Gestione dei progetti

Indice

Progetti e reti delle attività
    Calendari e reti acicliche

Cammini e cammini critici

La passata in avanti: i tempi al più presto

La passata all'indietro: i tempi al più tardi

Scorte e attività critiche

Il metodo del cammino critico
    Il diagramma di Gantt

Il modello di programmazione lineare
    Il modello duale: un cammino massimo

Due cammini critici e variazioni delle durate

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- descrivere un progetto con le sue attività, durate e precedenze, e disegnarne la rete delle attività con i nodi START e FINISH;
- calcolare i tempi di inizio e di fine al più presto e al più tardi con la passata in avanti e la passata all'indietro, e dimostrare che la durata minima del progetto è la lunghezza di un cammino critico;
- calcolare le scorte totali e libere, e trovare le attività critiche e tutti i cammini critici;

Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- disegnare il diagramma di Gantt di un calendario;
- scrivere il modello LP della durata del progetto e il suo duale, un modello di cammino massimo;
- prevedere l'effetto di una variazione di una durata sulla durata del progetto.

Prerequisiti

- Dal capitolo «Grafi»: grafi orientati, cammini orientati e cicli
- Dal capitolo «Cammini minimi»: l'ordine topologico di un grafo aciclico, l'algoritmo per i grafi aciclici e i cammini massimi, potenziali e costi ridotti, il modello LP del cammino minimo e il suo duale
- Dal modulo *Programmazione lineare*, il capitolo «Teoria della dualità»: il duale di un modello LP e il teorema della dualità debole

Progetti e reti delle attività

Introduzione: Progetti e reti delle attività

- Un progetto è fatto di molte attività: alcune devono aspettarne altre, alcune si possono svolgere contemporaneamente
- In questa sezione descriviamo un progetto con le sue **attività**, **durate** e **precedenze**, e lo disegniamo come un grafo orientato, la **rete delle attività**
- La rete è l'oggetto su cui lavorano tutti i metodi del capitolo: i tempi delle attività, i cammini critici, il modello LP

Definizione 1: progetto

*Un **progetto** è un insieme di n **attività**, numerate $1, 2, \ldots, n$, con i seguenti dati.*

- *Ogni attività j ha una **durata** $d_j \in \mathbb{Q}_{>0}$.*
- *Alcune coppie (i, j) di attività sono **precedenze**: l'attività i è un **predecessore immediato** dell'attività j, e j può iniziare solo quando i è finita. Un'attività con più predecessori immediati può iniziare solo quando sono finiti tutti.*

Descrivere un progetto

Per descrivere un progetto servono tre tipi di informazioni:

- le **attività**, al livello di dettaglio desiderato;
- le **precedenze**, cioè i predecessori immediati di ogni attività;
- le **durate**, cioè una stima del tempo che richiede ogni attività.

Due ipotesi

In tutto il capitolo facciamo due ipotesi:

(H1) le durate sono **deterministiche**: ogni attività dura esattamente la sua durata stimata d_j, senza interruzioni;

(H2) le risorse sono **illimitate**: le attività non legate da precedenze si possono svolgere contemporaneamente.

Il metodo del cammino critico

- Il metodo di questo capitolo è il **metodo del cammino critico** (CPM, *critical path method*)
- È stato sviluppato alla fine degli anni Cinquanta, indipendentemente dalla tecnica PERT (*program evaluation and review technique*)
- I due nomi sono spesso uniti in PERT/CPM

Per lavorare con un progetto, lo trasformiamo in un grafo orientato:
un nodo per ogni attività, più due nodi speciali,
e un arco per ogni precedenza.

Definizione 2: rete delle attività

*La **rete delle attività** di un progetto con n attività è il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{0, 1, \ldots, n+1\}$ e i seguenti nodi e archi.*

- *Il nodo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ è l'attività j. Il nodo 0 è il nodo **START** e il nodo $n+1$ è il nodo **FINISH**, con durate $d_0 = d_{n+1} = 0$.*
- *A contiene l'arco (i, j) per ogni precedenza, l'arco $(0, j)$ per ogni attività j senza predecessori immediati, e l'arco $(j, n+1)$ per ogni attività j che non è predecessore immediato di alcuna attività.*

Reti AON e AOA

- Questa è la rete **activity-on-node** (AON): le attività sono i nodi, e gli archi indicano solo le precedenze
- Nella rete **activity-on-arc** (AOA) ogni attività è un arco, e un nodo separa un'attività dai suoi predecessori immediati
- La rete AON è più facile da costruire, più facile da leggere per chi non ha esperienza, e più facile da modificare quando il progetto cambia: la usiamo sempre, e la chiamiamo semplicemente **rete delle attività**
- In pratica, la rete delle attività è costruita dai software di gestione dei progetti a partire dall'elenco delle attività

Introduciamo ora il caso di studio del capitolo:
un progetto edilizio con 14 attività.

Lo useremo in ogni sezione.

Esempio (1/4)

Un'impresa edile deve programmare le squadre che svolgono le 14 attività di un progetto di costruzione. La tabella riporta, per ogni attività, i predecessori immediati e la durata stimata.

attività j	descrizione	predecessori immediati	d_j
1	Scavare	—	2 settimane
2	Gettare le fondamenta	1	4 settimane
3	Erigere i muri grezzi	2	10 settimane
4	Costruire il tetto	3	6 settimane
5	Installare l'impianto idraulico esterno	3	4 settimane
6	Installare l'impianto idraulico interno	5	5 settimane
7	Montare il rivestimento esterno	4	7 settimane

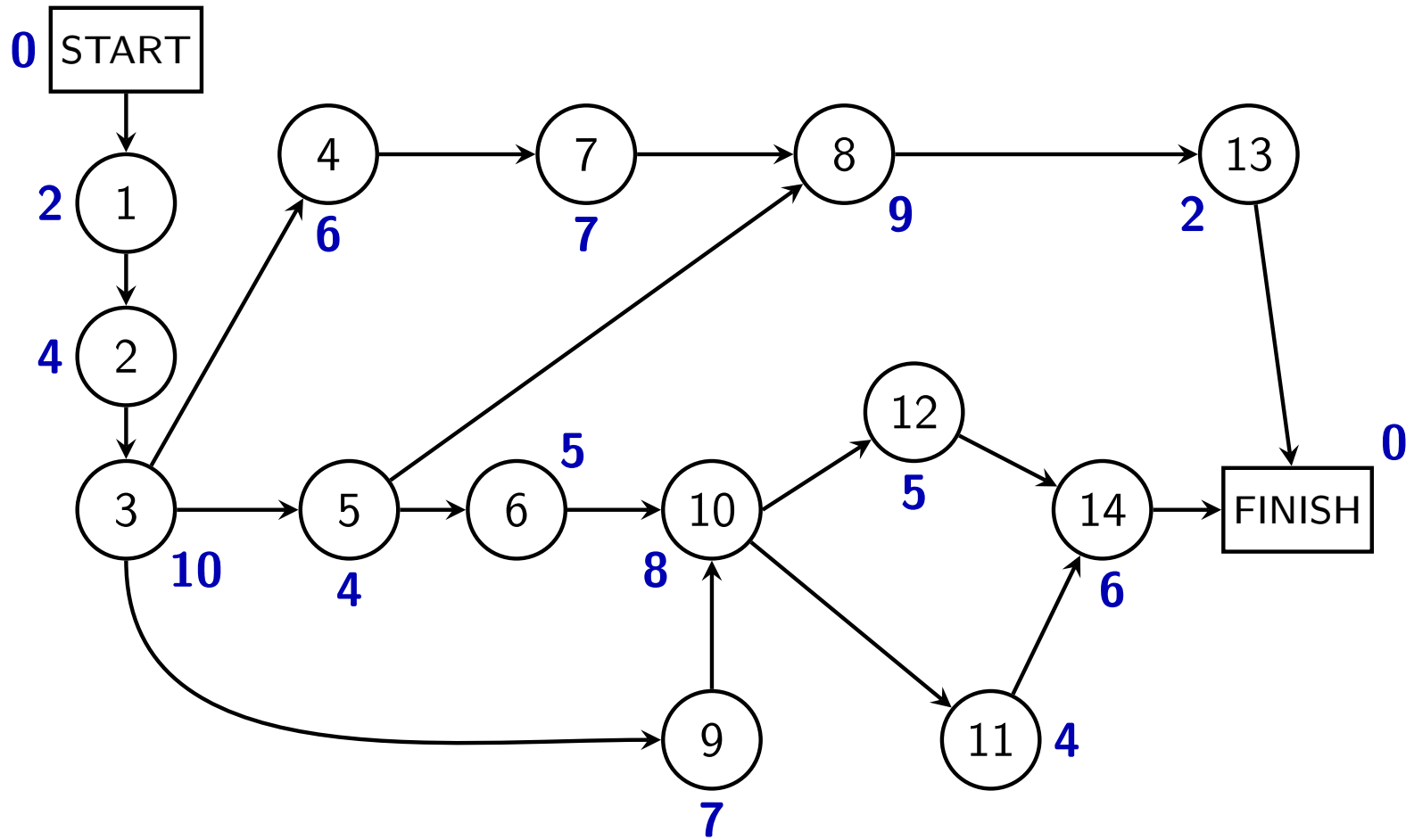
Esempio (2/4)

