

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programmazione dinamica

Esercizi 1 — Programmazione dinamica

Esercizi svolti sui capitoli del volume 1, programmazione dinamica: ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/programmazione-dinamica/
github.com/fabiofurini/programmazione-dinamica

Anno accademico 2026–2027

Indice

Principi **2**

1 Principi della programmazione dinamica **3**

Problemi di zaino **12**

2 PD per il problema dello zaino 0/1 **13**

3 PD per il problema dello zaino illimitato **29**

4 PD per il problema dello zaino limitato **66**

5 PD per il problema del subset sum **81**

6 PD per il problema dello zaino a scelta multipla **92**

7 PD per il problema dello zaino multidimensionale **102**

8 PD per il problema dello zaino con setup **114**

9 PD per il problema degli zaini multipli **124**

Problemi di lot sizing **136**

10 PD per il problema del lot sizing senza capacità **137**

11 PD per il problema del lot sizing capacitato **150**

Problemi misti **156**

12 PD per il problema del cambio monete **157**

13 PD per il problema del taglio delle aste **169**

Principi

Capitolo 1

Principi della programmazione dinamica

Esercizio 1.1 — Sottostruttura ottima e sottoproblemi sovrapposti: il problema dello zaino 0/1

Consideriamo il problema dello zaino 0/1 con $n = 4$ oggetti e capacità $c = 8$:

$$\max\Big\{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j : \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c,\ x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n\Big\},$$

con i dati

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	3	5	4	5
w_j	2	4	3	3

Per $j \in \{0,\dots,n\}$ e $k \in \{0,\dots,c\}$, sia $v(j,k)$ il valore ottimo con i soli oggetti $1,\dots,j$ e capacità k.

Domande

1. Verificare la sottostruttura ottima: se una soluzione ottima del sottoproblema (j,k) prende l'oggetto j, che cosa si può dire della sua restrizione agli oggetti $1,\dots,j-1$? Scrivere la ricorrenza per $v(j,k)$ e i casi base.

2. Calcolare $v(4,8)$ dall'alto verso il basso (top-down) ed elencare, per ogni j, i sottoproblemi (j,k) che la ricorsione genera. Quali sono generati più di una volta? Quale proprietà mostra questo fatto?

3. Riempire riga per riga la tabella di memorizzazione di $v(j,k)$, memorizzando in $s(j,k)$ se l'oggetto j è preso (1) oppure no (0); un pareggio si risolve a favore del non prenderlo.

4. Ricostruire una soluzione ottima dalla tabella s.

Soluzione

1. La sua restrizione è una soluzione del sottoproblema $(j-1, k-w_j)$, e deve essere ottima: una migliore, più l'oggetto j, batterebbe la soluzione ottima di (j,k). Se l'oggetto j non è preso, la restrizione è ottima per $(j-1,k)$. Quindi:

$$v(j,k) = \begin{cases} \max\{v(j-1,k),\ p_j + v(j-1,k-w_j)\} & \text{se } j \geq 1,\ w_j \leq k, \\ v(j-1,k) & \text{se } j \geq 1,\ w_j > k, \\ 0 & \text{se } j = 0. \end{cases}$$

2. Ogni chiamata (j,k) genera $(j-1,k)$ e, se $w_j \leq k$, $(j-1,k-w_j)$:

   - $j=4$: $(4,8)$;
   - $j=3$: $(3,8)$, $(3,5)$;
   - $j=2$: $(2,8)$, $(2,5)$, $(2,5)$, $(2,2)$ (ripetuti: $(2,5)$);
   - $j=1$: $(1,8)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,1)$, $(1,5)$, $(1,1)$, $(1,2)$ (ripetuti: $(1,1)$, $(1,5)$);
   - $j=0$: $(0,8)$, $(0,6)$, $(0,4)$, $(0,2)$, $(0,5)$, $(0,3)$, $(0,1)$, $(0,5)$, $(0,3)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,0)$ (ripetuti: $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,5)$);

   La ricorsione esegue 26 chiamate per 19 sottoproblemi distinti: i sottoproblemi si **sovrappongono** (gli oggetti 3 e 4 hanno lo stesso peso). Una tabella di memorizzazione calcola ogni valore una sola volta.

3. Le tabelle v e s sono:

$v(j,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	3	3	3	3	3	3	3
$j=2$	0	0	3	3	5	5	8	8	8
$j=3$	0	0	3	4	5	7	8	9	9
$j=4$	0	0	3	5	5	8	9	10	12

$s(j,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j=0$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	1	0	1	0	1	1
$j=4$	0	0	0	1	0	1	1	1	1

   Per esempio $v(3,7) = \max\{v(2,7),\ 4 + v(2,4)\} = \max\{8,9\} = 9$.

4. Partendo da $(4,8)$:

   - $s(4,8) = 1$: l'oggetto 4 è preso, andare a $(3, 8-3) = (3,5)$;
   - $s(3,5) = 1$: l'oggetto 3 è preso, andare a $(2, 5-3) = (2,2)$;

- $s(2,2) = 0$: l'oggetto 2 non è preso, andare a $(1,2)$;
- $s(1,2) = 1$: l'oggetto 1 è preso, andare a $(0, 2-2) = (0,0)$;

La soluzione ottima è $\{1,3,4\}$, di peso $2+3+3 = 8 \leq 8$ e profitto $3+4+5 = 12 = v(4,8)$. Le celle visitate:

$v(j,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	3	3	3	3	3	3	3
$j=2$	0	0	3	3	5	5	8	8	8
$j=3$	0	0	3	4	5	7	8	9	9
$j=4$	0	0	3	5	5	8	9	10	12

$v(4,8) = 12$ con gli oggetti $\{1,3,4\}$; la ricorsione top-down esegue 26 chiamate per 19 sottoproblemi distinti, la tabella di memorizzazione ha $(n+1)(c+1) = 45$ celle.

Esercizio 1.2 — Scrivere una ricorrenza: il subset sum tramite le somme raggiungibili

Dati $n = 5$ oggetti con pesi interi w_j e una capacità $c = 30$, la versione di ottimizzazione del **problema del subset sum** chiede un sottoinsieme di oggetti di peso totale massimo che non superi c:

$$\max\Big\{\sum_{j=1}^{n} w_j x_j : \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c,\ x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n\Big\}.$$

The data are

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
w_j	6	9	11	14	17

Per $j \in \{0,\dots,n\}$, sia R_j l'insieme delle **somme raggiungibili**: i totali $k \leq c$ dei sottoinsiemi di $\{1,\dots,j\}$.

Domande

1. Scrivere una ricorrenza per R_j, distinguendo se l'oggetto j è usato, con il caso base. Come si legge il valore ottimo z da R_n?
2. Calcolare $R_1,\dots,R_n$. Per ogni somma raggiungibile, memorizzare il primo indice j tale che essa appartiene a R_j.
3. Ricostruire una soluzione ottima.
4. Prendere gli oggetti in modo greedy per peso non crescente, finché entrano. Il risultato è ottimo?

Soluzione

1. Un sottoinsieme di $\{1, \dots, j\}$ o non contiene l'oggetto j, e allora il suo totale è in R_{j-1}, o lo usa, e allora il suo totale è $k + w_j$ con $k \in R_{j-1}$. Quindi:

$$R_j = \begin{cases} R_{j-1} \cup \{k + w_j : \ k \in R_{j-1}, \ k + w_j \le c\} & \text{se } 1 \le j \le n, \\ \{0\} & \text{se } j = 0, \end{cases}$$

$$z = \max\{k : \ k \in R_n\}.$$

   È il KP con $p_j = w_j$, scritto con insiemi di valori raggiungibili.

2. La riga j elenca solo le somme nuove; una somma appartiene a R_j se compare in una riga $\le j$:

j	w_j	somme di R_j che non sono in R_{j-1}
0	—	0
1	6	6
2	9	9, 15
3	11	11, 17, 20, 26
4	14	14, 23, 25, 29
5	17	28

   Quindi $|R_5| = 13$ e $z = \max R_5 = 29$.

3. Una somma k che compare per la prima volta in R_j usa l'oggetto j, e $k - w_j$ sta in R_{j-1}:

   - 29 compare per la prima volta in R_4: l'oggetto 4 è preso, andare a $29 - 14 = 15$;
   - 15 compare per la prima volta in R_2: l'oggetto 2 è preso, andare a $15 - 9 = 6$;
   - 6 compare per la prima volta in R_1: l'oggetto 1 è preso, andare a $6 - 6 = 0$;

   La soluzione ottima è $\{1, 2, 4\}$, di totale $6 + 9 + 14 = 29 \le 30$.

4. La scelta greedy prende gli oggetti $5, 3$, di totale $11 + 17 = 28 < 29$: non è ottima.

$z = 29$ con gli oggetti $\{1, 2, 4\}$; le somme raggiungibili sono 13, mentre i sottoinsiemi sono $2^5 = 32$. La scelta greedy per peso dà solo 28.

Esercizio 1.3 — Riusare una ricorrenza: due macchine parallele tramite il subset sum

Nel problema $P2\|C_{\max}$, $n = 6$ lavori con tempi di processamento interi p_j sono assegnati a 2 macchine identiche, e si minimizza il **makespan** $C_{\max}$, il carico massimo di una macchina:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
p_j	13	11	10	5	4	3

Siano $P = \sum_j p_j = 46$ e L il carico della macchina 1.

Domande

1. Esprimere $C_{\max}$ in funzione di L. Mostrare che minimizzare $C_{\max}$ equivale alla versione di ottimizzazione del problema del subset sum, con capacità $\lfloor P/2 \rfloor$, e scrivere la ricorrenza delle sue somme raggiungibili.
2. Calcolare le somme raggiungibili $R_1, \ldots, R_n$.
3. Ricostruire un assegnamento ottimo e il suo makespan.
4. Confrontare con la regola LPT: lavori per p_j non crescente, ciascuno sulla macchina meno carica.

Soluzione

1. La macchina 2 riceve $P - L$, quindi $C_{\max} = \max\{L, P-L\} \geq P/2$. A meno di scambiare le macchine possiamo supporre $L \leq P/2$, e allora $C_{\max} = P - L$ è minimo quando L è massimo: un problema del subset sum con capacità $c = \lfloor 46/2 \rfloor = 23$ e pesi p_j:

$$R_j = \begin{cases} R_{j-1} \cup \{k + p_j : \ k \in R_{j-1}, \ k + p_j \leq c\} & \text{se } 1 \leq j \leq n, \\ \{0\} & \text{se } j = 0, \end{cases}$$

$$z = P - \max\{k : \ k \in R_n\}.$$

2. La riga j elenca solo le somme nuove:

j	p_j	somme di R_j che non sono in R_{j-1}
0	—	0
1	13	13
2	11	11
3	10	10, 21, 23
4	5	5, 15, 16, 18
5	4	4, 9, 14, 17, 19, 20, 22
6	3	3, 7, 8, 12

   La somma raggiungibile massima è $L = 23$, e il makespan ottimo è $z = 46 - 23 = 23$, uguale al lower bound $\lceil P/2 \rceil = 23$.

3. - 23 compare per la prima volta in R_3: l'oggetto 3 è preso, andare a $23 - 10 = 13$;
   - 13 compare per la prima volta in R_1: l'oggetto 1 è preso, andare a $13 - 13 = 0$;

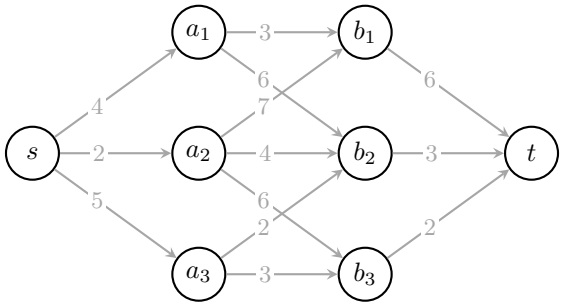
   La macchina 1 riceve i lavori $\{1, 3\}$ (carico $13 + 10 = 23$), la macchina 2 i lavori $\{2, 4, 5, 6\}$ (carico $11 + 5 + 4 + 3 = 23$).

4. LPT assegna alle macchine i lavori $\{1,4,5\}$ e $\{2,3,6\}$, con carichi 22 e 24: makespan $24 > 23$, non ottimo.

Il makespan ottimo è $z = 23$, con i lavori $\{1,3\}$ sulla macchina 1 e $\{2,4,5,6\}$ sulla macchina 2; LPT dà 24.

Esercizio 1.4 — Cammino minimo in una rete a livelli

Cerchiamo un cammino minimo da s a t nella rete orientata $G = (N, A)$ qui sotto, in cui ogni arco $(i, j) \in A$ ha un costo c_{ij}:



Per ogni nodo i, sia $v(i)$ il costo di un cammino minimo da i a t.

Domande

1. Verificare la sottostruttura ottima: se un cammino minimo da s a t passa per il nodo i, che cosa si può dire della sua parte da i a t? Scrivere la ricorrenza per $v(i)$ e il caso base.
2. Quali valori $v(i)$ servono a più di un nodo? Quale proprietà della PD mostra questo fatto?
3. Calcolare i valori $v(i)$ a ritroso, da t a s, memorizzando in $s(i)$ il successore di i sul cammino migliore (i pareggi si risolvono a favore del nodo elencato per primo).
4. Ricostruire il cammino minimo e confrontarne il costo con l'enumerazione di tutti i cammini.

Soluzione

1. La parte da i a t deve essere un cammino minimo da i a t: uno più corto darebbe un cammino più corto da s a t. Il primo arco uscente da i va in un successore j, quindi:

$$v(i) = \begin{cases} \min\{c_{ij} + v(j) : (i,j) \in A\} & \text{se } i \neq t, \\ 0 & \text{se } i = t. \end{cases}$$

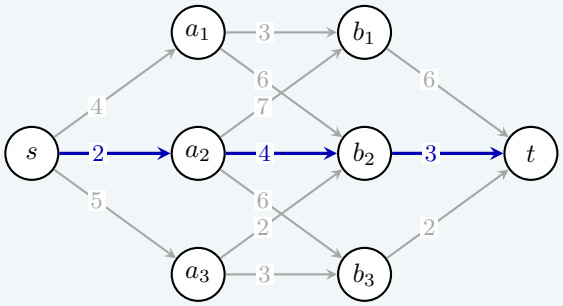
2. I valori $v(b_1)$, $v(b_2)$, $v(b_3)$ servono ai nodi a_1, a_2, a_3 che puntano a essi: $v(b_1)$ a 2

nodi, $v(b_2)$ a 3 e $v(b_3)$ a 2. I sottoproblemi si sovrappongono: con una tabella di memorizzazione ogni valore si calcola una sola volta.

3. I valori, a ritroso da t:

nodo i	$c_{ij} + v(j)$ per $(i,j) \in A$	$v(i)$	$s(i)$
t	—	0	—
b_3	$2+0=2$	2	t
b_2	$3+0=3$	3	t
b_1	$6+0=6$	6	t
a_3	$2+3=5$, $3+2=5$	5	b_2
a_2	$7+6=13$, $4+3=7$, $6+2=8$	7	b_2
a_1	$3+6=9$, $6+3=9$	9	b_1
s	$4+9=13$, $2+7=9$, $5+5=10$	9	a_2

4. Seguendo la tabella s a partire da s: $s \to a_2 \to b_2 \to t$, di costo $2+4+3=9=v(s)$:



La rete ha 7 cammini da s a t; la loro enumerazione dà lo stesso cammino ottimo, l'unico di costo 9.

$v(s) = 9$, con il cammino minimo $s \to a_2 \to b_2 \to t$; i valori dei nodi b_k si calcolano una volta e si usano più volte.

Esercizio 1.5 — Una tabella a due indici: il problema dello zaino a scelta multipla

Nel **problema dello zaino a scelta multipla** gli oggetti sono partizionati in classi $\mathscr{J}_1, \ldots, \mathscr{J}_q$, e si sceglie **esattamente un** oggetto per classe, con peso totale al più c e profitto totale massimo:

$$\max \left\{ \sum_{h=1}^{q} \sum_{j \in \mathscr{J}_h} p_j x_j : \sum_{h=1}^{q} \sum_{j \in \mathscr{J}_h} w_j x_j \le c,\ \sum_{j \in \mathscr{J}_h} x_j = 1,\ h = 1, \ldots, q,\ x_j \in \{0,1\} \right\}.$$

Qui $q = 3$, $c = 10$ e

classe	$\mathscr{J}_1$			$\mathscr{J}_2$			$\mathscr{J}_3$		
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w_j	2	3	5	1	4	6	2	3	4
p_j	3	5	8	2	6	9	4	5	7

Per $h \in \{0, \ldots, q\}$ e $k \in \{0, \ldots, c\}$, sia $v(h, k)$ il valore ottimo con le sole classi $\mathscr{J}_1, \ldots, \mathscr{J}_h$ e capacità k ($v(h, k) = -\infty$ se non esiste una scelta ammissibile).

Domande

1. Scrivere la ricorrenza per $v(h, k)$, decidendo quale oggetto della classe $\mathscr{J}_h$ si sceglie, e i casi base. Perché vale la sottostruttura ottima?
2. Riempire riga per riga la tabella di $v(h, k)$, memorizzando in $s(h, k)$ l'oggetto scelto nella classe $\mathscr{J}_h$.
3. Ricostruire una soluzione ottima.
4. Senza nuovi calcoli, indicare il valore ottimo per ogni capacità $k \leq 10$. Qual è la capacità più piccola con una soluzione ammissibile?

Soluzione

1. Se l'oggetto $j \in \mathscr{J}_h$ è scelto in una soluzione ottima di (h, k), gli oggetti di $\mathscr{J}_1, \ldots, \mathscr{J}_{h-1}$ formano una soluzione ottima di $(h-1, k-w_j)$: una migliore migliorerebbe l'intera soluzione. Quindi:

$$v(h,k) = \begin{cases} \max\{p_j + v(h-1, k-w_j) : \ j \in \mathscr{J}_h, \ w_j \leq k\} & \text{se } h \geq 1, \\ 0 & \text{se } h = 0, \end{cases}$$

   dove il massimo di un insieme vuoto è $-\infty$.

2. Le tabelle v e s sono:

$v(h,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	$-\infty$	3	5	5	8	8	8	8	8	8
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	7	7	10	11	12	14	14
$h=3$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	9	11	12	14	15	17

$s(h,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h=0$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$h=1$	–	–	1	2	2	3	3	3	3	3	3
$h=2$	–	–	–	4	4	4	4	5	6	5	5
$h=3$	–	–	–	–	–	7	7	8	7	7	9

   Per esempio $v(2, 7) = \max\{2 + v(1, 6), \ 6 + v(1, 3), \ 9 + v(1, 1)\} = 11$.

3. Partendo da $(3, 10)$:
   - $s(3, 10) = 9$: oggetto 9 della classe $\mathscr{J}_3$, andare a $(2, 10 - 4) = (2, 6)$;
   - $s(2, 6) = 4$: oggetto 4 della classe $\mathscr{J}_2$, andare a $(1, 6 - 1) = (1, 5)$;
   - $s(1, 5) = 3$: oggetto 3 della classe $\mathscr{J}_1$, andare a $(0, 5 - 5) = (0, 0)$;

   La soluzione ottima è $\{3, 4, 9\}$, di peso $5 + 1 + 4 = 10 \leq 10$ e profitto $8 + 2 + 7 = 17 = v(3, 10)$. Le celle visitate:

$v(h,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	$-\infty$	3	5	5	8	8	8	8	8	8
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	7	7	10	11	12	14	14
$h=3$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	9	11	12	14	15	17

4. La riga $h = 3$ dà il valore ottimo per ogni capacità $k \leq 10$: vale $-\infty$ per $k < 5$, e la capacità ammissibile più piccola è 5, la somma dei pesi minimi delle classi.

$v(3, 10) = 17$ con gli oggetti $\{3, 4, 9\}$, uno per classe; la tabella ha $(q + 1)(c + 1) = 44$ celle, mentre le scelte sono 27.

Problemi di zaino

Capitolo 2

PD per il problema dello zaino 0/1

Esercizio 2.1 — L'algoritmo di PD bottom-up per il KP (4 oggetti, $c = 6$)

Consideriamo la seguente istanza del KP, in cui lo zaino ha capacità $c = 6$ e i profitti e i pesi degli oggetti sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	6	7	8	9
w_j	2	3	4	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di k.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w_1$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	0	0	$k < w_1$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$
1	2	6	1	$p[1] + v[0][0] = 6 + 0 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 6$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	6	1	$p[1] + v[0][1] = 6 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 6$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	6	1	$p[1] + v[0][2] = 6 + 0 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 6$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	6	1	$p[1] + v[0][3] = 6 + 0 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 6$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	6	1	$p[1] + v[0][4] = 6 + 0 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 6$, $s[1][6] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w_2$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	0	0	$k < w_2$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 0$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	6	0	$k < w_2$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 6$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	7	1	$p[2] + v[1][0] = 7 + 0 > v[1][3] = 6$: $v[2][3] \leftarrow 7$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	7	1	$p[2] + v[1][1] = 7 + 0 > v[1][4] = 6$: $v[2][4] \leftarrow 7$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	13	1	$p[2] + v[1][2] = 7 + 6 > v[1][5] = 6$: $v[2][5] \leftarrow 13$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	13	1	$p[2] + v[1][3] = 7 + 6 > v[1][6] = 6$: $v[2][6] \leftarrow 13$, $s[2][6] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w_3$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	0	0	$k < w_3$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 0$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	6	0	$k < w_3$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 6$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	7	0	$k < w_3$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 7$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	8	1	$p[3] + v[2][0] = 8 + 0 > v[2][4] = 7$: $v[3][4] \leftarrow 8$, $s[3][4] \leftarrow 1$
3	5	13	0	$p[3] + v[2][1] = 8 + 0 \leq v[2][5] = 13$: $v[3][5] \leftarrow 13$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	14	1	$p[3] + v[2][2] = 8 + 6 > v[2][6] = 13$: $v[3][6] \leftarrow 14$, $s[3][6] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$k < w_4$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	0	0	$k < w_4$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 0$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	6	0	$k < w_4$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 6$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	7	0	$k < w_4$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 7$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	8	0	$k < w_4$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 8$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	13	0	$p[4] + v[3][0] = 9 + 0 \leq v[3][5] = 13$: $v[4][5] \leftarrow 13$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	14	0	$p[4] + v[3][1] = 9 + 0 \leq v[3][6] = 14$: $v[4][6] \leftarrow 14$, $s[4][6] \leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	6	6	6	6	6
$j=2$	0	0	6	7	7	13	13
$j=3$	0	0	6	7	8	13	14
$j=4$	0	0	6	7	8	13	14

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	1	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	1	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=4$ e $k=6$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	$k=6$
1	4	6	0	0	0	0	0	nessun aggiornamento
2	3	6	1	0	0	1	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 6-4=2$
3	2	2	0	0	0	1	0	nessun aggiornamento
4	1	2	1	1	0	1	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2-2=0$

Quindi il vettore

$$(1,0,1,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[4][6]=14.$$

Esercizio 2.2 — L'algoritmo di PD bottom-up per il KP (4 oggetti, $c = 7$)

Consideriamo la seguente istanza del KP, in cui lo zaino ha capacità $c = 7$ e i profitti e i pesi degli oggetti sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	4	5	10	11
w_j	2	3	5	6

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di k.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w_1$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	0	0	$k < w_1$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$

1	2	4	1	$p[1]+v[0][0]=4+0>v[0][2]=0$: $v[1][2]\leftarrow 4$, $s[1][2]\leftarrow 1$
1	3	4	1	$p[1]+v[0][1]=4+0>v[0][3]=0$: $v[1][3]\leftarrow 4$, $s[1][3]\leftarrow 1$
1	4	4	1	$p[1]+v[0][2]=4+0>v[0][4]=0$: $v[1][4]\leftarrow 4$, $s[1][4]\leftarrow 1$
1	5	4	1	$p[1]+v[0][3]=4+0>v[0][5]=0$: $v[1][5]\leftarrow 4$, $s[1][5]\leftarrow 1$
1	6	4	1	$p[1]+v[0][4]=4+0>v[0][6]=0$: $v[1][6]\leftarrow 4$, $s[1][6]\leftarrow 1$
1	7	4	1	$p[1]+v[0][5]=4+0>v[0][7]=0$: $v[1][7]\leftarrow 4$, $s[1][7]\leftarrow 1$
2	0	0	0	$k<w_2$: $v[2][0]\leftarrow v[1][0]=0$, $s[2][0]\leftarrow 0$
2	1	0	0	$k<w_2$: $v[2][1]\leftarrow v[1][1]=0$, $s[2][1]\leftarrow 0$
2	2	4	0	$k<w_2$: $v[2][2]\leftarrow v[1][2]=4$, $s[2][2]\leftarrow 0$
2	3	5	1	$p[2]+v[1][0]=5+0>v[1][3]=4$: $v[2][3]\leftarrow 5$, $s[2][3]\leftarrow 1$
2	4	5	1	$p[2]+v[1][1]=5+0>v[1][4]=4$: $v[2][4]\leftarrow 5$, $s[2][4]\leftarrow 1$
2	5	9	1	$p[2]+v[1][2]=5+4>v[1][5]=4$: $v[2][5]\leftarrow 9$, $s[2][5]\leftarrow 1$
2	6	9	1	$p[2]+v[1][3]=5+4>v[1][6]=4$: $v[2][6]\leftarrow 9$, $s[2][6]\leftarrow 1$
2	7	9	1	$p[2]+v[1][4]=5+4>v[1][7]=4$: $v[2][7]\leftarrow 9$, $s[2][7]\leftarrow 1$
3	0	0	0	$k<w_3$: $v[3][0]\leftarrow v[2][0]=0$, $s[3][0]\leftarrow 0$
3	1	0	0	$k<w_3$: $v[3][1]\leftarrow v[2][1]=0$, $s[3][1]\leftarrow 0$
3	2	4	0	$k<w_3$: $v[3][2]\leftarrow v[2][2]=4$, $s[3][2]\leftarrow 0$
3	3	5	0	$k<w_3$: $v[3][3]\leftarrow v[2][3]=5$, $s[3][3]\leftarrow 0$
3	4	5	0	$k<w_3$: $v[3][4]\leftarrow v[2][4]=5$, $s[3][4]\leftarrow 0$
3	5	10	1	$p[3]+v[2][0]=10+0>v[2][5]=9$: $v[3][5]\leftarrow 10$, $s[3][5]\leftarrow 1$
3	6	10	1	$p[3]+v[2][1]=10+0>v[2][6]=9$: $v[3][6]\leftarrow 10$, $s[3][6]\leftarrow 1$
3	7	14	1	$p[3]+v[2][2]=10+4>v[2][7]=9$: $v[3][7]\leftarrow 14$, $s[3][7]\leftarrow 1$
4	0	0	0	$k<w_4$: $v[4][0]\leftarrow v[3][0]=0$, $s[4][0]\leftarrow 0$
4	1	0	0	$k<w_4$: $v[4][1]\leftarrow v[3][1]=0$, $s[4][1]\leftarrow 0$
4	2	4	0	$k<w_4$: $v[4][2]\leftarrow v[3][2]=4$, $s[4][2]\leftarrow 0$
4	3	5	0	$k<w_4$: $v[4][3]\leftarrow v[3][3]=5$, $s[4][3]\leftarrow 0$
4	4	5	0	$k<w_4$: $v[4][4]\leftarrow v[3][4]=5$, $s[4][4]\leftarrow 0$
4	5	10	0	$k<w_4$: $v[4][5]\leftarrow v[3][5]=10$, $s[4][5]\leftarrow 0$
4	6	11	1	$p[4]+v[3][0]=11+0>v[3][6]=10$: $v[4][6]\leftarrow 11$, $s[4][6]\leftarrow 1$
4	7	14	0	$p[4]+v[3][1]=11+0\leq v[3][7]=14$: $v[4][7]\leftarrow 14$, $s[4][7]\leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	4	4	4	4	4	4
$j=2$	0	0	4	5	5	9	9	9
$j=3$	0	0	4	5	5	10	10	14
$j=4$	0	0	4	5	5	10	11	14

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	1	0

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	1	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=4$ e $k=7$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	$k=7$
1	4	7	0	0	0	0	0	nessun aggiornamento
2	3	7	1	0	0	1	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7-5=2$
3	2	2	0	0	0	1	0	nessun aggiornamento
4	1	2	1	1	0	1	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2-2=0$

Quindi il vettore

$$(1,0,1,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[4][7]=14.$$

Esercizio 2.3 — L'algoritmo di PD bottom-up per il KP (5 oggetti, $c = 8$)

Consideriamo la seguente istanza del KP, in cui lo zaino ha capacità $c = 8$ e i profitti e i pesi degli oggetti sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	3	4	8	8	10
w_j	1	3	4	5	6

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di k.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w_1$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$

1	1	3	1	$p[1]+v[0][0]=3+0>v[0][1]=0$: $v[1][1]\leftarrow 3$, $s[1][1]\leftarrow 1$
1	2	3	1	$p[1]+v[0][1]=3+0>v[0][2]=0$: $v[1][2]\leftarrow 3$, $s[1][2]\leftarrow 1$
1	3	3	1	$p[1]+v[0][2]=3+0>v[0][3]=0$: $v[1][3]\leftarrow 3$, $s[1][3]\leftarrow 1$
1	4	3	1	$p[1]+v[0][3]=3+0>v[0][4]=0$: $v[1][4]\leftarrow 3$, $s[1][4]\leftarrow 1$
1	5	3	1	$p[1]+v[0][4]=3+0>v[0][5]=0$: $v[1][5]\leftarrow 3$, $s[1][5]\leftarrow 1$
1	6	3	1	$p[1]+v[0][5]=3+0>v[0][6]=0$: $v[1][6]\leftarrow 3$, $s[1][6]\leftarrow 1$
1	7	3	1	$p[1]+v[0][6]=3+0>v[0][7]=0$: $v[1][7]\leftarrow 3$, $s[1][7]\leftarrow 1$
1	8	3	1	$p[1]+v[0][7]=3+0>v[0][8]=0$: $v[1][8]\leftarrow 3$, $s[1][8]\leftarrow 1$
2	0	0	0	$k<w_2$: $v[2][0]\leftarrow v[1][0]=0$, $s[2][0]\leftarrow 0$
2	1	3	0	$k<w_2$: $v[2][1]\leftarrow v[1][1]=3$, $s[2][1]\leftarrow 0$
2	2	3	0	$k<w_2$: $v[2][2]\leftarrow v[1][2]=3$, $s[2][2]\leftarrow 0$
2	3	4	1	$p[2]+v[1][0]=4+0>v[1][3]=3$: $v[2][3]\leftarrow 4$, $s[2][3]\leftarrow 1$
2	4	7	1	$p[2]+v[1][1]=4+3>v[1][4]=3$: $v[2][4]\leftarrow 7$, $s[2][4]\leftarrow 1$
2	5	7	1	$p[2]+v[1][2]=4+3>v[1][5]=3$: $v[2][5]\leftarrow 7$, $s[2][5]\leftarrow 1$
2	6	7	1	$p[2]+v[1][3]=4+3>v[1][6]=3$: $v[2][6]\leftarrow 7$, $s[2][6]\leftarrow 1$
2	7	7	1	$p[2]+v[1][4]=4+3>v[1][7]=3$: $v[2][7]\leftarrow 7$, $s[2][7]\leftarrow 1$
2	8	7	1	$p[2]+v[1][5]=4+3>v[1][8]=3$: $v[2][8]\leftarrow 7$, $s[2][8]\leftarrow 1$
3	0	0	0	$k<w_3$: $v[3][0]\leftarrow v[2][0]=0$, $s[3][0]\leftarrow 0$
3	1	3	0	$k<w_3$: $v[3][1]\leftarrow v[2][1]=3$, $s[3][1]\leftarrow 0$
3	2	3	0	$k<w_3$: $v[3][2]\leftarrow v[2][2]=3$, $s[3][2]\leftarrow 0$
3	3	4	0	$k<w_3$: $v[3][3]\leftarrow v[2][3]=4$, $s[3][3]\leftarrow 0$
3	4	8	1	$p[3]+v[2][0]=8+0>v[2][4]=7$: $v[3][4]\leftarrow 8$, $s[3][4]\leftarrow 1$
3	5	11	1	$p[3]+v[2][1]=8+3>v[2][5]=7$: $v[3][5]\leftarrow 11$, $s[3][5]\leftarrow 1$
3	6	11	1	$p[3]+v[2][2]=8+3>v[2][6]=7$: $v[3][6]\leftarrow 11$, $s[3][6]\leftarrow 1$
3	7	12	1	$p[3]+v[2][3]=8+4>v[2][7]=7$: $v[3][7]\leftarrow 12$, $s[3][7]\leftarrow 1$
3	8	15	1	$p[3]+v[2][4]=8+7>v[2][8]=7$: $v[3][8]\leftarrow 15$, $s[3][8]\leftarrow 1$
4	0	0	0	$k<w_4$: $v[4][0]\leftarrow v[3][0]=0$, $s[4][0]\leftarrow 0$
4	1	3	0	$k<w_4$: $v[4][1]\leftarrow v[3][1]=3$, $s[4][1]\leftarrow 0$
4	2	3	0	$k<w_4$: $v[4][2]\leftarrow v[3][2]=3$, $s[4][2]\leftarrow 0$
4	3	4	0	$k<w_4$: $v[4][3]\leftarrow v[3][3]=4$, $s[4][3]\leftarrow 0$
4	4	8	0	$k<w_4$: $v[4][4]\leftarrow v[3][4]=8$, $s[4][4]\leftarrow 0$
4	5	11	0	$p[4]+v[3][0]=8+0\leq v[3][5]=11$: $v[4][5]\leftarrow 11$, $s[4][5]\leftarrow 0$
4	6	11	0	$p[4]+v[3][1]=8+3\leq v[3][6]=11$: $v[4][6]\leftarrow 11$, $s[4][6]\leftarrow 0$
4	7	12	0	$p[4]+v[3][2]=8+3\leq v[3][7]=12$: $v[4][7]\leftarrow 12$, $s[4][7]\leftarrow 0$
4	8	15	0	$p[4]+v[3][3]=8+4\leq v[3][8]=15$: $v[4][8]\leftarrow 15$, $s[4][8]\leftarrow 0$
5	0	0	0	$k<w_5$: $v[5][0]\leftarrow v[4][0]=0$, $s[5][0]\leftarrow 0$
5	1	3	0	$k<w_5$: $v[5][1]\leftarrow v[4][1]=3$, $s[5][1]\leftarrow 0$
5	2	3	0	$k<w_5$: $v[5][2]\leftarrow v[4][2]=3$, $s[5][2]\leftarrow 0$
5	3	4	0	$k<w_5$: $v[5][3]\leftarrow v[4][3]=4$, $s[5][3]\leftarrow 0$
5	4	8	0	$k<w_5$: $v[5][4]\leftarrow v[4][4]=8$, $s[5][4]\leftarrow 0$
5	5	11	0	$k<w_5$: $v[5][5]\leftarrow v[4][5]=11$, $s[5][5]\leftarrow 0$
5	6	11	0	$p[5]+v[4][0]=10+0\leq v[4][6]=11$: $v[5][6]\leftarrow 11$, $s[5][6]\leftarrow 0$
5	7	13	1	$p[5]+v[4][1]=10+3>v[4][7]=12$: $v[5][7]\leftarrow 13$, $s[5][7]\leftarrow 1$
5	8	15	0	$p[5]+v[4][2]=10+3\leq v[4][8]=15$: $v[5][8]\leftarrow 15$, $s[5][8]\leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	3	3	3	3	3	3	3	3
$j=2$	0	3	3	4	7	7	7	7	7
$j=3$	0	3	3	4	8	11	11	12	15
$j=4$	0	3	3	4	8	11	11	12	15
$j=5$	0	3	3	4	8	11	11	13	15

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	1	0

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=5$ e $k=8$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	0	$k=8$
1	5	8	0	0	0	0	0	0	nessun aggiornamento
2	4	8	0	0	0	0	0	0	nessun aggiornamento
3	3	8	1	0	0	1	0	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 8-4=4$
4	2	4	1	0	1	1	0	0	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 4-3=1$
5	1	1	1	1	1	1	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 1-1=0$

Quindi il vettore

$$(1,1,1,0,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][8] = 15.$$

Esercizio 2.4 — L'algoritmo di PD bottom-up per il KP (5 oggetti, $c = 9$)

Consideriamo la seguente istanza del KP, in cui lo zaino ha capacità $c = 9$ e i profitti e i pesi degli oggetti sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	5	6	9	10	13
w_j	2	4	5	6	7

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di k.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
0	9	0	0	$v[0][9] \leftarrow 0$, $s[0][9] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w_1$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$

1	1	0	0	$k < w_1$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$
1	2	5	1	$p[1] + v[0][0] = 5 + 0 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 5$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	5	1	$p[1] + v[0][1] = 5 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 5$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	5	1	$p[1] + v[0][2] = 5 + 0 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 5$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	5	1	$p[1] + v[0][3] = 5 + 0 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 5$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	5	1	$p[1] + v[0][4] = 5 + 0 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 5$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	5	1	$p[1] + v[0][5] = 5 + 0 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 5$, $s[1][7] \leftarrow 1$
1	8	5	1	$p[1] + v[0][6] = 5 + 0 > v[0][8] = 0$: $v[1][8] \leftarrow 5$, $s[1][8] \leftarrow 1$
1	9	5	1	$p[1] + v[0][7] = 5 + 0 > v[0][9] = 0$: $v[1][9] \leftarrow 5$, $s[1][9] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w_2$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	0	0	$k < w_2$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 0$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	5	0	$k < w_2$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 5$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	5	0	$k < w_2$: $v[2][3] \leftarrow v[1][3] = 5$, $s[2][3] \leftarrow 0$
2	4	6	1	$p[2] + v[1][0] = 6 + 0 > v[1][4] = 5$: $v[2][4] \leftarrow 6$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	6	1	$p[2] + v[1][1] = 6 + 0 > v[1][5] = 5$: $v[2][5] \leftarrow 6$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	11	1	$p[2] + v[1][2] = 6 + 5 > v[1][6] = 5$: $v[2][6] \leftarrow 11$, $s[2][6] \leftarrow 1$
2	7	11	1	$p[2] + v[1][3] = 6 + 5 > v[1][7] = 5$: $v[2][7] \leftarrow 11$, $s[2][7] \leftarrow 1$
2	8	11	1	$p[2] + v[1][4] = 6 + 5 > v[1][8] = 5$: $v[2][8] \leftarrow 11$, $s[2][8] \leftarrow 1$
2	9	11	1	$p[2] + v[1][5] = 6 + 5 > v[1][9] = 5$: $v[2][9] \leftarrow 11$, $s[2][9] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w_3$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	0	0	$k < w_3$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 0$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	5	0	$k < w_3$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 5$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	5	0	$k < w_3$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 5$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	6	0	$k < w_3$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 6$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	9	1	$p[3] + v[2][0] = 9 + 0 > v[2][5] = 6$: $v[3][5] \leftarrow 9$, $s[3][5] \leftarrow 1$
3	6	11	0	$p[3] + v[2][1] = 9 + 0 \leq v[2][6] = 11$: $v[3][6] \leftarrow 11$, $s[3][6] \leftarrow 0$
3	7	14	1	$p[3] + v[2][2] = 9 + 5 > v[2][7] = 11$: $v[3][7] \leftarrow 14$, $s[3][7] \leftarrow 1$
3	8	14	1	$p[3] + v[2][3] = 9 + 5 > v[2][8] = 11$: $v[3][8] \leftarrow 14$, $s[3][8] \leftarrow 1$
3	9	15	1	$p[3] + v[2][4] = 9 + 6 > v[2][9] = 11$: $v[3][9] \leftarrow 15$, $s[3][9] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$k < w_4$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	0	0	$k < w_4$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 0$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	5	0	$k < w_4$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 5$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	5	0	$k < w_4$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 5$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	6	0	$k < w_4$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 6$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	9	0	$k < w_4$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 9$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	11	0	$p[4] + v[3][0] = 10 + 0 \leq v[3][6] = 11$: $v[4][6] \leftarrow 11$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	14	0	$p[4] + v[3][1] = 10 + 0 \leq v[3][7] = 14$: $v[4][7] \leftarrow 14$, $s[4][7] \leftarrow 0$
4	8	15	1	$p[4] + v[3][2] = 10 + 5 > v[3][8] = 14$: $v[4][8] \leftarrow 15$, $s[4][8] \leftarrow 1$
4	9	15	0	$p[4] + v[3][3] = 10 + 5 \leq v[3][9] = 15$: $v[4][9] \leftarrow 15$, $s[4][9] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$k < w_5$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	0	0	$k < w_5$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 0$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	5	0	$k < w_5$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 5$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	5	0	$k < w_5$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 5$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	6	0	$k < w_5$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 6$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	9	0	$k < w_5$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 9$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	11	0	$k < w_5$: $v[5][6] \leftarrow v[4][6] = 11$, $s[5][6] \leftarrow 0$
5	7	14	0	$p[5] + v[4][0] = 13 + 0 \leq v[4][7] = 14$: $v[5][7] \leftarrow 14$, $s[5][7] \leftarrow 0$
5	8	15	0	$p[5] + v[4][1] = 13 + 0 \leq v[4][8] = 15$: $v[5][8] \leftarrow 15$, $s[5][8] \leftarrow 0$
5	9	18	1	$p[5] + v[4][2] = 13 + 5 > v[4][9] = 15$: $v[5][9] \leftarrow 18$, $s[5][9] \leftarrow 1$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5
$j=2$	0	0	5	5	6	6	11	11	11	11
$j=3$	0	0	5	5	6	9	11	14	14	15
$j=4$	0	0	5	5	6	9	11	14	15	15
$j=5$	0	0	5	5	6	9	11	14	15	18

