1\} \forall j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Se $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) < 1$, la copertura $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\}$ è associata alla disuguaglianza di copertura massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$; altrimenti, nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}}$.

Soluzione

Separazione delle disuguaglianze di copertura con il problema complementare; in tutte le iterazioni, il termine noto di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j - (b + 1) = 24 - 13 = 11$.

- Iterazione 1**

La soluzione ottima di LP è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, \frac{1}{7}, 0)$, di valore $z(\text{LP}) = 56$.

I costi sono $q = (0, 0, \frac{6}{7}, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{13}{7}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & \frac{6}{7} y_3 & + & y_4 & \\ \text{soggetto a} & 7 y_1 & + & 4 y_2 & + & 7 y_3 & + & 6 y_4 & \leq & 11 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 11 sono: $\{1, 2\}$ (valore 0), $\{2, 3\}$ (valore $\frac{6}{7}$), $\{2, 4\}$ (valore 1). Una soluzione ottima di $\text{ILP}_{\text{CSP}}^2$ è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 1$, $\tilde{y}_3 = 0$, $\tilde{y}_4 = 1$, di valore $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(\text{ILP}_{\text{CSP}}^2) = \frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 3\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_3 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{\mathbf{x}}$: $1 + \frac{1}{7} - 1 = \frac{1}{7}$.

- Iterazione 2**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_3 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_1 :

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 38x_1 & + & 16x_2 & + & 14x_3 & + & 4x_4 \\
 \text{soggetto a} & 7x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 6x_4 & \leq & 12 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_1 è $\tilde{x} = (1, 1, 0, \frac{1}{6})$, di valore $z(LP_1) = \frac{164}{3}$.

I costi sono $q = (0, 0, 1, \frac{5}{6})$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = \frac{11}{6}$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll}
 \max & & & y_3 & + & \frac{5}{6}y_4 \\
 \text{soggetto a} & 7y_1 & + & 4y_2 & + & 7y_3 & + & 6y_4 & \leq & 11 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\}
 \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 11 sono: $\{1, 2\}$ (valore 0), $\{2, 3\}$ (valore 1), $\{2, 4\}$ (valore $\frac{5}{6}$). Una soluzione ottima di ILP_{CSP}^2 è $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = 1$, $\tilde{y}_3 = 1$, $\tilde{y}_4 = 0$, di valore $z(ILP_{CSP}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(ILP_{CSP}^2) = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6} < 1.$$

Di conseguenza, $\tilde{C} = \{j \in \mathcal{J} : \tilde{y}_j = 0\} = \{1, 4\}$ e la disuguaglianza di copertura

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

è massimamente violata da $\tilde{x}$: $1 + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{6}$.

- Iterazione 3**

Aggiungendo la disuguaglianza di copertura $x_1 + x_4 \leq 1$, otteniamo il seguente LP, indicato con LP_2 :

$$\begin{array}{llllll}
 \max & 38x_1 & + & 16x_2 & + & 14x_3 & + & 4x_4 \\
 \text{soggetto a} & 7x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 6x_4 & \leq & 12 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Una soluzione ottima di LP_2 è $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, 0)$, di valore $z(LP_2) = 54$.

I costi sono $q = (0, 0, 1, 1)$, il termine costante è $n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j = 2$, e il problema complementare è:

$$\begin{array}{llllll} \max & & & y_3 & + & y_4 \\ \text{soggetto a} & 7y_1 & + & 4y_2 & + & 7y_3 & + & 6y_4 & \leq & 11 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

I sottoinsiemi massimali di indici che soddisfano il vincolo con termine noto 11 sono: $\{1, 2\}$ (valore 0), $\{2, 3\}$ (valore 1), $\{2, 4\}$ (valore 1). Il valore ottimo di ILP_{CSP}^2 è $z(ILP_{CSP}^2) = 1$:

$$n - \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{x}_j - z(ILP_{CSP}^2) = 2 - 1 = 1 \geq 1.$$

Nessuna disuguaglianza di copertura è violata da $\tilde{\mathbf{x}} = (1, 1, 0, 0)$: la separazione si ferma dopo 2 disuguaglianze di copertura. Il valore ottimo sulla chiusura delle coperture è

$$z(LP^{cov}) = z(LP_2) = 54 < z(LP) = 56,$$

e $\tilde{\mathbf{x}}$ è **intero**, quindi è ottimo anche per il problema binario.