attività j	descrizione	predecessori immediati	d_j
8	Eseguire la tinteggiatura esterna	5, 7	9 settimane
9	Eseguire l'impianto elettrico	3	7 settimane
10	Montare le pareti in cartongesso	6, 9	8 settimane
11	Posare i pavimenti	10	4 settimane
12	Eseguire la tinteggiatura interna	10	5 settimane
13	Installare le finiture esterne	8	2 settimane
14	Installare le finiture interne	11, 12	6 settimane

- Sommando le durate si ottiene un totale di 79 settimane
- Diverse attività si possono svolgere contemporaneamente, e questo può ridurre di molto la durata del progetto

Esempio (3/4)

La rete delle attività ha i 16 nodi $0, 1, \ldots, 15$ e 19 archi; accanto a ogni nodo, in blu, la sua durata.



Esempio (4/4)

Le attività della rete:

1 Scavo	8 Tinteggiatura esterna
2 Fondamenta	9 Impianto elettrico
3 Muri grezzi	10 Cartongesso
4 Tetto	11 Pavimenti
5 Idraulica esterna	12 Tinteggiatura interna
6 Idraulica interna	13 Finiture esterne
7 Rivestimento esterno	14 Finiture interne

- L'attività 1 è l'unica senza predecessori immediati, quindi START ha il solo arco $(0, 1)$
- Le attività 13 e 14 non sono predecessori immediati di alcuna attività, quindi entrano in FINISH

Quando possono iniziare le attività?

Un **calendario** assegna un tempo di inizio a ogni nodo, nel rispetto delle precedenze.

Definizione 3: calendario

Un ***calendario*** *di un progetto è un vettore* $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_{n+1})$ *di* ***tempi di inizio*** *con* $t_0 = 0$ *e*

$$t_j \geq t_i + d_i, \quad \forall (i,j) \in A.$$

Il nodo j *inizia in* t_j *e finisce in* $t_j + d_j$*. La* ***durata*** *del calendario è* t_{n+1}*, e la* ***durata minima del progetto*** T *è la minima durata di un calendario.*

Leggere la definizione

- Il vincolo dell'arco (i, j) dice che j inizia dopo che i è finita
- Per (H1) e (H2), le precedenze sono gli unici vincoli di un calendario
- Gli archi $(j, n+1)$ fanno iniziare FINISH dopo la fine di ogni attività: t_{n+1} è il tempo di completamento del progetto

Proposizione 1: un calendario richiede una rete aciclica

Un progetto ha un calendario se e solo se la sua rete delle attività è aciclica.

Dimostrazione (1/2)

- Nessun arco entra nel nodo 0 e nessun arco esce dal nodo $n+1$, quindi ogni ciclo orientato di G è fatto di attività
- Siano $i_0, i_1, \ldots, i_k = i_0$ un ciclo orientato e $\boldsymbol{t}$ un calendario. Sommando i vincoli dei suoi archi, i tempi di inizio si semplificano a catena:

$$0 = t_{i_k} - t_{i_0} \geq \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} > 0,$$

una contraddizione, perché le durate delle attività sono positive

Dimostrazione (2/2)

- Sia G aciclico, e sia $v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}$ un ordine topologico (capitolo «Cammini minimi», Proposizione «ordini topologici») con $v_0 = 0$: il nodo 0 non ha archi entranti e può essere rimosso per primo

- Sia D la durata più grande e $t_{v_a} = a\,D$ per ogni a

- Allora $t_0 = 0$, e ogni arco (v_a, v_b) va in avanti, $a < b$, quindi

$$t_{v_b} - t_{v_a} = (b - a)\,D \geq D \geq d_{v_a} :$$

  $\boldsymbol{t}$ è un calendario

□

Reti delle attività acicliche

- D'ora in poi la rete delle attività è **aciclica**
- Allora ogni attività sta su un cammino da START a FINISH:
  - andando all'indietro lungo gli archi si raggiunge un nodo senza predecessori immediati, collegato a START;
  - andando in avanti si raggiunge un nodo senza successori, collegato a FINISH
- Un ciclo nelle precedenze è un errore del piano: un'attività dovrebbe finire prima di iniziare

Riepilogo

Progetti:

- un progetto è un insieme di attività con durate e precedenze
- ipotesi: durate deterministiche (H1), risorse illimitate (H2)

Reti delle attività:

- un nodo per ogni attività, più START e FINISH, e un arco per ogni precedenza
- un calendario esiste se e solo se la rete è aciclica

Cammini e cammini critici

Introduzione: Cammini e cammini critici

- Le attività lungo un cammino della rete devono essere svolte una dopo l'altra
- In questa sezione definiamo la **lunghezza** di un cammino e i **cammini critici**, i più lunghi
- Dimostriamo che nessun calendario è più breve di un cammino: è la prima metà del risultato principale del capitolo

Le domande del metodo del cammino critico

Sotto (H1) e (H2), il metodo del cammino critico risponde alle seguenti domande.

1. Qual è il tempo minimo necessario per completare il progetto?
2. Quando può iniziare e finire, al più presto, ogni attività?
3. Quando deve iniziare e finire, al più tardi, ogni attività, per non ritardare il completamento del progetto?
4. Quali attività sono critiche, cioè tali che ogni loro ritardo ritarda il progetto?
5. Per le altre attività, quanto ritardo si può tollerare?

Definizione 4: lunghezza di un cammino e cammino critico

Ogni arco $(i, j) \in A$ *ha* ***lunghezza*** d_i*, la durata della sua coda. La* ***lunghezza*** *di un cammino orientato* $P = i_0, i_1, \ldots, i_k$ *è*

$$L(P) = \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s},$$

la durata totale dei suoi nodi tranne l'ultimo. Un ***cammino critico*** *è un cammino da START a FINISH di lunghezza massima. Un'attività è* ***critica*** *se sta su un cammino critico.*

Osservazioni sulla definizione

- Su un cammino da START a FINISH le durate del primo e dell'ultimo nodo sono nulle: $L(P)$ è la durata totale delle attività del cammino
- Un progetto può avere **più cammini critici**: quando più cammini hanno la stessa lunghezza massima, sono tutti critici

Lemma 1: ogni cammino limita la durata

Per ogni calendario $\boldsymbol{t}$ *e ogni cammino* P *da START a FINISH,* $t_{n+1} \geq L(P)$.

Dimostrazione

- Sia $P = i_0, i_1, \ldots, i_k$ con $i_0 = 0$ e $i_k = n + 1$
- Sommando i vincoli $t_{i_{s+1}} \geq t_{i_s} + d_{i_s}$ degli archi di P, i tempi di inizio si semplificano a catena:

$$t_{n+1} - t_0 \geq \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} = L(P),$$

e $t_0 = 0$

□

Le attività di un cammino vanno svolte una dopo l'altra, senza sovrapposizioni:

il progetto non può essere più breve di alcun cammino.