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=5$ e $k=9$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	0	$k=9$
1	5	9	1	0	0	0	0	1	$x[5] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 9-7=2$
2	4	2	0	0	0	0	0	1	nessun aggiornamento
3	3	2	0	0	0	0	0	1	nessun aggiornamento
4	2	2	0	0	0	0	0	1	nessun aggiornamento
5	1	2	1	1	0	0	0	1	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2-2=0$

Quindi il vettore

$$(1,0,0,0,1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][9] = 18.$$

Esercizio 2.5 — L'algoritmo di PD bottom-up per il KP (5 oggetti, $c = 10$)

Consideriamo la seguente istanza del KP, in cui lo zaino ha capacità $c = 10$ e i profitti e i pesi degli oggetti sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	2	7	9	12	14
w_j	1	4	5	7	8

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di k.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
0	9	0	0	$v[0][9] \leftarrow 0$, $s[0][9] \leftarrow 0$
0	10	0	0	$v[0][10] \leftarrow 0$, $s[0][10] \leftarrow 0$

1	0	0	0	$k < w_1$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	2	1	$p[1] + v[0][0] = 2 + 0 > v[0][1] = 0$: $v[1][1] \leftarrow 2$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	2	1	$p[1] + v[0][1] = 2 + 0 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 2$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	2	1	$p[1] + v[0][2] = 2 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 2$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	2	1	$p[1] + v[0][3] = 2 + 0 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 2$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	2	1	$p[1] + v[0][4] = 2 + 0 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 2$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	2	1	$p[1] + v[0][5] = 2 + 0 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 2$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	2	1	$p[1] + v[0][6] = 2 + 0 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 2$, $s[1][7] \leftarrow 1$
1	8	2	1	$p[1] + v[0][7] = 2 + 0 > v[0][8] = 0$: $v[1][8] \leftarrow 2$, $s[1][8] \leftarrow 1$
1	9	2	1	$p[1] + v[0][8] = 2 + 0 > v[0][9] = 0$: $v[1][9] \leftarrow 2$, $s[1][9] \leftarrow 1$
1	10	2	1	$p[1] + v[0][9] = 2 + 0 > v[0][10] = 0$: $v[1][10] \leftarrow 2$, $s[1][10] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w_2$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	2	0	$k < w_2$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 2$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	2	0	$k < w_2$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 2$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	2	0	$k < w_2$: $v[2][3] \leftarrow v[1][3] = 2$, $s[2][3] \leftarrow 0$
2	4	7	1	$p[2] + v[1][0] = 7 + 0 > v[1][4] = 2$: $v[2][4] \leftarrow 7$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	9	1	$p[2] + v[1][1] = 7 + 2 > v[1][5] = 2$: $v[2][5] \leftarrow 9$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	9	1	$p[2] + v[1][2] = 7 + 2 > v[1][6] = 2$: $v[2][6] \leftarrow 9$, $s[2][6] \leftarrow 1$
2	7	9	1	$p[2] + v[1][3] = 7 + 2 > v[1][7] = 2$: $v[2][7] \leftarrow 9$, $s[2][7] \leftarrow 1$
2	8	9	1	$p[2] + v[1][4] = 7 + 2 > v[1][8] = 2$: $v[2][8] \leftarrow 9$, $s[2][8] \leftarrow 1$
2	9	9	1	$p[2] + v[1][5] = 7 + 2 > v[1][9] = 2$: $v[2][9] \leftarrow 9$, $s[2][9] \leftarrow 1$
2	10	9	1	$p[2] + v[1][6] = 7 + 2 > v[1][10] = 2$: $v[2][10] \leftarrow 9$, $s[2][10] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w_3$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	2	0	$k < w_3$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 2$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	2	0	$k < w_3$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 2$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	2	0	$k < w_3$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 2$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	7	0	$k < w_3$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 7$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	9	0	$p[3] + v[2][0] = 9 + 0 \leq v[2][5] = 9$: $v[3][5] \leftarrow 9$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	11	1	$p[3] + v[2][1] = 9 + 2 > v[2][6] = 9$: $v[3][6] \leftarrow 11$, $s[3][6] \leftarrow 1$
3	7	11	1	$p[3] + v[2][2] = 9 + 2 > v[2][7] = 9$: $v[3][7] \leftarrow 11$, $s[3][7] \leftarrow 1$
3	8	11	1	$p[3] + v[2][3] = 9 + 2 > v[2][8] = 9$: $v[3][8] \leftarrow 11$, $s[3][8] \leftarrow 1$
3	9	16	1	$p[3] + v[2][4] = 9 + 7 > v[2][9] = 9$: $v[3][9] \leftarrow 16$, $s[3][9] \leftarrow 1$
3	10	18	1	$p[3] + v[2][5] = 9 + 9 > v[2][10] = 9$: $v[3][10] \leftarrow 18$, $s[3][10] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$k < w_4$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	2	0	$k < w_4$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 2$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	2	0	$k < w_4$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 2$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	2	0	$k < w_4$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 2$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	7	0	$k < w_4$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 7$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	9	0	$k < w_4$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 9$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	11	0	$k < w_4$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 11$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	12	1	$p[4] + v[3][0] = 12 + 0 > v[3][7] = 11$: $v[4][7] \leftarrow 12$, $s[4][7] \leftarrow 1$
4	8	14	1	$p[4] + v[3][1] = 12 + 2 > v[3][8] = 11$: $v[4][8] \leftarrow 14$, $s[4][8] \leftarrow 1$
4	9	16	0	$p[4] + v[3][2] = 12 + 2 \leq v[3][9] = 16$: $v[4][9] \leftarrow 16$, $s[4][9] \leftarrow 0$
4	10	18	0	$p[4] + v[3][3] = 12 + 2 \leq v[3][10] = 18$: $v[4][10] \leftarrow 18$, $s[4][10] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$k < w_5$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	2	0	$k < w_5$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 2$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	2	0	$k < w_5$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 2$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	2	0	$k < w_5$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 2$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	7	0	$k < w_5$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 7$, $s[5][4] \leftarrow 0$

5	5	9	0	$k < w_5$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 9$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	11	0	$k < w_5$: $v[5][6] \leftarrow v[4][6] = 11$, $s[5][6] \leftarrow 0$
5	7	12	0	$k < w_5$: $v[5][7] \leftarrow v[4][7] = 12$, $s[5][7] \leftarrow 0$
5	8	14	0	$p[5] + v[4][0] = 14 + 0 \leq v[4][8] = 14$: $v[5][8] \leftarrow 14$, $s[5][8] \leftarrow 0$
5	9	16	0	$p[5] + v[4][1] = 14 + 2 \leq v[4][9] = 16$: $v[5][9] \leftarrow 16$, $s[5][9] \leftarrow 0$
5	10	18	0	$p[5] + v[4][2] = 14 + 2 \leq v[4][10] = 18$: $v[5][10] \leftarrow 18$, $s[5][10] \leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$j=2$	0	2	2	2	7	9	9	9	9	9	9
$j=3$	0	2	2	2	7	9	11	11	11	16	18
$j=4$	0	2	2	2	7	9	11	12	14	16	18
$j=5$	0	2	2	2	7	9	11	12	14	16	18

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=5$ e $k=10$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	0	$k=10$
1	5	10	0	0	0	0	0	0	nessun aggiornamento
2	4	10	0	0	0	0	0	0	nessun aggiornamento
3	3	10	1	0	0	1	0	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 10-5=5$
4	2	5	1	0	1	1	0	0	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 5-4=1$
5	1	1	1	1	1	1	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 1-1=0$

Quindi il vettore

$$(1,1,1,0,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][10] = 18.$$

Capitolo 3

PD per il problema dello zaino illimitato

Esercizio 3.1 — I due algoritmi di PD per l'UKP (4 tipi di oggetto, $c = 7$)

Consideriamo la seguente istanza dell'UKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 7$, ogni tipo di oggetto è disponibile in infinite copie e i profitti e i pesi dei tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	4	5	10	11
w_j	2	3	5	6

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di k e j, le celle $v[k]$ e $s[k]$, il valore corrente di m, il valore corrente di t e l'operazione eseguita.

k	j	$v[k]$	$s[k]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
1	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
1	1	–	–	0	0	$w[1] = 2 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	2	–	–	0	0	$w[2] = 3 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	3	–	–	0	0	$w[3] = 5 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	4	–	–	0	0	$w[4] = 6 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	–	0	0	0	0	$v[1] \leftarrow 0$, $s[1] \leftarrow 0$
2	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
2	1	–	–	4	1	$p[1] + v[0] = 4 + 0 = 4 > m = 0$: $m \leftarrow 4$, $t \leftarrow 1$
2	2	–	–	4	1	$w[2] = 3 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	3	–	–	4	1	$w[3] = 5 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	4	–	–	4	1	$w[4] = 6 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	–	4	1	4	1	$v[2] \leftarrow 4$, $s[2] \leftarrow 1$
3	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
3	1	–	–	4	1	$p[1] + v[1] = 4 + 0 = 4 > m = 0$: $m \leftarrow 4$, $t \leftarrow 1$
3	2	–	–	5	2	$p[2] + v[0] = 5 + 0 = 5 > m = 4$: $m \leftarrow 5$, $t \leftarrow 2$
3	3	–	–	5	2	$w[3] = 5 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	4	–	–	5	2	$w[4] = 6 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	–	5	2	5	2	$v[3] \leftarrow 5$, $s[3] \leftarrow 2$
4	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
4	1	–	–	8	1	$p[1] + v[2] = 4 + 4 = 8 > m = 0$: $m \leftarrow 8$, $t \leftarrow 1$
4	2	–	–	8	1	$p[2] + v[1] = 5 + 0 = 5 \leq m = 8$: nessun aggiornamento
4	3	–	–	8	1	$w[3] = 5 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	4	–	–	8	1	$w[4] = 6 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	–	8	1	8	1	$v[4] \leftarrow 8$, $s[4] \leftarrow 1$
5	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
5	1	–	–	9	1	$p[1] + v[3] = 4 + 5 = 9 > m = 0$: $m \leftarrow 9$, $t \leftarrow 1$
5	2	–	–	9	1	$p[2] + v[2] = 5 + 4 = 9 \leq m = 9$: nessun aggiornamento
5	3	–	–	10	3	$p[3] + v[0] = 10 + 0 = 10 > m = 9$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 3$
5	4	–	–	10	3	$w[4] = 6 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	–	10	3	10	3	$v[5] \leftarrow 10$, $s[5] \leftarrow 3$
6	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
6	1	–	–	12	1	$p[1] + v[4] = 4 + 8 = 12 > m = 0$: $m \leftarrow 12$, $t \leftarrow 1$
6	2	–	–	12	1	$p[2] + v[3] = 5 + 5 = 10 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
6	3	–	–	12	1	$p[3] + v[1] = 10 + 0 = 10 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
6	4	–	–	12	1	$p[4] + v[0] = 11 + 0 = 11 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
6	–	12	1	12	1	$v[6] \leftarrow 12$, $s[6] \leftarrow 1$
7	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
7	1	–	–	14	1	$p[1] + v[5] = 4 + 10 = 14 > m = 0$: $m \leftarrow 14$, $t \leftarrow 1$
7	2	–	–	14	1	$p[2] + v[4] = 5 + 8 = 13 \leq m = 14$: nessun aggiornamento

7	3	–	–	14	1	$p[3] + v[2] = 10 + 4 = 14 \leq m = 14$: nessun aggiornamento
7	4	–	–	14	1	$p[4] + v[1] = 11 + 0 = 11 \leq m = 14$: nessun aggiornamento
7	–	14	1	14	1	$v[7] \leftarrow 14$, $s[7] \leftarrow 1$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$v[k]$	0	0	4	5	8	10	12	14

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$s[k]$	0	0	1	2	1	3	1	1

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$s[k]$	0	0	1	2	1	3	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k=7$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	0	0	0	0	$k=7$
1	7	1	1	0	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7-2=5$
2	5	3	1	0	1	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 5-5=0$

Quindi il vettore

$$(1,0,1,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[7]=14.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Tutte le celle della riga $j=0$ sono inizializzate a 0.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w[1]$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	0	0	$k < w[1]$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$
1	2	4	1	$p[1] + v[1][0] = 4 + 0 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 4$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	4	1	$p[1] + v[1][1] = 4 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 4$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	8	1	$p[1] + v[1][2] = 4 + 4 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 8$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	8	1	$p[1] + v[1][3] = 4 + 4 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 8$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	12	1	$p[1] + v[1][4] = 4 + 8 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 12$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	12	1	$p[1] + v[1][5] = 4 + 8 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 12$, $s[1][7] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w[2]$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	0	0	$k < w[2]$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 0$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	4	0	$k < w[2]$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 4$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	5	1	$p[2] + v[2][0] = 5 + 0 > v[1][3] = 4$: $v[2][3] \leftarrow 5$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	8	0	$p[2] + v[2][1] = 5 + 0 \leq v[1][4] = 8$: $v[2][4] \leftarrow 8$, $s[2][4] \leftarrow 0$
2	5	9	1	$p[2] + v[2][2] = 5 + 4 > v[1][5] = 8$: $v[2][5] \leftarrow 9$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	12	0	$p[2] + v[2][3] = 5 + 5 \leq v[1][6] = 12$: $v[2][6] \leftarrow 12$, $s[2][6] \leftarrow 0$
2	7	13	1	$p[2] + v[2][4] = 5 + 8 > v[1][7] = 12$: $v[2][7] \leftarrow 13$, $s[2][7] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w[3]$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	0	0	$k < w[3]$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 0$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	4	0	$k < w[3]$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 4$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	5	0	$k < w[3]$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 5$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	8	0	$k < w[3]$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 8$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	10	1	$p[3] + v[3][0] = 10 + 0 > v[2][5] = 9$: $v[3][5] \leftarrow 10$, $s[3][5] \leftarrow 1$
3	6	12	0	$p[3] + v[3][1] = 10 + 0 \leq v[2][6] = 12$: $v[3][6] \leftarrow 12$, $s[3][6] \leftarrow 0$
3	7	14	1	$p[3] + v[3][2] = 10 + 4 > v[2][7] = 13$: $v[3][7] \leftarrow 14$, $s[3][7] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$k < w[4]$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	0	0	$k < w[4]$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 0$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	4	0	$k < w[4]$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 4$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	5	0	$k < w[4]$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 5$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	8	0	$k < w[4]$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 8$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	10	0	$k < w[4]$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 10$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	12	0	$p[4] + v[4][0] = 11 + 0 \leq v[3][6] = 12$: $v[4][6] \leftarrow 12$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	14	0	$p[4] + v[4][1] = 11 + 0 \leq v[3][7] = 14$: $v[4][7] \leftarrow 14$, $s[4][7] \leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	4	4	8	8	12	12
$j=2$	0	0	4	5	8	9	12	13
$j=3$	0	0	4	5	8	10	12	14
$j=4$	0	0	4	5	8	10	12	14

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	0	1	0	1
$j=3$	0	0	0	0	0	1	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	0	1	0	1
$j=3$	0	0	0	0	0	1	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=4$ e $k=7$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	$j=4$, $k=7$
1	4	7	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
2	3	7	1	0	0	1	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7-5=2$
3	3	2	0	0	0	1	0	$j \leftarrow 2$
4	2	2	0	0	0	1	0	$j \leftarrow 1$
5	1	2	1	1	0	1	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2-2=0$

Quindi il vettore

$$(1,0,1,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[4][7] = 14.$$

Esercizio 3.2 — I due algoritmi di PD per l'UKP (5 tipi di oggetto, $c = 8$)

Consideriamo la seguente istanza dell'UKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 8$, ogni tipo di oggetto è disponibile in infinite copie e i profitti e i pesi dei tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	2	5	7	8	10
w_j	1	2	3	4	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di k e j, le celle $v[k]$ e $s[k]$, il valore corrente di m, il valore corrente di t e l'operazione eseguita.

k	j	$v[k]$	$s[k]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
1	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
1	1	–	–	2	1	$p[1] + v[0] = 2 + 0 = 2 > m = 0$: $m \leftarrow 2$, $t \leftarrow 1$
1	2	–	–	2	1	$w[2] = 2 > k = 1$: nessun aggiornamento

1	3	–	–	2	1	$w[3] = 3 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	4	–	–	2	1	$w[4] = 4 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	5	–	–	2	1	$w[5] = 5 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	–	2	1	2	1	$v[1] \leftarrow 2$, $s[1] \leftarrow 1$
2	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
2	1	–	–	4	1	$p[1] + v[1] = 2 + 2 = 4 > m = 0$: $m \leftarrow 4$, $t \leftarrow 1$
2	2	–	–	5	2	$p[2] + v[0] = 5 + 0 = 5 > m = 4$: $m \leftarrow 5$, $t \leftarrow 2$
2	3	–	–	5	2	$w[3] = 3 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	4	–	–	5	2	$w[4] = 4 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	5	–	–	5	2	$w[5] = 5 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	–	5	2	5	2	$v[2] \leftarrow 5$, $s[2] \leftarrow 2$
3	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
3	1	–	–	7	1	$p[1] + v[2] = 2 + 5 = 7 > m = 0$: $m \leftarrow 7$, $t \leftarrow 1$
3	2	–	–	7	1	$p[2] + v[1] = 5 + 2 = 7 \leq m = 7$: nessun aggiornamento
3	3	–	–	7	1	$p[3] + v[0] = 7 + 0 = 7 \leq m = 7$: nessun aggiornamento
3	4	–	–	7	1	$w[4] = 4 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	5	–	–	7	1	$w[5] = 5 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	–	7	1	7	1	$v[3] \leftarrow 7$, $s[3] \leftarrow 1$
4	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
4	1	–	–	9	1	$p[1] + v[3] = 2 + 7 = 9 > m = 0$: $m \leftarrow 9$, $t \leftarrow 1$
4	2	–	–	10	2	$p[2] + v[2] = 5 + 5 = 10 > m = 9$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 2$
4	3	–	–	10	2	$p[3] + v[1] = 7 + 2 = 9 \leq m = 10$: nessun aggiornamento
4	4	–	–	10	2	$p[4] + v[0] = 8 + 0 = 8 \leq m = 10$: nessun aggiornamento
4	5	–	–	10	2	$w[5] = 5 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	–	10	2	10	2	$v[4] \leftarrow 10$, $s[4] \leftarrow 2$
5	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
5	1	–	–	12	1	$p[1] + v[4] = 2 + 10 = 12 > m = 0$: $m \leftarrow 12$, $t \leftarrow 1$
5	2	–	–	12	1	$p[2] + v[3] = 5 + 7 = 12 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
5	3	–	–	12	1	$p[3] + v[2] = 7 + 5 = 12 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
5	4	–	–	12	1	$p[4] + v[1] = 8 + 2 = 10 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
5	5	–	–	12	1	$p[5] + v[0] = 10 + 0 = 10 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
5	–	12	1	12	1	$v[5] \leftarrow 12$, $s[5] \leftarrow 1$
6	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
6	1	–	–	14	1	$p[1] + v[5] = 2 + 12 = 14 > m = 0$: $m \leftarrow 14$, $t \leftarrow 1$
6	2	–	–	15	2	$p[2] + v[4] = 5 + 10 = 15 > m = 14$: $m \leftarrow 15$, $t \leftarrow 2$
6	3	–	–	15	2	$p[3] + v[3] = 7 + 7 = 14 \leq m = 15$: nessun aggiornamento
6	4	–	–	15	2	$p[4] + v[2] = 8 + 5 = 13 \leq m = 15$: nessun aggiornamento

6	5	–	–	15	2	$p[5] + v[1] = 10 + 2 = 12 \leq m = 15$: nessun aggiornamento
6	–	15	2	15	2	$v[6] \leftarrow 15$, $s[6] \leftarrow 2$
7	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
7	1	–	–	17	1	$p[1] + v[6] = 2 + 15 = 17 > m = 0$: $m \leftarrow 17$, $t \leftarrow 1$
7	2	–	–	17	1	$p[2] + v[5] = 5 + 12 = 17 \leq m = 17$: nessun aggiornamento
7	3	–	–	17	1	$p[3] + v[4] = 7 + 10 = 17 \leq m = 17$: nessun aggiornamento
7	4	–	–	17	1	$p[4] + v[3] = 8 + 7 = 15 \leq m = 17$: nessun aggiornamento
7	5	–	–	17	1	$p[5] + v[2] = 10 + 5 = 15 \leq m = 17$: nessun aggiornamento
7	–	17	1	17	1	$v[7] \leftarrow 17$, $s[7] \leftarrow 1$
8	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
8	1	–	–	19	1	$p[1] + v[7] = 2 + 17 = 19 > m = 0$: $m \leftarrow 19$, $t \leftarrow 1$
8	2	–	–	20	2	$p[2] + v[6] = 5 + 15 = 20 > m = 19$: $m \leftarrow 20$, $t \leftarrow 2$
8	3	–	–	20	2	$p[3] + v[5] = 7 + 12 = 19 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	4	–	–	20	2	$p[4] + v[4] = 8 + 10 = 18 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	5	–	–	20	2	$p[5] + v[3] = 10 + 7 = 17 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	–	20	2	20	2	$v[8] \leftarrow 20$, $s[8] \leftarrow 2$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$v[k]$	0	2	5	7	10	12	15	17	20

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$s[k]$	0	1	2	1	2	1	2	1	2

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$s[k]$	0	1	2	1	2	1	2	1	2

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 8$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	0	0	0	0	0	$k = 8$
1	8	2	0	1	0	0	0	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 8 - 2 = 6$
2	6	2	0	2	0	0	0	$x[2] \leftarrow 2$, $k \leftarrow 6 - 2 = 4$
3	4	2	0	3	0	0	0	$x[2] \leftarrow 3$, $k \leftarrow 4 - 2 = 2$
4	2	2	0	4	0	0	0	$x[2] \leftarrow 4$, $k \leftarrow 2 - 2 = 0$

Quindi il vettore

$$(0, 4, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[8] = 20.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Tutte le celle della riga $j = 0$ sono inizializzate a 0.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w[1]$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	2	1	$p[1] + v[1][0] = 2 + 0 > v[0][1] = 0$: $v[1][1] \leftarrow 2$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	4	1	$p[1] + v[1][1] = 2 + 2 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 4$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	6	1	$p[1] + v[1][2] = 2 + 4 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 6$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	8	1	$p[1] + v[1][3] = 2 + 6 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 8$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	10	1	$p[1] + v[1][4] = 2 + 8 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 10$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	12	1	$p[1] + v[1][5] = 2 + 10 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 12$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	14	1	$p[1] + v[1][6] = 2 + 12 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 14$, $s[1][7] \leftarrow 1$
1	8	16	1	$p[1] + v[1][7] = 2 + 14 > v[0][8] = 0$: $v[1][8] \leftarrow 16$, $s[1][8] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w[2]$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	2	0	$k < w[2]$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 2$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	5	1	$p[2] + v[2][0] = 5 + 0 > v[1][2] = 4$: $v[2][2] \leftarrow 5$, $s[2][2] \leftarrow 1$
2	3	7	1	$p[2] + v[2][1] = 5 + 2 > v[1][3] = 6$: $v[2][3] \leftarrow 7$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	10	1	$p[2] + v[2][2] = 5 + 5 > v[1][4] = 8$: $v[2][4] \leftarrow 10$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	12	1	$p[2] + v[2][3] = 5 + 7 > v[1][5] = 10$: $v[2][5] \leftarrow 12$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	15	1	$p[2] + v[2][4] = 5 + 10 > v[1][6] = 12$: $v[2][6] \leftarrow 15$, $s[2][6] \leftarrow 1$
2	7	17	1	$p[2] + v[2][5] = 5 + 12 > v[1][7] = 14$: $v[2][7] \leftarrow 17$, $s[2][7] \leftarrow 1$
2	8	20	1	$p[2] + v[2][6] = 5 + 15 > v[1][8] = 16$: $v[2][8] \leftarrow 20$, $s[2][8] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w[3]$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	2	0	$k < w[3]$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 2$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	5	0	$k < w[3]$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 5$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	7	0	$p[3] + v[3][0] = 7 + 0 \leq v[2][3] = 7$: $v[3][3] \leftarrow 7$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	10	0	$p[3] + v[3][1] = 7 + 2 \leq v[2][4] = 10$: $v[3][4] \leftarrow 10$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	12	0	$p[3] + v[3][2] = 7 + 5 \leq v[2][5] = 12$: $v[3][5] \leftarrow 12$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	15	0	$p[3] + v[3][3] = 7 + 7 \leq v[2][6] = 15$: $v[3][6] \leftarrow 15$, $s[3][6] \leftarrow 0$
3	7	17	0	$p[3] + v[3][4] = 7 + 10 \leq v[2][7] = 17$: $v[3][7] \leftarrow 17$, $s[3][7] \leftarrow 0$
3	8	20	0	$p[3] + v[3][5] = 7 + 12 \leq v[2][8] = 20$: $v[3][8] \leftarrow 20$, $s[3][8] \leftarrow 0$
4	0	0	0	$k < w[4]$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	2	0	$k < w[4]$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 2$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	5	0	$k < w[4]$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 5$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	7	0	$k < w[4]$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 7$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	10	0	$p[4] + v[4][0] = 8 + 0 \leq v[3][4] = 10$: $v[4][4] \leftarrow 10$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	12	0	$p[4] + v[4][1] = 8 + 2 \leq v[3][5] = 12$: $v[4][5] \leftarrow 12$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	15	0	$p[4] + v[4][2] = 8 + 5 \leq v[3][6] = 15$: $v[4][6] \leftarrow 15$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	17	0	$p[4] + v[4][3] = 8 + 7 \leq v[3][7] = 17$: $v[4][7] \leftarrow 17$, $s[4][7] \leftarrow 0$
4	8	20	0	$p[4] + v[4][4] = 8 + 10 \leq v[3][8] = 20$: $v[4][8] \leftarrow 20$, $s[4][8] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$k < w[5]$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	2	0	$k < w[5]$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 2$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	5	0	$k < w[5]$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 5$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	7	0	$k < w[5]$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 7$, $s[5][3] \leftarrow 0$

5	4	10	0	$k < w[5]$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 10$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	12	0	$p[5] + v[5][0] = 10 + 0 \leq v[4][5] = 12$: $v[5][5] \leftarrow 12$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	15	0	$p[5] + v[5][1] = 10 + 2 \leq v[4][6] = 15$: $v[5][6] \leftarrow 15$, $s[5][6] \leftarrow 0$
5	7	17	0	$p[5] + v[5][2] = 10 + 5 \leq v[4][7] = 17$: $v[5][7] \leftarrow 17$, $s[5][7] \leftarrow 0$
5	8	20	0	$p[5] + v[5][3] = 10 + 7 \leq v[4][8] = 20$: $v[5][8] \leftarrow 20$, $s[5][8] \leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$j=2$	0	2	5	7	10	12	15	17	20
$j=3$	0	2	5	7	10	12	15	17	20
$j=4$	0	2	5	7	10	12	15	17	20
$j=5$	0	2	5	7	10	12	15	17	20

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=5$ e $k=8$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	0	$j=5, k=8$
1	5	8	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
2	4	8	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
3	3	8	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 2$
4	2	8	1	0	1	0	0	0	$x[2] \leftarrow 1, k \leftarrow 8-2=6$
5	2	6	1	0	2	0	0	0	$x[2] \leftarrow 2, k \leftarrow 6-2=4$
6	2	4	1	0	3	0	0	0	$x[2] \leftarrow 3, k \leftarrow 4-2=2$
7	2	2	1	0	4	0	0	0	$x[2] \leftarrow 4, k \leftarrow 2-2=0$

Quindi il vettore

$$(0, 4, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][8] = 20.$$

Esercizio 3.3 — I due algoritmi di PD per l'UKP (4 tipi di oggetto, $c = 10$)

Consideriamo la seguente istanza dell'UKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 10$, ogni tipo di oggetto è disponibile in infinite copie e i profitti e i pesi dei tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	6	10	12	13
w_j	3	4	6	7

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di k e j, le celle $v[k]$ e $s[k]$, il valore corrente di m, il valore corrente di t e l'operazione eseguita.

k	j	$v[k]$	$s[k]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
1	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
1	1	–	–	0	0	$w[1] = 3 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	2	–	–	0	0	$w[2] = 4 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	3	–	–	0	0	$w[3] = 6 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	4	–	–	0	0	$w[4] = 7 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	–	0	0	0	0	$v[1] \leftarrow 0$, $s[1] \leftarrow 0$
2	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
2	1	–	–	0	0	$w[1] = 3 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	2	–	–	0	0	$w[2] = 4 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	3	–	–	0	0	$w[3] = 6 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	4	–	–	0	0	$w[4] = 7 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	–	0	0	0	0	$v[2] \leftarrow 0$, $s[2] \leftarrow 0$
3	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
3	1	–	–	6	1	$p[1] + v[0] = 6 + 0 = 6 > m = 0$: $m \leftarrow 6$, $t \leftarrow 1$
3	2	–	–	6	1	$w[2] = 4 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	3	–	–	6	1	$w[3] = 6 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	4	–	–	6	1	$w[4] = 7 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	–	6	1	6	1	$v[3] \leftarrow 6$, $s[3] \leftarrow 1$
4	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
4	1	–	–	6	1	$p[1] + v[1] = 6 + 0 = 6 > m = 0$: $m \leftarrow 6$, $t \leftarrow 1$
4	2	–	–	10	2	$p[2] + v[0] = 10 + 0 = 10 > m = 6$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 2$
4	3	–	–	10	2	$w[3] = 6 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	4	–	–	10	2	$w[4] = 7 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	–	10	2	10	2	$v[4] \leftarrow 10$, $s[4] \leftarrow 2$
5	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
5	1	–	–	6	1	$p[1] + v[2] = 6 + 0 = 6 > m = 0$: $m \leftarrow 6$, $t \leftarrow 1$
5	2	–	–	10	2	$p[2] + v[1] = 10 + 0 = 10 > m = 6$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 2$
5	3	–	–	10	2	$w[3] = 6 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	4	–	–	10	2	$w[4] = 7 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	–	10	2	10	2	$v[5] \leftarrow 10$, $s[5] \leftarrow 2$
6	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
6	1	–	–	12	1	$p[1] + v[3] = 6 + 6 = 12 > m = 0$: $m \leftarrow 12$, $t \leftarrow 1$
6	2	–	–	12	1	$p[2] + v[2] = 10 + 0 = 10 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
6	3	–	–	12	1	$p[3] + v[0] = 12 + 0 = 12 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
6	4	–	–	12	1	$w[4] = 7 > k = 6$: nessun aggiornamento
6	–	12	1	12	1	$v[6] \leftarrow 12$, $s[6] \leftarrow 1$
7	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
7	1	–	–	16	1	$p[1] + v[4] = 6 + 10 = 16 > m = 0$: $m \leftarrow 16$, $t \leftarrow 1$
7	2	–	–	16	1	$p[2] + v[3] = 10 + 6 = 16 \leq m = 16$: nessun aggiornamento
7	3	–	–	16	1	$p[3] + v[1] = 12 + 0 = 12 \leq m = 16$: nessun aggiornamento

7	4	–	–	16	1	$p[4] + v[0] = 13 + 0 = 13 \leq m = 16$: nessun aggiornamento
7	–	16	1	16	1	$v[7] \leftarrow 16$, $s[7] \leftarrow 1$
8	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
8	1	–	–	16	1	$p[1] + v[5] = 6 + 10 = 16 > m = 0$: $m \leftarrow 16$, $t \leftarrow 1$
8	2	–	–	20	2	$p[2] + v[4] = 10 + 10 = 20 > m = 16$: $m \leftarrow 20$, $t \leftarrow 2$
8	3	–	–	20	2	$p[3] + v[2] = 12 + 0 = 12 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	4	–	–	20	2	$p[4] + v[1] = 13 + 0 = 13 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	–	20	2	20	2	$v[8] \leftarrow 20$, $s[8] \leftarrow 2$
9	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
9	1	–	–	18	1	$p[1] + v[6] = 6 + 12 = 18 > m = 0$: $m \leftarrow 18$, $t \leftarrow 1$
9	2	–	–	20	2	$p[2] + v[5] = 10 + 10 = 20 > m = 18$: $m \leftarrow 20$, $t \leftarrow 2$
9	3	–	–	20	2	$p[3] + v[3] = 12 + 6 = 18 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
9	4	–	–	20	2	$p[4] + v[2] = 13 + 0 = 13 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
9	–	20	2	20	2	$v[9] \leftarrow 20$, $s[9] \leftarrow 2$
10	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
10	1	–	–	22	1	$p[1] + v[7] = 6 + 16 = 22 > m = 0$: $m \leftarrow 22$, $t \leftarrow 1$
10	2	–	–	22	1	$p[2] + v[6] = 10 + 12 = 22 \leq m = 22$: nessun aggiornamento
10	3	–	–	22	1	$p[3] + v[4] = 12 + 10 = 22 \leq m = 22$: nessun aggiornamento
10	4	–	–	22	1	$p[4] + v[3] = 13 + 6 = 19 \leq m = 22$: nessun aggiornamento
10	–	22	1	22	1	$v[10] \leftarrow 22$, $s[10] \leftarrow 1$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$v[k]$	0	0	0	6	10	10	12	16	20	20	22

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$s[k]$	0	0	0	1	2	2	1	1	2	2	1

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$s[k]$	0	0	0	1	2	2	1	1	2	2	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 10$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	0	0	0	0	$k = 10$
1	10	1	1	0	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 10 - 3 = 7$
2	7	1	2	0	0	0	$x[1] \leftarrow 2$, $k \leftarrow 7 - 3 = 4$
3	4	2	2	1	0	0	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 4 - 4 = 0$

Quindi il vettore

$$(2, 1, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[10] = 22.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Tutte le celle della riga $j = 0$ sono inizializzate a 0.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
0	9	0	0	$v[0][9] \leftarrow 0$, $s[0][9] \leftarrow 0$
0	10	0	0	$v[0][10] \leftarrow 0$, $s[0][10] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w[1]$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	0	0	$k < w[1]$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$
1	2	0	0	$k < w[1]$: $v[1][2] \leftarrow v[0][2] = 0$, $s[1][2] \leftarrow 0$
1	3	6	1	$p[1] + v[1][0] = 6 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 6$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	6	1	$p[1] + v[1][1] = 6 + 0 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 6$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	6	1	$p[1] + v[1][2] = 6 + 0 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 6$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	12	1	$p[1] + v[1][3] = 6 + 6 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 12$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	12	1	$p[1] + v[1][4] = 6 + 6 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 12$, $s[1][7] \leftarrow 1$
1	8	12	1	$p[1] + v[1][5] = 6 + 6 > v[0][8] = 0$: $v[1][8] \leftarrow 12$, $s[1][8] \leftarrow 1$
1	9	18	1	$p[1] + v[1][6] = 6 + 12 > v[0][9] = 0$: $v[1][9] \leftarrow 18$, $s[1][9] \leftarrow 1$
1	10	18	1	$p[1] + v[1][7] = 6 + 12 > v[0][10] = 0$: $v[1][10] \leftarrow 18$, $s[1][10] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w[2]$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	0	0	$k < w[2]$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 0$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	0	0	$k < w[2]$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 0$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	6	0	$k < w[2]$: $v[2][3] \leftarrow v[1][3] = 6$, $s[2][3] \leftarrow 0$
2	4	10	1	$p[2] + v[2][0] = 10 + 0 > v[1][4] = 6$: $v[2][4] \leftarrow 10$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	10	1	$p[2] + v[2][1] = 10 + 0 > v[1][5] = 6$: $v[2][5] \leftarrow 10$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	12	0	$p[2] + v[2][2] = 10 + 0 \leq v[1][6] = 12$: $v[2][6] \leftarrow 12$, $s[2][6] \leftarrow 0$
2	7	16	1	$p[2] + v[2][3] = 10 + 6 > v[1][7] = 12$: $v[2][7] \leftarrow 16$, $s[2][7] \leftarrow 1$
2	8	20	1	$p[2] + v[2][4] = 10 + 10 > v[1][8] = 12$: $v[2][8] \leftarrow 20$, $s[2][8] \leftarrow 1$
2	9	20	1	$p[2] + v[2][5] = 10 + 10 > v[1][9] = 18$: $v[2][9] \leftarrow 20$, $s[2][9] \leftarrow 1$
2	10	22	1	$p[2] + v[2][6] = 10 + 12 > v[1][10] = 18$: $v[2][10] \leftarrow 22$, $s[2][10] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w[3]$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	0	0	$k < w[3]$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 0$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	0	0	$k < w[3]$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 0$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	6	0	$k < w[3]$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 6$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	10	0	$k < w[3]$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 10$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	10	0	$k < w[3]$: $v[3][5] \leftarrow v[2][5] = 10$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	12	0	$p[3] + v[3][0] = 12 + 0 \leq v[2][6] = 12$: $v[3][6] \leftarrow 12$, $s[3][6] \leftarrow 0$
3	7	16	0	$p[3] + v[3][1] = 12 + 0 \leq v[2][7] = 16$: $v[3][7] \leftarrow 16$, $s[3][7] \leftarrow 0$
3	8	20	0	$p[3] + v[3][2] = 12 + 0 \leq v[2][8] = 20$: $v[3][8] \leftarrow 20$, $s[3][8] \leftarrow 0$
3	9	20	0	$p[3] + v[3][3] = 12 + 6 \leq v[2][9] = 20$: $v[3][9] \leftarrow 20$, $s[3][9] \leftarrow 0$
3	10	22	0	$p[3] + v[3][4] = 12 + 10 \leq v[2][10] = 22$: $v[3][10] \leftarrow 22$, $s[3][10] \leftarrow 0$
4	0	0	0	$k < w[4]$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	0	0	$k < w[4]$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 0$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	0	0	$k < w[4]$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 0$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	6	0	$k < w[4]$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 6$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	10	0	$k < w[4]$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 10$, $s[4][4] \leftarrow 0$

4	5	10	0	$k < w[4]$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 10$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	12	0	$k < w[4]$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 12$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	16	0	$p[4] + v[4][0] = 13 + 0 \leq v[3][7] = 16$: $v[4][7] \leftarrow 16$, $s[4][7] \leftarrow 0$
4	8	20	0	$p[4] + v[4][1] = 13 + 0 \leq v[3][8] = 20$: $v[4][8] \leftarrow 20$, $s[4][8] \leftarrow 0$
4	9	20	0	$p[4] + v[4][2] = 13 + 0 \leq v[3][9] = 20$: $v[4][9] \leftarrow 20$, $s[4][9] \leftarrow 0$
4	10	22	0	$p[4] + v[4][3] = 13 + 6 \leq v[3][10] = 22$: $v[4][10] \leftarrow 22$, $s[4][10] \leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	6	6	6	12	12	12	18	18
$j=2$	0	0	0	6	10	10	12	16	20	20	22
$j=3$	0	0	0	6	10	10	12	16	20	20	22
$j=4$	0	0	0	6	10	10	12	16	20	20	22

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=4$ e $k=10$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	$j=4$, $k=10$
1	4	10	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
2	3	10	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 2$
3	2	10	1	0	1	0	0	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 10-4=6$
4	2	6	0	0	1	0	0	$j \leftarrow 1$
5	1	6	1	1	1	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 6-3=3$
6	1	3	1	2	1	0	0	$x[1] \leftarrow 2$, $k \leftarrow 3-3=0$

Quindi il vettore

$$(2, 1, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[4][10] = 22.$$

La soluzione ottima non è unica: anche $(0, 1, 1, 0)$, con peso totale $4+6 = 10$ e profitto totale $10+12 = 22$, è ottima. Entrambi gli algoritmi di PD trovano $(2, 1, 0, 0)$, perché aggiornano il valore memorizzato solo quando migliora strettamente.

Esercizio 3.4 — I due algoritmi di PD per l'UKP (4 tipi di oggetto, $c = 9$)

Consideriamo la seguente istanza dell'UKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 9$, ogni tipo di oggetto è disponibile in infinite copie e i profitti e i pesi dei tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	5	6	14	18
w_j	2	3	6	7

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di k e j, le celle $v[k]$ e $s[k]$, il valore corrente di m, il valore corrente di t e l'operazione eseguita.

k	j	$v[k]$	$s[k]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
1	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
1	1	–	–	0	0	$w[1] = 2 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	2	–	–	0	0	$w[2] = 3 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	3	–	–	0	0	$w[3] = 6 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	4	–	–	0	0	$w[4] = 7 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	–	0	0	0	0	$v[1] \leftarrow 0$, $s[1] \leftarrow 0$
2	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
2	1	–	–	5	1	$p[1] + v[0] = 5 + 0 = 5 > m = 0$: $m \leftarrow 5$, $t \leftarrow 1$
2	2	–	–	5	1	$w[2] = 3 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	3	–	–	5	1	$w[3] = 6 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	4	–	–	5	1	$w[4] = 7 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	–	5	1	5	1	$v[2] \leftarrow 5$, $s[2] \leftarrow 1$
3	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
3	1	–	–	5	1	$p[1] + v[1] = 5 + 0 = 5 > m = 0$: $m \leftarrow 5$, $t \leftarrow 1$
3	2	–	–	6	2	$p[2] + v[0] = 6 + 0 = 6 > m = 5$: $m \leftarrow 6$, $t \leftarrow 2$
3	3	–	–	6	2	$w[3] = 6 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	4	–	–	6	2	$w[4] = 7 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	–	6	2	6	2	$v[3] \leftarrow 6$, $s[3] \leftarrow 2$
4	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
4	1	–	–	10	1	$p[1] + v[2] = 5 + 5 = 10 > m = 0$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 1$
4	2	–	–	10	1	$p[2] + v[1] = 6 + 0 = 6 \leq m = 10$: nessun aggiornamento
4	3	–	–	10	1	$w[3] = 6 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	4	–	–	10	1	$w[4] = 7 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	–	10	1	10	1	$v[4] \leftarrow 10$, $s[4] \leftarrow 1$
5	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
5	1	–	–	11	1	$p[1] + v[3] = 5 + 6 = 11 > m = 0$: $m \leftarrow 11$, $t \leftarrow 1$
5	2	–	–	11	1	$p[2] + v[2] = 6 + 5 = 11 \leq m = 11$: nessun aggiornamento
5	3	–	–	11	1	$w[3] = 6 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	4	–	–	11	1	$w[4] = 7 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	–	11	1	11	1	$v[5] \leftarrow 11$, $s[5] \leftarrow 1$
6	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
6	1	–	–	15	1	$p[1] + v[4] = 5 + 10 = 15 > m = 0$: $m \leftarrow 15$, $t \leftarrow 1$
6	2	–	–	15	1	$p[2] + v[3] = 6 + 6 = 12 \leq m = 15$: nessun aggiornamento
6	3	–	–	15	1	$p[3] + v[0] = 14 + 0 = 14 \leq m = 15$: nessun aggiornamento
6	4	–	–	15	1	$w[4] = 7 > k = 6$: nessun aggiornamento
6	–	15	1	15	1	$v[6] \leftarrow 15$, $s[6] \leftarrow 1$
7	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
7	1	–	–	16	1	$p[1] + v[5] = 5 + 11 = 16 > m = 0$: $m \leftarrow 16$, $t \leftarrow 1$
7	2	–	–	16	1	$p[2] + v[4] = 6 + 10 = 16 \leq m = 16$: nessun aggiornamento
7	3	–	–	16	1	$p[3] + v[1] = 14 + 0 = 14 \leq m = 16$: nessun aggiornamento

7	4	–	–	18	4	$p[4] + v[0] = 18 + 0 = 18 > m = 16$: $m \leftarrow 18$, $t \leftarrow 4$
7	–	18	4	18	4	$v[7] \leftarrow 18$, $s[7] \leftarrow 4$
8	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
8	1	–	–	20	1	$p[1] + v[6] = 5 + 15 = 20 > m = 0$: $m \leftarrow 20$, $t \leftarrow 1$
8	2	–	–	20	1	$p[2] + v[5] = 6 + 11 = 17 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	3	–	–	20	1	$p[3] + v[2] = 14 + 5 = 19 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	4	–	–	20	1	$p[4] + v[1] = 18 + 0 = 18 \leq m = 20$: nessun aggiornamento
8	–	20	1	20	1	$v[8] \leftarrow 20$, $s[8] \leftarrow 1$
9	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
9	1	–	–	23	1	$p[1] + v[7] = 5 + 18 = 23 > m = 0$: $m \leftarrow 23$, $t \leftarrow 1$
9	2	–	–	23	1	$p[2] + v[6] = 6 + 15 = 21 \leq m = 23$: nessun aggiornamento
9	3	–	–	23	1	$p[3] + v[3] = 14 + 6 = 20 \leq m = 23$: nessun aggiornamento
9	4	–	–	23	1	$p[4] + v[2] = 18 + 5 = 23 \leq m = 23$: nessun aggiornamento
9	–	23	1	23	1	$v[9] \leftarrow 23$, $s[9] \leftarrow 1$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$v[k]$	0	0	5	6	10	11	15	18	20	23

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$s[k]$	0	0	1	2	1	1	1	4	1	1

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$s[k]$	0	0	1	2	1	1	1	4	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 9$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	0	0	0	0	$k = 9$
1	9	1	1	0	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 9 - 2 = 7$
2	7	4	1	0	0	1	$x[4] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7 - 7 = 0$

Quindi il vettore

$$(1, 0, 0, 1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[9] = 23.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Tutte le celle della riga $j = 0$ sono inizializzate a 0.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
0	9	0	0	$v[0][9] \leftarrow 0$, $s[0][9] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w[1]$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	0	0	$k < w[1]$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$
1	2	5	1	$p[1] + v[1][0] = 5 + 0 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 5$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	5	1	$p[1] + v[1][1] = 5 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 5$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	10	1	$p[1] + v[1][2] = 5 + 5 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 10$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	10	1	$p[1] + v[1][3] = 5 + 5 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 10$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	15	1	$p[1] + v[1][4] = 5 + 10 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 15$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	15	1	$p[1] + v[1][5] = 5 + 10 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 15$, $s[1][7] \leftarrow 1$
1	8	20	1	$p[1] + v[1][6] = 5 + 15 > v[0][8] = 0$: $v[1][8] \leftarrow 20$, $s[1][8] \leftarrow 1$
1	9	20	1	$p[1] + v[1][7] = 5 + 15 > v[0][9] = 0$: $v[1][9] \leftarrow 20$, $s[1][9] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w[2]$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	0	0	$k < w[2]$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 0$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	5	0	$k < w[2]$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 5$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	6	1	$p[2] + v[2][0] = 6 + 0 > v[1][3] = 5$: $v[2][3] \leftarrow 6$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	10	0	$p[2] + v[2][1] = 6 + 0 \leq v[1][4] = 10$: $v[2][4] \leftarrow 10$, $s[2][4] \leftarrow 0$
2	5	11	1	$p[2] + v[2][2] = 6 + 5 > v[1][5] = 10$: $v[2][5] \leftarrow 11$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	15	0	$p[2] + v[2][3] = 6 + 6 \leq v[1][6] = 15$: $v[2][6] \leftarrow 15$, $s[2][6] \leftarrow 0$
2	7	16	1	$p[2] + v[2][4] = 6 + 10 > v[1][7] = 15$: $v[2][7] \leftarrow 16$, $s[2][7] \leftarrow 1$
2	8	20	0	$p[2] + v[2][5] = 6 + 11 \leq v[1][8] = 20$: $v[2][8] \leftarrow 20$, $s[2][8] \leftarrow 0$
2	9	21	1	$p[2] + v[2][6] = 6 + 15 > v[1][9] = 20$: $v[2][9] \leftarrow 21$, $s[2][9] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w[3]$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	0	0	$k < w[3]$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 0$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	5	0	$k < w[3]$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 5$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	6	0	$k < w[3]$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 6$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	10	0	$k < w[3]$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 10$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	11	0	$k < w[3]$: $v[3][5] \leftarrow v[2][5] = 11$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	15	0	$p[3] + v[3][0] = 14 + 0 \leq v[2][6] = 15$: $v[3][6] \leftarrow 15$, $s[3][6] \leftarrow 0$
3	7	16	0	$p[3] + v[3][1] = 14 + 0 \leq v[2][7] = 16$: $v[3][7] \leftarrow 16$, $s[3][7] \leftarrow 0$
3	8	20	0	$p[3] + v[3][2] = 14 + 5 \leq v[2][8] = 20$: $v[3][8] \leftarrow 20$, $s[3][8] \leftarrow 0$
3	9	21	0	$p[3] + v[3][3] = 14 + 6 \leq v[2][9] = 21$: $v[3][9] \leftarrow 21$, $s[3][9] \leftarrow 0$
4	0	0	0	$k < w[4]$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	0	0	$k < w[4]$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 0$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	5	0	$k < w[4]$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 5$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	6	0	$k < w[4]$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 6$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	10	0	$k < w[4]$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 10$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	11	0	$k < w[4]$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 11$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	15	0	$k < w[4]$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 15$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	18	1	$p[4] + v[4][0] = 18 + 0 > v[3][7] = 16$: $v[4][7] \leftarrow 18$, $s[4][7] \leftarrow 1$
4	8	20	0	$p[4] + v[4][1] = 18 + 0 \leq v[3][8] = 20$: $v[4][8] \leftarrow 20$, $s[4][8] \leftarrow 0$

4	9	23	1	$p[4] + v[4][2] = 18 + 5 > v[3][9] = 21$: $v[4][9] \leftarrow 23$, $s[4][9] \leftarrow 1$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	5	5	10	10	15	15	20	20
$j=2$	0	0	5	6	10	11	15	16	20	21
$j=3$	0	0	5	6	10	11	15	16	20	21
$j=4$	0	0	5	6	10	11	15	18	20	23

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

4. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=4$ e $k=9$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	$j=4,\ k=9$
1	4	9	1	0	0	0	1	$x[4]\leftarrow 1,\ k\leftarrow 9-7=2$
2	4	2	0	0	0	0	1	$j\leftarrow 3$
3	3	2	0	0	0	0	1	$j\leftarrow 2$
4	2	2	0	0	0	0	1	$j\leftarrow 1$
5	1	2	1	1	0	0	1	$x[1]\leftarrow 1,\ k\leftarrow 2-2=0$

Quindi il vettore

$$(1,0,0,1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[4][9]=23.$$

Esercizio 3.5 — I due algoritmi di PD per l'UKP (5 tipi di oggetto, $c = 11$)

Consideriamo la seguente istanza dell'UKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 11$, ogni tipo di oggetto è disponibile in infinite copie e i profitti e i pesi dei tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	3	9	10	16	17
w_j	2	5	6	9	10

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di k e j, le celle $v[k]$ e $s[k]$, il valore corrente di m, il valore corrente di t e l'operazione eseguita.

k	j	$v[k]$	$s[k]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
1	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
1	1	–	–	0	0	$w[1] = 2 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	2	–	–	0	0	$w[2] = 5 > k = 1$: nessun aggiornamento

1	3	–	–	0	0	$w[3] = 6 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	4	–	–	0	0	$w[4] = 9 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	5	–	–	0	0	$w[5] = 10 > k = 1$: nessun aggiornamento
1	–	0	0	0	0	$v[1] \leftarrow 0$, $s[1] \leftarrow 0$
2	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
2	1	–	–	3	1	$p[1] + v[0] = 3 + 0 = 3 > m = 0$: $m \leftarrow 3$, $t \leftarrow 1$
2	2	–	–	3	1	$w[2] = 5 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	3	–	–	3	1	$w[3] = 6 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	4	–	–	3	1	$w[4] = 9 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	5	–	–	3	1	$w[5] = 10 > k = 2$: nessun aggiornamento
2	–	3	1	3	1	$v[2] \leftarrow 3$, $s[2] \leftarrow 1$
3	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
3	1	–	–	3	1	$p[1] + v[1] = 3 + 0 = 3 > m = 0$: $m \leftarrow 3$, $t \leftarrow 1$
3	2	–	–	3	1	$w[2] = 5 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	3	–	–	3	1	$w[3] = 6 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	4	–	–	3	1	$w[4] = 9 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	5	–	–	3	1	$w[5] = 10 > k = 3$: nessun aggiornamento
3	–	3	1	3	1	$v[3] \leftarrow 3$, $s[3] \leftarrow 1$
4	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
4	1	–	–	6	1	$p[1] + v[2] = 3 + 3 = 6 > m = 0$: $m \leftarrow 6$, $t \leftarrow 1$
4	2	–	–	6	1	$w[2] = 5 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	3	–	–	6	1	$w[3] = 6 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	4	–	–	6	1	$w[4] = 9 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	5	–	–	6	1	$w[5] = 10 > k = 4$: nessun aggiornamento
4	–	6	1	6	1	$v[4] \leftarrow 6$, $s[4] \leftarrow 1$
5	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
5	1	–	–	6	1	$p[1] + v[3] = 3 + 3 = 6 > m = 0$: $m \leftarrow 6$, $t \leftarrow 1$
5	2	–	–	9	2	$p[2] + v[0] = 9 + 0 = 9 > m = 6$: $m \leftarrow 9$, $t \leftarrow 2$
5	3	–	–	9	2	$w[3] = 6 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	4	–	–	9	2	$w[4] = 9 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	5	–	–	9	2	$w[5] = 10 > k = 5$: nessun aggiornamento
5	–	9	2	9	2	$v[5] \leftarrow 9$, $s[5] \leftarrow 2$
6	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
6	1	–	–	9	1	$p[1] + v[4] = 3 + 6 = 9 > m = 0$: $m \leftarrow 9$, $t \leftarrow 1$
6	2	–	–	9	1	$p[2] + v[1] = 9 + 0 = 9 \leq m = 9$: nessun aggiornamento
6	3	–	–	10	3	$p[3] + v[0] = 10 + 0 = 10 > m = 9$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 3$
6	4	–	–	10	3	$w[4] = 9 > k = 6$: nessun aggiornamento
6	5	–	–	10	3	$w[5] = 10 > k = 6$: nessun aggiornamento
6	–	10	3	10	3	$v[6] \leftarrow 10$, $s[6] \leftarrow 3$
7	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
7	1	–	–	12	1	$p[1] + v[5] = 3 + 9 = 12 > m = 0$: $m \leftarrow 12$, $t \leftarrow 1$
7	2	–	–	12	1	$p[2] + v[2] = 9 + 3 = 12 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
7	3	–	–	12	1	$p[3] + v[1] = 10 + 0 = 10 \leq m = 12$: nessun aggiornamento
7	4	–	–	12	1	$w[4] = 9 > k = 7$: nessun aggiornamento
7	5	–	–	12	1	$w[5] = 10 > k = 7$: nessun aggiornamento
7	–	12	1	12	1	$v[7] \leftarrow 12$, $s[7] \leftarrow 1$
8	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$

8	1	–	–	13	1	$p[1] + v[6] = 3 + 10 = 13 > m = 0$: $m \leftarrow 13$, $t \leftarrow 1$
8	2	–	–	13	1	$p[2] + v[3] = 9 + 3 = 12 \leq m = 13$: nessun aggiornamento
8	3	–	–	13	1	$p[3] + v[2] = 10 + 3 = 13 \leq m = 13$: nessun aggiornamento
8	4	–	–	13	1	$w[4] = 9 > k = 8$: nessun aggiornamento
8	5	–	–	13	1	$w[5] = 10 > k = 8$: nessun aggiornamento
8	–	13	1	13	1	$v[8] \leftarrow 13$, $s[8] \leftarrow 1$
9	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
9	1	–	–	15	1	$p[1] + v[7] = 3 + 12 = 15 > m = 0$: $m \leftarrow 15$, $t \leftarrow 1$
9	2	–	–	15	1	$p[2] + v[4] = 9 + 6 = 15 \leq m = 15$: nessun aggiornamento
9	3	–	–	15	1	$p[3] + v[3] = 10 + 3 = 13 \leq m = 15$: nessun aggiornamento
9	4	–	–	16	4	$p[4] + v[0] = 16 + 0 = 16 > m = 15$: $m \leftarrow 16$, $t \leftarrow 4$
9	5	–	–	16	4	$w[5] = 10 > k = 9$: nessun aggiornamento
9	–	16	4	16	4	$v[9] \leftarrow 16$, $s[9] \leftarrow 4$
10	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
10	1	–	–	16	1	$p[1] + v[8] = 3 + 13 = 16 > m = 0$: $m \leftarrow 16$, $t \leftarrow 1$
10	2	–	–	18	2	$p[2] + v[5] = 9 + 9 = 18 > m = 16$: $m \leftarrow 18$, $t \leftarrow 2$
10	3	–	–	18	2	$p[3] + v[4] = 10 + 6 = 16 \leq m = 18$: nessun aggiornamento
10	4	–	–	18	2	$p[4] + v[1] = 16 + 0 = 16 \leq m = 18$: nessun aggiornamento
10	5	–	–	18	2	$p[5] + v[0] = 17 + 0 = 17 \leq m = 18$: nessun aggiornamento
10	–	18	2	18	2	$v[10] \leftarrow 18$, $s[10] \leftarrow 2$
11	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
11	1	–	–	19	1	$p[1] + v[9] = 3 + 16 = 19 > m = 0$: $m \leftarrow 19$, $t \leftarrow 1$
11	2	–	–	19	1	$p[2] + v[6] = 9 + 10 = 19 \leq m = 19$: nessun aggiornamento
11	3	–	–	19	1	$p[3] + v[5] = 10 + 9 = 19 \leq m = 19$: nessun aggiornamento
11	4	–	–	19	1	$p[4] + v[2] = 16 + 3 = 19 \leq m = 19$: nessun aggiornamento
11	5	–	–	19	1	$p[5] + v[1] = 17 + 0 = 17 \leq m = 19$: nessun aggiornamento
11	–	19	1	19	1	$v[11] \leftarrow 19$, $s[11] \leftarrow 1$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$v[k]$	0	0	3	3	6	9	10	12	13	16	18	19

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione del primo algoritmo di PD:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$s[k]$	0	0	1	1	1	2	3	1	1	4	2	1

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$s[k]$	0	0	1	1	1	2	3	1	1	4	2	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 11$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	0	0	0	0	0	$k = 11$
1	11	1	1	0	0	0	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 11 - 2 = 9$
2	9	4	1	0	0	1	0	$x[4] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 9 - 9 = 0$

Quindi il vettore

$$(1, 0, 0, 1, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[11] = 19.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita. Tutte le celle della riga $j = 0$ sono inizializzate a 0.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
0	9	0	0	$v[0][9] \leftarrow 0$, $s[0][9] \leftarrow 0$
0	10	0	0	$v[0][10] \leftarrow 0$, $s[0][10] \leftarrow 0$
0	11	0	0	$v[0][11] \leftarrow 0$, $s[0][11] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$k < w[1]$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	0	0	$k < w[1]$: $v[1][1] \leftarrow v[0][1] = 0$, $s[1][1] \leftarrow 0$
1	2	3	1	$p[1] + v[1][0] = 3 + 0 > v[0][2] = 0$: $v[1][2] \leftarrow 3$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	3	1	$p[1] + v[1][1] = 3 + 0 > v[0][3] = 0$: $v[1][3] \leftarrow 3$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	6	1	$p[1] + v[1][2] = 3 + 3 > v[0][4] = 0$: $v[1][4] \leftarrow 6$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	6	1	$p[1] + v[1][3] = 3 + 3 > v[0][5] = 0$: $v[1][5] \leftarrow 6$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	9	1	$p[1] + v[1][4] = 3 + 6 > v[0][6] = 0$: $v[1][6] \leftarrow 9$, $s[1][6] \leftarrow 1$
1	7	9	1	$p[1] + v[1][5] = 3 + 6 > v[0][7] = 0$: $v[1][7] \leftarrow 9$, $s[1][7] \leftarrow 1$
1	8	12	1	$p[1] + v[1][6] = 3 + 9 > v[0][8] = 0$: $v[1][8] \leftarrow 12$, $s[1][8] \leftarrow 1$
1	9	12	1	$p[1] + v[1][7] = 3 + 9 > v[0][9] = 0$: $v[1][9] \leftarrow 12$, $s[1][9] \leftarrow 1$
1	10	15	1	$p[1] + v[1][8] = 3 + 12 > v[0][10] = 0$: $v[1][10] \leftarrow 15$, $s[1][10] \leftarrow 1$
1	11	15	1	$p[1] + v[1][9] = 3 + 12 > v[0][11] = 0$: $v[1][11] \leftarrow 15$, $s[1][11] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$k < w[2]$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	0	0	$k < w[2]$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 0$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	3	0	$k < w[2]$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 3$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	3	0	$k < w[2]$: $v[2][3] \leftarrow v[1][3] = 3$, $s[2][3] \leftarrow 0$
2	4	6	0	$k < w[2]$: $v[2][4] \leftarrow v[1][4] = 6$, $s[2][4] \leftarrow 0$
2	5	9	1	$p[2] + v[2][0] = 9 + 0 > v[1][5] = 6$: $v[2][5] \leftarrow 9$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	9	0	$p[2] + v[2][1] = 9 + 0 \leq v[1][6] = 9$: $v[2][6] \leftarrow 9$, $s[2][6] \leftarrow 0$
2	7	12	1	$p[2] + v[2][2] = 9 + 3 > v[1][7] = 9$: $v[2][7] \leftarrow 12$, $s[2][7] \leftarrow 1$
2	8	12	0	$p[2] + v[2][3] = 9 + 3 \leq v[1][8] = 12$: $v[2][8] \leftarrow 12$, $s[2][8] \leftarrow 0$
2	9	15	1	$p[2] + v[2][4] = 9 + 6 > v[1][9] = 12$: $v[2][9] \leftarrow 15$, $s[2][9] \leftarrow 1$
2	10	18	1	$p[2] + v[2][5] = 9 + 9 > v[1][10] = 15$: $v[2][10] \leftarrow 18$, $s[2][10] \leftarrow 1$
2	11	18	1	$p[2] + v[2][6] = 9 + 9 > v[1][11] = 15$: $v[2][11] \leftarrow 18$, $s[2][11] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$k < w[3]$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	0	0	$k < w[3]$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 0$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	3	0	$k < w[3]$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 3$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	3	0	$k < w[3]$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 3$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	6	0	$k < w[3]$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 6$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	9	0	$k < w[3]$: $v[3][5] \leftarrow v[2][5] = 9$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	10	1	$p[3] + v[3][0] = 10 + 0 > v[2][6] = 9$: $v[3][6] \leftarrow 10$, $s[3][6] \leftarrow 1$
3	7	12	0	$p[3] + v[3][1] = 10 + 0 \leq v[2][7] = 12$: $v[3][7] \leftarrow 12$, $s[3][7] \leftarrow 0$
3	8	13	1	$p[3] + v[3][2] = 10 + 3 > v[2][8] = 12$: $v[3][8] \leftarrow 13$, $s[3][8] \leftarrow 1$
3	9	15	0	$p[3] + v[3][3] = 10 + 3 \leq v[2][9] = 15$: $v[3][9] \leftarrow 15$, $s[3][9] \leftarrow 0$
3	10	18	0	$p[3] + v[3][4] = 10 + 6 \leq v[2][10] = 18$: $v[3][10] \leftarrow 18$, $s[3][10] \leftarrow 0$
3	11	19	1	$p[3] + v[3][5] = 10 + 9 > v[2][11] = 18$: $v[3][11] \leftarrow 19$, $s[3][11] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$k < w[4]$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$

4	1	0	0	$k < w[4]$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 0$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	3	0	$k < w[4]$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 3$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	3	0	$k < w[4]$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 3$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	6	0	$k < w[4]$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 6$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	9	0	$k < w[4]$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 9$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	10	0	$k < w[4]$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 10$, $s[4][6] \leftarrow 0$
4	7	12	0	$k < w[4]$: $v[4][7] \leftarrow v[3][7] = 12$, $s[4][7] \leftarrow 0$
4	8	13	0	$k < w[4]$: $v[4][8] \leftarrow v[3][8] = 13$, $s[4][8] \leftarrow 0$
4	9	16	1	$p[4] + v[4][0] = 16 + 0 > v[3][9] = 15$: $v[4][9] \leftarrow 16$, $s[4][9] \leftarrow 1$
4	10	18	0	$p[4] + v[4][1] = 16 + 0 \leq v[3][10] = 18$: $v[4][10] \leftarrow 18$, $s[4][10] \leftarrow 0$
4	11	19	0	$p[4] + v[4][2] = 16 + 3 \leq v[3][11] = 19$: $v[4][11] \leftarrow 19$, $s[4][11] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$k < w[5]$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	0	0	$k < w[5]$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 0$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	3	0	$k < w[5]$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 3$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	3	0	$k < w[5]$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 3$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	6	0	$k < w[5]$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 6$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	9	0	$k < w[5]$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 9$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	10	0	$k < w[5]$: $v[5][6] \leftarrow v[4][6] = 10$, $s[5][6] \leftarrow 0$
5	7	12	0	$k < w[5]$: $v[5][7] \leftarrow v[4][7] = 12$, $s[5][7] \leftarrow 0$
5	8	13	0	$k < w[5]$: $v[5][8] \leftarrow v[4][8] = 13$, $s[5][8] \leftarrow 0$
5	9	16	0	$k < w[5]$: $v[5][9] \leftarrow v[4][9] = 16$, $s[5][9] \leftarrow 0$
5	10	18	0	$p[5] + v[5][0] = 17 + 0 \leq v[4][10] = 18$: $v[5][10] \leftarrow 18$, $s[5][10] \leftarrow 0$
5	11	19	0	$p[5] + v[5][1] = 17 + 0 \leq v[4][11] = 19$: $v[5][11] \leftarrow 19$, $s[5][11] \leftarrow 0$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	3	3	6	6	9	9	12	12	15	15
$j=2$	0	0	3	3	6	9	9	12	12	15	18	18
$j=3$	0	0	3	3	6	9	10	12	13	15	18	19
$j=4$	0	0	3	3	6	9	10	12	13	16	18	19
$j=5$	0	0	3	3	6	9	10	12	13	16	18	19

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione del secondo algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=5$ e $k=11$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	0	0	$j=5, k=11$
1	5	11	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
2	4	11	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
3	3	11	1	0	0	1	0	0	$x[3] \leftarrow 1, k \leftarrow 11-6=5$
4	3	5	0	0	0	1	0	0	$j \leftarrow 2$
5	2	5	1	0	1	1	0	0	$x[2] \leftarrow 1, k \leftarrow 5-5=0$

Quindi il vettore

$$(0, 1, 1, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][11] = 19.$$

La soluzione ottima non è unica e i due algoritmi di PD ne trovano due diverse: il primo trova $(1, 0, 0, 1, 0)$, con peso totale $2 + 9 = 11$ e profitto totale $3 + 16 = 19$; il secondo trova $(0, 1, 1, 0, 0)$, con peso totale $5 + 6 = 11$ e profitto totale $9 + 10 = 19$. Queste sono le sole due soluzioni ottime.

Capitolo 4

PD per il problema dello zaino limitato

Esercizio 4.1

Consideriamo la seguente istanza del BKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 6$ e i profitti, i pesi e i limiti associati ai tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$
p_j	4	5
w_j	2	3
b_j	2	1

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$\max\{v[0][0]\} = 0$
1	1	0	0	$\max\{v[0][1]\} = 0$
1	2	4	1	$\max\{v[0][2], p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 4\} = 4$
1	3	4	1	$\max\{v[0][3], p[1]+v[0][1]\} = \max\{0, 4\} = 4$
1	4	8	2	$\max\{v[0][4], p[1]+v[0][2], 2p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
1	5	8	2	$\max\{v[0][5], p[1]+v[0][3], 2p[1]+v[0][1]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
1	6	8	2	$\max\{v[0][6], p[1]+v[0][4], 2p[1]+v[0][2]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
2	0	0	0	$\max\{v[1][0]\} = 0$
2	1	0	0	$\max\{v[1][1]\} = 0$
2	2	4	0	$\max\{v[1][2]\} = 4$
2	3	5	1	$\max\{v[1][3], p[2]+v[1][0]\} = \max\{4, 5\} = 5$
2	4	8	0	$\max\{v[1][4], p[2]+v[1][1]\} = \max\{8, 5\} = 8$
2	5	9	1	$\max\{v[1][5], p[2]+v[1][2]\} = \max\{8, 9\} = 9$
2	6	9	1	$\max\{v[1][6], p[2]+v[1][3]\} = \max\{8, 9\} = 9$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	4	4	8	8	8
$j=2$	0	0	4	5	8	9	9

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	2	2	2
$j=2$	0	0	0	1	0	1	1

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	2	2	2
$j=2$	0	0	0	1	0	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=2$ e $k=6$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	Azione
-	-	-	-	0	0	$k=6$
1	2	6	1	0	1	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 6-1\cdot 3=3$
2	1	3	1	1	1	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 3-1\cdot 2=1$

Quindi il vettore

$$(1,1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[2][6]=9.$$

Esercizio 4.2

Consideriamo la seguente istanza del BKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 7$ e i profitti, i pesi e i limiti associati ai tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$
p_j	3	8
w_j	1	4
b_j	3	1

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$\max\{v[0][0]\} = 0$
1	1	3	1	$\max\{v[0][1], p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 3\} = 3$
1	2	6	2	$\max\{v[0][2], p[1]+v[0][1], 2p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 3, 6\} = 6$

1	3	9	3	$\max\{v[0][3],\ p[1]+v[0][2],\ 2p[1]+v[0][1],\ 3p[1]+v[0][0]\} = \max\{0,3,6,9\} = 9$
1	4	9	3	$\max\{v[0][4],\ p[1]+v[0][3],\ 2p[1]+v[0][2],\ 3p[1]+v[0][1]\} = \max\{0,3,6,9\} = 9$
1	5	9	3	$\max\{v[0][5],\ p[1]+v[0][4],\ 2p[1]+v[0][3],\ 3p[1]+v[0][2]\} = \max\{0,3,6,9\} = 9$
1	6	9	3	$\max\{v[0][6],\ p[1]+v[0][5],\ 2p[1]+v[0][4],\ 3p[1]+v[0][3]\} = \max\{0,3,6,9\} = 9$
1	7	9	3	$\max\{v[0][7],\ p[1]+v[0][6],\ 2p[1]+v[0][5],\ 3p[1]+v[0][4]\} = \max\{0,3,6,9\} = 9$
2	0	0	0	$\max\{v[1][0]\} = 0$
2	1	3	0	$\max\{v[1][1]\} = 3$
2	2	6	0	$\max\{v[1][2]\} = 6$
2	3	9	0	$\max\{v[1][3]\} = 9$
2	4	9	0	$\max\{v[1][4],\ p[2]+v[1][0]\} = \max\{9,8\} = 9$
2	5	11	1	$\max\{v[1][5],\ p[2]+v[1][1]\} = \max\{9,11\} = 11$
2	6	14	1	$\max\{v[1][6],\ p[2]+v[1][2]\} = \max\{9,14\} = 14$
2	7	17	1	$\max\{v[1][7],\ p[2]+v[1][3]\} = \max\{9,17\} = 17$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	3	6	9	9	9	9	9
$j=2$	0	3	6	9	9	11	14	17

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	2	3	3	3	3	3
$j=2$	0	0	0	0	0	1	1	1

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	2	3	3	3	3	3
$j=2$	0	0	0	0	0	1	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=2$ e $k=7$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	Azione
-	-	-	-	0	0	$k=7$
1	2	7	1	0	1	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7-1\cdot 4=3$
2	1	3	3	3	1	$x[1] \leftarrow 3$, $k \leftarrow 3-3\cdot 1=0$

Quindi il vettore

$$(3,1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[2][7]=17.$$

Esercizio 4.3

Consideriamo la seguente istanza del BKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 5$ e i profitti, i pesi e i limiti associati ai tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
p_j	2	3	4
w_j	1	2	3
b_j	1	1	1

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2, x_3) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$\max\{v[0][0]\} = 0$
1	1	2	1	$\max\{v[0][1],\ p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 2\} = 2$
1	2	2	1	$\max\{v[0][2],\ p[1]+v[0][1]\} = \max\{0, 2\} = 2$
1	3	2	1	$\max\{v[0][3],\ p[1]+v[0][2]\} = \max\{0, 2\} = 2$
1	4	2	1	$\max\{v[0][4],\ p[1]+v[0][3]\} = \max\{0, 2\} = 2$

1	5	2	1	$\max\{v[0][5],\ p[1]+v[0][4]\} = \max\{0, 2\} = 2$
2	0	0	0	$\max\{v[1][0]\} = 0$
2	1	2	0	$\max\{v[1][1]\} = 2$
2	2	3	1	$\max\{v[1][2],\ p[2]+v[1][0]\} = \max\{2, 3\} = 3$
2	3	5	1	$\max\{v[1][3],\ p[2]+v[1][1]\} = \max\{2, 5\} = 5$
2	4	5	1	$\max\{v[1][4],\ p[2]+v[1][2]\} = \max\{2, 5\} = 5$
2	5	5	1	$\max\{v[1][5],\ p[2]+v[1][3]\} = \max\{2, 5\} = 5$
3	0	0	0	$\max\{v[2][0]\} = 0$
3	1	2	0	$\max\{v[2][1]\} = 2$
3	2	3	0	$\max\{v[2][2]\} = 3$
3	3	5	0	$\max\{v[2][3],\ p[3]+v[2][0]\} = \max\{5, 4\} = 5$
3	4	6	1	$\max\{v[2][4],\ p[3]+v[2][1]\} = \max\{5, 6\} = 6$
3	5	7	1	$\max\{v[2][5],\ p[3]+v[2][2]\} = \max\{5, 7\} = 7$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$j=0$	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	2	2	2	2	2
$j=2$	0	2	3	5	5	5
$j=3$	0	2	3	5	6	7

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$j=0$	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	1	1

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$j=0$	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=3$ e $k=5$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	$k=5$
1	3	5	1	0	0	1	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 5-1\cdot 3=2$
2	2	2	1	0	1	1	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2-1\cdot 2=0$
3	1	0	0	0	1	1	$x[1] \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0-0\cdot 1=0$

Quindi il vettore

$$(0,1,1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[3][5]=7.$$

Esercizio 4.4

Consideriamo la seguente istanza del BKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 8$ e i profitti, i pesi e i limiti associati ai tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$
p_j	5	9
w_j	2	5
b_j	3	1

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$\max\{v[0][0]\} = 0$
1	1	0	0	$\max\{v[0][1]\} = 0$

1	2	5	1	$\max\{v[0][2],\ p[1]+v[0][0]\} = \max\{0,5\} = 5$
1	3	5	1	$\max\{v[0][3],\ p[1]+v[0][1]\} = \max\{0,5\} = 5$
1	4	10	2	$\max\{v[0][4],\ p[1]+v[0][2],\ 2p[1]+v[0][0]\} = \max\{0,5,10\} = 10$
1	5	10	2	$\max\{v[0][5],\ p[1]+v[0][3],\ 2p[1]+v[0][1]\} = \max\{0,5,10\} = 10$
1	6	15	3	$\max\{v[0][6],\ p[1]+v[0][4],\ 2p[1]+v[0][2],\ 3p[1]+v[0][0]\} = \max\{0,5,10,15\} = 15$
1	7	15	3	$\max\{v[0][7],\ p[1]+v[0][5],\ 2p[1]+v[0][3],\ 3p[1]+v[0][1]\} = \max\{0,5,10,15\} = 15$
1	8	15	3	$\max\{v[0][8],\ p[1]+v[0][6],\ 2p[1]+v[0][4],\ 3p[1]+v[0][2]\} = \max\{0,5,10,15\} = 15$
2	0	0	0	$\max\{v[1][0]\} = 0$
2	1	0	0	$\max\{v[1][1]\} = 0$
2	2	5	0	$\max\{v[1][2]\} = 5$
2	3	5	0	$\max\{v[1][3]\} = 5$
2	4	10	0	$\max\{v[1][4]\} = 10$
2	5	10	0	$\max\{v[1][5],\ p[2]+v[1][0]\} = \max\{10,9\} = 10$
2	6	15	0	$\max\{v[1][6],\ p[2]+v[1][1]\} = \max\{15,9\} = 15$
2	7	15	0	$\max\{v[1][7],\ p[2]+v[1][2]\} = \max\{15,14\} = 15$
2	8	15	0	$\max\{v[1][8],\ p[2]+v[1][3]\} = \max\{15,14\} = 15$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	5	5	10	10	15	15	15
$j=2$	0	0	5	5	10	10	15	15	15

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	2	2	3	3	3
$j=2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	1	2	2	3	3	3
$j=2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=2$ e $k=8$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	Azione
-	-	-	-	0	0	$k=8$
1	2	8	0	0	0	$x[2] \leftarrow 0$, $k \leftarrow 8-0\cdot 5=8$
2	1	8	3	3	0	$x[1] \leftarrow 3$, $k \leftarrow 8-3\cdot 2=2$

Quindi il vettore

$$(3,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[2][8]=15.$$

Esercizio 4.5

Consideriamo la seguente istanza del BKP, in cui lo zaino ha capacità $c = 9$ e i profitti, i pesi e i limiti associati ai tipi di oggetto sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
p_j	4	5	3
w_j	3	4	2
b_j	2	1	2

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2, x_3) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e k, le celle $v[j][k]$ e $s[j][k]$ e l'operazione eseguita.

j	k	$v[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	0	0	$v[0][1] \leftarrow 0$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	0	0	$v[0][2] \leftarrow 0$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	0	0	$v[0][3] \leftarrow 0$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	0	0	$v[0][4] \leftarrow 0$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	0	0	$v[0][5] \leftarrow 0$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	0	0	$v[0][6] \leftarrow 0$, $s[0][6] \leftarrow 0$
0	7	0	0	$v[0][7] \leftarrow 0$, $s[0][7] \leftarrow 0$
0	8	0	0	$v[0][8] \leftarrow 0$, $s[0][8] \leftarrow 0$
0	9	0	0	$v[0][9] \leftarrow 0$, $s[0][9] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$\max\{v[0][0]\} = 0$

1	1	0	0	$\max\{v[0][1]\} = 0$
1	2	0	0	$\max\{v[0][2]\} = 0$
1	3	4	1	$\max\{v[0][3], p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 4\} = 4$
1	4	4	1	$\max\{v[0][4], p[1]+v[0][1]\} = \max\{0, 4\} = 4$
1	5	4	1	$\max\{v[0][5], p[1]+v[0][2]\} = \max\{0, 4\} = 4$
1	6	8	2	$\max\{v[0][6], p[1]+v[0][3], 2p[1]+v[0][0]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
1	7	8	2	$\max\{v[0][7], p[1]+v[0][4], 2p[1]+v[0][1]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
1	8	8	2	$\max\{v[0][8], p[1]+v[0][5], 2p[1]+v[0][2]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
1	9	8	2	$\max\{v[0][9], p[1]+v[0][6], 2p[1]+v[0][3]\} = \max\{0, 4, 8\} = 8$
2	0	0	0	$\max\{v[1][0]\} = 0$
2	1	0	0	$\max\{v[1][1]\} = 0$
2	2	0	0	$\max\{v[1][2]\} = 0$
2	3	4	0	$\max\{v[1][3]\} = 4$
2	4	5	1	$\max\{v[1][4], p[2]+v[1][0]\} = \max\{4, 5\} = 5$
2	5	5	1	$\max\{v[1][5], p[2]+v[1][1]\} = \max\{4, 5\} = 5$
2	6	8	0	$\max\{v[1][6], p[2]+v[1][2]\} = \max\{8, 5\} = 8$
2	7	9	1	$\max\{v[1][7], p[2]+v[1][3]\} = \max\{8, 9\} = 9$
2	8	9	1	$\max\{v[1][8], p[2]+v[1][4]\} = \max\{8, 9\} = 9$
2	9	9	1	$\max\{v[1][9], p[2]+v[1][5]\} = \max\{8, 9\} = 9$
3	0	0	0	$\max\{v[2][0]\} = 0$
3	1	0	0	$\max\{v[2][1]\} = 0$
3	2	3	1	$\max\{v[2][2], p[3]+v[2][0]\} = \max\{0, 3\} = 3$
3	3	4	0	$\max\{v[2][3], p[3]+v[2][1]\} = \max\{4, 3\} = 4$
3	4	6	2	$\max\{v[2][4], p[3]+v[2][2], 2p[3]+v[2][0]\} = \max\{5, 3, 6\} = 6$
3	5	7	1	$\max\{v[2][5], p[3]+v[2][3], 2p[3]+v[2][1]\} = \max\{5, 7, 6\} = 7$
3	6	8	0	$\max\{v[2][6], p[3]+v[2][4], 2p[3]+v[2][2]\} = \max\{8, 8, 6\} = 8$
3	7	10	2	$\max\{v[2][7], p[3]+v[2][5], 2p[3]+v[2][3]\} = \max\{9, 8, 10\} = 10$
3	8	11	1	$\max\{v[2][8], p[3]+v[2][6], 2p[3]+v[2][4]\} = \max\{9, 11, 11\} = 11$
3	9	12	1	$\max\{v[2][9], p[3]+v[2][7], 2p[3]+v[2][5]\} = \max\{9, 12, 11\} = 12$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	4	4	4	8	8	8	8
$j=2$	0	0	0	4	5	5	8	9	9	9
$j=3$	0	0	3	4	6	7	8	10	11	12

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$j=2$	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
$j=3$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	1

2. Abbiamo la seguente matrice s:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$j=2$	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
$j=3$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $j=3$ e $k=9$ come segue:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
-	-	-	-	0	0	0	$k=9$
1	3	9	1	0	0	1	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 9-1\cdot 2=7$
2	2	7	1	0	1	1	$x[2] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7-1\cdot 4=3$
3	1	3	1	1	1	1	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 3-1\cdot 3=0$

Quindi il vettore

$$(1,1,1)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[3][9]=12.$$

Capitolo 5

PD per il problema del subset sum

Ricorrenza usata in questi esercizi

L'algoritmo di PD del capitolo «PD per il problema del subset sum»: $r(j,k) \in \{true, false\}$ dice se il valore obiettivo k è il peso totale di un sottoinsieme degli oggetti $1, 2, \ldots, j$, e

$$r(j,k) = \begin{cases} true & \text{se } k = 0, \\ false & \text{se } j = 0 \text{ e } k \geq 1, \\ r(j-1,k) & \text{se } j,k \geq 1 \text{ e } w_j > k, \\ r(j-1,k) \vee r(j-1,k-w_j) & \text{se } j,k \geq 1 \text{ e } w_j \leq k. \end{cases}$$

La risposta è $r(n,c)$. La matrice s memorizza $s[j][k] = 1$ se l'oggetto j è usato, cioè se $r[j-1][k]$ è *false* e $r[j-1][k-w_j]$ è *true*; un sottoinsieme si ricostruisce da $j = n$ e $k = c$ con $x_j \leftarrow s[j][k]$, $k \leftarrow k - s[j][k]\, w_j$.