Esempio (1/2)

La rete del caso di studio ha sei cammini da START a FINISH; le loro lunghezze, in settimane, sono:

cammino da START a FINISH	lunghezza (settimane)
START, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 13, FINISH	$2+4+10+6+7+9+2=40$
START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 14, FINISH	$2+4+10+4+5+8+4+6=43$
START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH	$2+4+10+4+5+8+5+6=44$
START, 1, 2, 3, 5, 8, 13, FINISH	$2+4+10+4+9+2=31$
START, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 14, FINISH	$2+4+10+7+8+4+6=41$
START, 1, 2, 3, 9, 10, 12, 14, FINISH	$2+4+10+7+8+5+6=42$

Esempio (2/2)

- Il cammino più lungo è START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14,FINISH, di lunghezza 44: per il lemma, ogni calendario dura almeno 44 settimane

- Il progetto può durare più di un dato cammino
  - Sul cammino START, 1, 2, 3, 5, 8, 13,FINISH, di lunghezza 31, l'attività 8 aspetta l'attività 5, che può finire alla settimana $2 + 4 + 10 + 4 = 20$
  - Ma aspetta anche l'attività 7, che non sta sul cammino e non può finire prima della settimana $2 + 4 + 10 + 6 + 7 = 29$

Osservazione 1: Il numero dei cammini

Elencare i cammini non funziona sui progetti grandi: il loro numero può crescere esponenzialmente con n. Una sequenza di k coppie di attività parallele, ogni coppia dopo la precedente, ha 2^k cammini da START a FINISH. Il metodo del cammino critico trova la lunghezza di un cammino massimo senza elencare i cammini.

Riepilogo

Lunghezze dei cammini:

- la lunghezza di un cammino da START a FINISH è la durata totale delle sue attività
- ogni calendario dura almeno quanto ogni cammino di questo tipo

Cammini critici:

- i cammini critici sono i più lunghi; possono essere più d'uno
- nel caso di studio il cammino più lungo è lungo 44 settimane
- elencare tutti i cammini non è praticabile: serve un metodo

La passata in avanti: i tempi al più presto

Introduzione: La passata in avanti

- Calcoliamo, per ogni attività, il tempo più vicino in cui può iniziare e finire
- Il calcolo segue un ordine topologico della rete: la **passata in avanti**
- Dà la durata minima del progetto T senza elencare i cammini: T è la lunghezza di un cammino critico

Supponiamo per prima cosa che non ci siano ritardi:

ogni attività dura la sua durata stimata
e inizia appena tutti i suoi predecessori immediati sono finiti.

Definizione 5: tempi di inizio e di fine al più presto

Sia $v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}$ *un ordine topologico della rete delle attività. L'**inizio al più presto*** ES_j *e la **fine al più presto*** EF_j *dei nodi si calcolano in quest'ordine con la **passata in avanti**:*

$$
\begin{aligned}
ES_0 &= 0, \\
ES_j &= \max_{(i,j)\in\delta^-(j)} EF_i, \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, \\
EF_j &= ES_j + d_j, \qquad \forall j \in N.
\end{aligned}
$$

La regola dell'inizio al più presto

- È la **regola dell'inizio al più presto**: l'inizio al più presto di un'attività è la massima fine al più presto dei suoi predecessori immediati
- Quando si elabora il nodo j, i suoi predecessori lo precedono nell'ordine topologico, quindi le loro fini al più presto sono note
- Come nel capitolo «Cammini minimi», l'ordine topologico rimuove, a ogni passo, il nodo senza archi entranti di **indice più piccolo**. Il nodo 0 è rimosso per primo

Teorema 1: tempi al più presto

Per ogni nodo $j \in N$, ES_j è la lunghezza di un cammino massimo da START a j. Inoltre ES è un calendario, e ogni calendario $\boldsymbol{t}$ soddisfa $t_j \geq ES_j$ per ogni $j \in N$.

- Dimostriamo la prima e l'ultima affermazione per induzione lungo l'ordine topologico

Dimostrazione (1/2)

- *Nodo* 0. Nessun arco entra in START: l'unico cammino da START a 0 non ha archi e ha lunghezza $0 = ES_0$, e ogni calendario ha $t_0 = 0 = ES_0$
- *Cammini massimi.* Sia $j \neq 0$. Ogni cammino da START a j è un cammino da START a un nodo i seguito da un arco $(i, j) \in \delta^-(j)$ di lunghezza d_i, e i viene prima di j. Per induzione la sua lunghezza massima è

$$\max_{(i,j)\in\delta^-(j)} \left(ES_i + d_i\right) = \max_{(i,j)\in\delta^-(j)} EF_i = ES_j$$

Dimostrazione (2/2)

- *Limite inferiore.* Per ogni arco $(i, j) \in \delta^-(j)$, per induzione

$$t_j \geq t_i + d_i \geq ES_i + d_i = EF_i;$$

  quindi $t_j \geq ES_j$

- *ES è un calendario.* $ES_0 = 0$, e $ES_j \geq EF_i = ES_i + d_i$ per ogni arco $(i, j) \in A$, per il massimo nella definizione



Teorema 2: durata minima del progetto

Sotto (H1) e (H2), la durata minima del progetto è $T = ES_{n+1}$*, la lunghezza di un cammino critico, e il calendario ES la raggiunge.*

Dimostrazione

- Per il teorema sui tempi al più presto, ES è un calendario di durata ES_{n+1}, e ogni calendario ha $t_{n+1} \geq ES_{n+1}$: quindi

$$T = ES_{n+1}$$

- Per lo stesso teorema, ES_{n+1} è la lunghezza di un cammino massimo da START a FINISH, cioè di un cammino critico

□

Osservazioni

- Servono entrambe le ipotesi: (H1) rende le lunghezze dei cammini numeri fissati, e (H2) rende le precedenze gli unici vincoli di un calendario
- La passata in avanti è l'algoritmo per i grafi aciclici del capitolo «Cammini minimi», con il massimo al posto del minimo: con le lunghezze degli archi $-d_i$, quell'algoritmo calcola le etichette $d(j) = -ES_j$
- Un cammino massimo è facile da trovare perché la rete è aciclica

Eseguiamo la passata in avanti sul caso di studio.

Esempio (1/3)

- Nel caso di studio ogni attività ha predecessori immediati di indice più piccolo, quindi l'ordine topologico è $0, 1, 2, \ldots, 15$
- Ogni riga elabora un nodo: le fini al più presto dei predecessori immediati (il massimo in grassetto), poi ES_j e EF_j

nodo j	d_j	EF_i dei predecessori (i)	ES_j	EF_j
0	0	—	0	0
1	2	0 (0)	0	2
2	4	2 (1)	2	6
3	10	6 (2)	6	16
4	6	16 (3)	16	22
5	4	16 (3)	16	20
6	5	20 (5)	20	25