Esercizio 5.1 — Esercizio 1: problema del subset sum

Consideriamo la seguente istanza dell'SSP, con valore obiettivo $c = 7$ e 3 oggetti di pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
w_j	2	3	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $r[j][k]$ e $s[j][k]$; poi scrivere le matrici r e s.
2. Dare la risposta all'istanza dell'SSP e, se è sì, ricostruire dalla matrice s un sottoinsieme di peso totale c, come vettore binario (x_1, x_2, x_3).
3. Usando l'ultima riga della matrice r, elencare tutti i valori obiettivo $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ raggiungibili con i 3 oggetti.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $j = 0$ è $r[0][0] =$ T e $r[0][k] =$ F per $k \geq 1$, con $s[0][k] = 0$; T sta per *true* e F per *false*. L'oggetto j è usato ($s[j][k] = 1$) solo se $r[j-1][k]$ è F.

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
1	0	T	0	$w_1 = 2 > 0$: $r[0][0] =$ T
1	1	F	0	$w_1 = 2 > 1$: $r[0][1] =$ F
1	2	T	1	$r[0][2] \vee r[0][0] =$ F $\vee$ T $=$ T
1	3	F	0	$r[0][3] \vee r[0][1] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	4	F	0	$r[0][4] \vee r[0][2] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	5	F	0	$r[0][5] \vee r[0][3] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	6	F	0	$r[0][6] \vee r[0][4] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	7	F	0	$r[0][7] \vee r[0][5] =$ F $\vee$ F $=$ F
2	0	T	0	$w_2 = 3 > 0$: $r[1][0] =$ T
2	1	F	0	$w_2 = 3 > 1$: $r[1][1] =$ F
2	2	T	0	$w_2 = 3 > 2$: $r[1][2] =$ T
2	3	T	1	$r[1][3] \vee r[1][0] =$ F $\vee$ T $=$ T
2	4	F	0	$r[1][4] \vee r[1][1] =$ F $\vee$ F $=$ F
2	5	T	1	$r[1][5] \vee r[1][2] =$ F $\vee$ T $=$ T
2	6	F	0	$r[1][6] \vee r[1][3] =$ F $\vee$ F $=$ F
2	7	F	0	$r[1][7] \vee r[1][4] =$ F $\vee$ F $=$ F

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
3	0	T	0	$w_3 = 5 > 0$: $r[2][0] =$ T
3	1	F	0	$w_3 = 5 > 1$: $r[2][1] =$ F
3	2	T	0	$w_3 = 5 > 2$: $r[2][2] =$ T
3	3	T	0	$w_3 = 5 > 3$: $r[2][3] =$ T
3	4	F	0	$w_3 = 5 > 4$: $r[2][4] =$ F
3	5	T	0	$r[2][5] \vee r[2][0] =$ T $\vee$ T $=$ T
3	6	F	0	$r[2][6] \vee r[2][1] =$ F $\vee$ F $=$ F
3	7	T	1	$r[2][7] \vee r[2][2] =$ F $\vee$ T $=$ T

Questa è la matrice r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$r[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	T	F	F	F	F	F	F	F
$j=1$	T	F	T	F	F	F	F	F
$j=2$	T	F	T	T	F	T	F	F
$j=3$	T	F	T	T	F	T	F	T

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	0	0	0	0	0
$j=2$	0	0	0	1	0	1	0	0
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	1

2. Poiché $r[3][7] = \mathrm{T}$, la risposta è **sì**. Partendo da $j = 3$ e $k = 7$:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$k = 7$
1	3	7	1	0	0	1	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 7 - 5 = 2$
2	2	2	0	0	0	1	$x[2] \leftarrow 0$, $k = 2$
3	1	2	1	1	0	1	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2 - 2 = 0$

   Il vettore $(1, 0, 1)$ seleziona il sottoinsieme $\{1, 3\}$, di peso totale $2 + 5 = 7 = c$. È l'unico sottoinsieme con peso totale 7.

3. L'ultima riga $r[3][\cdot]$ è T esattamente per $k \in \{2, 3, 5, 7\}$: questi sono i valori obiettivo raggiungibili. Gli altri valori in $\{1, 2, \ldots, 7\}$ non sono il peso totale di alcun sottoinsieme.

Esercizio 5.2 — Esercizio 2: problema del subset sum

Consideriamo la seguente istanza dell'SSP, con valore obiettivo $c = 9$ e 3 oggetti di pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
w_j	3	4	6

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $r[j][k]$ e $s[j][k]$; poi scrivere le matrici r e s.

2. Dare la risposta all'istanza dell'SSP e, se è sì, ricostruire dalla matrice s un sottoinsieme di peso totale c, come vettore binario (x_1, x_2, x_3).

3. Usando l'ultima riga della matrice r, elencare tutti i valori obiettivo $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ raggiungibili con i 3 oggetti.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $j = 0$ è $r[0][0] = \mathrm{T}$ e $r[0][k] = \mathrm{F}$ per $k \geq 1$, con $s[0][k] = 0$; T sta per *true* e F per *false*. L'oggetto j è usato ($s[j][k] = 1$) solo se $r[j-1][k]$ è F.

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
1	0	T	0	$w_1 = 3 > 0$: $r[0][0] = \mathrm{T}$
1	1	F	0	$w_1 = 3 > 1$: $r[0][1] = \mathrm{F}$
1	2	F	0	$w_1 = 3 > 2$: $r[0][2] = \mathrm{F}$
1	3	T	1	$r[0][3] \vee r[0][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
1	4	F	0	$r[0][4] \vee r[0][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	5	F	0	$r[0][5] \vee r[0][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	6	F	0	$r[0][6] \vee r[0][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	7	F	0	$r[0][7] \vee r[0][4] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	8	F	0	$r[0][8] \vee r[0][5] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	9	F	0	$r[0][9] \vee r[0][6] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	0	T	0	$w_2 = 4 > 0$: $r[1][0] = \mathrm{T}$
2	1	F	0	$w_2 = 4 > 1$: $r[1][1] = \mathrm{F}$
2	2	F	0	$w_2 = 4 > 2$: $r[1][2] = \mathrm{F}$
2	3	T	0	$w_2 = 4 > 3$: $r[1][3] = \mathrm{T}$
2	4	T	1	$r[1][4] \vee r[1][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
2	5	F	0	$r[1][5] \vee r[1][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	6	F	0	$r[1][6] \vee r[1][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	7	T	1	$r[1][7] \vee r[1][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
2	8	F	0	$r[1][8] \vee r[1][4] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	9	F	0	$r[1][9] \vee r[1][5] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
3	0	T	0	$w_3 = 6 > 0$: $r[2][0] = \mathrm{T}$
3	1	F	0	$w_3 = 6 > 1$: $r[2][1] = \mathrm{F}$
3	2	F	0	$w_3 = 6 > 2$: $r[2][2] = \mathrm{F}$
3	3	T	0	$w_3 = 6 > 3$: $r[2][3] = \mathrm{T}$
3	4	T	0	$w_3 = 6 > 4$: $r[2][4] = \mathrm{T}$
3	5	F	0	$w_3 = 6 > 5$: $r[2][5] = \mathrm{F}$
3	6	T	1	$r[2][6] \vee r[2][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
3	7	T	0	$r[2][7] \vee r[2][1] = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{T}$
3	8	F	0	$r[2][8] \vee r[2][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
3	9	T	1	$r[2][9] \vee r[2][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$

Questa è la matrice r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$r[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
$j=1$	T	F	F	T	F	F	F	F	F	F
$j=2$	T	F	F	T	T	F	F	T	F	F
$j=3$	T	F	F	T	T	F	T	T	F	T

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$j=2$	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

2. Poiché $r[3][9] = \mathrm{T}$, la risposta è **sì**. Partendo da $j = 3$ e $k = 9$:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$k = 9$
1	3	9	1	0	0	1	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 9 - 6 = 3$
2	2	3	0	0	0	1	$x[2] \leftarrow 0$, $k = 3$
3	1	3	1	1	0	1	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 3 - 3 = 0$

   Il vettore $(1, 0, 1)$ seleziona il sottoinsieme $\{1, 3\}$, di peso totale $3 + 6 = 9 = c$. È l'unico sottoinsieme con peso totale 9.

3. L'ultima riga $r[3][\cdot]$ è T esattamente per $k \in \{3, 4, 6, 7, 9\}$: questi sono i valori obiettivo raggiungibili. Gli altri valori in $\{1, 2, \ldots, 9\}$ non sono il peso totale di alcun sottoinsieme.

Esercizio 5.3 — Esercizio 3: problema del subset sum

Consideriamo la seguente istanza dell'SSP, con valore obiettivo $c = 7$ e 3 oggetti di pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
w_j	2	4	6

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $r[j][k]$ e $s[j][k]$; poi scrivere le matrici r e s.
2. Dare la risposta all'istanza dell'SSP e, se è sì, ricostruire dalla matrice s un sottoinsieme di peso totale c, come vettore binario (x_1, x_2, x_3).
3. Usando l'ultima riga della matrice r, elencare tutti i valori obiettivo $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ raggiungibili con i 3 oggetti.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $j = 0$ è $r[0][0] = \mathrm{T}$ e $r[0][k] = \mathrm{F}$ per $k \geq 1$, con $s[0][k] = 0$; T sta per *true* e F per *false*. L'oggetto j è usato ($s[j][k] = 1$) solo se $r[j-1][k]$ è F.

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
1	0	T	0	$w_1 = 2 > 0$: $r[0][0] = \mathrm{T}$
1	1	F	0	$w_1 = 2 > 1$: $r[0][1] = \mathrm{F}$
1	2	T	1	$r[0][2] \vee r[0][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
1	3	F	0	$r[0][3] \vee r[0][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	4	F	0	$r[0][4] \vee r[0][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	5	F	0	$r[0][5] \vee r[0][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	6	F	0	$r[0][6] \vee r[0][4] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	7	F	0	$r[0][7] \vee r[0][5] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	0	T	0	$w_2 = 4 > 0$: $r[1][0] = \mathrm{T}$
2	1	F	0	$w_2 = 4 > 1$: $r[1][1] = \mathrm{F}$
2	2	T	0	$w_2 = 4 > 2$: $r[1][2] = \mathrm{T}$
2	3	F	0	$w_2 = 4 > 3$: $r[1][3] = \mathrm{F}$
2	4	T	1	$r[1][4] \vee r[1][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
2	5	F	0	$r[1][5] \vee r[1][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	6	T	1	$r[1][6] \vee r[1][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
2	7	F	0	$r[1][7] \vee r[1][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
3	0	T	0	$w_3 = 6 > 0$: $r[2][0] = \mathrm{T}$
3	1	F	0	$w_3 = 6 > 1$: $r[2][1] = \mathrm{F}$
3	2	T	0	$w_3 = 6 > 2$: $r[2][2] = \mathrm{T}$
3	3	F	0	$w_3 = 6 > 3$: $r[2][3] = \mathrm{F}$
3	4	T	0	$w_3 = 6 > 4$: $r[2][4] = \mathrm{T}$
3	5	F	0	$w_3 = 6 > 5$: $r[2][5] = \mathrm{F}$
3	6	T	0	$r[2][6] \vee r[2][0] = \mathrm{T} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
3	7	F	0	$r[2][7] \vee r[2][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$

Questa è la matrice r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$r[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	T	F	F	F	F	F	F	F
$j=1$	T	F	T	F	F	F	F	F
$j=2$	T	F	T	F	T	F	T	F
$j=3$	T	F	T	F	T	F	T	F

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	0	0	0	0	0
$j=2$	0	0	0	0	1	0	1	0
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Poiché $r[3][7] = \mathrm{F}$, la risposta è **no**: nessun sottoinsieme degli oggetti ha peso totale 7, e non c'è nulla da ricostruire. Infatti tutti i pesi $w = (2, 4, 6)$ sono pari, quindi ogni valore obiettivo raggiungibile è pari, mentre $c = 7$ è dispari.

3. L'ultima riga $r[3][\cdot]$ è T esattamente per $k \in \{2, 4, 6\}$: questi sono i valori obiettivo raggiungibili. Gli altri valori in $\{1, 2, \ldots, 7\}$ non sono il peso totale di alcun sottoinsieme.

Esercizio 5.4 — Esercizio 4: problema del subset sum

Consideriamo la seguente istanza dell'SSP, con valore obiettivo $c = 8$ e 4 oggetti di pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
w_j	1	4	5	7

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $r[j][k]$ e $s[j][k]$; poi scrivere le matrici r e s.
2. Dare la risposta all'istanza dell'SSP e, se è sì, ricostruire dalla matrice s un sottoinsieme di peso totale c, come vettore binario (x_1, x_2, x_3, x_4).
3. Usando l'ultima riga della matrice r, elencare tutti i valori obiettivo $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ raggiungibili con i 4 oggetti.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $j = 0$ è $r[0][0] =$ T e $r[0][k] =$ F per $k \geq 1$, con $s[0][k] = 0$; T sta per *true* e F per *false*. L'oggetto j è usato ($s[j][k] = 1$) solo se $r[j-1][k]$ è F.

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
1	0	T	0	$w_1 = 1 > 0$: $r[0][0] = \mathrm{T}$
1	1	T	1	$r[0][1] \vee r[0][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
1	2	F	0	$r[0][2] \vee r[0][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	3	F	0	$r[0][3] \vee r[0][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	4	F	0	$r[0][4] \vee r[0][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	5	F	0	$r[0][5] \vee r[0][4] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	6	F	0	$r[0][6] \vee r[0][5] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	7	F	0	$r[0][7] \vee r[0][6] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
1	8	F	0	$r[0][8] \vee r[0][7] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	0	T	0	$w_2 = 4 > 0$: $r[1][0] = \mathrm{T}$
2	1	T	0	$w_2 = 4 > 1$: $r[1][1] = \mathrm{T}$
2	2	F	0	$w_2 = 4 > 2$: $r[1][2] = \mathrm{F}$
2	3	F	0	$w_2 = 4 > 3$: $r[1][3] = \mathrm{F}$
2	4	T	1	$r[1][4] \vee r[1][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
2	5	T	1	$r[1][5] \vee r[1][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
2	6	F	0	$r[1][6] \vee r[1][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	7	F	0	$r[1][7] \vee r[1][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
2	8	F	0	$r[1][8] \vee r[1][4] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
3	0	T	0	$w_3 = 5 > 0$: $r[2][0] = \mathrm{T}$
3	1	T	0	$w_3 = 5 > 1$: $r[2][1] = \mathrm{T}$
3	2	F	0	$w_3 = 5 > 2$: $r[2][2] = \mathrm{F}$
3	3	F	0	$w_3 = 5 > 3$: $r[2][3] = \mathrm{F}$
3	4	T	0	$w_3 = 5 > 4$: $r[2][4] = \mathrm{T}$
3	5	T	0	$r[2][5] \vee r[2][0] = \mathrm{T} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
3	6	T	1	$r[2][6] \vee r[2][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
3	7	F	0	$r[2][7] \vee r[2][2] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
3	8	F	0	$r[2][8] \vee r[2][3] = \mathrm{F} \vee \mathrm{F} = \mathrm{F}$
4	0	T	0	$w_4 = 7 > 0$: $r[3][0] = \mathrm{T}$
4	1	T	0	$w_4 = 7 > 1$: $r[3][1] = \mathrm{T}$
4	2	F	0	$w_4 = 7 > 2$: $r[3][2] = \mathrm{F}$
4	3	F	0	$w_4 = 7 > 3$: $r[3][3] = \mathrm{F}$
4	4	T	0	$w_4 = 7 > 4$: $r[3][4] = \mathrm{T}$
4	5	T	0	$w_4 = 7 > 5$: $r[3][5] = \mathrm{T}$
4	6	T	0	$w_4 = 7 > 6$: $r[3][6] = \mathrm{T}$
4	7	T	1	$r[3][7] \vee r[3][0] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$
4	8	T	1	$r[3][8] \vee r[3][1] = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$

Questa è la matrice r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$r[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	T	F	F	F	F	F	F	F	F
$j=1$	T	T	F	F	F	F	F	F	F
$j=2$	T	T	F	F	T	T	F	F	F
$j=3$	T	T	F	F	T	T	T	F	F
$j=4$	T	T	F	F	T	T	T	T	T

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$j=2$	0	0	0	0	1	1	0	0	0
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

2. Poiché $r[4][8] = \mathrm{T}$, la risposta è **sì**. Partendo da $j=4$ e $k=8$:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$k=8$
1	4	8	1	0	0	0	1	$x[4]\leftarrow 1$, $k\leftarrow 8-7=1$
2	3	1	0	0	0	0	1	$x[3]\leftarrow 0$, $k=1$
3	2	1	0	0	0	0	1	$x[2]\leftarrow 0$, $k=1$
4	1	1	1	1	0	0	1	$x[1]\leftarrow 1$, $k\leftarrow 1-1=0$

   Il vettore $(1,0,0,1)$ seleziona il sottoinsieme $\{1,4\}$, di peso totale $1+7=8=c$. È l'unico sottoinsieme con peso totale 8.

3. L'ultima riga $r[4][\cdot]$ è T esattamente per $k \in \{1,4,5,6,7,8\}$: questi sono i valori obiettivo raggiungibili. Gli altri valori in $\{1,2,\ldots,8\}$ non sono il peso totale di alcun sottoinsieme.

Esercizio 5.5 — Esercizio 5: problema del subset sum

Consideriamo la seguente istanza dell'SSP, con valore obiettivo $c=8$ e 4 oggetti di pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
w_j	2	5	6	7

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $r[j][k]$ e $s[j][k]$; poi scrivere le matrici r e s.
2. Dare la risposta all'istanza dell'SSP e, se è sì, ricostruire dalla matrice s un sottoinsieme di peso totale c, come vettore binario (x_1,x_2,x_3,x_4).
3. Usando l'ultima riga della matrice r, elencare tutti i valori obiettivo $k \in \{1,2,\ldots,8\}$ raggiungibili con i 4 oggetti.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $j = 0$ è $r[0][0] =$ T e $r[0][k] =$ F per $k \geq 1$, con $s[0][k] = 0$; T sta per *true* e F per *false*. L'oggetto j è usato ($s[j][k] = 1$) solo se $r[j-1][k]$ è F.

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
1	0	T	0	$w_1 = 2 > 0$: $r[0][0] =$ T
1	1	F	0	$w_1 = 2 > 1$: $r[0][1] =$ F
1	2	T	1	$r[0][2] \vee r[0][0] =$ F $\vee$ T $=$ T
1	3	F	0	$r[0][3] \vee r[0][1] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	4	F	0	$r[0][4] \vee r[0][2] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	5	F	0	$r[0][5] \vee r[0][3] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	6	F	0	$r[0][6] \vee r[0][4] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	7	F	0	$r[0][7] \vee r[0][5] =$ F $\vee$ F $=$ F
1	8	F	0	$r[0][8] \vee r[0][6] =$ F $\vee$ F $=$ F
2	0	T	0	$w_2 = 5 > 0$: $r[1][0] =$ T
2	1	F	0	$w_2 = 5 > 1$: $r[1][1] =$ F
2	2	T	0	$w_2 = 5 > 2$: $r[1][2] =$ T
2	3	F	0	$w_2 = 5 > 3$: $r[1][3] =$ F
2	4	F	0	$w_2 = 5 > 4$: $r[1][4] =$ F
2	5	T	1	$r[1][5] \vee r[1][0] =$ F $\vee$ T $=$ T
2	6	F	0	$r[1][6] \vee r[1][1] =$ F $\vee$ F $=$ F
2	7	T	1	$r[1][7] \vee r[1][2] =$ F $\vee$ T $=$ T
2	8	F	0	$r[1][8] \vee r[1][3] =$ F $\vee$ F $=$ F

j	k	$r[j][k]$	$s[j][k]$	Azione
3	0	T	0	$w_3 = 6 > 0$: $r[2][0] =$ T
3	1	F	0	$w_3 = 6 > 1$: $r[2][1] =$ F
3	2	T	0	$w_3 = 6 > 2$: $r[2][2] =$ T
3	3	F	0	$w_3 = 6 > 3$: $r[2][3] =$ F
3	4	F	0	$w_3 = 6 > 4$: $r[2][4] =$ F
3	5	T	0	$w_3 = 6 > 5$: $r[2][5] =$ T
3	6	T	1	$r[2][6] \vee r[2][0] =$ F $\vee$ T $=$ T
3	7	T	0	$r[2][7] \vee r[2][1] =$ T $\vee$ F $=$ T
3	8	T	1	$r[2][8] \vee r[2][2] =$ F $\vee$ T $=$ T
4	0	T	0	$w_4 = 7 > 0$: $r[3][0] =$ T
4	1	F	0	$w_4 = 7 > 1$: $r[3][1] =$ F
4	2	T	0	$w_4 = 7 > 2$: $r[3][2] =$ T
4	3	F	0	$w_4 = 7 > 3$: $r[3][3] =$ F
4	4	F	0	$w_4 = 7 > 4$: $r[3][4] =$ F
4	5	T	0	$w_4 = 7 > 5$: $r[3][5] =$ T
4	6	T	0	$w_4 = 7 > 6$: $r[3][6] =$ T
4	7	T	0	$r[3][7] \vee r[3][0] =$ T $\vee$ T $=$ T
4	8	T	0	$r[3][8] \vee r[3][1] =$ T $\vee$ F $=$ T

Questa è la matrice r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$r[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	T	F	F	F	F	F	F	F	F
$j=1$	T	F	T	F	F	F	F	F	F
$j=2$	T	F	T	F	F	T	F	T	F
$j=3$	T	F	T	F	F	T	T	T	T
$j=4$	T	F	T	F	F	T	T	T	T

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[j][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$j=2$	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$j=3$	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. Poiché $r[4][8] = \mathrm{T}$, la risposta è **sì**. Partendo da $j = 4$ e $k = 8$:

Iterazione	j	k	$s[j][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$k = 8$
1	4	8	0	0	0	0	0	$x[4] \leftarrow 0$, $k = 8$
2	3	8	1	0	0	1	0	$x[3] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 8 - 6 = 2$
3	2	2	0	0	0	1	0	$x[2] \leftarrow 0$, $k = 2$
4	1	2	1	1	0	1	0	$x[1] \leftarrow 1$, $k \leftarrow 2 - 2 = 0$

Il vettore $(1, 0, 1, 0)$ seleziona il sottoinsieme $\{1, 3\}$, di peso totale $2 + 6 = 8 = c$. È l'unico sottoinsieme con peso totale 8.

3. L'ultima riga $r[4][\cdot]$ è T esattamente per $k \in \{2, 5, 6, 7, 8\}$: questi sono i valori obiettivo raggiungibili. Gli altri valori in $\{1, 2, \ldots, 8\}$ non sono il peso totale di alcun sottoinsieme.

Capitolo 6

PD per il problema dello zaino a scelta multipla

Ricorrenza usata in questi esercizi

L'algoritmo di PD del capitolo «PD per il problema dello zaino a scelta multipla»: $v(h,k)$ è il valore ottimo con le classi $\mathscr{J}_1,\dots,\mathscr{J}_h$ e capacità k, con $v(h,k)=-\infty$ se non esiste una soluzione ammissibile, e

$$v(h,k)=\begin{cases} 0 & \text{se } h=0,\\ -\infty & \text{se } h\geq 1 \text{ e } \forall j\in\mathscr{J}_h\colon\ w_j>k,\\ \max\limits_{j\in\mathscr{J}_h\colon w_j\leq k}\{p_j+v(h-1,k-w_j)\} & \text{se } h\geq 1 \text{ e } \exists j\in\mathscr{J}_h\colon\ w_j\leq k. \end{cases}$$

con $p_j+(-\infty)=-\infty$. La matrice s memorizza l'oggetto $s[h][k]$ scelto nella classe h (0 se $v[h][k]=-\infty$); una soluzione ottima si ricostruisce da $h=q$ e $k=c$ con $j\leftarrow s[h][k]$, $x_j\leftarrow 1$, $k\leftarrow k-w_j$.

Esercizio 6.1 — Esercizio 1: problema dello zaino a scelta multipla

Consideriamo la seguente istanza dell'MCKP, con uno zaino di capacità $c=6$ e 4 oggetti partizionati in $q=2$ classi: $\mathscr{J}_1=\{1,2\}$, $\mathscr{J}_2=\{3,4\}$. I profitti e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	4	6	3	6
w_j	2	4	1	3

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $v[h][k]$ e $s[h][k]$; poi scrivere le matrici v e s.
2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima, un oggetto per classe, e riportare il valore ottimo.

3. Usando l'ultima riga della matrice v, trovare la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile e confrontarla con $\sum_{h=1}^{q} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $h = 0$ è $v[0][k] = 0$ e $s[0][k] = 0$ per ogni k; $s[h][k] = 0$ quando $v[h][k] = -\infty$. In caso di pareggio si conserva l'oggetto incontrato per primo in $\mathscr{J}_h$.

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
1	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	2	4	1	$\max\{p_1+v[0][0]\} = \max\{4\} = 4$
1	3	4	1	$\max\{p_1+v[0][1]\} = \max\{4\} = 4$
1	4	6	2	$\max\{p_1+v[0][2],\ p_2+v[0][0]\} = \max\{4,6\} = 6$
1	5	6	2	$\max\{p_1+v[0][3],\ p_2+v[0][1]\} = \max\{4,6\} = 6$
1	6	6	2	$\max\{p_1+v[0][4],\ p_2+v[0][2]\} = \max\{4,6\} = 6$
2	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	1	$-\infty$	0	$\max\{p_3+v[1][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	2	$-\infty$	0	$\max\{p_3+v[1][1]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	3	7	3	$\max\{p_3+v[1][2],\ p_4+v[1][0]\} = \max\{7,-\infty\} = 7$
2	4	7	3	$\max\{p_3+v[1][3],\ p_4+v[1][1]\} = \max\{7,-\infty\} = 7$
2	5	10	4	$\max\{p_3+v[1][4],\ p_4+v[1][2]\} = \max\{9,10\} = 10$
2	6	10	4	$\max\{p_3+v[1][5],\ p_4+v[1][3]\} = \max\{9,10\} = 10$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	$-\infty$	4	4	6	6	6
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	7	7	10	10

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	0	0	1	1	2	2	2
$h=2$	0	0	0	3	3	4	4

2. Partendo da $h = 2$ e $k = 6$:

Iterazione	h	k	$j = s[h][k]$	Selezione	Capacità
–	–	–	–	–	$k = 6$
1	2	6	4	$x[4] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 6 - 3 = 3$
2	1	3	1	$x[1] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 3 - 2 = 1$

La soluzione ottima è $S = \{1, 4\}$, cioè il vettore $x = (1, 0, 0, 1)$. Il suo peso totale è $2 + 3 = 5 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][6] = 4 + 6 = 10$.

3. L'ultima riga $v[2][\cdot]$ è $-\infty$ per $k < 3$ e finita da $k = 3$ in poi, quindi la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile è 3. È uguale a $\sum_{h=1}^{2} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j = 2+1 = 3$: l'oggetto più leggero di ogni classe deve entrare nello zaino.

Esercizio 6.2 — Esercizio 2: problema dello zaino a scelta multipla

Consideriamo la seguente istanza dell'MCKP, con uno zaino di capacità $c = 8$ e 5 oggetti partizionati in $q = 2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1, 2\}$, $\mathscr{J}_2 = \{3, 4, 5\}$. I profitti e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	6	9	2	5	6
w_j	2	4	1	3	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $v[h][k]$ e $s[h][k]$; poi scrivere le matrici v e s.
2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima, un oggetto per classe, e riportare il valore ottimo.
3. Usando l'ultima riga della matrice v, trovare la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile e confrontarla con $\sum_{h=1}^{q} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $h = 0$ è $v[0][k] = 0$ e $s[0][k] = 0$ per ogni k; $s[h][k] = 0$ quando $v[h][k] = -\infty$. In caso di pareggio si conserva l'oggetto incontrato per primo in $\mathscr{J}_h$.

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
1	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	2	6	1	$\max\{p_1+v[0][0]\} = \max\{6\} = 6$
1	3	6	1	$\max\{p_1+v[0][1]\} = \max\{6\} = 6$
1	4	9	2	$\max\{p_1+v[0][2],\ p_2+v[0][0]\} = \max\{6, 9\} = 9$
1	5	9	2	$\max\{p_1+v[0][3],\ p_2+v[0][1]\} = \max\{6, 9\} = 9$
1	6	9	2	$\max\{p_1+v[0][4],\ p_2+v[0][2]\} = \max\{6, 9\} = 9$
1	7	9	2	$\max\{p_1+v[0][5],\ p_2+v[0][3]\} = \max\{6, 9\} = 9$
1	8	9	2	$\max\{p_1+v[0][6],\ p_2+v[0][4]\} = \max\{6, 9\} = 9$
2	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	1	$-\infty$	0	$\max\{p_3+v[1][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	2	$-\infty$	0	$\max\{p_3+v[1][1]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	3	8	3	$\max\{p_3+v[1][2],\ p_4+v[1][0]\} = \max\{8, -\infty\} = 8$
2	4	8	3	$\max\{p_3+v[1][3],\ p_4+v[1][1]\} = \max\{8, -\infty\} = 8$
2	5	11	3	$\max\{p_3+v[1][4],\ p_4+v[1][2],\ p_5+v[1][0]\} = \max\{11, 11, -\infty\} = 11$
2	6	11	3	$\max\{p_3+v[1][5],\ p_4+v[1][3],\ p_5+v[1][1]\} = \max\{11, 11, -\infty\} = 11$
2	7	14	4	$\max\{p_3+v[1][6],\ p_4+v[1][4],\ p_5+v[1][2]\} = \max\{11, 14, 12\} = 14$
2	8	14	4	$\max\{p_3+v[1][7],\ p_4+v[1][5],\ p_5+v[1][3]\} = \max\{11, 14, 12\} = 14$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	$-\infty$	6	6	9	9	9	9	9
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	8	8	11	11	14	14

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	0	0	1	1	2	2	2	2	2
$h=2$	0	0	0	3	3	3	3	4	4

2. Partendo da $h = 2$ e $k = 8$:

Iterazione	h	k	$j = s[h][k]$	Selezione	Capacità
–	–	–	–	–	$k = 8$
1	2	8	4	$x[4] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 8 - 3 = 5$
2	1	5	2	$x[2] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 5 - 4 = 1$

La soluzione ottima è $S = \{2, 4\}$, cioè il vettore $x = (0, 1, 0, 1, 0)$. Il suo peso totale è $4 + 3 = 7 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][8] = 9 + 5 = 14$.

3. L'ultima riga $v[2][\cdot]$ è $-\infty$ per $k < 3$ e finita da $k = 3$ in poi, quindi la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile è 3. È uguale a $\sum_{h=1}^{2} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j = 2+1 = 3$: l'oggetto più leggero di ogni classe deve entrare nello zaino.

Esercizio 6.3 — Esercizio 3: problema dello zaino a scelta multipla

Consideriamo la seguente istanza dell'MCKP, con uno zaino di capacità $c = 8$ e 6 oggetti partizionati in $q = 3$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1, 2\}$, $\mathscr{J}_2 = \{3, 4\}$, $\mathscr{J}_3 = \{5, 6\}$. I profitti e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
p_j	2	5	3	7	4	6
w_j	2	5	1	2	4	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $v[h][k]$ e $s[h][k]$; poi scrivere le matrici v e s.
2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima, un oggetto per classe, e riportare il valore ottimo.
3. Usando l'ultima riga della matrice v, trovare la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile e confrontarla con $\sum_{h=1}^{q} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $h = 0$ è $v[0][k] = 0$ e $s[0][k] = 0$ per ogni k; $s[h][k] = 0$ quando $v[h][k] = -\infty$. In caso di pareggio si conserva l'oggetto incontrato per primo in $\mathscr{J}_h$.

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
1	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	2	2	1	$\max\{p_1+v[0][0]\} = \max\{2\} = 2$
1	3	2	1	$\max\{p_1+v[0][1]\} = \max\{2\} = 2$
1	4	2	1	$\max\{p_1+v[0][2]\} = \max\{2\} = 2$
1	5	5	2	$\max\{p_1+v[0][3], p_2+v[0][0]\} = \max\{2, 5\} = 5$
1	6	5	2	$\max\{p_1+v[0][4], p_2+v[0][1]\} = \max\{2, 5\} = 5$
1	7	5	2	$\max\{p_1+v[0][5], p_2+v[0][2]\} = \max\{2, 5\} = 5$
1	8	5	2	$\max\{p_1+v[0][6], p_2+v[0][3]\} = \max\{2, 5\} = 5$
2	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	1	$-\infty$	0	$\max\{p_3+v[1][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	2	$-\infty$	0	$\max\{p_3+v[1][1], p_4+v[1][0]\} = \max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$
2	3	5	3	$\max\{p_3+v[1][2], p_4+v[1][1]\} = \max\{5, -\infty\} = 5$
2	4	9	4	$\max\{p_3+v[1][3], p_4+v[1][2]\} = \max\{5, 9\} = 9$
2	5	9	4	$\max\{p_3+v[1][4], p_4+v[1][3]\} = \max\{5, 9\} = 9$
2	6	9	4	$\max\{p_3+v[1][5], p_4+v[1][4]\} = \max\{8, 9\} = 9$
2	7	12	4	$\max\{p_3+v[1][6], p_4+v[1][5]\} = \max\{8, 12\} = 12$
2	8	12	4	$\max\{p_3+v[1][7], p_4+v[1][6]\} = \max\{8, 12\} = 12$

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
3	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	2	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	3	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	4	$-\infty$	0	$\max\{p_5+v[2][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
3	5	$-\infty$	0	$\max\{p_5+v[2][1],\ p_6+v[2][0]\} = \max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$
3	6	$-\infty$	0	$\max\{p_5+v[2][2],\ p_6+v[2][1]\} = \max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$
3	7	9	5	$\max\{p_5+v[2][3],\ p_6+v[2][2]\} = \max\{9, -\infty\} = 9$
3	8	13	5	$\max\{p_5+v[2][4],\ p_6+v[2][3]\} = \max\{13, 11\} = 13$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	$-\infty$	2	2	2	5	5	5	5
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	5	9	9	9	12	12
$h=3$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	9	13

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	0	0	1	1	1	2	2	2	2
$h=2$	0	0	0	3	4	4	4	4	4
$h=3$	0	0	0	0	0	0	0	5	5

2. Partendo da $h=3$ e $k=8$:

Iterazione	h	k	$j = s[h][k]$	Selezione	Capacità
–	–	–	–	–	$k=8$
1	3	8	5	$x[5] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 8-4=4$
2	2	4	4	$x[4] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 4-2=2$
3	1	2	1	$x[1] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 2-2=0$

La soluzione ottima è $S = \{1,4,5\}$, cioè il vettore $x = (1,0,0,1,1,0)$. Il suo peso totale è $2+2+4 = 8 \leq c$, e il valore ottimo è $v[3][8] = 2+7+4 = 13$.

3. L'ultima riga $v[3][\cdot]$ è $-\infty$ per $k < 7$ e finita da $k=7$ in poi, quindi la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile è 7. È uguale a $\sum_{h=1}^{3} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j = 2+1+4 = 7$: l'oggetto più leggero di ogni classe deve entrare nello zaino.

Esercizio 6.4 — Esercizio 4: problema dello zaino a scelta multipla

Consideriamo la seguente istanza dell'MCKP, con uno zaino di capacità $c=7$ e 5 oggetti partizionati in $q=2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1,2,3\}$, $\mathscr{J}_2 = \{4,5\}$. I profitti e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	3	7	8	3	9
w_j	2	3	4	4	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $v[h][k]$ e $s[h][k]$; poi scrivere le matrici v e s.
2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima, un oggetto per classe, e riportare il valore ottimo.
3. Usando l'ultima riga della matrice v, trovare la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile e confrontarla con $\sum_{h=1}^{q} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $h=0$ è $v[0][k] = 0$ e $s[0][k] = 0$ per ogni k; $s[h][k] = 0$ quando $v[h][k] = -\infty$. In caso di pareggio si conserva l'oggetto incontrato per primo in $\mathscr{J}_h$.

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
1	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	2	3	1	$\max\{p_1+v[0][0]\} = \max\{3\} = 3$
1	3	7	2	$\max\{p_1+v[0][1],\ p_2+v[0][0]\} = \max\{3,7\} = 7$
1	4	8	3	$\max\{p_1+v[0][2],\ p_2+v[0][1],\ p_3+v[0][0]\} = \max\{3,7,8\} = 8$
1	5	8	3	$\max\{p_1+v[0][3],\ p_2+v[0][2],\ p_3+v[0][1]\} = \max\{3,7,8\} = 8$
1	6	8	3	$\max\{p_1+v[0][4],\ p_2+v[0][3],\ p_3+v[0][2]\} = \max\{3,7,8\} = 8$
1	7	8	3	$\max\{p_1+v[0][5],\ p_2+v[0][4],\ p_3+v[0][3]\} = \max\{3,7,8\} = 8$
2	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	2	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	3	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	4	$-\infty$	0	$\max\{p_4+v[1][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	5	$-\infty$	0	$\max\{p_4+v[1][1],\ p_5+v[1][0]\} = \max\{-\infty,-\infty\} = -\infty$
2	6	6	4	$\max\{p_4+v[1][2],\ p_5+v[1][1]\} = \max\{6,-\infty\} = 6$
2	7	12	5	$\max\{p_4+v[1][3],\ p_5+v[1][2]\} = \max\{10,12\} = 12$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	$-\infty$	3	7	8	8	8	8
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	6	12

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	0	0	1	2	3	3	3	3
$h=2$	0	0	0	0	0	0	4	5

2. Partendo da $h=2$ e $k=7$:

Iterazione	h	k	$j=s[h][k]$	Selezione	Capacità
–	–	–	–	–	$k=7$
1	2	7	5	$x[5]\leftarrow 1$	$k\leftarrow 7-5=2$
2	1	2	1	$x[1]\leftarrow 1$	$k\leftarrow 2-2=0$

La soluzione ottima è $S=\{1,5\}$, cioè il vettore $x=(1,0,0,0,1)$. Il suo peso totale è $2+5=7\leq c$, e il valore ottimo è $v[2][7]=3+9=12$.

3. L'ultima riga $v[2][\cdot]$ è $-\infty$ per $k<6$ e finita da $k=6$ in poi, quindi la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile è 6. È uguale a $\sum_{h=1}^{2}\min_{j\in\mathscr{J}_h} w_j = 2+4=6$: l'oggetto più leggero di ogni classe deve entrare nello zaino.

Esercizio 6.5 — Esercizio 5: problema dello zaino a scelta multipla

Consideriamo la seguente istanza dell'MCKP, con uno zaino di capacità $c=9$ e 6 oggetti partizionati in $q=3$ classi: $\mathscr{J}_1=\{1,2\}$, $\mathscr{J}_2=\{3,4\}$, $\mathscr{J}_3=\{5,6\}$. I profitti e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
p_j	3	6	2	7	3	6
w_j	1	4	1	3	4	5

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni passo, le celle $v[h][k]$ e $s[h][k]$; poi scrivere le matrici v e s.
2. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima, un oggetto per classe, e riportare il valore ottimo.
3. Usando l'ultima riga della matrice v, trovare la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile e confrontarla con $\sum_{h=1}^{q}\min_{j\in\mathscr{J}_h} w_j$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up. La riga $h=0$ è $v[0][k]=0$ e $s[0][k]=0$ per ogni k; $s[h][k]=0$ quando $v[h][k]=-\infty$. In caso di pareggio si

conserva l'oggetto incontrato per primo in $\mathscr{J}_h$.