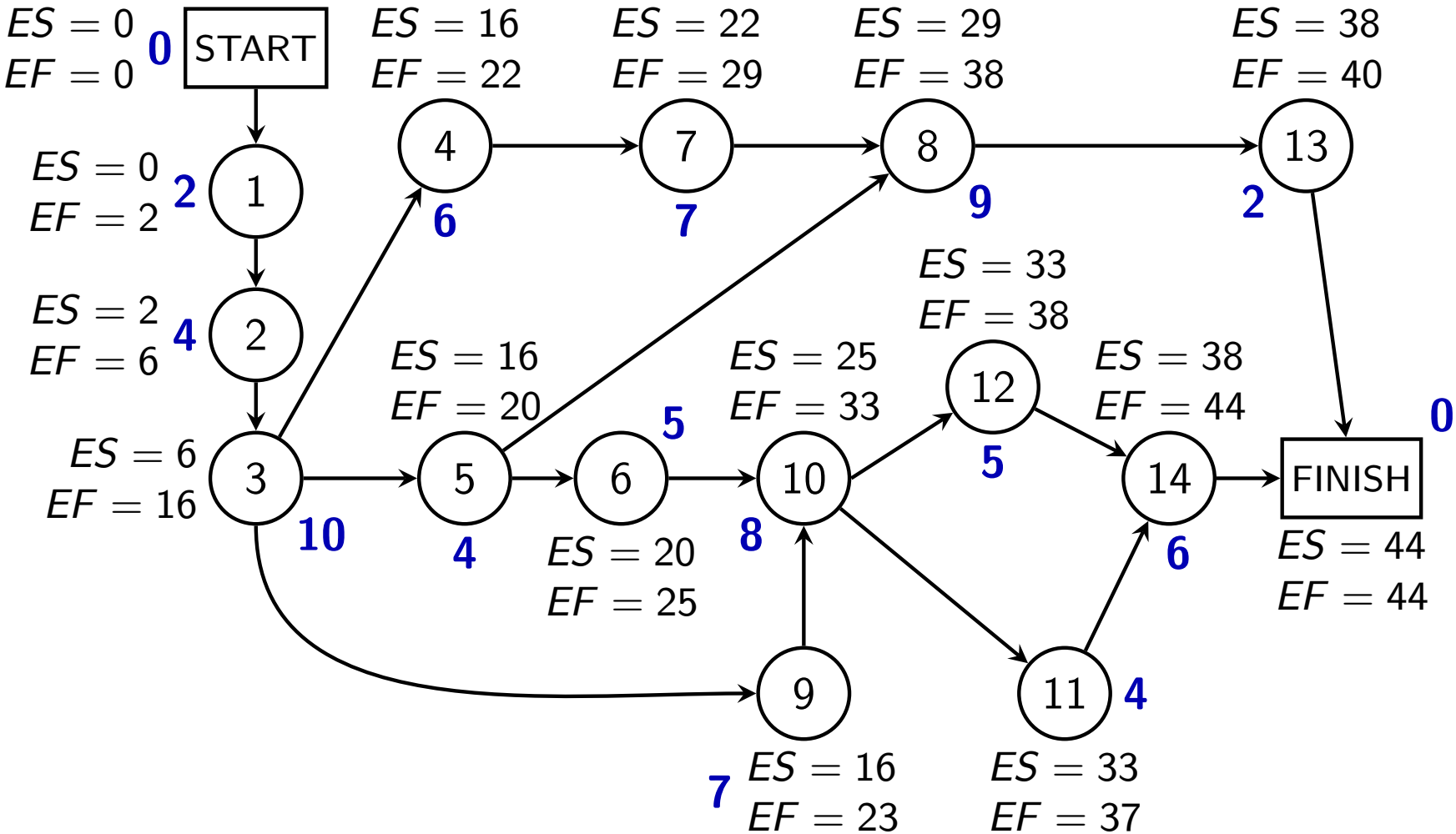
Esempio (2/3)

nodo j	d_j	EF_i dei predecessori (i)	ES_j	EF_j
7	7	22 (4)	22	29
8	9	20 (5), 29 (7)	29	38
9	7	16 (3)	16	23
10	8	25 (6), 23 (9)	25	33
11	4	33 (10)	33	37
12	5	33 (10)	33	38
13	2	38 (8)	38	40
14	6	37 (11), 38 (12)	38	44
15	0	40 (13), 44 (14)	44	44

Il nodo FINISH dà $T = ES_{15} = 44$: se tutto procede come previsto, il progetto si completa in 44 settimane.

Esempio (3/3)

Accanto a ogni nodo, la sua durata (in blu) e i suoi tempi al più presto.



Riepilogo

La passata in avanti:

- in ordine topologico, $ES_j = \max EF_i$ sui predecessori immediati e $EF_j = ES_j + d_j$
- è l'algoritmo per i grafi aciclici, con il massimo al posto del minimo

Che cosa dà:

- ES_j è la lunghezza di un cammino massimo da START a j
- $T = ES_{n+1}$ è la lunghezza di un cammino critico; nel caso di studio $T = 44$ settimane

La passata all'indietro: i tempi al più tardi

Introduzione: La passata all'indietro

- Quanto dopo ES_j può iniziare un'attività senza ritardare il progetto?
- Rispondono i **tempi al più tardi**, supponendo che non ci siano altri ritardi
- Si calcolano con la **passata all'indietro**, da FINISH a START, nell'ordine topologico inverso

Definizione 6: tempi di inizio e di fine al più tardi

*Sia $T = ES_{n+1}$. La **fine al più tardi** LF_j e l'**inizio al più tardi** LS_j dei nodi si calcolano nell'ordine topologico inverso con la **passata all'indietro**:*

$$
\begin{aligned}
LF_{n+1} &= T, \\
LF_j &= \min_{(j,k)\in\delta^+(j)} LS_k, \quad \forall j \in N \setminus \{n+1\}, \\
LS_j &= LF_j - d_j, \qquad \forall j \in N.
\end{aligned}
$$

La regola della fine al più tardi

- È la **regola della fine al più tardi**: la fine al più tardi di un'attività è il minimo inizio al più tardi dei suoi successori immediati
- I successori immediati non possono iniziare prima che l'attività sia finita, quindi l'attività deve finire in tempo perché tutti possano iniziare entro il loro inizio al più tardi

Teorema 3: tempi al più tardi

Per ogni nodo $j \in N$, $T - LS_j$ è la lunghezza di un cammino massimo da j a FINISH. Inoltre LS è un calendario di durata T, e ogni calendario $\boldsymbol{t}$ con $t_{n+1} \leq T$ soddisfa $t_j \leq LS_j$ per ogni $j \in N$.

- Dimostriamo la prima e l'ultima affermazione per induzione lungo l'ordine topologico inverso

Dimostrazione (1/2)

- *Nodo $n+1$.* L'unico cammino da $n+1$ a FINISH ha lunghezza $0 = T - LS_{n+1}$, e $t_{n+1} \leq T = LS_{n+1}$
- *Cammini massimi.* Sia $j \neq n+1$. Ogni cammino da j a FINISH è un arco $(j,k) \in \delta^+(j)$, di lunghezza d_j, seguito da un cammino da k a FINISH. Per induzione la sua lunghezza massima è

$$d_j + \max_{(j,k)\in\delta^+(j)} \left(T - LS_k\right) = d_j + T - LF_j = T - LS_j$$

Dimostrazione (2/2)

- *Limite superiore.* Per ogni arco $(j,k) \in \delta^+(j)$, per induzione

$$t_j \leq t_k - d_j \leq LS_k - d_j;$$

quindi $t_j \leq LF_j - d_j = LS_j$

- *LS è un calendario.* $LS_k \geq LF_j = LS_j + d_j$ per ogni arco $(j,k) \in A$, per il minimo nella definizione. Inoltre $LS_{n+1} = T$, e $LS_0 = T - T = 0$, perché un cammino massimo da START a FINISH ha lunghezza T



In ogni calendario di durata T
il nodo j inizia fra ES_j e LS_j,

ed entrambi gli estremi sono raggiunti, dai calendari ES e LS.

Esempio (1/4)

- La passata all'indietro elabora i nodi nell'ordine $15, 14, \ldots, 0$
- Ogni riga dà gli inizi al più tardi dei successori immediati (il minimo in grassetto), poi LF_j e LS_j

nodo j	d_j	LS_k dei successori (k)	LF_j	LS_j
15	0	—	44	44
14	6	44 (15)	44	38
13	2	44 (15)	44	42
12	5	38 (14)	38	33
11	4	38 (14)	38	34
10	8	34 (11), 33 (12)	33	25
9	7	25 (10)	25	18

Esempio (2/4)

nodo j	d_j	LS_k dei successori (k)	LF_j	LS_j
8	9	42 (13)	42	33
7	7	33 (8)	33	26
6	5	25 (10)	25	20
5	4	20 (6), 33 (8)	20	16
4	6	26 (7)	26	20
3	10	20 (4), 16 (5), 18 (9)	16	6
2	4	6 (3)	6	2
1	2	2 (2)	2	0
0	0	0 (1)	0	0