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
1	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_1$ entra: $-\infty$
1	1	3	1	$\max\{p_1{+}v[0][0]\} = \max\{3\} = 3$
1	2	3	1	$\max\{p_1{+}v[0][1]\} = \max\{3\} = 3$
1	3	3	1	$\max\{p_1{+}v[0][2]\} = \max\{3\} = 3$
1	4	6	2	$\max\{p_1{+}v[0][3],\ p_2{+}v[0][0]\} = \max\{3,6\} = 6$
1	5	6	2	$\max\{p_1{+}v[0][4],\ p_2{+}v[0][1]\} = \max\{3,6\} = 6$
1	6	6	2	$\max\{p_1{+}v[0][5],\ p_2{+}v[0][2]\} = \max\{3,6\} = 6$
1	7	6	2	$\max\{p_1{+}v[0][6],\ p_2{+}v[0][3]\} = \max\{3,6\} = 6$
1	8	6	2	$\max\{p_1{+}v[0][7],\ p_2{+}v[0][4]\} = \max\{3,6\} = 6$
1	9	6	2	$\max\{p_1{+}v[0][8],\ p_2{+}v[0][5]\} = \max\{3,6\} = 6$
2	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_2$ entra: $-\infty$
2	1	$-\infty$	0	$\max\{p_3{+}v[1][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
2	2	5	3	$\max\{p_3{+}v[1][1]\} = \max\{5\} = 5$
2	3	5	3	$\max\{p_3{+}v[1][2],\ p_4{+}v[1][0]\} = \max\{5,-\infty\} = 5$
2	4	10	4	$\max\{p_3{+}v[1][3],\ p_4{+}v[1][1]\} = \max\{5,10\} = 10$
2	5	10	4	$\max\{p_3{+}v[1][4],\ p_4{+}v[1][2]\} = \max\{8,10\} = 10$
2	6	10	4	$\max\{p_3{+}v[1][5],\ p_4{+}v[1][3]\} = \max\{8,10\} = 10$
2	7	13	4	$\max\{p_3{+}v[1][6],\ p_4{+}v[1][4]\} = \max\{8,13\} = 13$
2	8	13	4	$\max\{p_3{+}v[1][7],\ p_4{+}v[1][5]\} = \max\{8,13\} = 13$
2	9	13	4	$\max\{p_3{+}v[1][8],\ p_4{+}v[1][6]\} = \max\{8,13\} = 13$

h	k	$v[h][k]$	$s[h][k]$	Azione
3	0	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	1	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	2	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	3	$-\infty$	0	nessun oggetto di $\mathscr{J}_3$ entra: $-\infty$
3	4	$-\infty$	0	$\max\{p_5{+}v[2][0]\} = \max\{-\infty\} = -\infty$
3	5	$-\infty$	0	$\max\{p_5{+}v[2][1],\ p_6{+}v[2][0]\} = \max\{-\infty,-\infty\} = -\infty$
3	6	8	5	$\max\{p_5{+}v[2][2],\ p_6{+}v[2][1]\} = \max\{8,-\infty\} = 8$
3	7	11	6	$\max\{p_5{+}v[2][3],\ p_6{+}v[2][2]\} = \max\{8,11\} = 11$
3	8	13	5	$\max\{p_5{+}v[2][4],\ p_6{+}v[2][3]\} = \max\{13,11\} = 13$
3	9	16	6	$\max\{p_5{+}v[2][5],\ p_6{+}v[2][4]\} = \max\{13,16\} = 16$

Questa è la matrice v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	$-\infty$	3	3	3	6	6	6	6	6	6
$h=2$	$-\infty$	$-\infty$	5	5	10	10	10	13	13	13
$h=3$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	8	11	13	16

Questa è la matrice s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$s[h][k]$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$h=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$h=1$	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
$h=2$	0	0	3	3	4	4	4	4	4	4
$h=3$	0	0	0	0	0	0	5	6	5	6

2. Partendo da $h=3$ e $k=9$:

Iterazione	h	k	$j=s[h][k]$	Selezione	Capacità
–	–	–	–	–	$k=9$
1	3	9	6	$x[6] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 9-5=4$
2	2	4	4	$x[4] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 4-3=1$
3	1	1	1	$x[1] \leftarrow 1$	$k \leftarrow 1-1=0$

   La soluzione ottima è $S=\{1,4,6\}$, cioè il vettore $x=(1,0,0,1,0,1)$. Il suo peso totale è $1+3+5=9 \leq c$, e il valore ottimo è $v[3][9]=3+7+6=16$.

3. L'ultima riga $v[3][\cdot]$ è $-\infty$ per $k<6$ e finita da $k=6$ in poi, quindi la minima capacità per cui l'istanza è ammissibile è 6. È uguale a $\sum_{h=1}^{3} \min_{j \in \mathscr{J}_h} w_j = 1+1+4=6$: l'oggetto più leggero di ogni classe deve entrare nello zaino.

Capitolo 7

PD per il problema dello zaino multidimensionale

Ricorrenza usata in questi esercizi

L'algoritmo di PD del capitolo «PD per il problema dello zaino multidimensionale», con m dimensioni, il vettore $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ delle capacità e il vettore dei pesi $\boldsymbol{w}_j = (w_{1j}, \ldots, w_{mj})$ dell'oggetto j:

$$v(j, \boldsymbol{k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 0, \\ v(j-1, \boldsymbol{k}) & \text{se } j \geq 1 \text{ e} \\ & w_{dj} > k_d \text{ per qualche } d, \\ \max\Big\{ v(j-1, \boldsymbol{k}), & \text{se } j \geq 1 \text{ e } \boldsymbol{w}_j \leq \boldsymbol{k}. \\ \quad p_j + v(j-1, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{w}_j) \Big\} & \end{cases}$$

Il valore ottimo è $v(n, \boldsymbol{c})$. Le tabelle s memorizzano $s[j][\boldsymbol{k}] = 1$ se l'oggetto j è selezionato; una soluzione ottima si ricostruisce da $j = n$ e $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$ con $x_j \leftarrow s[j][\boldsymbol{k}]$, $\boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{k} - x_j \boldsymbol{w}_j$.

Esercizio 7.1 — Esercizio 1: problema dello zaino multidimensionale

Consideriamo la seguente istanza dell'MDKP, con $m = 2$ dimensioni, capacità $c_1 = 3$ e $c_2 = 3$, e 3 oggetti con profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
p_j	9	8	6
w_{1j}	2	1	2
w_{2j}	2	2	1

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$.

2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima (x_1, x_2, x_3) e riportare il valore ottimo.

3. Determinare quante celle ha la tabella dell'algoritmo di PD, compresa la riga $j = 0$, e quante ne avrebbe con una terza dimensione di capacità $c_3 = 3$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in caso di pareggio l'oggetto j non viene selezionato.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 9$ e $\boldsymbol{w}_1 = (2, 2)$: $v[1][(3, 3)] = \max\{v[0][(3, 3)], p_1 + v[0][(1, 1)]\} = \max\{0, 9 + 0\} = 9$; $\boldsymbol{w}_1 = (2, 2) \not\leq (0, 0)$, quindi $v[1][(0, 0)] = v[0][(0, 0)] = 0$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	9	9
$k_1 = 3$	0	0	9	9

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	1	1
$k_1 = 3$	0	0	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 8$ e $\boldsymbol{w}_2 = (1, 2)$: $v[2][(3, 3)] = \max\{v[1][(3, 3)], p_2 + v[1][(2, 1)]\} = \max\{9, 8 + 0\} = 9$; $v[2][(1, 2)] = \max\{v[1][(1, 2)], p_2 + v[1][(0, 0)]\} = \max\{0, 8 + 0\} = 8$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	8	8
$k_1 = 2$	0	0	9	9
$k_1 = 3$	0	0	9	9

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	1	1
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	0

   Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 6$ e $\boldsymbol{w}_3 = (2, 1)$: $v[3][(3, 3)] = \max\{v[2][(3, 3)], p_3 + v[2][(1, 2)]\} = \max\{9, 6 + 8\} = 14$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	8	8
$k_1=2$	0	6	9	9
$k_1=3$	0	6	9	14

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0
$k_1=2$	0	1	0	0
$k_1=3$	0	1	0	1

2. Partendo da $j=3$ e $\boldsymbol{k}=(3,3)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(3,3)$
1	3	$(3,3)$	1	0	0	1	$x[3]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(3,3)-(2,1)=(1,2)$
2	2	$(1,2)$	1	0	1	1	$x[2]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(1,2)-(1,2)=(0,0)$
3	1	$(0,0)$	0	0	1	1	$x[1]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(0,0)$

   Il vettore $(0,1,1)$ è una soluzione ottima: i suoi pesi sono $1+2=3\le c_1$ e $2+1=3\le c_2$, e il valore ottimo è $v[3][(3,3)]=8+6=14$.

3. La tabella ha $(n+1)(c_1+1)(c_2+1)=4\cdot 4\cdot 4=64$ celle. Una terza dimensione di capacità $c_3=3$ moltiplica questo numero per $c_3+1=4$, e dà 256 celle: ogni nuova dimensione moltiplica il numero di stati.

Esercizio 7.2 — Esercizio 2: problema dello zaino multidimensionale

Consideriamo la seguente istanza dell'MDKP, con $m=2$ dimensioni, capacità $c_1=4$ e $c_2=3$, e 3 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
p_j	4	7	5
w_{1j}	3	2	1
w_{2j}	1	2	2

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima (x_1,x_2,x_3) e riportare il valore ottimo.
3. Determinare quante celle ha la tabella dell'algoritmo di PD, compresa la riga $j=0$, e quante ne avrebbe con una terza dimensione di capacità $c_3=3$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in caso di pareggio l'oggetto j non viene selezionato.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 4$ e $\boldsymbol{w}_1 = (3, 1)$: $v[1][(4, 3)] = \max\{v[0][(4, 3)], p_1 + v[0][(1, 2)]\} = \max\{0, 4 + 0\} = 4$; $v[1][(3, 1)] = \max\{v[0][(3, 1)], p_1 + v[0][(0, 0)]\} = \max\{0, 4 + 0\} = 4$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	4	4	4
$k_1 = 4$	0	4	4	4

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	1	1	1
$k_1 = 4$	0	1	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 7$ e $\boldsymbol{w}_2 = (2, 2)$: $v[2][(4, 3)] = \max\{v[1][(4, 3)], p_2 + v[1][(2, 1)]\} = \max\{4, 7 + 0\} = 7$; $\boldsymbol{w}_2 = (2, 2) \not\leq (3, 1)$, quindi $v[2][(3, 1)] = v[1][(3, 1)] = 4$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	7	7
$k_1 = 3$	0	4	7	7
$k_1 = 4$	0	4	7	7

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	1	1
$k_1 = 3$	0	0	1	1
$k_1 = 4$	0	0	1	1

   Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 5$ e $\boldsymbol{w}_3 = (1, 2)$: $v[3][(4, 3)] = \max\{v[2][(4, 3)], p_3 + v[2][(3, 1)]\} = \max\{7, 5 + 4\} = 9$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	5	5
$k_1=2$	0	0	7	7
$k_1=3$	0	4	7	7
$k_1=4$	0	4	7	9

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	1	1
$k_1=2$	0	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0	0
$k_1=4$	0	0	0	1

2. Partendo da $j=3$ e $\boldsymbol{k}=(4,3)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(4,3)$
1	3	$(4,3)$	1	0	0	1	$x[3]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(4,3)-(1,2)=(3,1)$
2	2	$(3,1)$	0	0	0	1	$x[2]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(3,1)$
3	1	$(3,1)$	1	1	0	1	$x[1]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(3,1)-(3,1)=(0,0)$

   Il vettore $(1,0,1)$ è una soluzione ottima: i suoi pesi sono $3+1=4\le c_1$ e $1+2=3\le c_2$, e il valore ottimo è $v[3][(4,3)]=4+5=9$.

3. La tabella ha $(n+1)(c_1+1)(c_2+1)=4\cdot 5\cdot 4=80$ celle. Una terza dimensione di capacità $c_3=3$ moltiplica questo numero per $c_3+1=4$, e dà 320 celle: ogni nuova dimensione moltiplica il numero di stati.

Esercizio 7.3 — Esercizio 3: problema dello zaino multidimensionale

Consideriamo la seguente istanza dell'MDKP, con $m=2$ dimensioni, capacità $c_1=3$ e $c_2=4$, e 3 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
p_j	6	6	9
w_{1j}	2	1	2
w_{2j}	1	2	3

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima (x_1,x_2,x_3) e riportare il valore ottimo.

3. Determinare quante celle ha la tabella dell'algoritmo di PD, compresa la riga $j = 0$, e quante ne avrebbe con una terza dimensione di capacità $c_3 = 3$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in caso di pareggio l'oggetto j non viene selezionato.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 6$ e $\boldsymbol{w}_1 = (2, 1)$: $v[1][(3, 4)] = \max\{v[0][(3, 4)], p_1 + v[0][(1, 3)]\} = \max\{0, 6 + 0\} = 6$; $v[1][(2, 2)] = \max\{v[0][(2, 2)], p_1 + v[0][(0, 1)]\} = \max\{0, 6 + 0\} = 6$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$
$k_1 = 0$	0	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	6	6	6	6
$k_1 = 3$	0	6	6	6	6

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$
$k_1 = 0$	0	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	1	1	1	1
$k_1 = 3$	0	1	1	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 6$ e $\boldsymbol{w}_2 = (1, 2)$: $v[2][(3, 4)] = \max\{v[1][(3, 4)], p_2 + v[1][(2, 2)]\} = \max\{6, 6 + 6\} = 12$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$
$k_1 = 0$	0	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	6	6	6
$k_1 = 2$	0	6	6	6	6
$k_1 = 3$	0	6	6	12	12

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$
$k_1 = 0$	0	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	1	1	1
$k_1 = 2$	0	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	1	1

   Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 9$ e $\boldsymbol{w}_3 = (2, 3)$: $v[3][(3, 4)] = \max\{v[2][(3, 4)], p_3 + v[2][(1, 1)]\} = \max\{12, 9 + 0\} = 12$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$
$k_1 = 0$	0	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	6	6	6
$k_1 = 2$	0	6	6	9	9
$k_1 = 3$	0	6	6	12	12

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0	1	1
$k_1=3$	0	0	0	0	0

2. Partendo da $j=3$ e $\boldsymbol{k}=(3,4)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(3,4)$
1	3	$(3,4)$	0	0	0	0	$x[3]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(3,4)$
2	2	$(3,4)$	1	0	1	0	$x[2]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(3,4)-(1,2)=(2,2)$
3	1	$(2,2)$	1	1	1	0	$x[1]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(2,2)-(2,1)=(0,1)$

   Il vettore $(1,1,0)$ è una soluzione ottima: i suoi pesi sono $2+1=3\leq c_1$ e $1+2=3\leq c_2$, e il valore ottimo è $v[3][(3,4)]=6+6=12$.

3. La tabella ha $(n+1)(c_1+1)(c_2+1)=4\cdot 4\cdot 5=80$ celle. Una terza dimensione di capacità $c_3=3$ moltiplica questo numero per $c_3+1=4$, e dà 320 celle: ogni nuova dimensione moltiplica il numero di stati.

Esercizio 7.4 — Esercizio 4: problema dello zaino multidimensionale

Consideriamo la seguente istanza dell'MDKP, con $m=2$ dimensioni, capacità $c_1=4$ e $c_2=3$, e 4 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	7	3	7	5
w_{1j}	2	1	1	2
w_{2j}	1	2	1	1

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima (x_1,x_2,x_3,x_4) e riportare il valore ottimo.
3. Determinare quante celle ha la tabella dell'algoritmo di PD, compresa la riga $j=0$, e quante ne avrebbe con una terza dimensione di capacità $c_3=3$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in caso di pareggio l'oggetto j non viene selezionato.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 7$ e $\boldsymbol{w}_1 = (2, 1)$: $v[1][(4, 3)] = \max\{v[0][(4, 3)],\ p_1 + v[0][(2, 2)]\} = \max\{0,\ 7 + 0\} = 7$; $v[1][(3, 2)] = \max\{v[0][(3, 2)],\ p_1 + v[0][(1, 1)]\} = \max\{0,\ 7 + 0\} = 7$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	7	7	7
$k_1 = 3$	0	7	7	7
$k_1 = 4$	0	7	7	7

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	1	1	1
$k_1 = 3$	0	1	1	1
$k_1 = 4$	0	1	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 3$ e $\boldsymbol{w}_2 = (1, 2)$: $v[2][(4, 3)] = \max\{v[1][(4, 3)],\ p_2 + v[1][(3, 1)]\} = \max\{7,\ 3 + 7\} = 10$; $v[2][(3, 2)] = \max\{v[1][(3, 2)],\ p_2 + v[1][(2, 0)]\} = \max\{7,\ 3 + 0\} = 7$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	3	3
$k_1 = 2$	0	7	7	7
$k_1 = 3$	0	7	7	10
$k_1 = 4$	0	7	7	10

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	1	1
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	1
$k_1 = 4$	0	0	0	1

   Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 7$ e $\boldsymbol{w}_3 = (1, 1)$: $v[3][(4, 3)] = \max\{v[2][(4, 3)],\ p_3 + v[2][(3, 2)]\} = \max\{10,\ 7 + 7\} = 14$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	7	7	7
$k_1 = 2$	0	7	7	10
$k_1 = 3$	0	7	14	14
$k_1 = 4$	0	7	14	14

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	1	1	1
$k_1=2$	0	0	0	1
$k_1=3$	0	0	1	1
$k_1=4$	0	0	1	1

Oggetto $j=4$, con $p_4=5$ e $\boldsymbol{w}_4=(2,1)$: $v[4][(4,3)] = \max\{v[3][(4,3)],\, p_4 + v[3][(2,2)]\} = \max\{14,\, 5+7\} = 14$.

$v[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	7	7	7
$k_1=2$	0	7	7	10
$k_1=3$	0	7	14	14
$k_1=4$	0	7	14	14

$s[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0	0
$k_1=4$	0	0	0	0

2. Partendo da $j=4$ e $\boldsymbol{k}=(4,3)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(4,3)$
1	4	$(4,3)$	0	0	0	0	0	$x[4]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(4,3)$
2	3	$(4,3)$	1	0	0	1	0	$x[3]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(4,3)-(1,1)=(3,2)$
3	2	$(3,2)$	0	0	0	1	0	$x[2]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(3,2)$
4	1	$(3,2)$	1	1	0	1	0	$x[1]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(3,2)-(2,1)=(1,1)$

Il vettore $(1,0,1,0)$ è una soluzione ottima: i suoi pesi sono $2+1=3\le c_1$ e $1+1=2\le c_2$, e il valore ottimo è $v[4][(4,3)]=7+7=14$.

3. La tabella ha $(n+1)(c_1+1)(c_2+1)=5\cdot 5\cdot 4=100$ celle. Una terza dimensione di capacità $c_3=3$ moltiplica questo numero per $c_3+1=4$, e dà 400 celle: ogni nuova dimensione moltiplica il numero di stati.

Esercizio 7.5 — Esercizio 5: problema dello zaino multidimensionale

Consideriamo la seguente istanza dell'MDKP, con $m=2$ dimensioni, capacità $c_1=4$ e $c_2=4$, e 4 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	6	7	2	8
w_{1j}	2	3	1	1
w_{2j}	1	1	3	1

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima (x_1, x_2, x_3, x_4) e riportare il valore ottimo.
3. Determinare quante celle ha la tabella dell'algoritmo di PD, compresa la riga $j = 0$, e quante ne avrebbe con una terza dimensione di capacità $c_3 = 3$.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in caso di pareggio l'oggetto j non viene selezionato.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 6$ e $\boldsymbol{w}_1 = (2, 1)$: $v[1][(4,4)] = \max\{v[0][(4,4)],\ p_1 + v[0][(2,3)]\} = \max\{0,\ 6+0\} = 6$; $\boldsymbol{w}_1 = (2,1) \not\leq (0,2)$, quindi $v[1][(0,2)] = v[0][(0,2)] = 0$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0	0
$k_1=2$	0	6	6	6	6
$k_1=3$	0	6	6	6	6
$k_1=4$	0	6	6	6	6

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0	0
$k_1=2$	0	1	1	1	1
$k_1=3$	0	1	1	1	1
$k_1=4$	0	1	1	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 7$ e $\boldsymbol{w}_2 = (3, 1)$: $v[2][(4,4)] = \max\{v[1][(4,4)],\ p_2 + v[1][(1,3)]\} = \max\{6,\ 7+0\} = 7$; $v[2][(3,3)] = \max\{v[1][(3,3)],\ p_2 + v[1][(0,2)]\} = \max\{6,\ 7+0\} = 7$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0	0
$k_1=2$	0	6	6	6	6
$k_1=3$	0	7	7	7	7
$k_1=4$	0	7	7	7	7

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0	0	0
$k_1=3$	0	1	1	1	1
$k_1=4$	0	1	1	1	1

Oggetto $j=3$, con $p_3=2$ e $\boldsymbol{w}_3=(1,3)$: $v[3][(4,4)]=\max\{v[2][(4,4)],\, p_3+v[2][(3,1)]\}=\max\{7,\, 2+7\}=9$; $v[3][(3,3)]=\max\{v[2][(3,3)],\, p_3+v[2][(2,0)]\}=\max\{7,\, 2+0\}=7$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	2	2
$k_1=2$	0	6	6	6	6
$k_1=3$	0	7	7	7	8
$k_1=4$	0	7	7	7	9

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	1	1
$k_1=2$	0	0	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0	0	1
$k_1=4$	0	0	0	0	1

Oggetto $j=4$, con $p_4=8$ e $\boldsymbol{w}_4=(1,1)$: $v[4][(4,4)]=\max\{v[3][(4,4)],\, p_4+v[3][(3,3)]\}=\max\{9,\, 8+7\}=15$.

$v[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	8	8	8	8
$k_1=2$	0	8	8	8	10
$k_1=3$	0	8	14	14	14
$k_1=4$	0	8	15	15	15

$s[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$
$k_1=0$	0	0	0	0	0
$k_1=1$	0	1	1	1	1
$k_1=2$	0	1	1	1	1
$k_1=3$	0	1	1	1	1
$k_1=4$	0	1	1	1	1

2. Partendo da $j = 4$ e $\boldsymbol{k} = (4, 4)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$\boldsymbol{k} = (4, 4)$
1	4	$(4, 4)$	1	0	0	0	1	$x[4] \leftarrow 1$, $\boldsymbol{k} \leftarrow (4, 4) - (1, 1) = (3, 3)$
2	3	$(3, 3)$	0	0	0	0	1	$x[3] \leftarrow 0$, $\boldsymbol{k} = (3, 3)$
3	2	$(3, 3)$	1	0	1	0	1	$x[2] \leftarrow 1$, $\boldsymbol{k} \leftarrow (3, 3) - (3, 1) = (0, 2)$
4	1	$(0, 2)$	0	0	1	0	1	$x[1] \leftarrow 0$, $\boldsymbol{k} = (0, 2)$

   Il vettore $(0, 1, 0, 1)$ è una soluzione ottima: i suoi pesi sono $3 + 1 = 4 \leq c_1$ e $1 + 1 = 2 \leq c_2$, e il valore ottimo è $v[4][(4, 4)] = 7 + 8 = 15$.

3. La tabella ha $(n + 1)(c_1 + 1)(c_2 + 1) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ celle. Una terza dimensione di capacità $c_3 = 3$ moltiplica questo numero per $c_3 + 1 = 4$, e dà 500 celle: ogni nuova dimensione moltiplica il numero di stati.

PD per il problema dello zaino con setup

Ricorrenza usata in questi esercizi

L'algoritmo di PD del capitolo «PD per il problema dello zaino con setup». Gli oggetti sono numerati classe per classe, $\mathscr{J}_h = \{\ell_{h-1}+1, \ldots, \ell_h\}$, $t_h = |\mathscr{J}_h|$, e $j = \ell_{h-1} + i$ è l'i-esimo oggetto della classe h:

$$u(h,i,k) = \begin{cases} -\infty & \text{se } i = 0 \text{ e } k < s_h, \\ v(h-1, k-s_h) - f_h & \text{se } i = 0 \text{ e } k \geq s_h, \\ u(h, i-1, k) & \text{se } i \geq 1 \text{ e } w_j > k, \\ \max\Big\{u(h,i-1,k), & \text{se } i \geq 1 \text{ e } w_j \leq k, \\ \quad p_j + u(h, i-1, k-w_j)\Big\} & \end{cases}$$

$$v(h,k) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 0, \\ \max\big\{v(h-1,k),\ u(h,t_h,k)\big\} & \text{se } h \geq 1. \end{cases}$$

Il valore ottimo è $v(q,c)$. Le tabelle delle scelte memorizzano $s[h][i][k] = 1$ se l'i-esimo oggetto della classe h è selezionato, e $o[h][k] = 1$ se la classe h è aperta. La ricostruzione scorre le classi a partire da $h = q$ e $k = c$: una classe aperta si scorre come nel KP, e poi k diminuisce di s_h.

Esercizio 8.1 — Esercizio 1: problema dello zaino con setup

Consideriamo la seguente istanza del KPS, con uno zaino di capacità $c = 7$ e 4 oggetti partizionati in $q = 2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1,2\}$ con $f_1 = 2$ e $s_1 = 1$, $\mathscr{J}_2 = \{3,4\}$ con $f_2 = 2$ e $s_2 = 1$. I ricavi e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	2	9	3	8
w_j	2	1	2	1

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up e scrivere la tabella di tutte le righe $v[h][\cdot]$ e $u[h][i][\cdot]$, nell'ordine di calcolo.
2. Scrivere le tabelle delle scelte s e o, ricostruire una soluzione ottima (x_1, x_2, x_3, x_4), dire quali classi sono aperte e riportare il valore ottimo.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Per ogni classe h l'algoritmo di PD calcola la riga di setup $u[h][0][\cdot]$, le righe degli oggetti della classe h e la riga $v[h][\cdot]$. In caso di pareggio l'oggetto non viene selezionato e la classe resta chiusa. Questa è la tabella dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$v[0][k]$	0	0	0	0	0	0	0	0
$u[1][0][k]$ (setup)	$-\infty$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
$u[1][1][k]$ $(j=1)$	$-\infty$	-2	-2	0	0	0	0	0
$u[1][2][k]$ $(j=2)$	$-\infty$	-2	7	7	9	9	9	9
$v[1][k]$	0	0	7	7	9	9	9	9
$u[2][0][k]$ (setup)	$-\infty$	-2	-2	5	5	7	7	7
$u[2][1][k]$ $(j=3)$	$-\infty$	-2	-2	5	5	8	8	10
$u[2][2][k]$ $(j=4)$	$-\infty$	-2	6	6	13	13	16	16
$v[2][k]$	0	0	7	7	13	13	16	16

   Questi sono i calcoli delle celle usate dalla ricostruzione, nell'ordine in cui essa le legge:

   - $v[2][7] = \max\{v[1][7],\ u[2][2][7]\} = \max\{9,\ 16\} = 16$
   - $u[2][2][7] = \max\{u[2][1][7],\ p_4 + u[2][1][6]\} = \max\{10,\ 16\} = 16$
   - $u[2][1][6] = \max\{u[2][0][6],\ p_3 + u[2][0][4]\} = \max\{7,\ 8\} = 8$
   - $u[2][0][4] = v[1][3] - f_2 = 7 - 2 = 5$
   - $v[1][3] = \max\{v[0][3],\ u[1][2][3]\} = \max\{0,\ 7\} = 7$
   - $u[1][2][3] = \max\{u[1][1][3],\ p_2 + u[1][1][2]\} = \max\{0,\ 7\} = 7$
   - $u[1][1][2] = \max\{u[1][0][2],\ p_1 + u[1][0][0]\} = \max\{-2,\ -\infty\} = -2$
   - $u[1][0][2] = v[0][1] - f_1 = 0 - 2 = -2$

2. Queste sono le tabelle delle scelte calcolate dall'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$s[1][1][k]$ $(j=1)$	0	0	0	1	1	1	1	1
$s[1][2][k]$ $(j=2)$	0	0	1	1	1	1	1	1
$o[1][k]$	0	0	1	1	1	1	1	1
$s[2][1][k]$ $(j=3)$	0	0	0	0	0	1	1	1
$s[2][2][k]$ $(j=4)$	0	0	1	1	1	1	1	1
$o[2][k]$	0	0	0	0	1	1	1	1

Partendo da $h = 2$ e $k = 7$:

Iterazione	Stadio	k	Scelta	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$k = 7$
1	$h = 2$	7	$o[2][7] = 1$	0	0	0	0	classe 2 aperta
2	$j = 4$	7	$s[2][2][7] = 1$	0	0	0	1	$k \leftarrow 7 - 1 = 6$
3	$j = 3$	6	$s[2][1][6] = 1$	0	0	1	1	$k \leftarrow 6 - 2 = 4$
–	–	4	–	0	0	1	1	setup: $k \leftarrow 4 - s_2 = 3$
4	$h = 1$	3	$o[1][3] = 1$	0	0	1	1	classe 1 aperta
5	$j = 2$	3	$s[1][2][3] = 1$	0	1	1	1	$k \leftarrow 3 - 1 = 2$
6	$j = 1$	2	$s[1][1][2] = 0$	0	1	1	1	$k = 2$
–	–	2	–	0	1	1	1	setup: $k \leftarrow 2 - s_1 = 1$

Il vettore $(0, 1, 1, 1)$ è una soluzione ottima: entrambe le classi sono aperte, e sono selezionati gli oggetti $\{2, 3, 4\}$. Il suo peso totale è $1 + 2 + 1 + s_1 + s_2 = 6 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][7] = 9 + 3 + 8 - f_1 - f_2 = 16$.

Esercizio 8.2 — Esercizio 2: problema dello zaino con setup

Consideriamo la seguente istanza del KPS, con uno zaino di capacità $c = 7$ e 4 oggetti partizionati in $q = 2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1, 2\}$ con $f_1 = 4$ e $s_1 = 2$, $\mathscr{J}_2 = \{3, 4\}$ con $f_2 = 4$ e $s_2 = 1$. I ricavi e i pesi sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	7	5	9	2
w_j	3	3	3	3

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up e scrivere la tabella di tutte le righe $v[h][\cdot]$ e $u[h][i][\cdot]$, nell'ordine di calcolo.
2. Scrivere le tabelle delle scelte s e o, ricostruire una soluzione ottima (x_1, x_2, x_3, x_4), dire quali classi sono aperte e riportare il valore ottimo.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Per ogni classe h l'algoritmo di PD calcola la riga di setup $u[h][0][\cdot]$, le righe degli oggetti della classe h e la riga $v[h][\cdot]$. In caso di pareggio l'oggetto non viene selezionato e la classe resta chiusa. Questa è la tabella dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$v[0][k]$	0	0	0	0	0	0	0	0
$u[1][0][k]$ (setup)	$-\infty$	$-\infty$	-4	-4	-4	-4	-4	-4
$u[1][1][k]$ $(j=1)$	$-\infty$	$-\infty$	-4	-4	-4	3	3	3
$u[1][2][k]$ $(j=2)$	$-\infty$	$-\infty$	-4	-4	-4	3	3	3
$v[1][k]$	0	0	0	0	0	3	3	3
$u[2][0][k]$ (setup)	$-\infty$	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-1
$u[2][1][k]$ $(j=3)$	$-\infty$	-4	-4	-4	5	5	5	5
$u[2][2][k]$ $(j=4)$	$-\infty$	-4	-4	-4	5	5	5	7
$v[2][k]$	0	0	0	0	5	5	5	7

Questi sono i calcoli delle celle usate dalla ricostruzione, nell'ordine in cui essa le legge:

- $v[2][7] = \max\{v[1][7],\, u[2][2][7]\} = \max\{3,\, 7\} = 7$
- $u[2][2][7] = \max\{u[2][1][7],\, p_4 + u[2][1][4]\} = \max\{5,\, 7\} = 7$
- $u[2][1][4] = \max\{u[2][0][4],\, p_3 + u[2][0][1]\} = \max\{-4,\, 5\} = 5$
- $u[2][0][1] = v[1][0] - f_2 = 0 - 4 = -4$
- $v[1][0] = \max\{v[0][0],\, u[1][2][0]\} = \max\{0,\, -\infty\} = 0$

2. Queste sono le tabelle delle scelte calcolate dall'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$s[1][1][k]$ $(j=1)$	0	0	0	0	0	1	1	1
$s[1][2][k]$ $(j=2)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$o[1][k]$	0	0	0	0	0	1	1	1
$s[2][1][k]$ $(j=3)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$s[2][2][k]$ $(j=4)$	0	0	0	0	0	0	0	1
$o[2][k]$	0	0	0	0	1	1	1	1

Partendo da $h = 2$ e $k = 7$:

Iterazione	Stadio	k	Scelta	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$k = 7$
1	$h = 2$	7	$o[2][7] = 1$	0	0	0	0	classe 2 aperta
2	$j = 4$	7	$s[2][2][7] = 1$	0	0	0	1	$k \leftarrow 7 - 3 = 4$
3	$j = 3$	4	$s[2][1][4] = 1$	0	0	1	1	$k \leftarrow 4 - 3 = 1$
–	–	1	–	0	0	1	1	setup: $k \leftarrow 1 - s_2 = 0$
4	$h = 1$	0	$o[1][0] = 0$	0	0	1	1	classe 1 chiusa

Il vettore $(0, 0, 1, 1)$ è una soluzione ottima: solo la classe 2 è aperta, e sono selezionati gli oggetti $\{3, 4\}$. Il suo peso totale è $3 + 3 + s_2 = 7 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][7] = 9 + 2 - f_2 = 7$.

Esercizio 8.3 — Esercizio 3: problema dello zaino con setup

Consideriamo la seguente istanza del KPS, con uno zaino di capacità $c = 8$ e 5 oggetti partizionati in $q = 2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1, 2\}$ con $f_1 = 1$ e $s_1 = 1$, $\mathscr{J}_2 = \{3, 4, 5\}$ con $f_2 = 2$ e $s_2 = 2$. I ricavi e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	3	9	5	7	9
w_j	4	1	1	3	1

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up e scrivere la tabella di tutte le righe $v[h][\cdot]$ e $u[h][i][\cdot]$, nell'ordine di calcolo.
2. Scrivere le tabelle delle scelte s e o, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dire quali classi sono aperte e riportare il valore ottimo.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Per ogni classe h l'algoritmo di PD calcola la riga di setup $u[h][0][\cdot]$, le righe degli oggetti della classe h e la riga $v[h][\cdot]$. In caso di pareggio l'oggetto non viene selezionato e la classe resta chiusa. Questa è la tabella dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$v[0][k]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u[1][0][k]$ (setup)	$-\infty$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$u[1][1][k]$ $(j=1)$	$-\infty$	-1	-1	-1	-1	2	2	2	2
$u[1][2][k]$ $(j=2)$	$-\infty$	-1	8	8	8	8	11	11	11
$v[1][k]$	0	0	8	8	8	8	11	11	11
$u[2][0][k]$ (setup)	$-\infty$	$-\infty$	-2	-2	6	6	6	6	9
$u[2][1][k]$ $(j=3)$	$-\infty$	$-\infty$	-2	3	6	11	11	11	11
$u[2][2][k]$ $(j=4)$	$-\infty$	$-\infty$	-2	3	6	11	11	13	18
$u[2][3][k]$ $(j=5)$	$-\infty$	$-\infty$	-2	7	12	15	20	20	22
$v[2][k]$	0	0	8	8	12	15	20	20	22

   Questi sono i calcoli delle celle usate dalla ricostruzione, nell'ordine in cui essa le legge:

   - $v[2][8] = \max\{v[1][8],\ u[2][3][8]\} = \max\{11,\ 22\} = 22$
   - $u[2][3][8] = \max\{u[2][2][8],\ p_5 + u[2][2][7]\} = \max\{18,\ 22\} = 22$
   - $u[2][2][7] = \max\{u[2][1][7],\ p_4 + u[2][1][4]\} = \max\{11,\ 13\} = 13$
   - $u[2][1][4] = \max\{u[2][0][4],\ p_3 + u[2][0][3]\} = \max\{6,\ 3\} = 6$
   - $u[2][0][4] = v[1][2] - f_2 = 8 - 2 = 6$
   - $v[1][2] = \max\{v[0][2],\ u[1][2][2]\} = \max\{0,\ 8\} = 8$

- $u[1][2][2] = \max\{u[1][1][2],\ p_2 + u[1][1][1]\} = \max\{-1,\ 8\} = 8$
- $u[1][1][1] = u[1][0][1] = -1$, perché $w_1 > 1$
- $u[1][0][1] = v[0][0] - f_1 = 0 - 1 = -1$

2. Queste sono le tabelle delle scelte calcolate dall'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$s[1][1][k]$ $(j=1)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$s[1][2][k]$ $(j=2)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$o[1][k]$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s[2][1][k]$ $(j=3)$	0	0	0	1	0	1	1	1	1
$s[2][2][k]$ $(j=4)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$s[2][3][k]$ $(j=5)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$o[2][k]$	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Partendo da $h = 2$ e $k = 8$:

Iterazione	Stadio	k	Scelta	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	0	$k = 8$
1	$h=2$	8	$o[2][8] = 1$	0	0	0	0	0	classe 2 aperta
2	$j=5$	8	$s[2][3][8] = 1$	0	0	0	0	1	$k \leftarrow 8 - 1 = 7$
3	$j=4$	7	$s[2][2][7] = 1$	0	0	0	1	1	$k \leftarrow 7 - 3 = 4$
4	$j=3$	4	$s[2][1][4] = 0$	0	0	0	1	1	$k = 4$
–	–	4	–	0	0	0	1	1	setup: $k \leftarrow 4 - s_2 = 2$
5	$h=1$	2	$o[1][2] = 1$	0	0	0	1	1	classe 1 aperta
6	$j=2$	2	$s[1][2][2] = 1$	0	1	0	1	1	$k \leftarrow 2 - 1 = 1$
7	$j=1$	1	$s[1][1][1] = 0$	0	1	0	1	1	$k = 1$
–	–	1	–	0	1	0	1	1	setup: $k \leftarrow 1 - s_1 = 0$

Il vettore $(0, 1, 0, 1, 1)$ è una soluzione ottima: entrambe le classi sono aperte, e sono selezionati gli oggetti $\{2, 4, 5\}$. Il suo peso totale è $1 + 3 + 1 + s_1 + s_2 = 8 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][8] = 9 + 7 + 9 - f_1 - f_2 = 22$.

Esercizio 8.4 — Esercizio 4: problema dello zaino con setup

Consideriamo la seguente istanza del KPS, con uno zaino di capacità $c = 8$ e 5 oggetti partizionati in $q = 2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1, 2, 3\}$ con $f_1 = 2$ e $s_1 = 1$, $\mathscr{J}_2 = \{4, 5\}$ con $f_2 = 1$ e $s_2 = 1$. I ricavi e i pesi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	6	9	9	7	5
w_j	1	1	4	3	4

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up e scrivere la tabella di tutte le righe $v[h][\cdot]$ e $u[h][i][\cdot]$, nell'ordine di calcolo.

2. Scrivere le tabelle delle scelte s e o, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dire quali classi sono aperte e riportare il valore ottimo.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Per ogni classe h l'algoritmo di PD calcola la riga di setup $u[h][0][\cdot]$, le righe degli oggetti della classe h e la riga $v[h][\cdot]$. In caso di pareggio l'oggetto non viene selezionato e la classe resta chiusa. Questa è la tabella dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$v[0][k]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u[1][0][k]$ (setup)	$-\infty$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
$u[1][1][k]$ $(j=1)$	$-\infty$	-2	4	4	4	4	4	4	4
$u[1][2][k]$ $(j=2)$	$-\infty$	-2	7	13	13	13	13	13	13
$u[1][3][k]$ $(j=3)$	$-\infty$	-2	7	13	13	13	16	22	22
$v[1][k]$	0	0	7	13	13	13	16	22	22
$u[2][0][k]$ (setup)	$-\infty$	-1	-1	6	12	12	12	15	21
$u[2][1][k]$ $(j=4)$	$-\infty$	-1	-1	6	12	12	13	19	21
$u[2][2][k]$ $(j=5)$	$-\infty$	-1	-1	6	12	12	13	19	21
$v[2][k]$	0	0	7	13	13	13	16	22	22

Questi sono i calcoli delle celle usate dalla ricostruzione, nell'ordine in cui essa le legge:

- $v[2][8] = \max\{v[1][8],\ u[2][2][8]\} = \max\{22,\ 21\} = 22$
- $v[1][8] = \max\{v[0][8],\ u[1][3][8]\} = \max\{0,\ 22\} = 22$
- $u[1][3][8] = \max\{u[1][2][8],\ p_3 + u[1][2][4]\} = \max\{13,\ 22\} = 22$
- $u[1][2][4] = \max\{u[1][1][4],\ p_2 + u[1][1][3]\} = \max\{4,\ 13\} = 13$
- $u[1][1][3] = \max\{u[1][0][3],\ p_1 + u[1][0][2]\} = \max\{-2,\ 4\} = 4$
- $u[1][0][2] = v[0][1] - f_1 = 0 - 2 = -2$

2. Queste sono le tabelle delle scelte calcolate dall'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$s[1][1][k]$ $(j=1)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s[1][2][k]$ $(j=2)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s[1][3][k]$ $(j=3)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$o[1][k]$	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s[2][1][k]$ $(j=4)$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$s[2][2][k]$ $(j=5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$o[2][k]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Partendo da $h = 2$ e $k = 8$:

Iterazione	Stadio	k	Scelta	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	0	$k = 8$
1	$h = 2$	8	$o[2][8] = 0$	0	0	0	0	0	classe 2 chiusa
2	$h = 1$	8	$o[1][8] = 1$	0	0	0	0	0	classe 1 aperta
3	$j = 3$	8	$s[1][3][8] = 1$	0	0	1	0	0	$k \leftarrow 8 - 4 = 4$
4	$j = 2$	4	$s[1][2][4] = 1$	0	1	1	0	0	$k \leftarrow 4 - 1 = 3$
5	$j = 1$	3	$s[1][1][3] = 1$	1	1	1	0	0	$k \leftarrow 3 - 1 = 2$
–	–	2	–	1	1	1	0	0	setup: $k \leftarrow 2 - s_1 = 1$

Il vettore $(1, 1, 1, 0, 0)$ è una soluzione ottima: solo la classe 1 è aperta, e sono selezionati gli oggetti $\{1, 2, 3\}$. Il suo peso totale è $1 + 1 + 4 + s_1 = 7 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][8] = 6 + 9 + 9 - f_1 = 22$.

Esercizio 8.5 — Esercizio 5: problema dello zaino con setup

Consideriamo la seguente istanza del KPS, con uno zaino di capacità $c = 9$ e 5 oggetti partizionati in $q = 2$ classi: $\mathscr{J}_1 = \{1, 2\}$ con $f_1 = 3$ e $s_1 = 2$, $\mathscr{J}_2 = \{3, 4, 5\}$ con $f_2 = 2$ e $s_2 = 2$. I ricavi e i pesi sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	6	5	8	6	5
w_j	3	1	1	4	3

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up e scrivere la tabella di tutte le righe $v[h][\cdot]$ e $u[h][i][\cdot]$, nell'ordine di calcolo.
2. Scrivere le tabelle delle scelte s e o, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dire quali classi sono aperte e riportare il valore ottimo.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. Per ogni classe h l'algoritmo di PD calcola la riga di setup $u[h][0][\cdot]$, le righe degli oggetti della classe h e la riga $v[h][\cdot]$. In caso di pareggio l'oggetto non viene selezionato e la classe resta chiusa. Questa è la tabella dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$v[0][k]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u[1][0][k]$ (setup)	$-\infty$	$-\infty$	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
$u[1][1][k]$ $(j=1)$	$-\infty$	$-\infty$	-3	-3	-3	3	3	3	3	3
$u[1][2][k]$ $(j=2)$	$-\infty$	$-\infty$	-3	2	2	3	8	8	8	8
$v[1][k]$	0	0	0	2	2	3	8	8	8	8
$u[2][0][k]$ (setup)	$-\infty$	$-\infty$	-2	-2	-2	0	0	1	6	6
$u[2][1][k]$ $(j=3)$	$-\infty$	$-\infty$	-2	6	6	6	8	8	9	14
$u[2][2][k]$ $(j=4)$	$-\infty$	$-\infty$	-2	6	6	6	8	12	12	14
$u[2][3][k]$ $(j=5)$	$-\infty$	$-\infty$	-2	6	6	6	11	12	12	14
$v[2][k]$	0	0	0	6	6	6	11	12	12	14

Questi sono i calcoli delle celle usate dalla ricostruzione, nell'ordine in cui essa le legge:

- $v[2][9] = \max\{v[1][9],\ u[2][3][9]\} = \max\{8,\ 14\} = 14$
- $u[2][3][9] = \max\{u[2][2][9],\ p_5 + u[2][2][6]\} = \max\{14,\ 13\} = 14$
- $u[2][2][9] = \max\{u[2][1][9],\ p_4 + u[2][1][5]\} = \max\{14,\ 12\} = 14$
- $u[2][1][9] = \max\{u[2][0][9],\ p_3 + u[2][0][8]\} = \max\{6,\ 14\} = 14$
- $u[2][0][8] = v[1][6] - f_2 = 8 - 2 = 6$
- $v[1][6] = \max\{v[0][6],\ u[1][2][6]\} = \max\{0,\ 8\} = 8$
- $u[1][2][6] = \max\{u[1][1][6],\ p_2 + u[1][1][5]\} = \max\{3,\ 8\} = 8$
- $u[1][1][5] = \max\{u[1][0][5],\ p_1 + u[1][0][2]\} = \max\{-3,\ 3\} = 3$
- $u[1][0][2] = v[0][0] - f_1 = 0 - 3 = -3$

2. Queste sono le tabelle delle scelte calcolate dall'algoritmo di PD:

Riga	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
$s[1][1][k]$ $(j=1)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$s[1][2][k]$ $(j=2)$	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
$o[1][k]$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s[2][1][k]$ $(j=3)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$s[2][2][k]$ $(j=4)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$s[2][3][k]$ $(j=5)$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$o[2][k]$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Partendo da $h=2$ e $k=9$:

Iterazione	Stadio	k	Scelta	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	0	$k=9$
1	$h=2$	9	$o[2][9]=1$	0	0	0	0	0	classe 2 aperta
2	$j=5$	9	$s[2][3][9]=0$	0	0	0	0	0	$k=9$
3	$j=4$	9	$s[2][2][9]=0$	0	0	0	0	0	$k=9$
4	$j=3$	9	$s[2][1][9]=1$	0	0	1	0	0	$k \leftarrow 9-1=8$
–	–	8	–	0	0	1	0	0	setup: $k \leftarrow 8-s_2=6$
5	$h=1$	6	$o[1][6]=1$	0	0	1	0	0	classe 1 aperta
6	$j=2$	6	$s[1][2][6]=1$	0	1	1	0	0	$k \leftarrow 6-1=5$
7	$j=1$	5	$s[1][1][5]=1$	1	1	1	0	0	$k \leftarrow 5-3=2$
–	–	2	–	1	1	1	0	0	setup: $k \leftarrow 2-s_1=0$

Il vettore $(1, 1, 1, 0, 0)$ è una soluzione ottima: entrambe le classi sono aperte, e sono selezionati gli oggetti $\{1, 2, 3\}$. Il suo peso totale è $3 + 1 + 1 + s_1 + s_2 = 9 \leq c$, e il valore ottimo è $v[2][9] = 6 + 5 + 8 - f_1 - f_2 = 14$.

Capitolo 9

PD per il problema degli zaini multipli

Ricorrenza usata in questi esercizi

L'algoritmo di PD del capitolo «PD per il problema degli zaini multipli», con m zaini, il vettore $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ delle loro capacità residue e i vettori unitari $\boldsymbol{e}_i$:

$$v(j, \boldsymbol{k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 0, \\ v(j-1, \boldsymbol{k}) & \text{se } j \geq 1 \text{ e } w_j > k_i \text{ per ogni } i, \\ \max\Big\{v(j-1, \boldsymbol{k}), \; p_j + \max\limits_{i:\, w_j \leq k_i} v(j-1, \boldsymbol{k} - w_j \boldsymbol{e}_i)\Big\} & \text{se } j \geq 1 \text{ e } w_j \leq k_i \text{ per qualche } i. \end{cases}$$

Il valore ottimo è $v(n, \boldsymbol{c})$. Le tabelle s memorizzano $s[j][\boldsymbol{k}] = i$ se l'oggetto j è inserito nello zaino i, e 0 se è escluso; una soluzione ottima si ricostruisce da $j = n$ e $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$ con $a_j \leftarrow s[j][\boldsymbol{k}]$ e, se $a_j = i \geq 1$, $\boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{k} - w_j \boldsymbol{e}_i$.

Esercizio 9.1 — Esercizio 1: problema degli zaini multipli

Consideriamo la seguente istanza dell'MKP, con $m = 2$ zaini di capacità $c_1 = 3$ e $c_2 = 2$, e 3 oggetti con profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
p_j	8	7	6
w_j	2	3	3

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima come vettore (a_1, a_2, a_3) degli zaini, e riportare il valore ottimo.
3. Risolvere per enumerazione il KP con gli stessi oggetti e capacità $c_1 + c_2 = 5$, e confrontarne il valore ottimo con il valore ottimo dell'MKP.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in s, 0 indica che l'oggetto j è escluso, e 1 o 2 lo zaino in cui è inserito. In caso di pareggio si conserva la prima opzione: oggetto j escluso, poi zaino 1.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 8$ e $w_1 = 2$: $v[1][(3,2)] = \max\{v[0][(3,2)],\ p_1 + v[0][(1,2)],\ p_1 + v[0][(3,0)]\} = \max\{0,\ 8+0,\ 8+0\} = 8$; $v[1][(0,2)] = \max\{v[0][(0,2)],\ p_1 + v[0][(0,0)]\} = \max\{0,\ 8+0\} = 8$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	8
$k_1=1$	0	0	8
$k_1=2$	8	8	8
$k_1=3$	8	8	8

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	2
$k_1=1$	0	0	2
$k_1=2$	1	1	1
$k_1=3$	1	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 7$ e $w_2 = 3$: $v[2][(3,2)] = \max\{v[1][(3,2)],\ p_2 + v[1][(0,2)]\} = \max\{8,\ 7+8\} = 15$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	8
$k_1=1$	0	0	8
$k_1=2$	8	8	8
$k_1=3$	8	8	15

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0
$k_1=3$	0	0	1

   Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 6$ e $w_3 = 3$: $v[3][(3,2)] = \max\{v[2][(3,2)],\ p_3 + v[2][(0,2)]\} = \max\{15,\ 6+8\} = 15$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	8
$k_1=1$	0	0	8
$k_1=2$	8	8	8
$k_1=3$	8	8	15

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0

2. Partendo da $j=3$ e $\boldsymbol{k}=(3,2)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(3,2)$
1	3	$(3,2)$	0	0	0	0	$a[3]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(3,2)$
2	2	$(3,2)$	1	0	1	0	$a[2]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(0,2)$
3	1	$(0,2)$	2	2	1	0	$a[1]\leftarrow 2$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(0,0)$

   Il vettore $(2,1,0)$ è una soluzione ottima: lo zaino 1 contiene gli oggetti $\{2\}$, di peso totale $3\leq c_1$, e lo zaino 2 gli oggetti $\{1\}$, di peso totale $2\leq c_2$. Il valore ottimo è $v[3][(3,2)]=7+8=15$.

3. Il KP con capacità 5 ha valore ottimo 15, uguale al valore ottimo dell'MKP: qui l'upper bound dato dalla capacità totale è stretto.

Esercizio 9.2 — Esercizio 2: problema degli zaini multipli

Consideriamo la seguente istanza dell'MKP, con $m=2$ zaini di capacità $c_1=4$ e $c_2=3$, e 3 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
p_j	7	3	8
w_j	4	3	3

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima come vettore (a_1,a_2,a_3) degli zaini, e riportare il valore ottimo.
3. Risolvere per enumerazione il KP con gli stessi oggetti e capacità $c_1+c_2=7$, e confrontarne il valore ottimo con il valore ottimo dell'MKP.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j=0$ è $v[0][\boldsymbol{k}]=0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in s, 0 indica che l'oggetto j è escluso, e 1 o 2 lo zaino in cui è

inserito. In caso di pareggio si conserva la prima opzione: oggetto j escluso, poi zaino 1.

Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 7$ e $w_1 = 4$: $v[1][(4,3)] = \max\{v[0][(4,3)],\ p_1 + v[0][(0,3)]\} = \max\{0,\ 7+0\} = 7$; $v[1][(4,0)] = \max\{v[0][(4,0)],\ p_1 + v[0][(0,0)]\} = \max\{0,\ 7+0\} = 7$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	0
$k_1 = 4$	7	7	7	7

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	0
$k_1 = 4$	1	1	1	1

Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 3$ e $w_2 = 3$: $v[2][(4,3)] = \max\{v[1][(4,3)],\ p_2 + v[1][(1,3)],\ p_2 + v[1][(4,0)]\} = \max\{7,\ 3+0,\ 3+7\} = 10$; $v[2][(4,0)] = \max\{v[1][(4,0)],\ p_2 + v[1][(1,0)]\} = \max\{7,\ 3+0\} = 7$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	3
$k_1 = 1$	0	0	0	3
$k_1 = 2$	0	0	0	3
$k_1 = 3$	3	3	3	3
$k_1 = 4$	7	7	7	10

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	2
$k_1 = 1$	0	0	0	2
$k_1 = 2$	0	0	0	2
$k_1 = 3$	1	1	1	1
$k_1 = 4$	0	0	0	2

Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 8$ e $w_3 = 3$: $v[3][(4,3)] = \max\{v[2][(4,3)],\ p_3 + v[2][(1,3)],\ p_3 + v[2][(4,0)]\} = \max\{10,\ 8+3,\ 8+7\} = 15$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	8
$k_1 = 1$	0	0	0	8
$k_1 = 2$	0	0	0	8
$k_1 = 3$	8	8	8	11
$k_1 = 4$	8	8	8	15

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	2
$k_1=1$	0	0	0	2
$k_1=2$	0	0	0	2
$k_1=3$	1	1	1	1
$k_1=4$	1	1	1	2

2. Partendo da $j=3$ e $\boldsymbol{k}=(4,3)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(4,3)$
1	3	$(4,3)$	2	0	0	2	$a[3]\leftarrow 2$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(4,0)$
2	2	$(4,0)$	0	0	0	2	$a[2]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(4,0)$
3	1	$(4,0)$	1	1	0	2	$a[1]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(0,0)$

   Il vettore $(1,0,2)$ è una soluzione ottima: lo zaino 1 contiene gli oggetti $\{1\}$, di peso totale $4\leq c_1$, e lo zaino 2 gli oggetti $\{3\}$, di peso totale $3\leq c_2$. Il valore ottimo è $v[3][(4,3)]=7+8=15$.

3. Il KP con capacità 7 ha valore ottimo 15, uguale al valore ottimo dell'MKP: qui l'upper bound dato dalla capacità totale è stretto.

Esercizio 9.3 — Esercizio 3: problema degli zaini multipli

Consideriamo la seguente istanza dell'MKP, con $m=2$ zaini di capacità $c_1=5$ e $c_2=2$, e 3 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
p_j	2	5	9
w_j	2	3	4

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima come vettore (a_1,a_2,a_3) degli zaini, e riportare il valore ottimo.
3. Risolvere per enumerazione il KP con gli stessi oggetti e capacità $c_1+c_2=7$, e confrontarne il valore ottimo con il valore ottimo dell'MKP.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j=0$ è $v[0][\boldsymbol{k}]=0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una

colonna per ogni k_2; in s, 0 indica che l'oggetto j è escluso, e 1 o 2 lo zaino in cui è inserito. In caso di pareggio si conserva la prima opzione: oggetto j escluso, poi zaino 1.

Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 2$ e $w_1 = 2$: $v[1][(5,2)] = \max\{v[0][(5,2)],\ p_1 + v[0][(3,2)],\ p_1 + v[0][(5,0)]\} = \max\{0,\ 2 + 0,\ 2 + 0\} = 2$; $v[1][(1,2)] = \max\{v[0][(1,2)],\ p_1 + v[0][(1,0)]\} = \max\{0,\ 2 + 0\} = 2$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$
$k_1 = 0$	0	0	2
$k_1 = 1$	0	0	2
$k_1 = 2$	2	2	2
$k_1 = 3$	2	2	2
$k_1 = 4$	2	2	2
$k_1 = 5$	2	2	2

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$
$k_1 = 0$	0	0	2
$k_1 = 1$	0	0	2
$k_1 = 2$	1	1	1
$k_1 = 3$	1	1	1
$k_1 = 4$	1	1	1
$k_1 = 5$	1	1	1

Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 5$ e $w_2 = 3$: $v[2][(5,2)] = \max\{v[1][(5,2)],\ p_2 + v[1][(2,2)]\} = \max\{2,\ 5+2\} = 7$; $w_2 = 3$ non entra in alcuno zaino, quindi $v[2][(1,2)] = v[1][(1,2)] = 2$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$
$k_1 = 0$	0	0	2
$k_1 = 1$	0	0	2
$k_1 = 2$	2	2	2
$k_1 = 3$	5	5	7
$k_1 = 4$	5	5	7
$k_1 = 5$	7	7	7

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$
$k_1 = 0$	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0
$k_1 = 3$	1	1	1
$k_1 = 4$	1	1	1
$k_1 = 5$	1	1	1

Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 9$ e $w_3 = 4$: $v[3][(5,2)] = \max\{v[2][(5,2)],\ p_3 + v[2][(1,2)]\} = \max\{7,\ 9 + 2\} = 11$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	2
$k_1=1$	0	0	2
$k_1=2$	2	2	2
$k_1=3$	5	5	7
$k_1=4$	9	9	11
$k_1=5$	9	9	11

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$
$k_1=0$	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0
$k_1=4$	1	1	1
$k_1=5$	1	1	1

2. Partendo da $j=3$ e $\boldsymbol{k}=(5,2)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(5,2)$
1	3	$(5,2)$	1	0	0	1	$a[3]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(1,2)$
2	2	$(1,2)$	0	0	0	1	$a[2]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(1,2)$
3	1	$(1,2)$	2	2	0	1	$a[1]\leftarrow 2$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(1,0)$

   Il vettore $(2,0,1)$ è una soluzione ottima: lo zaino 1 contiene gli oggetti $\{3\}$, di peso totale $4\leq c_1$, e lo zaino 2 gli oggetti $\{1\}$, di peso totale $2\leq c_2$. Il valore ottimo è $v[3][(5,2)]=9+2=11$.

3. Il KP con capacità 7 ha valore ottimo $14>11$, con gli oggetti $\{2,3\}$ di peso totale $7\leq 7$. Questi oggetti non si possono dividere fra i due zaini di capacità 5 e 2: il KP con la capacità totale dà solo un upper bound sul valore ottimo dell'MKP.

Esercizio 9.4 — Esercizio 4: problema degli zaini multipli

Consideriamo la seguente istanza dell'MKP, con $m=2$ zaini di capacità $c_1=4$ e $c_2=3$, e 4 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	5	2	6	6
w_j	2	1	2	4

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.

2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima come vettore (a_1, a_2, a_3, a_4) degli zaini, e riportare il valore ottimo.

3. Risolvere per enumerazione il KP con gli stessi oggetti e capacità $c_1 + c_2 = 7$, e confrontarne il valore ottimo con il valore ottimo dell'MKP.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in s, 0 indica che l'oggetto j è escluso, e 1 o 2 lo zaino in cui è inserito. In caso di pareggio si conserva la prima opzione: oggetto j escluso, poi zaino 1.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 5$ e $w_1 = 2$: $v[1][(4,3)] = \max\{v[0][(4,3)], p_1 + v[0][(2,3)], p_1 + v[0][(4,1)]\} = \max\{0, 5+0, 5+0\} = 5$; $w_1 = 2$ non entra in alcuno zaino, quindi $v[1][(0,0)] = v[0][(0,0)] = 0$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	5	5
$k_1 = 1$	0	0	5	5
$k_1 = 2$	5	5	5	5
$k_1 = 3$	5	5	5	5
$k_1 = 4$	5	5	5	5

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	2	2
$k_1 = 1$	0	0	2	2
$k_1 = 2$	1	1	1	1
$k_1 = 3$	1	1	1	1
$k_1 = 4$	1	1	1	1

   Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 2$ e $w_2 = 1$: $v[2][(4,3)] = \max\{v[1][(4,3)], p_2 + v[1][(3,3)], p_2 + v[1][(4,2)]\} = \max\{5, 2+5, 2+5\} = 7$; $v[2][(0,1)] = \max\{v[1][(0,1)], p_2 + v[1][(0,0)]\} = \max\{0, 2+0\} = 2$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	2	5	7
$k_1 = 1$	2	2	7	7
$k_1 = 2$	5	7	7	7
$k_1 = 3$	7	7	7	7
$k_1 = 4$	7	7	7	7

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	2	0	2
$k_1 = 1$	1	1	1	1
$k_1 = 2$	0	2	1	1
$k_1 = 3$	1	1	1	1
$k_1 = 4$	1	1	1	1

Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 6$ e $w_3 = 2$: $v[3][(4,3)] = \max\{v[2][(4,3)],\ p_3 + v[2][(2,3)],\ p_3 + v[2][(4,1)]\} = \max\{7,\ 6+7,\ 6+7\} = 13$; $v[3][(0,3)] = \max\{v[2][(0,3)],\ p_3 + v[2][(0,1)]\} = \max\{7,\ 6+2\} = 8$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	2	6	8
$k_1=1$	2	2	8	8
$k_1=2$	6	8	11	13
$k_1=3$	8	8	13	13
$k_1=4$	11	13	13	13

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	2	2
$k_1=1$	0	0	2	2
$k_1=2$	1	1	1	1
$k_1=3$	1	1	1	1
$k_1=4$	1	1	1	1

Oggetto $j = 4$, con $p_4 = 6$ e $w_4 = 4$: $v[4][(4,3)] = \max\{v[3][(4,3)],\ p_4 + v[3][(0,3)]\} = \max\{13,\ 6+8\} = 14$.

$v[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	2	6	8
$k_1=1$	2	2	8	8
$k_1=2$	6	8	11	13
$k_1=3$	8	8	13	13
$k_1=4$	11	13	13	14

$s[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0	0
$k_1=4$	0	0	0	1

2. Partendo da $j = 4$ e $\boldsymbol{k} = (4,3)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	$a[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$\boldsymbol{k} = (4,3)$
1	4	$(4,3)$	1	0	0	0	1	$a[4] \leftarrow 1$, $\boldsymbol{k} \leftarrow (0,3)$
2	3	$(0,3)$	2	0	0	2	1	$a[3] \leftarrow 2$, $\boldsymbol{k} \leftarrow (0,1)$
3	2	$(0,1)$	2	0	2	2	1	$a[2] \leftarrow 2$, $\boldsymbol{k} \leftarrow (0,0)$
4	1	$(0,0)$	0	0	2	2	1	$a[1] \leftarrow 0$, $\boldsymbol{k} = (0,0)$

Il vettore $(0,2,2,1)$ è una soluzione ottima: lo zaino 1 contiene gli oggetti $\{4\}$, di peso totale $4 \leq c_1$, e lo zaino 2 gli oggetti $\{2,3\}$, di peso totale $1+2 = 3 \leq c_2$. Il valore ottimo è $v[4][(4,3)] = 6+2+6 = 14$.

3. Il KP con capacità 7 ha valore ottimo 14, uguale al valore ottimo dell'MKP: qui l'upper bound dato dalla capacità totale è stretto.

Esercizio 9.5 — Esercizio 5: problema degli zaini multipli

Consideriamo la seguente istanza dell'MKP, con $m = 2$ zaini di capacità $c_1 = 5$ e $c_2 = 3$, e 4 oggetti con profitti e pesi:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
p_j	5	3	7	2
w_j	4	4	2	2

Domande

1. Eseguire l'algoritmo di PD bottom-up: per ogni oggetto j, scrivere le matrici $v[j][k_1][k_2]$ e $s[j][k_1][k_2]$, e mostrare il calcolo della cella $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$.
2. Usando le tabelle s, ricostruire una soluzione ottima come vettore (a_1, a_2, a_3, a_4) degli zaini, e riportare il valore ottimo.
3. Risolvere per enumerazione il KP con gli stessi oggetti e capacità $c_1 + c_2 = 8$, e confrontarne il valore ottimo con il valore ottimo dell'MKP.

Soluzione

La ricorrenza e le convenzioni sono quelle del box all'inizio di questi esercizi.

1. La riga $j = 0$ è $v[0][\boldsymbol{k}] = 0$ per ogni $\boldsymbol{k}$. In ogni matrice c'è una riga per ogni k_1 e una colonna per ogni k_2; in s, 0 indica che l'oggetto j è escluso, e 1 o 2 lo zaino in cui è inserito. In caso di pareggio si conserva la prima opzione: oggetto j escluso, poi zaino 1.

   Oggetto $j = 1$, con $p_1 = 5$ e $w_1 = 4$: $v[1][(5,3)] = \max\{v[0][(5,3)],\ p_1 + v[0][(1,3)]\} = \max\{0,\ 5+0\} = 5$; $v[1][(5,1)] = \max\{v[0][(5,1)],\ p_1 + v[0][(1,1)]\} = \max\{0,\ 5+0\} = 5$.

$v[1][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0	0
$k_1=4$	5	5	5	5
$k_1=5$	5	5	5	5

$s[1][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	0	0
$k_1=3$	0	0	0	0
$k_1=4$	1	1	1	1
$k_1=5$	1	1	1	1

Oggetto $j = 2$, con $p_2 = 3$ e $w_2 = 4$: $v[2][(5,3)] = \max\{v[1][(5,3)],\ p_2 + v[1][(1,3)]\} = \max\{5,\ 3+0\} = 5$; $v[2][(5,1)] = \max\{v[1][(5,1)],\ p_2 + v[1][(1,1)]\} = \max\{5,\ 3+0\} = 5$.

$v[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	0
$k_1 = 4$	5	5	5	5
$k_1 = 5$	5	5	5	5

$s[2][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	0	0
$k_1 = 1$	0	0	0	0
$k_1 = 2$	0	0	0	0
$k_1 = 3$	0	0	0	0
$k_1 = 4$	0	0	0	0
$k_1 = 5$	0	0	0	0

Oggetto $j = 3$, con $p_3 = 7$ e $w_3 = 2$: $v[3][(5,3)] = \max\{v[2][(5,3)],\ p_3 + v[2][(3,3)],\ p_3 + v[2][(5,1)]\} = \max\{5,\ 7+0,\ 7+5\} = 12$.

$v[3][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	7	7
$k_1 = 1$	0	0	7	7
$k_1 = 2$	7	7	7	7
$k_1 = 3$	7	7	7	7
$k_1 = 4$	7	7	12	12
$k_1 = 5$	7	7	12	12

$s[3][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	2	2
$k_1 = 1$	0	0	2	2
$k_1 = 2$	1	1	1	1
$k_1 = 3$	1	1	1	1
$k_1 = 4$	1	1	2	2
$k_1 = 5$	1	1	2	2

Oggetto $j = 4$, con $p_4 = 2$ e $w_4 = 2$: $v[4][(5,3)] = \max\{v[3][(5,3)],\ p_4 + v[3][(3,3)],\ p_4 + v[3][(5,1)]\} = \max\{12,\ 2+7,\ 2+7\} = 12$.

$v[4][k_1][k_2]$	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$
$k_1 = 0$	0	0	7	7
$k_1 = 1$	0	0	7	7
$k_1 = 2$	7	7	9	9
$k_1 = 3$	7	7	9	9
$k_1 = 4$	9	9	12	12
$k_1 = 5$	9	9	12	12

$s[4][k_1][k_2]$	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$
$k_1=0$	0	0	0	0
$k_1=1$	0	0	0	0
$k_1=2$	0	0	1	1
$k_1=3$	0	0	1	1
$k_1=4$	1	1	0	0
$k_1=5$	1	1	0	0

2. Partendo da $j=4$ e $\boldsymbol{k}=(5,3)$:

Iterazione	j	$\boldsymbol{k}$	$s[j][\boldsymbol{k}]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	$a[4]$	Azione
–	–	–	–	0	0	0	0	$\boldsymbol{k}=(5,3)$
1	4	$(5,3)$	0	0	0	0	0	$a[4]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(5,3)$
2	3	$(5,3)$	2	0	0	2	0	$a[3]\leftarrow 2$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(5,1)$
3	2	$(5,1)$	0	0	0	2	0	$a[2]\leftarrow 0$, $\boldsymbol{k}=(5,1)$
4	1	$(5,1)$	1	1	0	2	0	$a[1]\leftarrow 1$, $\boldsymbol{k}\leftarrow(1,1)$

   Il vettore $(1,0,2,0)$ è una soluzione ottima: lo zaino 1 contiene gli oggetti $\{1\}$, di peso totale $4\leq c_1$, e lo zaino 2 gli oggetti $\{3\}$, di peso totale $2\leq c_2$. Il valore ottimo è $v[4][(5,3)]=5+7=12$.

3. Il KP con capacità 8 ha valore ottimo $14>12$, con gli oggetti $\{1,3,4\}$ di peso totale $8\leq 8$. Questi oggetti non si possono dividere fra i due zaini di capacità 5 e 3: il KP con la capacità totale dà solo un upper bound sul valore ottimo dell'MKP.

Problemi di lot sizing

Capitolo 10

PD per il problema del lot sizing senza capacità

Esercizio 10.1

Consideriamo la seguente istanza dell'ULS con $m = 4$ periodi, in cui le domande, i costi di setup, i costi variabili di produzione e i costi di mantenimento a scorta sono:

t	1	2	3	4
d_t	30	10	40	10
sc_t	50	80	70	60
vc_t	2	3	1	2
hc_t	1	2	2	1

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori della matrice c, del vettore v e del vettore r.

2. Usando il vettore r, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

Per prima cosa si calcola la matrice c. Per ogni passo, la tabella riporta i valori di j e t, il valore corrente di u, la cella $c[j][t]$ e l'operazione eseguita; la cella $c[j][t]$ è evidenziata in blu quando viene assegnata.

j	t	u	$c[j][t]$	Azione
1	1	2	110	$u \leftarrow vc[1] = 2$, $g \leftarrow sc[1]+vc[1] \cdot d[1] = 50+2 \cdot 30 = 110$, $c[1][1] \leftarrow 110$
1	2	3	140	$u \leftarrow u+hc[1] = 2+1 = 3$, $g \leftarrow g+u \cdot d[2] = 110+3 \cdot 10 = 140$, $c[1][2] \leftarrow 140$
1	3	5	340	$u \leftarrow u+hc[2] = 3+2 = 5$, $g \leftarrow g+u \cdot d[3] = 140+5 \cdot 40 = 340$, $c[1][3] \leftarrow 340$
1	4	7	410	$u \leftarrow u+hc[3] = 5+2 = 7$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 340+7 \cdot 10 = 410$, $c[1][4] \leftarrow 410$
2	2	3	110	$u \leftarrow vc[2] = 3$, $g \leftarrow sc[2]+vc[2] \cdot d[2] = 80+3 \cdot 10 = 110$, $c[2][2] \leftarrow 110$
2	3	5	310	$u \leftarrow u+hc[2] = 3+2 = 5$, $g \leftarrow g+u \cdot d[3] = 110+5 \cdot 40 = 310$, $c[2][3] \leftarrow 310$
2	4	7	380	$u \leftarrow u+hc[3] = 5+2 = 7$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 310+7 \cdot 10 = 380$, $c[2][4] \leftarrow 380$
3	3	1	110	$u \leftarrow vc[3] = 1$, $g \leftarrow sc[3]+vc[3] \cdot d[3] = 70+1 \cdot 40 = 110$, $c[3][3] \leftarrow 110$
3	4	3	140	$u \leftarrow u+hc[3] = 1+2 = 3$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 110+3 \cdot 10 = 140$, $c[3][4] \leftarrow 140$
4	4	2	80	$u \leftarrow vc[4] = 2$, $g \leftarrow sc[4]+vc[4] \cdot d[4] = 60+2 \cdot 10 = 80$, $c[4][4] \leftarrow 80$

Questa è la matrice c:

$c[j][t]$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$j=1$	110	140	340	410
$j=2$	–	110	310	380
$j=3$	–	–	110	140
$j=4$	–	–	–	80

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di t e j, le celle $v[t]$ e $r[t]$, il valore corrente di b e il valore corrente di a. La cella di b è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di a è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[t]$ e $r[t]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

t	j	$v[t]$	$r[t]$	b	a	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
1	1	–	–	110	1	$v[0]+c[1][1] = 0+110 = 110 < +\infty$: $b \leftarrow 110$, $a \leftarrow 1$
	–	110	1	110	1	$v[1] \leftarrow b = 110$, $r[1] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
2	1	–	–	140	1	$v[0]+c[1][2] = 0+140 = 140 < +\infty$: $b \leftarrow 140$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	140	1	$v[1]+c[2][2] = 110+110 = 220 > 140$: nessun aggiornamento
	–	140	1	140	1	$v[2] \leftarrow b = 140$, $r[2] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
3	1	–	–	340	1	$v[0]+c[1][3] = 0+340 = 340 < +\infty$: $b \leftarrow 340$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	340	1	$v[1]+c[2][3] = 110+310 = 420 > 340$: nessun aggiornamento
	3	–	–	250	3	$v[2]+c[3][3] = 140+110 = 250 < 340$: $b \leftarrow 250$, $a \leftarrow 3$
	–	250	3	250	3	$v[3] \leftarrow b = 250$, $r[3] \leftarrow a = 3$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
4	1	–	–	410	1	$v[0]+c[1][4] = 0+410 = 410 < +\infty$: $b \leftarrow 410$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	410	1	$v[1]+c[2][4] = 110+380 = 490 > 410$: nessun aggiornamento
	3	–	–	280	3	$v[2]+c[3][4] = 140+140 = 280 < 410$: $b \leftarrow 280$, $a \leftarrow 3$
	4	–	–	280	3	$v[3]+c[4][4] = 250+80 = 330 > 280$: nessun aggiornamento
	–	280	3	280	3	$v[4] \leftarrow b = 280$, $r[4] \leftarrow a = 3$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v[t]$	0	110	140	250	280

Questo è il vettore r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$r[t]$	1	1	3	3

2. Abbiamo il seguente vettore r:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$r[t]$	1	1	3	3

Possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	t	$r[t]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$t \leftarrow r[t]-1$
–	–	–	0	0	0	0	$t=4$
1	4	3	0	0	50	0	$t=3-1=2$
2	2	1	40	0	50	0	$t=1-1=0$

- $t=4$, $r[4]=3$: l'ultimo lotto di produzione dei periodi $1,\dots,4$ è nel periodo 3 e copre le domande dei periodi $3,\dots,4$, quindi $x[3] \leftarrow d_3+d_4 = 40+10 = 50$
- $t=2$, $r[2]=1$: l'ultimo lotto di produzione dei periodi $1,\dots,2$ è nel periodo 1 e copre le domande dei periodi $1,\dots,2$, quindi $x[1] \leftarrow d_1+d_2 = 30+10 = 40$

Quindi il vettore

$$(40,0,50,0)$$

è una soluzione ottima. I setup sono nei periodi 1, 3, le scorte sono $(s_1,\dots,s_4) = (10, 0, 10, 0)$, e il costo totale è

$$\underbrace{50+70}_{\text{setup}} + \underbrace{2\cdot 40 + 3\cdot 0 + 1\cdot 50 + 2\cdot 0}_{\text{produzione}} + \underbrace{1\cdot 10 + 2\cdot 0 + 2\cdot 10 + 1\cdot 0}_{\text{mantenimento}} = 120+130+30 = 280.$$

Il valore ottimo è

$$v[4] = 280.$$

Esercizio 10.2

Consideriamo la seguente istanza dell'ULS con $m = 4$ periodi, in cui le domande, i costi di setup, i costi variabili di produzione e i costi di mantenimento a scorta sono:

t	1	2	3	4
d_t	30	40	10	20
sc_t	50	80	80	50
vc_t	1	3	2	1
hc_t	1	1	1	2

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori della matrice c, del vettore v e del vettore r.

2. Usando il vettore r, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per prima cosa si calcola la matrice c. Per ogni passo, la tabella riporta i valori di j e t, il valore corrente di u, la cella $c[j][t]$ e l'operazione eseguita; la cella $c[j][t]$ è evidenziata in blu quando viene assegnata.

j	t	u	$c[j][t]$	Azione
1	1	1	80	$u \leftarrow vc[1] = 1$, $g \leftarrow sc[1]+vc[1] \cdot d[1] = 50+1 \cdot 30 = 80$, $c[1][1] \leftarrow 80$
1	2	2	160	$u \leftarrow u+hc[1] = 1+1 = 2$, $g \leftarrow g+u \cdot d[2] = 80+2 \cdot 40 = 160$, $c[1][2] \leftarrow 160$
1	3	3	190	$u \leftarrow u+hc[2] = 2+1 = 3$, $g \leftarrow g+u \cdot d[3] = 160+3 \cdot 10 = 190$, $c[1][3] \leftarrow 190$
1	4	4	270	$u \leftarrow u+hc[3] = 3+1 = 4$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 190+4 \cdot 20 = 270$, $c[1][4] \leftarrow 270$

2	2	3	200	$u \leftarrow vc[2] = 3$, $g \leftarrow sc[2]+vc[2] \cdot d[2] = 80+3 \cdot 40 = 200$, $c[2][2] \leftarrow 200$
2	3	4	240	$u \leftarrow u+hc[2] = 3+1 = 4$, $g \leftarrow g+u \cdot d[3] = 200+4 \cdot 10 = 240$, $c[2][3] \leftarrow 240$
2	4	5	340	$u \leftarrow u+hc[3] = 4+1 = 5$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 240+5 \cdot 20 = 340$, $c[2][4] \leftarrow 340$
3	3	2	100	$u \leftarrow vc[3] = 2$, $g \leftarrow sc[3]+vc[3] \cdot d[3] = 80+2 \cdot 10 = 100$, $c[3][3] \leftarrow 100$
3	4	3	160	$u \leftarrow u+hc[3] = 2+1 = 3$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 100+3 \cdot 20 = 160$, $c[3][4] \leftarrow 160$
4	4	1	70	$u \leftarrow vc[4] = 1$, $g \leftarrow sc[4]+vc[4] \cdot d[4] = 50+1 \cdot 20 = 70$, $c[4][4] \leftarrow 70$

Questa è la matrice c:

$c[j][t]$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$j=1$	80	160	190	270
$j=2$	–	200	240	340
$j=3$	–	–	100	160
$j=4$	–	–	–	70

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di t e j, le celle $v[t]$ e $r[t]$, il valore corrente di b e il valore corrente di a. La cella di b è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di a è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[t]$ e $r[t]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

t	j	$v[t]$	$r[t]$	b	a	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
1	1	–	–	80	1	$v[0]+c[1][1] = 0+80 = 80 < +\infty$: $b \leftarrow 80$, $a \leftarrow 1$
	–	80	1	80	1	$v[1] \leftarrow b = 80$, $r[1] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
2	1	–	–	160	1	$v[0]+c[1][2] = 0+160 = 160 < +\infty$: $b \leftarrow 160$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	160	1	$v[1]+c[2][2] = 80+200 = 280 > 160$: nessun aggiornamento
	–	160	1	160	1	$v[2] \leftarrow b = 160$, $r[2] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
3	1	–	–	190	1	$v[0]+c[1][3] = 0+190 = 190 < +\infty$: $b \leftarrow 190$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	190	1	$v[1]+c[2][3] = 80+240 = 320 > 190$: nessun aggiornamento
	3	–	–	190	1	$v[2]+c[3][3] = 160+100 = 260 > 190$: nessun aggiornamento
	–	190	1	190	1	$v[3] \leftarrow b = 190$, $r[3] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
4	1	–	–	270	1	$v[0]+c[1][4] = 0+270 = 270 < +\infty$: $b \leftarrow 270$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	270	1	$v[1]+c[2][4] = 80+340 = 420 > 270$: nessun aggiornamento
	3	–	–	270	1	$v[2]+c[3][4] = 160+160 = 320 > 270$: nessun aggiornamento
	4	–	–	260	4	$v[3]+c[4][4] = 190+70 = 260 < 270$: $b \leftarrow 260$, $a \leftarrow 4$
	–	260	4	260	4	$v[4] \leftarrow b = 260$, $r[4] \leftarrow a = 4$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v[t]$	0	80	160	190	260

Questo è il vettore r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$r[t]$	1	1	1	4

2. Abbiamo il seguente vettore r:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$r[t]$	1	1	1	4

Possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	t	$r[t]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$t \leftarrow r[t]-1$
–	–	–	0	0	0	0	$t=4$
1	4	4	0	0	0	20	$t=4-1=3$
2	3	1	80	0	0	20	$t=1-1=0$

- $t=4$, $r[4]=4$: il periodo 4 produce solo la propria domanda, quindi $x[4] \leftarrow d_4 = 20$
- $t=3$, $r[3]=1$: l'ultimo lotto di produzione dei periodi $1,\dots,3$ è nel periodo 1 e copre le domande dei periodi $1,\dots,3$, quindi $x[1] \leftarrow d_1+d_2+d_3 = 30+40+10 = 80$

Quindi il vettore

$$(80,0,0,20)$$

è una soluzione ottima. I setup sono nei periodi 1, 4, le scorte sono $(s_1,\dots,s_4) = (50, 10, 0, 0)$, e il costo totale è

$$\underbrace{50+50}_{\text{setup}} + \underbrace{1\cdot 80 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 20}_{\text{produzione}} + \underbrace{1\cdot 50 + 1\cdot 10 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0}_{\text{mantenimento}} = 100+100+60 = 260.$$

Il valore ottimo è

$$v[4] = 260.$$

Esercizio 10.3

Consideriamo la seguente istanza dell'ULS con $m = 5$ periodi, in cui le domande, i costi di setup, i costi variabili di produzione e i costi di mantenimento a scorta sono:

t	1	2	3	4	5
d_t	10	30	40	30	40
sc_t	70	80	50	80	50
vc_t	1	1	1	1	2
hc_t	1	1	2	1	2

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori della matrice c, del vettore v e del vettore r.