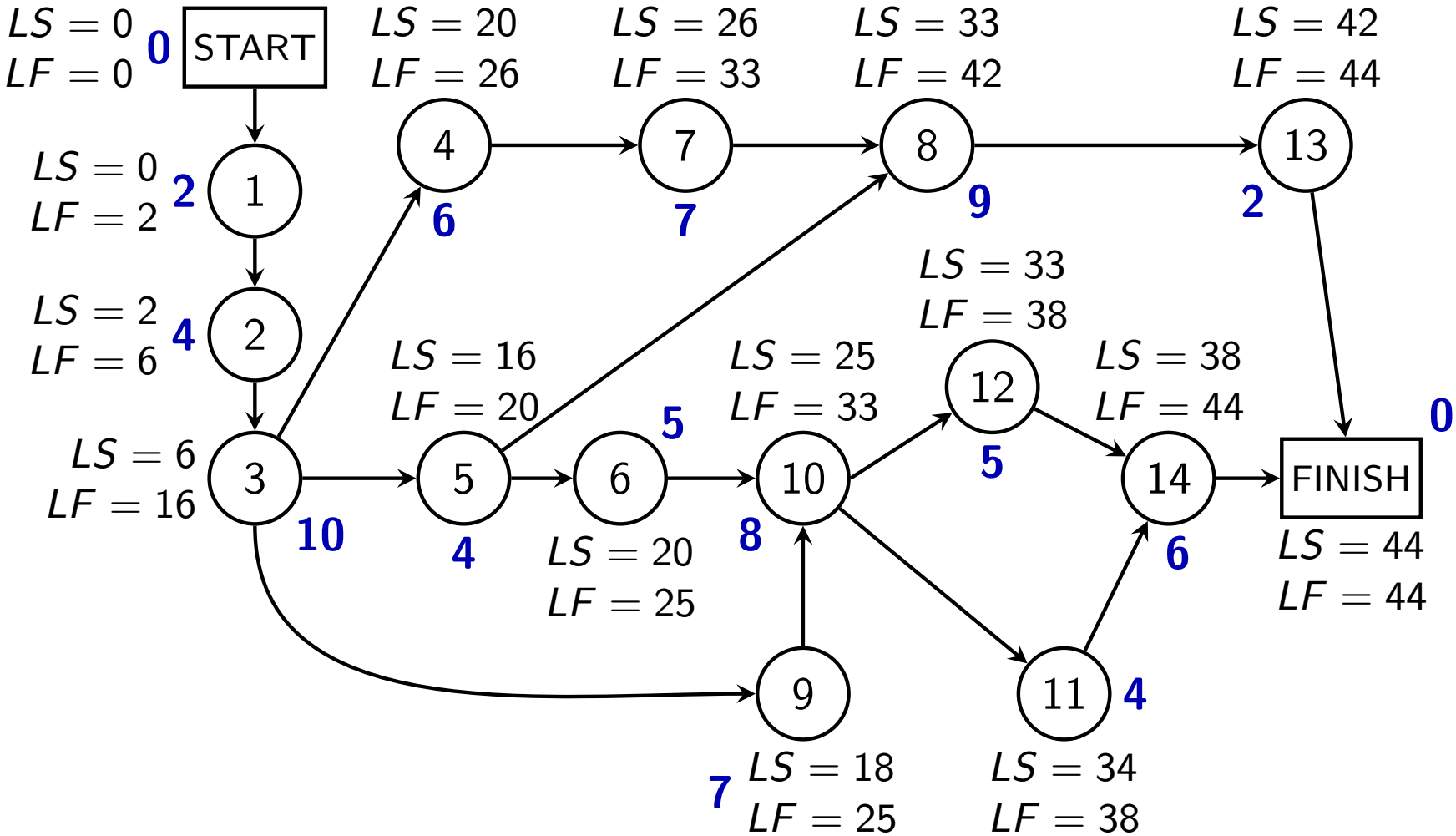
La passata termina con $LS_0 = 0$, come prevede il teorema sui tempi al più tardi.

Esempio (3/4)

- Per esempio, l'attività 9 deve finire entro $LF_9 = LS_{10} = 25$
- Quindi deve iniziare entro $LS_9 = 18$, due settimane dopo il suo inizio al più presto $ES_9 = 16$
- La figura che segue mostra, accanto a ogni nodo, la durata (in blu) e i tempi al più tardi

Esempio (4/4)

Accanto a ogni nodo, la durata (in blu) e i tempi al più tardi.



Riepilogo

La passata all'indietro:

- in ordine topologico inverso, partendo da $LF_{n+1} = T$
- $LF_j = \min LS_k$ sui successori immediati e $LS_j = LF_j - d_j$

Che cosa dà:

- $T - LS_j$ è la lunghezza di un cammino massimo da j a FINISH
- in ogni calendario di durata T il nodo j inizia fra ES_j e LS_j

Scorte e attività critiche

Introduzione: Scorte e attività critiche

- La differenza fra i tempi al più tardi e al più presto misura di quanto si può ritardare un'attività
- In questa sezione definiamo la **scorta totale**, la **scorta libera** e gli **archi stretti**
- Individuano le attività critiche e **tutti** i cammini critici, cioè ciò che un responsabile di progetto deve tenere sotto controllo

Definizione 7: scorte e archi stretti

Per ogni attività $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*:*

- *la* ***scorta totale*** *è* $TS_j = LS_j - ES_j = LF_j - EF_j$*;*
- *la* ***scorta libera*** *è* $FS_j = \min_{(j,k)\in\delta^+(j)} ES_k - EF_j$*.*

Un arco $(i, j) \in A$ *è* ***stretto*** *se* $ES_j = EF_i$*.*

Scorta totale e scorta libera

- Le due differenze in TS_j coincidono, perché entrambe le coppie di tempi differiscono di d_j
- La **scorta totale** è il ritardo dell'attività j che non ritarda il progetto
- La **scorta libera** è il ritardo che non sposta l'inizio al più presto di nessun'altra attività
- I due risultati che seguono rendono precise queste affermazioni

Teorema 4: scorta totale e attività critiche

Per ogni attività j, sia L_j la lunghezza massima di un cammino da START a FINISH che passa per j. Allora:

(a) *$TS_j = T - L_j \geq 0$, quindi $TS_j = 0$ se e solo se j è critica;*

(b) *per ogni δ con $0 \leq \delta \leq TS_j$ esiste un calendario di durata T con $t_j = ES_j + \delta$, e nessun calendario di durata T ha $t_j > ES_j + TS_j$.*

Dimostrazione (1/2)

- Un cammino da START a FINISH per j è un cammino da START a j seguito da un cammino da j a FINISH, e la sua lunghezza è la somma delle due lunghezze
- Prendendo i più lunghi, per i teoremi sui tempi al più presto e al più tardi,

$$L_j = ES_j + (T - LS_j) = T - TS_j$$

- Ogni cammino da START a FINISH ha lunghezza al più T, quindi $TS_j \geq 0$, con l'uguaglianza se e solo se un cammino per j ha lunghezza T, cioè j è critica

Dimostrazione (2/2)

- Se $TS_j > 0$, sia $\lambda = \delta / TS_j \in [0, 1]$. ES e LS sono calendari di durata T, e i vincoli di un calendario sono lineari, quindi $(1 - \lambda)ES + \lambda LS$ è un calendario di durata T, con

$$t_j = ES_j + \lambda\, TS_j = ES_j + \delta$$

- Se $TS_j = 0$, allora $\delta = 0$ e va bene ES

- Per il teorema sui tempi al più tardi, ogni calendario di durata T ha $t_j \leq LS_j = ES_j + TS_j$

□

Proposizione 2: scorta libera

Per ogni attività j, $0 \leq FS_j \leq TS_j$. Inoltre, per ogni δ con $0 \leq \delta \leq FS_j$, i tempi di inizio ES con $ES_j + \delta$ al posto di ES_j formano un calendario di durata T: l'attività j è ritardata di δ, e ogni altro nodo mantiene il suo inizio al più presto.