2. Usando il vettore r, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per prima cosa si calcola la matrice c. Per ogni passo, la tabella riporta i valori di j e t, il valore corrente di u, la cella $c[j][t]$ e l'operazione eseguita; la cella $c[j][t]$ è evidenziata in blu quando viene assegnata.

j	t	u	$c[j][t]$	Azione
1	1	1	80	$u \leftarrow vc[1] = 1$, $g \leftarrow sc[1]+vc[1] \cdot d[1] = 70+1 \cdot 10 = 80$, $c[1][1] \leftarrow 80$
1	2	2	140	$u \leftarrow u+hc[1] = 1+1 = 2$, $g \leftarrow g+u \cdot d[2] = 80+2 \cdot 30 = 140$, $c[1][2] \leftarrow 140$
1	3	3	260	$u \leftarrow u+hc[2] = 2+1 = 3$, $g \leftarrow g+u \cdot d[3] = 140+3 \cdot 40 = 260$, $c[1][3] \leftarrow 260$
1	4	5	410	$u \leftarrow u+hc[3] = 3+2 = 5$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 260+5 \cdot 30 = 410$, $c[1][4] \leftarrow 410$

1	5	6	650	$u \leftarrow u+hc[4] = 5+1 = 6$, $g \leftarrow g+u \cdot d[5] = 410+6 \cdot 40 = 650$, $c[1][5] \leftarrow 650$
2	2	1	110	$u \leftarrow vc[2] = 1$, $g \leftarrow sc[2]+vc[2] \cdot d[2] = 80+1 \cdot 30 = 110$, $c[2][2] \leftarrow 110$
2	3	2	190	$u \leftarrow u+hc[2] = 1+1 = 2$, $g \leftarrow g+u \cdot d[3] = 110+2 \cdot 40 = 190$, $c[2][3] \leftarrow 190$
2	4	4	310	$u \leftarrow u+hc[3] = 2+2 = 4$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 190+4 \cdot 30 = 310$, $c[2][4] \leftarrow 310$
2	5	5	510	$u \leftarrow u+hc[4] = 4+1 = 5$, $g \leftarrow g+u \cdot d[5] = 310+5 \cdot 40 = 510$, $c[2][5] \leftarrow 510$
3	3	1	90	$u \leftarrow vc[3] = 1$, $g \leftarrow sc[3]+vc[3] \cdot d[3] = 50+1 \cdot 40 = 90$, $c[3][3] \leftarrow 90$
3	4	3	180	$u \leftarrow u+hc[3] = 1+2 = 3$, $g \leftarrow g+u \cdot d[4] = 90+3 \cdot 30 = 180$, $c[3][4] \leftarrow 180$
3	5	4	340	$u \leftarrow u+hc[4] = 3+1 = 4$, $g \leftarrow g+u \cdot d[5] = 180+4 \cdot 40 = 340$, $c[3][5] \leftarrow 340$
4	4	1	110	$u \leftarrow vc[4] = 1$, $g \leftarrow sc[4]+vc[4] \cdot d[4] = 80+1 \cdot 30 = 110$, $c[4][4] \leftarrow 110$
4	5	2	190	$u \leftarrow u+hc[4] = 1+1 = 2$, $g \leftarrow g+u \cdot d[5] = 110+2 \cdot 40 = 190$, $c[4][5] \leftarrow 190$
5	5	2	130	$u \leftarrow vc[5] = 2$, $g \leftarrow sc[5]+vc[5] \cdot d[5] = 50+2 \cdot 40 = 130$, $c[5][5] \leftarrow 130$

Questa è la matrice c:

$c[j][t]$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$j=1$	80	140	260	410	650
$j=2$	–	110	190	310	510
$j=3$	–	–	90	180	340
$j=4$	–	–	–	110	190
$j=5$	–	–	–	–	130

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di t e j, le celle $v[t]$ e $r[t]$, il valore corrente di b e il valore corrente di a. La cella di b è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di a è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[t]$ e $r[t]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

t	j	$v[t]$	$r[t]$	b	a	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
1	1	–	–	80	1	$v[0]+c[1][1] = 0+80 = 80 < +\infty$: $b \leftarrow 80$, $a \leftarrow 1$
	–	80	1	80	1	$v[1] \leftarrow b = 80$, $r[1] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
2	1	–	–	140	1	$v[0]+c[1][2] = 0+140 = 140 < +\infty$: $b \leftarrow 140$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	140	1	$v[1]+c[2][2] = 80+110 = 190 > 140$: nessun aggiornamento
	–	140	1	140	1	$v[2] \leftarrow b = 140$, $r[2] \leftarrow a = 1$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
3	1	–	–	260	1	$v[0]+c[1][3] = 0+260 = 260 < +\infty$: $b \leftarrow 260$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	260	1	$v[1]+c[2][3] = 80+190 = 270 > 260$: nessun aggiornamento
	3	–	–	230	3	$v[2]+c[3][3] = 140+90 = 230 < 260$: $b \leftarrow 230$, $a \leftarrow 3$
	–	230	3	230	3	$v[3] \leftarrow b = 230$, $r[3] \leftarrow a = 3$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
4	1	–	–	410	1	$v[0]+c[1][4] = 0+410 = 410 < +\infty$: $b \leftarrow 410$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	390	2	$v[1]+c[2][4] = 80+310 = 390 < 410$: $b \leftarrow 390$, $a \leftarrow 2$
	3	–	–	320	3	$v[2]+c[3][4] = 140+180 = 320 < 390$: $b \leftarrow 320$, $a \leftarrow 3$
	4	–	–	320	3	$v[3]+c[4][4] = 230+110 = 340 > 320$: nessun aggiornamento
	–	320	3	320	3	$v[4] \leftarrow b = 320$, $r[4] \leftarrow a = 3$
	–	–	–	$+\infty$	0	$b \leftarrow +\infty$, $a \leftarrow 0$
5	1	–	–	650	1	$v[0]+c[1][5] = 0+650 = 650 < +\infty$: $b \leftarrow 650$, $a \leftarrow 1$
	2	–	–	590	2	$v[1]+c[2][5] = 80+510 = 590 < 650$: $b \leftarrow 590$, $a \leftarrow 2$
	3	–	–	480	3	$v[2]+c[3][5] = 140+340 = 480 < 590$: $b \leftarrow 480$, $a \leftarrow 3$

4	–	–	420	4	$v[3]+c[4][5] = 230+190 = 420 < 480$: $b \leftarrow 420$, $a \leftarrow 4$
5	–	–	420	4	$v[4]+c[5][5] = 320+130 = 450 > 420$: nessun aggiornamento
–	420	4	420	4	$v[5] \leftarrow b = 420$, $r[5] \leftarrow a = 4$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$v[t]$	0	80	140	230	320	420

Questo è il vettore r dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$r[t]$	1	1	3	3	4

2. Abbiamo il seguente vettore r:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$r[t]$	1	1	3	3	4

Possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	t	$r[t]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$t \leftarrow r[t]-1$
–	–	–	0	0	0	0	0	$t=5$
1	5	4	0	0	0	70	0	$t=4-1=3$
2	3	3	0	0	40	70	0	$t=3-1=2$
3	2	1	40	0	40	70	0	$t=1-1=0$

- $t=5$, $r[5]=4$: l'ultimo lotto di produzione dei periodi $1,\dots,5$ è nel periodo 4 e copre le domande dei periodi $4,\dots,5$, quindi $x[4] \leftarrow d_4+d_5=30+40=70$
- $t=3$, $r[3]=3$: il periodo 3 produce solo la propria domanda, quindi $x[3] \leftarrow d_3=40$
- $t=2$, $r[2]=1$: l'ultimo lotto di produzione dei periodi $1,\dots,2$ è nel periodo 1 e copre le domande dei periodi $1,\dots,2$, quindi $x[1] \leftarrow d_1+d_2=10+30=40$

Quindi il vettore

$$(40,0,40,70,0)$$

è una soluzione ottima. I setup sono nei periodi 1, 3, 4, le scorte sono $(s_1,\dots,s_5)=(30,0,0,40,0)$, e il costo totale è

$$\underbrace{70+50+80}_{\text{setup}}+\underbrace{1\cdot 40+1\cdot 0+1\cdot 40+1\cdot 70+2\cdot 0}_{\text{produzione}}$$
$$+\underbrace{1\cdot 30+1\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 40+2\cdot 0}_{\text{mantenimento}}=200+150+70=420.$$

Il valore ottimo è

$$v[5]=420.$$

Capitolo 11

PD per il problema del lot sizing capacitato

Esercizio 11.1

Consideriamo la seguente istanza del CLS con $m = 3$ periodi, in cui le domande, i costi di setup, i costi variabili di produzione, i costi di mantenimento a scorta e le capacità sono:

t	1	2	3
d_t	1	2	3
sc_t	10	5	8
vc_t	1	1	2
hc_t	1	1	2
cap_t	2	4	4

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e r.

2. Usando la matrice r, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di t e k, le celle $v[t][k]$ e $r[t][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di t e, per ogni valore fissato di t, per valori crescenti di $k \in \{0, 1, \ldots, D_{t+1,m}\}$. Ricordiamo che $f_t(0) = 0$ e $f_t(x) = sc_t + vc_t\, x$ per $x \geq 1$.

t	k	$v[t][k]$	$r[t][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $r[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$+\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow +\infty$, $r[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$+\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow +\infty$, $r[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$+\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow +\infty$, $r[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$+\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow +\infty$, $r[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$+\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow +\infty$, $r[0][5] \leftarrow 0$
0	6	$+\infty$	0	$v[0][6] \leftarrow +\infty$, $r[0][6] \leftarrow 0$
1	0	11	1	$\min\{v[0][1]+f_1(0), v[0][0]+f_1(1)\}+hc_1 \cdot 0 = \min\{+\infty, 0+11\}+1 \cdot 0 = 11$; primo minimo in $x = 1$
1	1	13	2	$\min\{v[0][2]+f_1(0), v[0][1]+f_1(1), v[0][0]+f_1(2)\}+hc_1 \cdot 1 = \min\{+\infty, +\infty, 0+12\}+1 \cdot 1 = 13$; primo minimo in $x = 2$
1	2	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][1], \ldots, v[0][3]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][2] \leftarrow +\infty$
1	3	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][2], \ldots, v[0][4]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][3] \leftarrow +\infty$
1	4	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][3], \ldots, v[0][5]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][4] \leftarrow +\infty$
1	5	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][4], \ldots, v[0][6]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][5] \leftarrow +\infty$
2	0	18	2	$\min\{v[1][2]+f_2(0), v[1][1]+f_2(1), v[1][0]+f_2(2)\}+hc_2 \cdot 0 = \min\{+\infty, 13+6, 11+7\}+1 \cdot 0 = 18$; primo minimo in $x = 2$
2	1	20	3	$\min\{v[1][3]+f_2(0), v[1][2]+f_2(1), v[1][1]+f_2(2), v[1][0]+f_2(3)\}+hc_2 \cdot 1 = \min\{+\infty, +\infty, 13+7, 11+8\}+1 \cdot 1 = 20$; primo minimo in $x = 3$
2	2	22	4	$\min\{v[1][4]+f_2(0), v[1][3]+f_2(1), v[1][2]+f_2(2), v[1][1]+f_2(3), v[1][0]+f_2(4)\}+hc_2 \cdot 2 = \min\{+\infty, +\infty, +\infty, 13+8, 11+9\}+1 \cdot 2 = 22$; primo minimo in $x = 4$
2	3	25	4	$\min\{v[1][5]+f_2(0), v[1][4]+f_2(1), v[1][3]+f_2(2), v[1][2]+f_2(3), v[1][1]+f_2(4)\}+hc_2 \cdot 3 = \min\{+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, 13+9\}+1 \cdot 3 = 25$; primo minimo in $x = 4$
3	0	25	0	$\min\{v[2][3]+f_3(0), v[2][2]+f_3(1), v[2][1]+f_3(2), v[2][0]+f_3(3)\}+hc_3 \cdot 0 = \min\{25+0, 22+10, 20+12, 18+14\}+2 \cdot 0 = 25$; primo minimo in $x = 0$

Queste sono le matrici v e r ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD (un punto indica una coppia (t,k) con $k > D_{t+1,m}$, che non è uno stato):

$v[t][k]$	0	1	2	3	4	5	6
$t=0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$t=1$	11	13	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	·
$t=2$	18	20	22	25	·	·	·
$t=3$	25	·	·	·	·	·	·

$r[t][k]$	0	1	2	3	4	5	6
$t=0$	0	0	0	0	0	0	0
$t=1$	1	2	0	0	0	0	·
$t=2$	2	3	4	4	·	·	·
$t=3$	0	·	·	·	·	·	·

Il valore ottimo dell'istanza del CLS è $v[3][0] = 25$.

2. Usando la matrice r, possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	t	k	$r[t][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$k \leftarrow k + d[t] - x[t]$
–	–	–	–	0	0	0	$t=3,\ k=0$
1	3	0	0	0	0	0	$k = 0+3-0 = 3$
2	2	3	4	0	4	0	$k = 3+2-4 = 1$
3	1	1	2	2	4	0	$k = 1+1-2 = 0$

Quindi, il vettore

$$(2,4,0)$$

è una soluzione ottima. I setup sono nei periodi 1, 2, le scorte sono $(s_1,\dots,s_3) = (1, 3, 0)$, e il costo totale è

$$\underbrace{10+5}_{\text{setup}} + \underbrace{1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 0}_{\text{produzione}} + \underbrace{1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 0}_{\text{mantenimento}} = 15+6+4 = 25.$$

Il valore ottimo è

$$v[3][0] = 25.$$

Esercizio 11.2

Consideriamo la seguente istanza del CLS con $m = 4$ periodi, in cui le domande, i costi di setup, i costi variabili di produzione, i costi di mantenimento a scorta e le capacità sono:

t	1	2	3	4
d_t	3	1	1	2
sc_t	5	6	10	10
vc_t	2	1	1	1
hc_t	1	1	2	2
cap_t	4	3	3	2

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e r.

2. Usando la matrice r, ricostruire una soluzione ottima $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di t e k, le celle $v[t][k]$ e $r[t][k]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di t e, per ogni valore fissato di t, per valori crescenti di $k \in \{0, 1, \ldots, D_{t+1,m}\}$. Ricordiamo che $f_t(0) = 0$ e $f_t(x) = sc_t + vc_t\, x$ per $x \geq 1$.

t	k	$v[t][k]$	$r[t][k]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $r[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$+\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow +\infty$, $r[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$+\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow +\infty$, $r[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$+\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow +\infty$, $r[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$+\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow +\infty$, $r[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$+\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow +\infty$, $r[0][5] \leftarrow 0$

0	6	$+\infty$	0	$v[0][6] \leftarrow +\infty$, $r[0][6] \leftarrow 0$
0	7	$+\infty$	0	$v[0][7] \leftarrow +\infty$, $r[0][7] \leftarrow 0$
1	0	11	3	$\min\{v[0][3]+f_1(0), v[0][2]+f_1(1), v[0][1]+f_1(2), v[0][0]+f_1(3)\}+hc_1 \cdot 0 = \min\{+\infty, +\infty, +\infty, 0+11\}+1 \cdot 0 = 11$; primo minimo in $x = 3$
1	1	14	4	$\min\{v[0][4]+f_1(0), v[0][3]+f_1(1), v[0][2]+f_1(2), v[0][1]+f_1(3), v[0][0]+f_1(4)\}+hc_1 \cdot 1 = \min\{+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, 0+13\}+1 \cdot 1 = 14$; primo minimo in $x = 4$
1	2	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][1], \ldots, v[0][5]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][2] \leftarrow +\infty$
1	3	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][2], \ldots, v[0][6]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][3] \leftarrow +\infty$
1	4	$+\infty$	0	i candidati usano le celle $v[0][3], \ldots, v[0][7]$, che valgono tutte $+\infty$: $v[1][4] \leftarrow +\infty$
2	0	14	0	$\min\{v[1][1]+f_2(0), v[1][0]+f_2(1)\}+hc_2 \cdot 0 = \min\{14+0, 11+7\}+1 \cdot 0 = 14$; primo minimo in $x = 0$
2	1	20	2	$\min\{v[1][2]+f_2(0), v[1][1]+f_2(1), v[1][0]+f_2(2)\}+hc_2 \cdot 1 = \min\{+\infty, 14+7, 11+8\}+1 \cdot 1 = 20$; primo minimo in $x = 2$
2	2	22	3	$\min\{v[1][3]+f_2(0), v[1][2]+f_2(1), v[1][1]+f_2(2), v[1][0]+f_2(3)\}+hc_2 \cdot 2 = \min\{+\infty, +\infty, 14+8, 11+9\}+1 \cdot 2 = 22$; primo minimo in $x = 3$
2	3	26	3	$\min\{v[1][4]+f_2(0), v[1][3]+f_2(1), v[1][2]+f_2(2), v[1][1]+f_2(3)\}+hc_2 \cdot 3 = \min\{+\infty, +\infty, +\infty, 14+9\}+1 \cdot 3 = 26$; primo minimo in $x = 3$
3	0	20	0	$\min\{v[2][1]+f_3(0), v[2][0]+f_3(1)\}+hc_3 \cdot 0 = \min\{20+0, 14+11\}+2 \cdot 0 = 20$; primo minimo in $x = 0$
3	1	24	0	$\min\{v[2][2]+f_3(0), v[2][1]+f_3(1), v[2][0]+f_3(2)\}+hc_3 \cdot 1 = \min\{22+0, 20+11, 14+12\}+2 \cdot 1 = 24$; primo minimo in $x = 0$
3	2	30	0	$\min\{v[2][3]+f_3(0), v[2][2]+f_3(1), v[2][1]+f_3(2), v[2][0]+f_3(3)\}+hc_3 \cdot 2 = \min\{26+0, 22+11, 20+12, 14+13\}+2 \cdot 2 = 30$; primo minimo in $x = 0$
4	0	30	0	$\min\{v[3][2]+f_4(0), v[3][1]+f_4(1), v[3][0]+f_4(2)\}+hc_4 \cdot 0 = \min\{30+0, 24+11, 20+12\}+2 \cdot 0 = 30$; primo minimo in $x = 0$

Queste sono le matrici v e r ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD (un punto indica una coppia (t,k) con $k > D_{t+1,m}$, che non è uno stato):

$v[t][k]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$t=0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$t=1$	11	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	·	·	·
$t=2$	14	20	22	26	·	·	·	·
$t=3$	20	24	30	·	·	·	·	·
$t=4$	30	·	·	·	·	·	·	·

$r[t][k]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$t=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$t=1$	3	4	0	0	0	·	·	·
$t=2$	0	2	3	3	·	·	·	·
$t=3$	0	0	0	·	·	·	·	·
$t=4$	0	·	·	·	·	·	·	·

Il valore ottimo dell'istanza del CLS è $v[4][0] = 30$.

2. Usando la matrice r, possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	t	k	$r[t][k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$k \leftarrow k + d[t] - x[t]$
–	–	–	–	0	0	0	0	$t=4,\ k=0$
1	4	0	0	0	0	0	0	$k = 0+2-0 = 2$
2	3	2	0	0	0	0	0	$k = 2+1-0 = 3$
3	2	3	3	0	3	0	0	$k = 3+1-3 = 1$
4	1	1	4	4	3	0	0	$k = 1+3-4 = 0$

Quindi, il vettore

$$(4,3,0,0)$$

è una soluzione ottima. I setup sono nei periodi 1, 2, le scorte sono $(s_1,\dots,s_4) = (1, 3, 2, 0)$, e il costo totale è

$$\underbrace{5+6}_{\text{setup}} + \underbrace{2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0}_{\text{produzione}} + \underbrace{1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 0}_{\text{mantenimento}} = 11 + 11 + 8 = 30.$$

Il valore ottimo è

$$v[4][0] = 30.$$

Problemi misti

Capitolo 12

PD per il problema del cambio monete

Esercizio 12.1

Consideriamo la seguente istanza del CCP, in cui il resto da restituire è $c = 6$ e i tagli sono

$$w = (1, 4).$$

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori dell'array v e dell'array s.

2. Usando l'array s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta il resto k, le celle $v[k]$ e $s[k]$ e l'operazione eseguita; $s[k]$ è l'indice j del taglio della moneta usata. In caso di pareggio si tiene l'indice minimo, perché m viene aggiornato solo quando il valore è strettamente minore.

k	$v[k]$	$s[k]$	Azione
0	0	0	$v[0] \leftarrow 0$, $s[0] \leftarrow 0$

1	1	1	$\min\{1 + v[0]\} = \min\{1\} = 1$
2	2	1	$\min\{1 + v[1]\} = \min\{2\} = 2$
3	3	1	$\min\{1 + v[2]\} = \min\{3\} = 3$
4	1	2	$\min\{1 + v[3], 1 + v[0]\} = \min\{4, 1\} = 1$
5	2	1	$\min\{1 + v[4], 1 + v[1]\} = \min\{2, 2\} = 2$
6	3	1	$\min\{1 + v[5], 1 + v[2]\} = \min\{3, 3\} = 3$

Questo è l'array v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6
$v[k]$	0	1	2	3	1	2	3

Questo è l'array s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6
$s[k]$	0	1	1	1	2	1	1

2. Abbiamo il seguente array s:

k	0	1	2	3	4	5	6
$s[k]$	0	1	1	1	2	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 6$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$k \leftarrow k - w_{s[k]}$
–	–	–	0	0	$k = 6$
1	6	1	1	0	$k = 6 - 1 = 5$
2	5	1	2	0	$k = 5 - 1 = 4$
3	4	2	2	1	$k = 4 - 4 = 0$

Quindi il vettore

$$(2, 1)$$

è una soluzione ottima: il suo valore totale è $2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6 = c$. Il valore ottimo è

$$v[6] = 3.$$

Esercizio 12.2

Consideriamo la seguente istanza del CCP, in cui il resto da restituire è $c = 11$ e i tagli sono

$$w = (3, 5).$$

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori dell'array v e dell'array s.

2. Usando l'array s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta il resto k, le celle $v[k]$ e $s[k]$ e l'operazione eseguita; $s[k]$ è l'indice j del taglio della moneta usata. In caso di pareggio si tiene l'indice minimo, perché m viene aggiornato solo quando il valore è strettamente minore. Il valore $+\infty$ indica un resto che non si può restituire, per il quale $s[k] = 0$.

k	$v[k]$	$s[k]$	Azione
0	0	0	$v[0] \leftarrow 0$, $s[0] \leftarrow 0$
1	$+\infty$	0	nessun taglio $w_j \leq 1$: $v[1] \leftarrow +\infty$
2	$+\infty$	0	nessun taglio $w_j \leq 2$: $v[2] \leftarrow +\infty$
3	1	1	$\min\{1 + v[0]\} = \min\{1\} = 1$
4	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[1]\} = \min\{+\infty\} = +\infty$
5	1	2	$\min\{1 + v[2], 1 + v[0]\} = \min\{+\infty, 1\} = 1$
6	2	1	$\min\{1 + v[3], 1 + v[1]\} = \min\{2, +\infty\} = 2$
7	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[4], 1 + v[2]\} = \min\{+\infty, +\infty\} = +\infty$
8	2	1	$\min\{1 + v[5], 1 + v[3]\} = \min\{2, 2\} = 2$
9	3	1	$\min\{1 + v[6], 1 + v[4]\} = \min\{3, +\infty\} = 3$
10	2	2	$\min\{1 + v[7], 1 + v[5]\} = \min\{+\infty, 2\} = 2$
11	3	1	$\min\{1 + v[8], 1 + v[6]\} = \min\{3, 3\} = 3$

Questo è l'array v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$v[k]$	0	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	1	2	$+\infty$	2	3	2	3

Questo è l'array s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s[k]$	0	0	0	1	0	2	1	0	1	1	2	1

2. Abbiamo il seguente array s:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s[k]$	0	0	0	1	0	2	1	0	1	1	2	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 11$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$k \leftarrow k - w_{s[k]}$
–	–	–	0	0	$k = 11$
1	11	1	1	0	$k = 11 - 3 = 8$
2	8	1	2	0	$k = 8 - 3 = 5$
3	5	2	2	1	$k = 5 - 5 = 0$

Quindi il vettore

$$(2, 1)$$

è una soluzione ottima: il suo valore totale è $2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 11 = c$. Il valore ottimo è

$$v[11] = 3.$$

Esercizio 12.3

Consideriamo la seguente istanza del CCP, in cui il resto da restituire è $c = 7$ e i tagli sono

$$w = (2, 4).$$

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori dell'array v e dell'array s.

2. Usando l'array s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2), oppure spiegare perché l'istanza è inammissibile, e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta il resto k, le celle $v[k]$ e $s[k]$ e l'operazione eseguita; $s[k]$ è l'indice j del taglio della moneta usata. In caso di pareggio si tiene l'indice minimo, perché m viene aggiornato solo quando il valore è strettamente minore. Il valore $+\infty$ indica un resto che non si può restituire, per il quale $s[k] = 0$.

k	$v[k]$	$s[k]$	Azione
0	0	0	$v[0] \leftarrow 0$, $s[0] \leftarrow 0$
1	$+\infty$	0	nessun taglio $w_j \leq 1$: $v[1] \leftarrow +\infty$
2	1	1	$\min\{1 + v[0]\} = \min\{1\} = 1$
3	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[1]\} = \min\{+\infty\} = +\infty$
4	1	2	$\min\{1 + v[2], 1 + v[0]\} = \min\{2, 1\} = 1$
5	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[3], 1 + v[1]\} = \min\{+\infty, +\infty\} = +\infty$
6	2	1	$\min\{1 + v[4], 1 + v[2]\} = \min\{2, 2\} = 2$
7	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[5], 1 + v[3]\} = \min\{+\infty, +\infty\} = +\infty$

Questo è l'array v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$v[k]$	0	$+\infty$	1	$+\infty$	1	$+\infty$	2	$+\infty$

Questo è l'array s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$s[k]$	0	0	1	0	2	0	1	0

2. Poiché $v[7] = +\infty$, l'istanza è **inammissibile**: nessuna combinazione di monete dei tagli $w = (2, 4)$ restituisce un resto esattamente uguale a $c = 7$. Infatti ogni taglio è pari, quindi ogni resto che si può restituire è pari, mentre $c = 7$ è dispari.

   Poiché $s[7] = 0$, non c'è alcuna soluzione da ricostruire. Il valore ottimo è

   $$v[7] = +\infty.$$

Esercizio 12.4

Consideriamo la seguente istanza del CCP, in cui il resto da restituire è $c = 12$ e i tagli sono

$$w = (3, 7).$$

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori dell'array v e dell'array s.

2. Usando l'array s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta il resto k, le celle $v[k]$ e $s[k]$ e l'operazione eseguita; $s[k]$ è l'indice j del taglio della moneta usata. In caso di pareggio si tiene l'indice minimo, perché m viene aggiornato solo quando il valore è strettamente minore. Il valore $+\infty$ indica un resto che non si può restituire, per il quale $s[k] = 0$.

k	$v[k]$	$s[k]$	Azione
0	0	0	$v[0] \leftarrow 0$, $s[0] \leftarrow 0$
1	$+\infty$	0	nessun taglio $w_j \leq 1$: $v[1] \leftarrow +\infty$
2	$+\infty$	0	nessun taglio $w_j \leq 2$: $v[2] \leftarrow +\infty$
3	1	1	$\min\{1 + v[0]\} = \min\{1\} = 1$
4	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[1]\} = \min\{+\infty\} = +\infty$
5	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[2]\} = \min\{+\infty\} = +\infty$
6	2	1	$\min\{1 + v[3]\} = \min\{2\} = 2$
7	1	2	$\min\{1 + v[4], 1 + v[0]\} = \min\{+\infty, 1\} = 1$
8	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[5], 1 + v[1]\} = \min\{+\infty, +\infty\} = +\infty$
9	3	1	$\min\{1 + v[6], 1 + v[2]\} = \min\{3, +\infty\} = 3$
10	2	1	$\min\{1 + v[7], 1 + v[3]\} = \min\{2, 2\} = 2$
11	$+\infty$	0	$\min\{1 + v[8], 1 + v[4]\} = \min\{+\infty, +\infty\} = +\infty$
12	4	1	$\min\{1 + v[9], 1 + v[5]\} = \min\{4, +\infty\} = 4$

Questo è l'array v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v[k]$	0	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$	2	1	$+\infty$	3	2	$+\infty$	4

Questo è l'array s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s[k]$	0	0	0	1	0	0	1	2	0	1	1	0	1

2. Abbiamo il seguente array s:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s[k]$	0	0	0	1	0	0	1	2	0	1	1	0	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 12$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$k \leftarrow k - w_{s[k]}$
–	–	–	0	0	$k = 12$
1	12	1	1	0	$k = 12 - 3 = 9$
2	9	1	2	0	$k = 9 - 3 = 6$
3	6	1	3	0	$k = 6 - 3 = 3$
4	3	1	4	0	$k = 3 - 3 = 0$

Quindi il vettore

$$(4, 0)$$

è una soluzione ottima: il suo valore totale è $4 \cdot 3 = 12 = c$. Il valore ottimo è

$$v[12] = 4.$$

Esercizio 12.5

Consideriamo la seguente istanza del CCP, in cui il resto da restituire è $c = 9$ e i tagli sono

$$w = (2, 3, 7).$$

Domande

1. Mostrare l'esecuzione dell'algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori dell'array v e dell'array s.

2. Usando l'array s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera (x_1, x_2, x_3) e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo dell'algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta il resto k, le celle $v[k]$ e $s[k]$ e l'operazione eseguita; $s[k]$ è l'indice j del taglio della moneta usata. In caso di pareggio si tiene l'indice minimo, perché m viene aggiornato solo quando il valore è strettamente minore. Il valore $+\infty$ indica un resto che non si può restituire, per il quale $s[k] = 0$.

k	$v[k]$	$s[k]$	Azione
0	0	0	$v[0] \leftarrow 0$, $s[0] \leftarrow 0$
1	$+\infty$	0	nessun taglio $w_j \leq 1$: $v[1] \leftarrow +\infty$
2	1	1	$\min\{1 + v[0]\} = \min\{1\} = 1$
3	1	2	$\min\{1 + v[1], 1 + v[0]\} = \min\{+\infty, 1\} = 1$
4	2	1	$\min\{1 + v[2], 1 + v[1]\} = \min\{2, +\infty\} = 2$
5	2	1	$\min\{1 + v[3], 1 + v[2]\} = \min\{2, 2\} = 2$
6	2	2	$\min\{1 + v[4], 1 + v[3]\} = \min\{3, 2\} = 2$
7	1	3	$\min\{1 + v[5], 1 + v[4], 1 + v[0]\} = \min\{3, 3, 1\} = 1$
8	3	1	$\min\{1 + v[6], 1 + v[5], 1 + v[1]\} = \min\{3, 3, +\infty\} = 3$
9	2	1	$\min\{1 + v[7], 1 + v[6], 1 + v[2]\} = \min\{2, 3, 2\} = 2$

Questo è l'array v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v[k]$	0	$+\infty$	1	1	2	2	2	1	3	2

Questo è l'array s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s[k]$	0	0	1	2	1	1	2	3	1	1

2. Abbiamo il seguente array s:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s[k]$	0	0	1	2	1	1	2	3	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima partendo da $k = 9$ come segue:

Iterazione	k	$s[k]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$k \leftarrow k - w_{s[k]}$
–	–	–	0	0	0	$k = 9$
1	9	1	1	0	0	$k = 9 - 2 = 7$
2	7	3	1	0	1	$k = 7 - 7 = 0$

Quindi il vettore

$$(1, 0, 1)$$

è una soluzione ottima: il suo valore totale è $1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 = 9 = c$. Il valore ottimo è

$$v[9] = 2.$$

Capitolo 13

PD per il problema del taglio delle aste

Esercizio 13.1

Consideriamo la seguente istanza dell'RCP, in cui l'asta ha lunghezza $n = 6$ e i profitti associati alle possibili lunghezze dei pezzi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
p_j	2	5	7	8	10	13

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di ℓ e j, le celle $v[\ell]$ e $s[\ell]$, il valore corrente di m e il valore corrente di t. La cella di m è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di t è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[\ell]$ e $s[\ell]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

ℓ	j	$v[\ell]$	$s[\ell]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
1	1	–	–	2	1	$p[1] + v[0] = 2 + 0 = 2 > 0$: $m \leftarrow 2$, $t \leftarrow 1$
	–	2	1	2	1	$v[1] \leftarrow m = 2$, $s[1] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
2	1	–	–	4	1	$p[1] + v[1] = 2 + 2 = 4 > 0$: $m \leftarrow 4$, $t \leftarrow 1$
	2	–	–	5	2	$p[2] + v[0] = 5 + 0 = 5 > 4$: $m \leftarrow 5$, $t \leftarrow 2$
	–	5	2	5	2	$v[2] \leftarrow m = 5$, $s[2] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
3	1	–	–	7	1	$p[1] + v[2] = 2 + 5 = 7 > 0$: $m \leftarrow 7$, $t \leftarrow 1$
	2	–	–	7	1	$p[2]+v[1] = 5+2 = 7 = m$: nessun aggiornamento
	3	–	–	7	1	$p[3]+v[0] = 7+0 = 7 = m$: nessun aggiornamento
	–	7	1	7	1	$v[3] \leftarrow m = 7$, $s[3] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
4	1	–	–	9	1	$p[1] + v[3] = 2 + 7 = 9 > 0$: $m \leftarrow 9$, $t \leftarrow 1$
	2	–	–	10	2	$p[2] + v[2] = 5 + 5 = 10 > 9$: $m \leftarrow 10$, $t \leftarrow 2$
	3	–	–	10	2	$p[3] + v[1] = 7 + 2 = 9 < 10$: nessun aggiornamento
	4	–	–	10	2	$p[4] + v[0] = 8 + 0 = 8 < 10$: nessun aggiornamento
	–	10	2	10	2	$v[4] \leftarrow m = 10$, $s[4] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
5	1	–	–	12	1	$p[1] + v[4] = 2 + 10 = 12 > 0$: $m \leftarrow 12$, $t \leftarrow 1$
	2	–	–	12	1	$p[2] + v[3] = 5 + 7 = 12 = m$: nessun aggiornamento
	3	–	–	12	1	$p[3] + v[2] = 7 + 5 = 12 = m$: nessun aggiornamento
	4	–	–	12	1	$p[4] + v[1] = 8 + 2 = 10 < 12$: nessun aggiornamento
	5	–	–	12	1	$p[5] + v[0] = 10 + 0 = 10 < 12$: nessun aggiornamento
	–	12	1	12	1	$v[5] \leftarrow m = 12$, $s[5] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$
6	1	–	–	14	1	$p[1] + v[5] = 2 + 12 = 14 > 0$: $m \leftarrow 14$, $t \leftarrow 1$
	2	–	–	15	2	$p[2] + v[4] = 5 + 10 = 15 > 14$: $m \leftarrow 15$, $t \leftarrow 2$

3	–	–	15	2	$p[3] + v[3] = 7 + 7 = 14 < 15$: nessun aggiornamento
4	–	–	15	2	$p[4] + v[2] = 8 + 5 = 13 < 15$: nessun aggiornamento
5	–	–	15	2	$p[5] + v[1] = 10 + 2 = 12 < 15$: nessun aggiornamento
6	–	–	15	2	$p[6] + v[0] = 13 + 0 = 13 < 15$: nessun aggiornamento
–	15	2	15	2	$v[6] \leftarrow m = 15$, $s[6] \leftarrow t = 2$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$v[\ell]$	0	2	5	7	10	12	15

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$s[\ell]$	1	2	1	2	1	2

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$s[\ell]$	1	2	1	2	1	2

Possiamo ricostruire una soluzione ottima per un'asta di lunghezza $n=6$ come segue:

Iterazione	j	$s[j]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	Aggiornamento di j
-	-	-	0	0	0	0	0	0	$j=6$
1	6	2	0	1	0	0	0	0	$j=6-2=4$
2	4	2	0	2	0	0	0	0	$j=4-2=2$
3	2	2	0	3	0	0	0	0	$j=2-2=0$

Quindi il vettore

$$(0,3,0,0,0,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[6]=15.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e ℓ, le celle $v[j][\ell]$ e $s[j][\ell]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di ℓ.

j	ℓ	$v[j][\ell]$	$s[j][\ell]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$-\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow -\infty$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$-\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow -\infty$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$-\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow -\infty$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$-\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow -\infty$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$-\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow -\infty$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	$-\infty$	0	$v[0][6] \leftarrow -\infty$, $s[0][6] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$j > \ell$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	2	1	$p[1] + v[1][0] = 2 + 0 > v[0][1] = -\infty$: $v[1][1] \leftarrow 2$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	4	1	$p[1] + v[1][1] = 2 + 2 > v[0][2] = -\infty$: $v[1][2] \leftarrow 4$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	6	1	$p[1] + v[1][2] = 2 + 4 > v[0][3] = -\infty$: $v[1][3] \leftarrow 6$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	8	1	$p[1] + v[1][3] = 2 + 6 > v[0][4] = -\infty$: $v[1][4] \leftarrow 8$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	10	1	$p[1] + v[1][4] = 2 + 8 > v[0][5] = -\infty$: $v[1][5] \leftarrow 10$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	12	1	$p[1] + v[1][5] = 2 + 10 > v[0][6] = -\infty$: $v[1][6] \leftarrow 12$, $s[1][6] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$j > \ell$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	2	0	$j > \ell$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 2$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	5	1	$p[2] + v[2][0] = 5 + 0 > v[1][2] = 4$: $v[2][2] \leftarrow 5$, $s[2][2] \leftarrow 1$
2	3	7	1	$p[2] + v[2][1] = 5 + 2 > v[1][3] = 6$: $v[2][3] \leftarrow 7$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	10	1	$p[2] + v[2][2] = 5 + 5 > v[1][4] = 8$: $v[2][4] \leftarrow 10$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	12	1	$p[2] + v[2][3] = 5 + 7 > v[1][5] = 10$: $v[2][5] \leftarrow 12$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	15	1	$p[2] + v[2][4] = 5 + 10 > v[1][6] = 12$: $v[2][6] \leftarrow 15$, $s[2][6] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$j > \ell$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	2	0	$j > \ell$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 2$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	5	0	$j > \ell$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 5$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	7	0	$p[3] + v[3][0] = 7 + 0 \leq v[2][3] = 7$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 7$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	10	0	$p[3] + v[3][1] = 7 + 2 \leq v[2][4] = 10$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 10$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	12	0	$p[3] + v[3][2] = 7 + 5 \leq v[2][5] = 12$: $v[3][5] \leftarrow v[2][5] = 12$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	15	0	$p[3] + v[3][3] = 7 + 7 \leq v[2][6] = 15$: $v[3][6] \leftarrow v[2][6] = 15$, $s[3][6] \leftarrow 0$
4	0	0	0	$j > \ell$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	2	0	$j > \ell$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 2$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	5	0	$j > \ell$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 5$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	7	0	$j > \ell$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 7$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	10	0	$p[4] + v[4][0] = 8 + 0 \leq v[3][4] = 10$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 10$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	12	0	$p[4] + v[4][1] = 8 + 2 \leq v[3][5] = 12$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 12$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	15	0	$p[4] + v[4][2] = 8 + 5 \leq v[3][6] = 15$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 15$, $s[4][6] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$j > \ell$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	2	0	$j > \ell$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 2$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	5	0	$j > \ell$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 5$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	7	0	$j > \ell$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 7$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	10	0	$j > \ell$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 10$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	12	0	$p[5] + v[5][0] = 10 + 0 \leq v[4][5] = 12$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 12$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	15	0	$p[5] + v[5][1] = 10 + 2 \leq v[4][6] = 15$: $v[5][6] \leftarrow v[4][6] = 15$, $s[5][6] \leftarrow 0$
6	0	0	0	$j > \ell$: $v[6][0] \leftarrow v[5][0] = 0$, $s[6][0] \leftarrow 0$
6	1	2	0	$j > \ell$: $v[6][1] \leftarrow v[5][1] = 2$, $s[6][1] \leftarrow 0$
6	2	5	0	$j > \ell$: $v[6][2] \leftarrow v[5][2] = 5$, $s[6][2] \leftarrow 0$
6	3	7	0	$j > \ell$: $v[6][3] \leftarrow v[5][3] = 7$, $s[6][3] \leftarrow 0$
6	4	10	0	$j > \ell$: $v[6][4] \leftarrow v[5][4] = 10$, $s[6][4] \leftarrow 0$

6	5	12	0	$j > \ell$: $v[6][5] \leftarrow v[5][5] = 12$, $s[6][5] \leftarrow 0$
6	6	15	0	$p[6] + v[6][0] = 13 + 0 \leq v[5][6] = 15$: $v[6][6] \leftarrow v[5][6] = 15$, $s[6][6] \leftarrow 0$

Queste sono le matrici v e s ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$j=0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$j=1$	0	2	4	6	8	10	12
$j=2$	0	2	5	7	10	12	15
$j=3$	0	2	5	7	10	12	15
$j=4$	0	2	5	7	10	12	15
$j=5$	0	2	5	7	10	12	15
$j=6$	0	2	5	7	10	12	15

$s[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0
$j=6$	0	0	0	0	0	0	0

Il valore ottimo dell'istanza dell'RCP è $v[6][6] = 15$.