Dimostrazione (1/2)

- Per la passata in avanti, $ES_k \geq EF_j$ per ogni arco (j, k), quindi $FS_j \geq 0$
- Inoltre $ES_k \leq LS_k$ per ogni nodo k, per il teorema sulla scorta totale per le attività e perché $ES_{n+1} = LS_{n+1} = T$. Quindi

$$\begin{aligned} FS_j &= \min_{(j,k)\in\delta^+(j)} ES_k - EF_j \\ &\leq \min_{(j,k)\in\delta^+(j)} LS_k - EF_j = LF_j - EF_j = TS_j \end{aligned}$$

Dimostrazione (2/2)

- Cambiano solo i vincoli degli archi di j:
  - per $(i,j) \in \delta^-(j)$: $ES_j + \delta \geq ES_j \geq EF_i$;
  - per $(j,k) \in \delta^+(j)$: $ES_k \geq EF_j + FS_j \geq (ES_j + \delta) + d_j$

- La durata è ancora $ES_{n+1} = T$, perché $j \neq n+1$

□

Teorema 5: i cammini critici sono cammini di archi stretti

Un cammino P da START a FINISH è critico se e solo se tutti i suoi archi sono stretti.

Dimostrazione

- Sia $P = i_0, i_1, \ldots, i_k$ con $i_0 = 0$ e $i_k = n + 1$. Ogni arco ha $ES_{i_{s+1}} - EF_{i_s} \geq 0$
- Sommando sugli archi di P, i tempi di inizio al più presto si semplificano a catena:

$$\sum_{s=0}^{k-1} \left(ES_{i_{s+1}} - EF_{i_s} \right) = ES_{n+1} - ES_0 - \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} = T - L(P)$$

- Una somma di termini non negativi è nulla se e solo se ogni termine è nullo: $L(P) = T$ se e solo se ogni arco di P è stretto

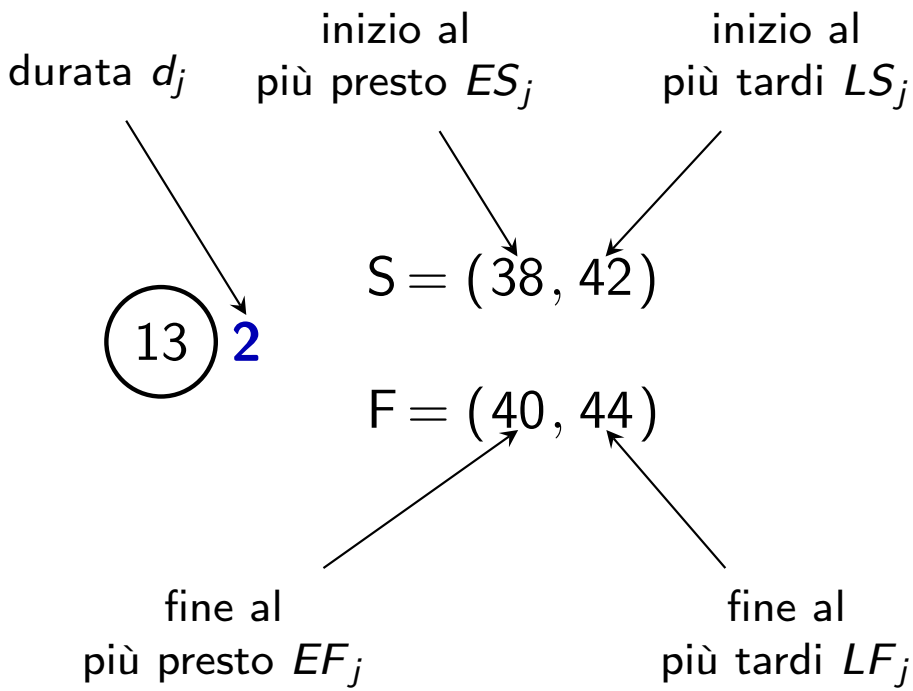
□

Trovare tutti i cammini critici

- I cammini critici sono i cammini da START a FINISH che usano solo archi stretti: per elencarli tutti, **si seguono gli archi stretti a partire da START**
- Ogni attività di un cammino critico ha scorta totale nulla
- Un cammino fatto di attività critiche, invece, è critico solo se i suoi archi sono stretti

Esempio (1/5)

Per mostrare tutti i tempi insieme, scriviamo accanto a ogni nodo la coppia $\mathrm{S} = (ES_j, LS_j)$ dei suoi tempi di inizio e la coppia $\mathrm{F} = (EF_j, LF_j)$ dei suoi tempi di fine, come nella figura per l'attività 13:



Esempio (2/5)

La tabella raccoglie i tempi e le scorte delle attività, dalla passata in avanti e da quella all'indietro.

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critica
1	2	0	2	0	2	0	0	sì
2	4	2	6	2	6	0	0	sì
3	10	6	16	6	16	0	0	sì
4	6	16	22	20	26	4	0	
5	4	16	20	16	20	0	0	sì
6	5	20	25	20	25	0	0	sì
7	7	22	29	26	33	4	0	

Esempio (3/5)

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critica
8	9	29	38	33	42	4	0	
9	7	16	23	18	25	2	2	
10	8	25	33	25	33	0	0	sì
11	4	33	37	34	38	1	1	
12	5	33	38	33	38	0	0	sì
13	2	38	40	42	44	4	4	
14	6	38	44	38	44	0	0	sì

Esempio (4/5)

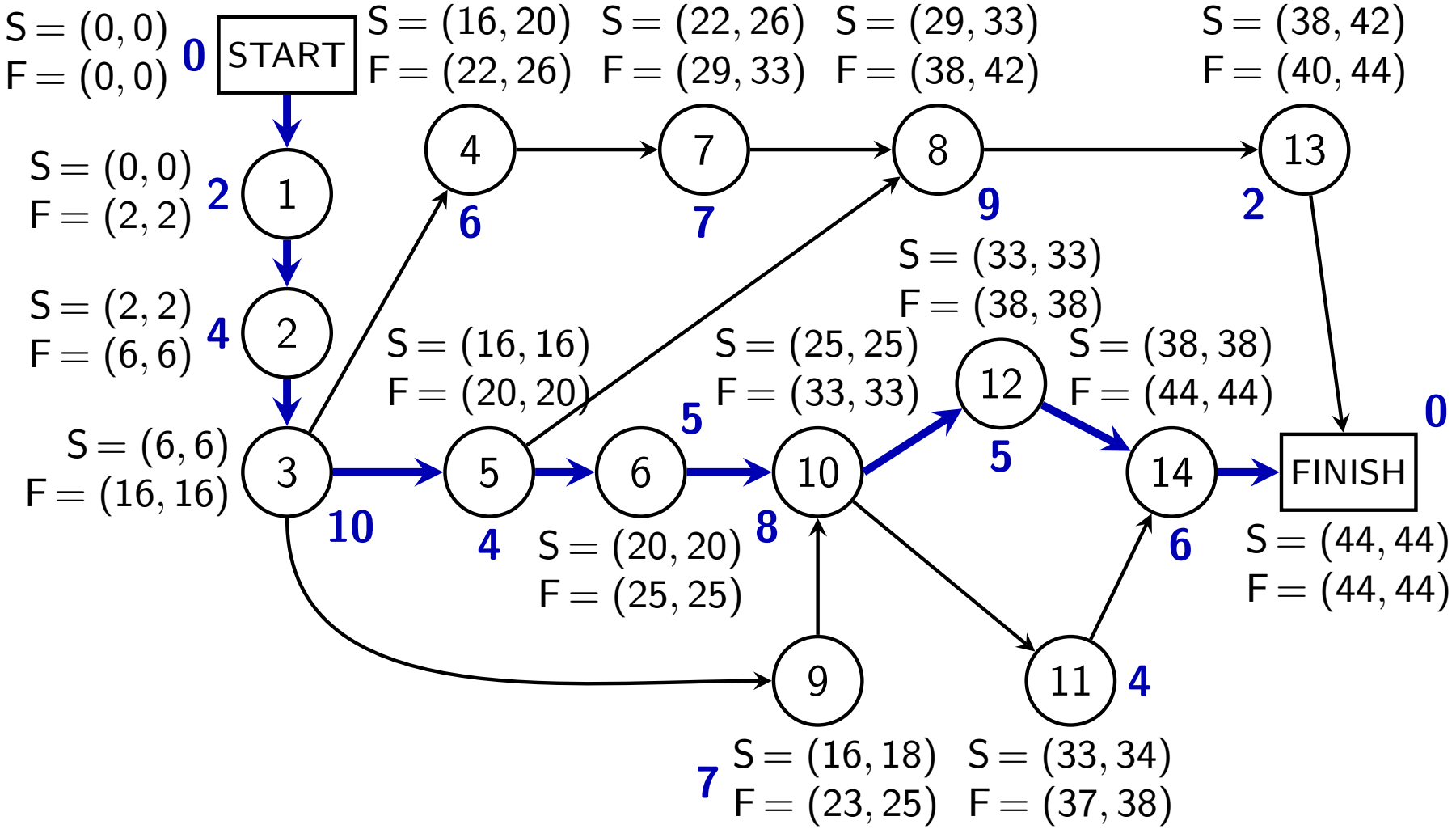
- Le attività critiche sono $1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14$. Gli archi stretti da START raggiungono FINISH solo lungo START, $1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14$,FINISH: il cammino critico è unico, e la sua lunghezza è $T = 44$

- Le attività $4, 7, 8, 13$ formano una catena con $TS_4 = TS_7 = TS_8 = TS_{13} = 4$, ma solo l'ultima ha scorta libera, $FS_{13} = 4$. Se l'attività 4 inizia con 4 settimane di ritardo, anche le attività 7, 8, 13 devono iniziare con 4 settimane di ritardo, e il progetto finisce comunque alla settimana 44

- Le attività 9 e 11 hanno scorta totale uguale alla scorta libera: 2 e 1 settimane

- La figura che segue mostra tutti i tempi del caso di studio, con il cammino critico in blu

Esempio (5/5)


S = (0, 0)
F = (0, 0)
0
START
S = (16, 20)
F = (22, 26)
S = (22, 26)
F = (29, 33)
S = (29, 33)
F = (38, 42)
S = (38, 42)
F = (40, 44)
S = (0, 0)
F = (2, 2)
2
1
4
6
7
7
8
9
13
2
S = (33, 33)
F = (38, 38)
S = (2, 2)
F = (6, 6)
4
2
S = (16, 16)
F = (20, 20)
S = (25, 25)
F = (33, 33)
12
S = (38, 38)
F = (44, 44)
0
5
S = (6, 6)
F = (16, 16)
3
10
5
4
6
10
5
14
FINISH
S = (20, 20)
F = (25, 25)
8
6
S = (44, 44)
F = (44, 44)
9
11
4
7
S = (16, 18)
F = (23, 25)
S = (33, 34)
F = (37, 38)

Osservazione 2: Le scorte totali sono condivise

La scorta totale di un'attività è condivisa con le altre attività dei suoi cammini: le quattro scorte totali della catena $4, 7, 8, 13$ *sono le stesse* 4 *settimane. Se l'attività* 4 *dura* 3 *settimane in più e l'attività* 8 *dura* 2 *settimane in più, il cammino che le contiene si allunga di* $5 > 4$ *settimane, e il progetto finisce alla settimana* 45.

Riepilogo

Scorte:

- $TS_j = LS_j - ES_j$ è il ritardo di j che non ritarda il progetto
- $FS_j \leq TS_j$ è il ritardo che non sposta nessun'altra attività
- le scorte totali sono condivise lungo un cammino

Attività e cammini critici:

- le attività critiche hanno $TS_j = 0$
- i cammini critici sono i cammini da START a FINISH fatti di archi stretti

Il metodo del cammino critico

Introduzione: Il metodo del cammino critico

- Raccogliamo i passi delle sezioni precedenti in un solo algoritmo, il **metodo del cammino critico**
- Dimostriamo che richiede un tempo lineare nella dimensione della rete
- Poi disegniamo il risultato come **diagramma di Gantt**, la rappresentazione di un calendario usata in pratica

Algorithm: Metodo del cammino critico (CPM) (1/2)

Input : un progetto con attività $1, 2, \ldots, n$, durate $d_j > 0$ e precedenze

Output : i tempi ES_j, EF_j, LS_j, LF_j, le scorte, la durata minima del progetto T e gli archi stretti

1 **Passo 0 (rete).** Costruire la rete delle attività $G = (N, A)$ e un ordine topologico: togliere ripetutamente un nodo senza archi entranti (quello di indice minimo, se sono più di uno).

2 Se restano nodi e hanno tutti archi entranti, `STOP`: le precedenze contengono un ciclo.

3 **Passo 1 (passata in avanti).** Porre $ES_0 := 0$. Per ogni nodo $j \neq 0$ in ordine topologico, porre $ES_j := \max_{(i,j) \in \delta^-(j)} EF_i$; porre $EF_j := ES_j + d_j$ per ogni j, e $T := ES_{n+1}$.

Algorithm: Metodo del cammino critico (CPM) (2/2)

4 **Passo 2 (passata all'indietro).** Porre $LF_{n+1} := T$. Per ogni nodo $j \neq n+1$ in ordine topologico inverso, porre $LF_j := \min_{(j,k)\in\delta^+(j)} LS_k$; porre $LS_j := LF_j - d_j$ per ogni j.

5 **Passo 3 (scorte).** Per ogni attività j, porre $TS_j := LS_j - ES_j$ e $FS_j := \min_{(j,k)\in\delta^+(j)} ES_k - EF_j$; segnare gli archi stretti, $ES_j = EF_i$. I cammini critici sono i cammini di archi stretti da START a FINISH.

6 STOP.

Teorema 6: tempo di esecuzione del metodo del cammino critico

Il metodo del cammino critico richiede tempo $O(n+m)$, dove $m = |A|$.

Dimostrazione

- Il passo 0 costruisce gli archi dagli elenchi dei predecessori immediati, più al massimo $2n$ archi di START e FINISH. L'ordine topologico richiede tempo $O(n + m)$, con un contatore degli archi entranti di ogni nodo, come nel capitolo «Cammini minimi»
- Il passo 1 esamina ogni arco una volta, come arco entrante della sua testa; il passo 2 esamina ogni arco una volta, come arco uscente della sua coda
- Il passo 3 esamina ancora una volta gli archi uscenti di ogni attività, e segna gli archi stretti con un confronto per arco

□

Il risultato dà il sottografo degli archi stretti,
e i suoi cammini da START a FINISH sono i cammini critici.

Elencarli uno per uno può richiedere più tempo, quando sono molti.