4. Con la matrice s possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	j	ℓ	$s[j][\ell]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	Azione
1	6	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 5$
2	5	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
3	4	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
4	3	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 2$
5	2	6	1	0	1	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 4$
6	2	4	1	0	2	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 2$
7	2	2	1	0	3	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 0$

Quindi il vettore

$$(0, 3, 0, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[6][6] = 15.$$

Esercizio 13.2

Consideriamo la seguente istanza dell'RCP, in cui l'asta ha lunghezza $n = 5$ e i profitti associati alle possibili lunghezze dei pezzi sono:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	1	4	6	8	9

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di ℓ e j, le celle $v[\ell]$

e $s[\ell]$, il valore corrente di m e il valore corrente di t. La cella di m è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di t è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[\ell]$ e $s[\ell]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

ℓ	j	$v[\ell]$	$s[\ell]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
1	1	–	–	1	1	$p[1] + v[0] = 1 + 0 = 1 > 0$: $m \leftarrow 1,\ t \leftarrow 1$
	–	1	1	1	1	$v[1] \leftarrow m = 1,\ s[1] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
2	1	–	–	2	1	$p[1] + v[1] = 1 + 1 = 2 > 0$: $m \leftarrow 2,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	4	2	$p[2] + v[0] = 4 + 0 = 4 > 2$: $m \leftarrow 4,\ t \leftarrow 2$
	–	4	2	4	2	$v[2] \leftarrow m = 4,\ s[2] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
3	1	–	–	5	1	$p[1] + v[2] = 1 + 4 = 5 > 0$: $m \leftarrow 5,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	5	1	$p[2]+v[1] = 4+1 = 5 = m$: nessun aggiornamento
	3	–	–	6	3	$p[3] + v[0] = 6 + 0 = 6 > 5$: $m \leftarrow 6,\ t \leftarrow 3$
	–	6	3	6	3	$v[3] \leftarrow m = 6,\ s[3] \leftarrow t = 3$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
4	1	–	–	7	1	$p[1] + v[3] = 1 + 6 = 7 > 0$: $m \leftarrow 7,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	8	2	$p[2] + v[2] = 4 + 4 = 8 > 7$: $m \leftarrow 8,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	8	2	$p[3]+v[1] = 6+1 = 7 < 8$: nessun aggiornamento
	4	–	–	8	2	$p[4]+v[0] = 8+0 = 8 = m$: nessun aggiornamento
	–	8	2	8	2	$v[4] \leftarrow m = 8,\ s[4] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
5	1	–	–	9	1	$p[1] + v[4] = 1 + 8 = 9 > 0$: $m \leftarrow 9,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	10	2	$p[2] + v[3] = 4 + 6 = 10 > 9$: $m \leftarrow 10,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	10	2	$p[3] + v[2] = 6 + 4 = 10 = m$: nessun aggiornamento
	4	–	–	10	2	$p[4] + v[1] = 8 + 1 = 9 < 10$: nessun aggiornamento
	5	–	–	10	2	$p[5] + v[0] = 9 + 0 = 9 < 10$: nessun aggiornamento
	–	10	2	10	2	$v[5] \leftarrow m = 10,\ s[5] \leftarrow t = 2$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$v[\ell]$	0	1	4	6	8	10

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$s[\ell]$	1	2	3	2	2

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$s[\ell]$	1	2	3	2	2

Possiamo ricostruire una soluzione ottima per un'asta di lunghezza $n = 5$ come segue:

Iterazione	j	$s[j]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Aggiornamento di j
-	-	-	0	0	0	0	0	$j = 5$
1	5	2	0	1	0	0	0	$j = 5 - 2 = 3$
2	3	3	0	1	1	0	0	$j = 3 - 3 = 0$

Quindi il vettore

$$(0, 1, 1, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5] = 10.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e ℓ, le celle $v[j][\ell]$ e $s[j][\ell]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di ℓ.

j	ℓ	$v[j][\ell]$	$s[j][\ell]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$-\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow -\infty$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$-\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow -\infty$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$-\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow -\infty$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$-\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow -\infty$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$-\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow -\infty$, $s[0][5] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$j > \ell$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	1	1	$p[1] + v[1][0] = 1 + 0 > v[0][1] = -\infty$: $v[1][1] \leftarrow 1$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	2	1	$p[1] + v[1][1] = 1 + 1 > v[0][2] = -\infty$: $v[1][2] \leftarrow 2$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	3	1	$p[1] + v[1][2] = 1 + 2 > v[0][3] = -\infty$: $v[1][3] \leftarrow 3$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	4	1	$p[1] + v[1][3] = 1 + 3 > v[0][4] = -\infty$: $v[1][4] \leftarrow 4$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	5	1	$p[1] + v[1][4] = 1 + 4 > v[0][5] = -\infty$: $v[1][5] \leftarrow 5$, $s[1][5] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$j > \ell$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	1	0	$j > \ell$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 1$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	4	1	$p[2] + v[2][0] = 4 + 0 > v[1][2] = 2$: $v[2][2] \leftarrow 4$, $s[2][2] \leftarrow 1$
2	3	5	1	$p[2] + v[2][1] = 4 + 1 > v[1][3] = 3$: $v[2][3] \leftarrow 5$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	8	1	$p[2] + v[2][2] = 4 + 4 > v[1][4] = 4$: $v[2][4] \leftarrow 8$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	9	1	$p[2] + v[2][3] = 4 + 5 > v[1][5] = 5$: $v[2][5] \leftarrow 9$, $s[2][5] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$j > \ell$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	1	0	$j > \ell$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 1$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	4	0	$j > \ell$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 4$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	6	1	$p[3] + v[3][0] = 6 + 0 > v[2][3] = 5$: $v[3][3] \leftarrow 6$, $s[3][3] \leftarrow 1$
3	4	8	0	$p[3] + v[3][1] = 6 + 1 \leq v[2][4] = 8$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 8$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	10	1	$p[3] + v[3][2] = 6 + 4 > v[2][5] = 9$: $v[3][5] \leftarrow 10$, $s[3][5] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$j > \ell$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	1	0	$j > \ell$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 1$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	4	0	$j > \ell$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 4$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	6	0	$j > \ell$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 6$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	8	0	$p[4] + v[4][0] = 8 + 0 \leq v[3][4] = 8$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 8$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	10	0	$p[4] + v[4][1] = 8 + 1 \leq v[3][5] = 10$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 10$, $s[4][5] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$j > \ell$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	1	0	$j > \ell$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 1$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	4	0	$j > \ell$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 4$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	6	0	$j > \ell$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 6$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	8	0	$j > \ell$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 8$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	10	0	$p[5] + v[5][0] = 9 + 0 \leq v[4][5] = 10$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 10$, $s[5][5] \leftarrow 0$

Queste sono le matrici v e s ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$
$j=0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$j=1$	0	1	2	3	4	5
$j=2$	0	1	4	5	8	9
$j=3$	0	1	4	6	8	10
$j=4$	0	1	4	6	8	10
$j=5$	0	1	4	6	8	10

$s[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$
$j=0$	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	1	0	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0

Il valore ottimo dell'istanza dell'RCP è $v[5][5] = 10$.

4. Con la matrice s possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	j	ℓ	$s[j][\ell]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
1	5	5	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
2	4	5	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
3	3	5	1	0	0	1	0	0	$\ell \leftarrow 2$
4	3	2	0	0	0	1	0	0	$j \leftarrow 2$
5	2	2	1	0	1	1	0	0	$\ell \leftarrow 0$

Quindi il vettore

$$(0, 1, 1, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][5] = 10.$$

Esercizio 13.3

Consideriamo la seguente istanza dell'RCP, in cui l'asta ha lunghezza $n = 5$ e i profitti associati alle possibili lunghezze dei pezzi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
p_j	3	5	8	9	10

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di ℓ e j, le celle $v[\ell]$ e $s[\ell]$, il valore corrente di m e il valore corrente di t. La cella di m è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di t è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[\ell]$ e $s[\ell]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

ℓ	j	$v[\ell]$	$s[\ell]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0$, $t \leftarrow 0$

1	1	–	–	3	1	$p[1]+v[0]=3+0=3>0$: $m\leftarrow 3$, $t\leftarrow 1$
	–	3	1	3	1	$v[1]\leftarrow m=3$, $s[1]\leftarrow t=1$
	–	–	–	0	0	$m\leftarrow 0$, $t\leftarrow 0$
2	1	–	–	6	1	$p[1]+v[1]=3+3=6>0$: $m\leftarrow 6$, $t\leftarrow 1$
	2	–	–	6	1	$p[2]+v[0]=5+0=5<6$: nessun aggiornamento
	–	6	1	6	1	$v[2]\leftarrow m=6$, $s[2]\leftarrow t=1$
	–	–	–	0	0	$m\leftarrow 0$, $t\leftarrow 0$
3	1	–	–	9	1	$p[1]+v[2]=3+6=9>0$: $m\leftarrow 9$, $t\leftarrow 1$
	2	–	–	9	1	$p[2]+v[1]=5+3=8<9$: nessun aggiornamento
	3	–	–	9	1	$p[3]+v[0]=8+0=8<9$: nessun aggiornamento
	–	9	1	9	1	$v[3]\leftarrow m=9$, $s[3]\leftarrow t=1$
	–	–	–	0	0	$m\leftarrow 0$, $t\leftarrow 0$
4	1	–	–	12	1	$p[1]+v[3]=3+9=12>0$: $m\leftarrow 12$, $t\leftarrow 1$
	2	–	–	12	1	$p[2]+v[2]=5+6=11<12$: nessun aggiornamento
	3	–	–	12	1	$p[3]+v[1]=8+3=11<12$: nessun aggiornamento
	4	–	–	12	1	$p[4]+v[0]=9+0=9<12$: nessun aggiornamento
	–	12	1	12	1	$v[4]\leftarrow m=12$, $s[4]\leftarrow t=1$
	–	–	–	0	0	$m\leftarrow 0$, $t\leftarrow 0$
5	1	–	–	15	1	$p[1]+v[4]=3+12=15>0$: $m\leftarrow 15$, $t\leftarrow 1$
	2	–	–	15	1	$p[2]+v[3]=5+9=14<15$: nessun aggiornamento
	3	–	–	15	1	$p[3]+v[2]=8+6=14<15$: nessun aggiornamento
	4	–	–	15	1	$p[4]+v[1]=9+3=12<15$: nessun aggiornamento
	5	–	–	15	1	$p[5]+v[0]=10+0=10<15$: nessun aggiornamento
	–	15	1	15	1	$v[5]\leftarrow m=15$, $s[5]\leftarrow t=1$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$v[\ell]$	0	3	6	9	12	15

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$s[\ell]$	1	1	1	1	1

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$s[\ell]$	1	1	1	1	1

Possiamo ricostruire una soluzione ottima per un'asta di lunghezza $n = 5$ come segue:

Iterazione	j	$s[j]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Aggiornamento di j
-	-	-	0	0	0	0	0	$j = 5$
1	5	1	1	0	0	0	0	$j = 5 - 1 = 4$
2	4	1	2	0	0	0	0	$j = 4 - 1 = 3$
3	3	1	3	0	0	0	0	$j = 3 - 1 = 2$
4	2	1	4	0	0	0	0	$j = 2 - 1 = 1$
5	1	1	5	0	0	0	0	$j = 1 - 1 = 0$

Quindi il vettore

$$(5, 0, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5] = 15.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e ℓ, le celle $v[j][\ell]$ e $s[j][\ell]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di ℓ.

j	ℓ	$v[j][\ell]$	$s[j][\ell]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$-\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow -\infty$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$-\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow -\infty$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$-\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow -\infty$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$-\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow -\infty$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$-\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow -\infty$, $s[0][5] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$j > \ell$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	3	1	$p[1] + v[1][0] = 3 + 0 > v[0][1] = -\infty$: $v[1][1] \leftarrow 3$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	6	1	$p[1] + v[1][1] = 3 + 3 > v[0][2] = -\infty$: $v[1][2] \leftarrow 6$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	9	1	$p[1] + v[1][2] = 3 + 6 > v[0][3] = -\infty$: $v[1][3] \leftarrow 9$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	12	1	$p[1] + v[1][3] = 3 + 9 > v[0][4] = -\infty$: $v[1][4] \leftarrow 12$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	15	1	$p[1] + v[1][4] = 3 + 12 > v[0][5] = -\infty$: $v[1][5] \leftarrow 15$, $s[1][5] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$j > \ell$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	3	0	$j > \ell$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 3$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	6	0	$p[2] + v[2][0] = 5 + 0 \leq v[1][2] = 6$: $v[2][2] \leftarrow v[1][2] = 6$, $s[2][2] \leftarrow 0$
2	3	9	0	$p[2] + v[2][1] = 5 + 3 \leq v[1][3] = 9$: $v[2][3] \leftarrow v[1][3] = 9$, $s[2][3] \leftarrow 0$
2	4	12	0	$p[2] + v[2][2] = 5 + 6 \leq v[1][4] = 12$: $v[2][4] \leftarrow v[1][4] = 12$, $s[2][4] \leftarrow 0$
2	5	15	0	$p[2] + v[2][3] = 5 + 9 \leq v[1][5] = 15$: $v[2][5] \leftarrow v[1][5] = 15$, $s[2][5] \leftarrow 0$
3	0	0	0	$j > \ell$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	3	0	$j > \ell$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 3$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	6	0	$j > \ell$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 6$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	9	0	$p[3] + v[3][0] = 8 + 0 \leq v[2][3] = 9$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 9$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	12	0	$p[3] + v[3][1] = 8 + 3 \leq v[2][4] = 12$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 12$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	15	0	$p[3] + v[3][2] = 8 + 6 \leq v[2][5] = 15$: $v[3][5] \leftarrow v[2][5] = 15$, $s[3][5] \leftarrow 0$
4	0	0	0	$j > \ell$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	3	0	$j > \ell$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 3$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	6	0	$j > \ell$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 6$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	9	0	$j > \ell$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 9$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	12	0	$p[4] + v[4][0] = 9 + 0 \leq v[3][4] = 12$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 12$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	15	0	$p[4] + v[4][1] = 9 + 3 \leq v[3][5] = 15$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 15$, $s[4][5] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$j > \ell$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	3	0	$j > \ell$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 3$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	6	0	$j > \ell$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 6$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	9	0	$j > \ell$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 9$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	12	0	$j > \ell$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 12$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	15	0	$p[5] + v[5][0] = 10 + 0 \leq v[4][5] = 15$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 15$, $s[5][5] \leftarrow 0$

Queste sono le matrici v e s ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$
$j=0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$j=1$	0	3	6	9	12	15
$j=2$	0	3	6	9	12	15
$j=3$	0	3	6	9	12	15
$j=4$	0	3	6	9	12	15
$j=5$	0	3	6	9	12	15

$s[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$
$j=0$	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	0	0	0	0
$j=3$	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0

Il valore ottimo dell'istanza dell'RCP è $v[5][5] = 15$.

4. Con la matrice s possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	j	ℓ	$s[j][\ell]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	Azione
1	5	5	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
2	4	5	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
3	3	5	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 2$
4	2	5	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 1$
5	1	5	1	1	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 4$
6	1	4	1	2	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 3$
7	1	3	1	3	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 2$
8	1	2	1	4	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 1$
9	1	1	1	5	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 0$

Quindi il vettore

$$(5, 0, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[5][5] = 15.$$

Esercizio 13.4

Consideriamo la seguente istanza dell'RCP, in cui l'asta ha lunghezza $n = 6$ e i profitti associati alle possibili lunghezze dei pezzi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
p_j	2	6	7	11	13	17

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di ℓ e j, le celle $v[\ell]$

e $s[\ell]$, il valore corrente di m e il valore corrente di t. La cella di m è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di t è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[\ell]$ e $s[\ell]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

ℓ	j	$v[\ell]$	$s[\ell]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
1	1	–	–	2	1	$p[1] + v[0] = 2 + 0 = 2 > 0$: $m \leftarrow 2,\ t \leftarrow 1$
	–	2	1	2	1	$v[1] \leftarrow m = 2,\ s[1] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
2	1	–	–	4	1	$p[1] + v[1] = 2 + 2 = 4 > 0$: $m \leftarrow 4,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	6	2	$p[2] + v[0] = 6 + 0 = 6 > 4$: $m \leftarrow 6,\ t \leftarrow 2$
	–	6	2	6	2	$v[2] \leftarrow m = 6,\ s[2] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
3	1	–	–	8	1	$p[1] + v[2] = 2 + 6 = 8 > 0$: $m \leftarrow 8,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	8	1	$p[2]+v[1] = 6+2 = 8 = m$: nessun aggiornamento
	3	–	–	8	1	$p[3]+v[0] = 7+0 = 7 < 8$: nessun aggiornamento
	–	8	1	8	1	$v[3] \leftarrow m = 8,\ s[3] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
4	1	–	–	10	1	$p[1] + v[3] = 2 + 8 = 10 > 0$: $m \leftarrow 10,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	12	2	$p[2] + v[2] = 6 + 6 = 12 > 10$: $m \leftarrow 12,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	12	2	$p[3] + v[1] = 7 + 2 = 9 < 12$: nessun aggiornamento
	4	–	–	12	2	$p[4] + v[0] = 11 + 0 = 11 < 12$: nessun aggiornamento
	–	12	2	12	2	$v[4] \leftarrow m = 12,\ s[4] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
5	1	–	–	14	1	$p[1] + v[4] = 2 + 12 = 14 > 0$: $m \leftarrow 14,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	14	1	$p[2] + v[3] = 6 + 8 = 14 = m$: nessun aggiornamento
	3	–	–	14	1	$p[3] + v[2] = 7 + 6 = 13 < 14$: nessun aggiornamento
	4	–	–	14	1	$p[4] + v[1] = 11 + 2 = 13 < 14$: nessun aggiornamento
	5	–	–	14	1	$p[5] + v[0] = 13 + 0 = 13 < 14$: nessun aggiornamento
	–	14	1	14	1	$v[5] \leftarrow m = 14,\ s[5] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
6	1	–	–	16	1	$p[1] + v[5] = 2 + 14 = 16 > 0$: $m \leftarrow 16,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	18	2	$p[2] + v[4] = 6 + 12 = 18 > 16$: $m \leftarrow 18,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	18	2	$p[3] + v[3] = 7 + 8 = 15 < 18$: nessun aggiornamento
	4	–	–	18	2	$p[4] + v[2] = 11 + 6 = 17 < 18$: nessun aggiornamento
	5	–	–	18	2	$p[5] + v[1] = 13 + 2 = 15 < 18$: nessun aggiornamento

6	–	–	18	2	$p[6] + v[0] = 17 + 0 = 17 < 18$: nessun aggiornamento
–	18	2	18	2	$v[6] \leftarrow m = 18$, $s[6] \leftarrow t = 2$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	$\ell = 6$
$v[\ell]$	0	2	6	8	12	14	18

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	$\ell = 6$
$s[\ell]$	1	2	1	2	1	2

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$	$\ell = 6$
$s[\ell]$	1	2	1	2	1	2

Possiamo ricostruire una soluzione ottima per un'asta di lunghezza $n = 6$ come segue:

Iterazione	j	$s[j]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	Aggiornamento di j
-	-	-	0	0	0	0	0	0	$j = 6$
1	6	2	0	1	0	0	0	0	$j = 6 - 2 = 4$
2	4	2	0	2	0	0	0	0	$j = 4 - 2 = 2$
3	2	2	0	3	0	0	0	0	$j = 2 - 2 = 0$

Quindi il vettore

$$(0, 3, 0, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[6] = 18.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e ℓ, le celle $v[j][\ell]$ e $s[j][\ell]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di ℓ.

j	ℓ	$v[j][\ell]$	$s[j][\ell]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$-\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow -\infty$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$-\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow -\infty$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$-\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow -\infty$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$-\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow -\infty$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$-\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow -\infty$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	$-\infty$	0	$v[0][6] \leftarrow -\infty$, $s[0][6] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$j > \ell$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	2	1	$p[1] + v[1][0] = 2 + 0 > v[0][1] = -\infty$: $v[1][1] \leftarrow 2$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	4	1	$p[1] + v[1][1] = 2 + 2 > v[0][2] = -\infty$: $v[1][2] \leftarrow 4$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	6	1	$p[1] + v[1][2] = 2 + 4 > v[0][3] = -\infty$: $v[1][3] \leftarrow 6$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	8	1	$p[1] + v[1][3] = 2 + 6 > v[0][4] = -\infty$: $v[1][4] \leftarrow 8$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	10	1	$p[1] + v[1][4] = 2 + 8 > v[0][5] = -\infty$: $v[1][5] \leftarrow 10$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	12	1	$p[1] + v[1][5] = 2 + 10 > v[0][6] = -\infty$: $v[1][6] \leftarrow 12$, $s[1][6] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$j > \ell$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	2	0	$j > \ell$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 2$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	6	1	$p[2] + v[2][0] = 6 + 0 > v[1][2] = 4$: $v[2][2] \leftarrow 6$, $s[2][2] \leftarrow 1$
2	3	8	1	$p[2] + v[2][1] = 6 + 2 > v[1][3] = 6$: $v[2][3] \leftarrow 8$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	12	1	$p[2] + v[2][2] = 6 + 6 > v[1][4] = 8$: $v[2][4] \leftarrow 12$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	14	1	$p[2] + v[2][3] = 6 + 8 > v[1][5] = 10$: $v[2][5] \leftarrow 14$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	18	1	$p[2] + v[2][4] = 6 + 12 > v[1][6] = 12$: $v[2][6] \leftarrow 18$, $s[2][6] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$j > \ell$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	2	0	$j > \ell$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 2$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	6	0	$j > \ell$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 6$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	8	0	$p[3] + v[3][0] = 7 + 0 \leq v[2][3] = 8$: $v[3][3] \leftarrow v[2][3] = 8$, $s[3][3] \leftarrow 0$
3	4	12	0	$p[3] + v[3][1] = 7 + 2 \leq v[2][4] = 12$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 12$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	14	0	$p[3] + v[3][2] = 7 + 6 \leq v[2][5] = 14$: $v[3][5] \leftarrow v[2][5] = 14$, $s[3][5] \leftarrow 0$
3	6	18	0	$p[3] + v[3][3] = 7 + 8 \leq v[2][6] = 18$: $v[3][6] \leftarrow v[2][6] = 18$, $s[3][6] \leftarrow 0$
4	0	0	0	$j > \ell$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	2	0	$j > \ell$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 2$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	6	0	$j > \ell$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 6$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	8	0	$j > \ell$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 8$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	12	0	$p[4] + v[4][0] = 11 + 0 \leq v[3][4] = 12$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 12$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	14	0	$p[4] + v[4][1] = 11 + 2 \leq v[3][5] = 14$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 14$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	18	0	$p[4] + v[4][2] = 11 + 6 \leq v[3][6] = 18$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 18$, $s[4][6] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$j > \ell$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	2	0	$j > \ell$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 2$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	6	0	$j > \ell$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 6$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	8	0	$j > \ell$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 8$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	12	0	$j > \ell$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 12$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	14	0	$p[5] + v[5][0] = 13 + 0 \leq v[4][5] = 14$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 14$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	18	0	$p[5] + v[5][1] = 13 + 2 \leq v[4][6] = 18$: $v[5][6] \leftarrow v[4][6] = 18$, $s[5][6] \leftarrow 0$
6	0	0	0	$j > \ell$: $v[6][0] \leftarrow v[5][0] = 0$, $s[6][0] \leftarrow 0$
6	1	2	0	$j > \ell$: $v[6][1] \leftarrow v[5][1] = 2$, $s[6][1] \leftarrow 0$
6	2	6	0	$j > \ell$: $v[6][2] \leftarrow v[5][2] = 6$, $s[6][2] \leftarrow 0$
6	3	8	0	$j > \ell$: $v[6][3] \leftarrow v[5][3] = 8$, $s[6][3] \leftarrow 0$
6	4	12	0	$j > \ell$: $v[6][4] \leftarrow v[5][4] = 12$, $s[6][4] \leftarrow 0$

6	5	14	0	$j > \ell$: $v[6][5] \leftarrow v[5][5] = 14$, $s[6][5] \leftarrow 0$
6	6	18	0	$p[6]+v[6][0] = 17+0 \leq v[5][6] = 18$: $v[6][6] \leftarrow v[5][6] = 18$, $s[6][6] \leftarrow 0$

Queste sono le matrici v e s ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$j=0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$j=1$	0	2	4	6	8	10	12
$j=2$	0	2	6	8	12	14	18
$j=3$	0	2	6	8	12	14	18
$j=4$	0	2	6	8	12	14	18
$j=5$	0	2	6	8	12	14	18
$j=6$	0	2	6	8	12	14	18

$s[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	0	0	0	0
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0
$j=6$	0	0	0	0	0	0	0

Il valore ottimo dell'istanza dell'RCP è $v[6][6] = 18$.

4. Con la matrice s possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	j	ℓ	$s[j][\ell]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	Azione
1	6	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 5$
2	5	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
3	4	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
4	3	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 2$
5	2	6	1	0	1	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 4$
6	2	4	1	0	2	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 2$
7	2	2	1	0	3	0	0	0	0	$\ell \leftarrow 0$

Quindi il vettore

$$(0, 3, 0, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[6][6] = 18.$$

Esercizio 13.5

Consideriamo la seguente istanza dell'RCP, in cui l'asta ha lunghezza $n = 6$ e i profitti associati alle possibili lunghezze dei pezzi sono:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
p_j	1	5	8	9	12	14

Domande

1. Mostrare l'esecuzione del primo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori del vettore v e i valori del vettore s.

2. Usando il vettore s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

3. Mostrare l'esecuzione del secondo algoritmo di PD bottom-up riportando, per ogni iterazione, i valori delle matrici v e s.

4. Usando la matrice s, ricostruire una soluzione ottima in notazione intera $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e riportare il valore ottimo.

Soluzione

1. Esecuzione passo per passo del primo algoritmo di PD bottom-up

   Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di ℓ e j, le celle $v[\ell]$

e $s[\ell]$, il valore corrente di m e il valore corrente di t. La cella di m è evidenziata in rosso quando viene aggiornata; la cella di t è evidenziata in blu quando viene aggiornata; le celle di $v[\ell]$ e $s[\ell]$ sono evidenziate in blu quando vengono assegnate.

ℓ	j	$v[\ell]$	$s[\ell]$	m	t	Azione
–	–	0	–	–	–	$v[0] \leftarrow 0$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
1	1	–	–	1	1	$p[1] + v[0] = 1 + 0 = 1 > 0$: $m \leftarrow 1,\ t \leftarrow 1$
	–	1	1	1	1	$v[1] \leftarrow m = 1,\ s[1] \leftarrow t = 1$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
2	1	–	–	2	1	$p[1] + v[1] = 1 + 1 = 2 > 0$: $m \leftarrow 2,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	5	2	$p[2] + v[0] = 5 + 0 = 5 > 2$: $m \leftarrow 5,\ t \leftarrow 2$
	–	5	2	5	2	$v[2] \leftarrow m = 5,\ s[2] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
3	1	–	–	6	1	$p[1] + v[2] = 1 + 5 = 6 > 0$: $m \leftarrow 6,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	6	1	$p[2]+v[1] = 5+1 = 6 = m$: nessun aggiornamento
	3	–	–	8	3	$p[3] + v[0] = 8 + 0 = 8 > 6$: $m \leftarrow 8,\ t \leftarrow 3$
	–	8	3	8	3	$v[3] \leftarrow m = 8,\ s[3] \leftarrow t = 3$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
4	1	–	–	9	1	$p[1] + v[3] = 1 + 8 = 9 > 0$: $m \leftarrow 9,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	10	2	$p[2] + v[2] = 5 + 5 = 10 > 9$: $m \leftarrow 10,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	10	2	$p[3] + v[1] = 8 + 1 = 9 < 10$: nessun aggiornamento
	4	–	–	10	2	$p[4] + v[0] = 9 + 0 = 9 < 10$: nessun aggiornamento
	–	10	2	10	2	$v[4] \leftarrow m = 10,\ s[4] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
5	1	–	–	11	1	$p[1] + v[4] = 1 + 10 = 11 > 0$: $m \leftarrow 11,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	13	2	$p[2] + v[3] = 5 + 8 = 13 > 11$: $m \leftarrow 13,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	13	2	$p[3] + v[2] = 8 + 5 = 13 = m$: nessun aggiornamento
	4	–	–	13	2	$p[4] + v[1] = 9 + 1 = 10 < 13$: nessun aggiornamento
	5	–	–	13	2	$p[5] + v[0] = 12 + 0 = 12 < 13$: nessun aggiornamento
	–	13	2	13	2	$v[5] \leftarrow m = 13,\ s[5] \leftarrow t = 2$
	–	–	–	0	0	$m \leftarrow 0,\ t \leftarrow 0$
6	1	–	–	14	1	$p[1] + v[5] = 1 + 13 = 14 > 0$: $m \leftarrow 14,\ t \leftarrow 1$
	2	–	–	15	2	$p[2] + v[4] = 5 + 10 = 15 > 14$: $m \leftarrow 15,\ t \leftarrow 2$
	3	–	–	16	3	$p[3] + v[3] = 8 + 8 = 16 > 15$: $m \leftarrow 16,\ t \leftarrow 3$
	4	–	–	16	3	$p[4] + v[2] = 9 + 5 = 14 < 16$: nessun aggiornamento
	5	–	–	16	3	$p[5] + v[1] = 12 + 1 = 13 < 16$: nessun aggiornamento
	6	–	–	16	3	$p[6] + v[0] = 14 + 0 = 14 < 16$: nessun aggiornamento
	–	16	3	16	3	$v[6] \leftarrow m = 16,\ s[6] \leftarrow t = 3$

Questo è il vettore v dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$v[\ell]$	0	1	5	8	10	13	16

Questo è il vettore s dopo l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$s[\ell]$	1	2	3	2	2	3

2. Abbiamo il seguente vettore s:

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$s[\ell]$	1	2	3	2	2	3

Possiamo ricostruire una soluzione ottima per un'asta di lunghezza $n=6$ come segue:

Iterazione	j	$s[j]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	Aggiornamento di j
-	-	-	0	0	0	0	0	0	$j=6$
1	6	3	0	0	1	0	0	0	$j=6-3=3$
2	3	3	0	0	2	0	0	0	$j=3-3=0$

Quindi il vettore

$$(0,0,2,0,0,0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[6]=16.$$

3. Esecuzione passo per passo del secondo algoritmo di PD bottom-up

Per ogni passo dell'algoritmo di PD, la tabella riporta i valori di j e ℓ, le celle $v[j][\ell]$ e $s[j][\ell]$ e l'operazione eseguita. Le celle si calcolano per valori crescenti di j e, per ogni valore fissato di j, per valori crescenti di ℓ.

j	ℓ	$v[j][\ell]$	$s[j][\ell]$	Azione
0	0	0	0	$v[0][0] \leftarrow 0$, $s[0][0] \leftarrow 0$
0	1	$-\infty$	0	$v[0][1] \leftarrow -\infty$, $s[0][1] \leftarrow 0$
0	2	$-\infty$	0	$v[0][2] \leftarrow -\infty$, $s[0][2] \leftarrow 0$
0	3	$-\infty$	0	$v[0][3] \leftarrow -\infty$, $s[0][3] \leftarrow 0$
0	4	$-\infty$	0	$v[0][4] \leftarrow -\infty$, $s[0][4] \leftarrow 0$
0	5	$-\infty$	0	$v[0][5] \leftarrow -\infty$, $s[0][5] \leftarrow 0$
0	6	$-\infty$	0	$v[0][6] \leftarrow -\infty$, $s[0][6] \leftarrow 0$
1	0	0	0	$j > \ell$: $v[1][0] \leftarrow v[0][0] = 0$, $s[1][0] \leftarrow 0$
1	1	1	1	$p[1] + v[1][0] = 1 + 0 > v[0][1] = -\infty$: $v[1][1] \leftarrow 1$, $s[1][1] \leftarrow 1$
1	2	2	1	$p[1] + v[1][1] = 1 + 1 > v[0][2] = -\infty$: $v[1][2] \leftarrow 2$, $s[1][2] \leftarrow 1$
1	3	3	1	$p[1] + v[1][2] = 1 + 2 > v[0][3] = -\infty$: $v[1][3] \leftarrow 3$, $s[1][3] \leftarrow 1$
1	4	4	1	$p[1] + v[1][3] = 1 + 3 > v[0][4] = -\infty$: $v[1][4] \leftarrow 4$, $s[1][4] \leftarrow 1$
1	5	5	1	$p[1] + v[1][4] = 1 + 4 > v[0][5] = -\infty$: $v[1][5] \leftarrow 5$, $s[1][5] \leftarrow 1$
1	6	6	1	$p[1] + v[1][5] = 1 + 5 > v[0][6] = -\infty$: $v[1][6] \leftarrow 6$, $s[1][6] \leftarrow 1$
2	0	0	0	$j > \ell$: $v[2][0] \leftarrow v[1][0] = 0$, $s[2][0] \leftarrow 0$
2	1	1	0	$j > \ell$: $v[2][1] \leftarrow v[1][1] = 1$, $s[2][1] \leftarrow 0$
2	2	5	1	$p[2] + v[2][0] = 5 + 0 > v[1][2] = 2$: $v[2][2] \leftarrow 5$, $s[2][2] \leftarrow 1$
2	3	6	1	$p[2] + v[2][1] = 5 + 1 > v[1][3] = 3$: $v[2][3] \leftarrow 6$, $s[2][3] \leftarrow 1$
2	4	10	1	$p[2] + v[2][2] = 5 + 5 > v[1][4] = 4$: $v[2][4] \leftarrow 10$, $s[2][4] \leftarrow 1$
2	5	11	1	$p[2] + v[2][3] = 5 + 6 > v[1][5] = 5$: $v[2][5] \leftarrow 11$, $s[2][5] \leftarrow 1$
2	6	15	1	$p[2] + v[2][4] = 5 + 10 > v[1][6] = 6$: $v[2][6] \leftarrow 15$, $s[2][6] \leftarrow 1$
3	0	0	0	$j > \ell$: $v[3][0] \leftarrow v[2][0] = 0$, $s[3][0] \leftarrow 0$
3	1	1	0	$j > \ell$: $v[3][1] \leftarrow v[2][1] = 1$, $s[3][1] \leftarrow 0$
3	2	5	0	$j > \ell$: $v[3][2] \leftarrow v[2][2] = 5$, $s[3][2] \leftarrow 0$
3	3	8	1	$p[3] + v[3][0] = 8 + 0 > v[2][3] = 6$: $v[3][3] \leftarrow 8$, $s[3][3] \leftarrow 1$
3	4	10	0	$p[3] + v[3][1] = 8 + 1 \leq v[2][4] = 10$: $v[3][4] \leftarrow v[2][4] = 10$, $s[3][4] \leftarrow 0$
3	5	13	1	$p[3] + v[3][2] = 8 + 5 > v[2][5] = 11$: $v[3][5] \leftarrow 13$, $s[3][5] \leftarrow 1$
3	6	16	1	$p[3] + v[3][3] = 8 + 8 > v[2][6] = 15$: $v[3][6] \leftarrow 16$, $s[3][6] \leftarrow 1$
4	0	0	0	$j > \ell$: $v[4][0] \leftarrow v[3][0] = 0$, $s[4][0] \leftarrow 0$
4	1	1	0	$j > \ell$: $v[4][1] \leftarrow v[3][1] = 1$, $s[4][1] \leftarrow 0$
4	2	5	0	$j > \ell$: $v[4][2] \leftarrow v[3][2] = 5$, $s[4][2] \leftarrow 0$
4	3	8	0	$j > \ell$: $v[4][3] \leftarrow v[3][3] = 8$, $s[4][3] \leftarrow 0$
4	4	10	0	$p[4] + v[4][0] = 9 + 0 \leq v[3][4] = 10$: $v[4][4] \leftarrow v[3][4] = 10$, $s[4][4] \leftarrow 0$
4	5	13	0	$p[4] + v[4][1] = 9 + 1 \leq v[3][5] = 13$: $v[4][5] \leftarrow v[3][5] = 13$, $s[4][5] \leftarrow 0$
4	6	16	0	$p[4] + v[4][2] = 9 + 5 \leq v[3][6] = 16$: $v[4][6] \leftarrow v[3][6] = 16$, $s[4][6] \leftarrow 0$
5	0	0	0	$j > \ell$: $v[5][0] \leftarrow v[4][0] = 0$, $s[5][0] \leftarrow 0$
5	1	1	0	$j > \ell$: $v[5][1] \leftarrow v[4][1] = 1$, $s[5][1] \leftarrow 0$
5	2	5	0	$j > \ell$: $v[5][2] \leftarrow v[4][2] = 5$, $s[5][2] \leftarrow 0$
5	3	8	0	$j > \ell$: $v[5][3] \leftarrow v[4][3] = 8$, $s[5][3] \leftarrow 0$
5	4	10	0	$j > \ell$: $v[5][4] \leftarrow v[4][4] = 10$, $s[5][4] \leftarrow 0$
5	5	13	0	$p[5] + v[5][0] = 12 + 0 \leq v[4][5] = 13$: $v[5][5] \leftarrow v[4][5] = 13$, $s[5][5] \leftarrow 0$
5	6	16	0	$p[5] + v[5][1] = 12 + 1 \leq v[4][6] = 16$: $v[5][6] \leftarrow v[4][6] = 16$, $s[5][6] \leftarrow 0$
6	0	0	0	$j > \ell$: $v[6][0] \leftarrow v[5][0] = 0$, $s[6][0] \leftarrow 0$
6	1	1	0	$j > \ell$: $v[6][1] \leftarrow v[5][1] = 1$, $s[6][1] \leftarrow 0$
6	2	5	0	$j > \ell$: $v[6][2] \leftarrow v[5][2] = 5$, $s[6][2] \leftarrow 0$
6	3	8	0	$j > \ell$: $v[6][3] \leftarrow v[5][3] = 8$, $s[6][3] \leftarrow 0$
6	4	10	0	$j > \ell$: $v[6][4] \leftarrow v[5][4] = 10$, $s[6][4] \leftarrow 0$

6	5	13	0	$j > \ell$: $v[6][5] \leftarrow v[5][5] = 13$, $s[6][5] \leftarrow 0$
6	6	16	0	$p[6]+v[6][0] = 14+0 \leq v[5][6] = 16$: $v[6][6] \leftarrow v[5][6] = 16$, $s[6][6] \leftarrow 0$

Queste sono le matrici v e s ottenute durante l'esecuzione dell'algoritmo di PD:

$v[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$j=0$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$j=1$	0	1	2	3	4	5	6
$j=2$	0	1	5	6	10	11	15
$j=3$	0	1	5	8	10	13	16
$j=4$	0	1	5	8	10	13	16
$j=5$	0	1	5	8	10	13	16
$j=6$	0	1	5	8	10	13	16

$s[j][\ell]$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=5$	$\ell=6$
$j=0$	0	0	0	0	0	0	0
$j=1$	0	1	1	1	1	1	1
$j=2$	0	0	1	1	1	1	1
$j=3$	0	0	0	1	0	1	1
$j=4$	0	0	0	0	0	0	0
$j=5$	0	0	0	0	0	0	0
$j=6$	0	0	0	0	0	0	0

Il valore ottimo dell'istanza dell'RCP è $v[6][6] = 16$.

4. Con la matrice s possiamo ricostruire una soluzione ottima come segue:

Iterazione	j	ℓ	$s[j][\ell]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	Azione
1	6	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 5$
2	5	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 4$
3	4	6	0	0	0	0	0	0	0	$j \leftarrow 3$
4	3	6	1	0	0	1	0	0	0	$\ell \leftarrow 3$
5	3	3	1	0	0	2	0	0	0	$\ell \leftarrow 0$

Quindi il vettore

$$(0, 0, 2, 0, 0, 0)$$

è una soluzione ottima. Il valore ottimo è

$$v[6][6] = 16.$$