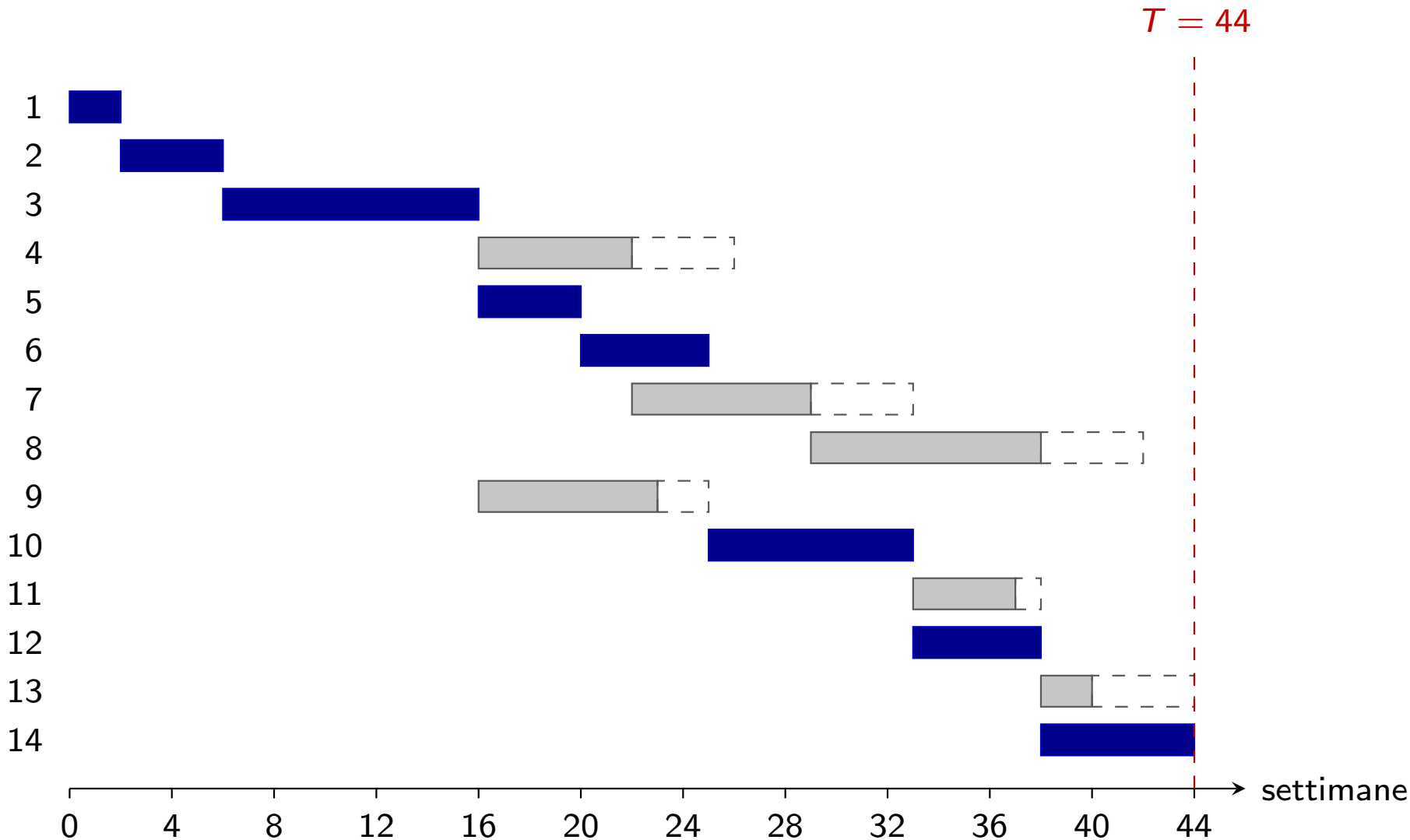
Definizione 8: diagramma di Gantt

*Il **diagramma di Gantt** di un calendario **t** ha un asse dei tempi e una riga per ogni attività: la riga dell'attività j ha una barra da t_j a $t_j + d_j$.*

- Il diagramma mostra a colpo d'occhio quali attività sono in corso in ogni istante
- Disegniamo il calendario al più presto ES, con le barre delle attività critiche in blu, e un riquadro tratteggiato da EF_j a LF_j che mostra la scorta totale di ogni attività non critica

Esempio (1/2)

Il diagramma di Gantt del calendario al più presto, in settimane:



Esempio (2/2)

- Le barre blu delle attività critiche si susseguono senza interruzioni dalla settimana 0 alla settimana 44: un ritardo su una qualunque di esse ritarda il progetto
- Alla settimana 16 le attività 4, 5 e 9 iniziano insieme: per (H2), tre squadre lavorano in parallelo
- I riquadri tratteggiati della catena $4, 7, 8, 13$ sono tutti lunghi 4 settimane, ma le barre della catena si susseguono: le 4 settimane di scorta sono condivise

Riepilogo

Il metodo del cammino critico:

- costruisce la rete e un ordine topologico
- esegue la passata in avanti e quella all'indietro e calcola le scorte
- richiede tempo $O(n + m)$

Il diagramma di Gantt:

- mostra le attività in corso in ogni istante
- mostra il cammino critico e le scorte del calendario al più presto

Il modello di programmazione lineare

Introduzione: Il modello di programmazione lineare

- La durata minima del progetto è anche il valore ottimo di un **modello LP**, le cui variabili sono i tempi di inizio
- Il suo duale è un modello di **cammino massimo**: un'unità di flusso da START a FINISH
- La dualità spiega i risultati delle sezioni precedenti: i tempi di inizio sono potenziali, gli archi stretti sono gli archi a costo ridotto nullo

Le variabili

Usiamo $n + 2$ variabili libere, una per ogni nodo:

$$t_j = \text{tempo di inizio del nodo } j, \qquad \forall j \in N.$$

Il modello PD

Con queste variabili, un modello LP per la durata minima del progetto è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & t_{n+1} - t_0 \\ \text{soggetto a} \quad & t_j - t_i \geq d_i, \quad \forall (i,j) \in A, \\ & t_i \in \mathbb{R}, \qquad \forall i \in N. \end{aligned}$$

Questo modello LP si indica come modello PD.

Descrizione del modello PD

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello PD:
  - la funzione obiettivo minimizza il tempo dall'inizio del progetto a FINISH;
  - i vincoli degli archi fanno iniziare ogni nodo dopo la fine di ciascuno dei suoi predecessori immediati;
  - infine, gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello LP, che sono libere.

- Aggiungere la stessa costante a tutti i tempi di inizio non cambia i vincoli né il valore: i calendari sono le soluzioni ammissibili con $t_0 = 0$, e $z(\mathrm{PD}) = T$

Scrivere il duale

- Seguendo le regole del capitolo «Teoria della dualità» del modulo *Programmazione lineare*, usiamo una variabile duale $x_{ij} \geq 0$ per ogni vincolo di un arco, un vincolo $\geq$ di un modello di minimo
- Ogni variabile libera t_i dà un'equazione duale, il cui termine noto è il coefficiente di t_i nella funzione obiettivo

Conservazione del flusso

- La variabile t_i ha coefficiente $+1$ nei vincoli degli archi che entrano in i e -1 in quelli degli archi che escono da i
- Con i bilanci

$$b_0 = 1, \qquad b_{n+1} = -1, \qquad b_i = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0, n+1\},$$

l'equazione di t_i, moltiplicata per -1, è un vincolo di conservazione del flusso

Il modello $D(\mathrm{PD})$

Con una variabile duale non negativa x_{ij} per ogni vincolo di un arco, il duale del modello PD è:

$$\max \sum_{(i,j)\in A} d_i\, x_{ij}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = b_i, \qquad \forall i \in N,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A.$$

Questo modello LP si indica come modello $D(\mathrm{PD})$.

Descrizione del modello duale

- I vincoli di conservazione del flusso mandano un'unità di flusso da START a FINISH
- La funzione obiettivo massimizza la lunghezza del flusso, con lunghezza d_i sull'arco (i, j)
- Il vettore di incidenza di un cammino P da START a FINISH è ammissibile, con valore $L(P)$

Il legame con i cammini minimi

- Con le lunghezze $-d_i$, il modello $D(\mathrm{PD})$ è il modello $\mathrm{SP}(0, n+1)$ del capitolo «Cammini minimi» con l'obiettivo moltiplicato per -1, e il modello PD è il suo duale: i tempi di inizio sono i potenziali, $\pi_i = t_i$

- Il costo ridotto dell'arco (i, j) è allora $\bar{c}_{ij} = -d_i - t_i + t_j$. Con $\boldsymbol{t} = ES$ vale $\bar{c}_{ij} = ES_j - EF_i \geq 0$: gli archi stretti sono gli archi a costo ridotto nullo

- Il teorema sugli archi stretti è il certificato del capitolo «Cammini minimi»: potenziali ammissibili e un cammino di archi a costo ridotto nullo

Teorema 7: modelli LP e cammini critici

$z(\mathrm{PD}) = z(D(\mathrm{PD})) = T$. I calendari ES e LS sono ottimi per il modello PD, e il vettore di incidenza di ogni cammino critico è ottimo per il modello $D(\mathrm{PD})$. Inoltre ogni soluzione ottima del modello PD soddisfa $t_j = t_i + d_i$ su ogni arco (i, j) di ogni cammino critico.

Dimostrazione (1/2)

- *ES* e *LS* sono ammissibili per il modello PD, con valore $T - 0 = T$, per i teoremi sui tempi al più presto e al più tardi
- Siano P un cammino critico e $\boldsymbol{x}^P$ il suo vettore di incidenza, con $x_{ij}^P = 1$ sugli archi di P e 0 altrove. Un'unità esce da START, un'unità entra in FINISH, e ogni altro nodo di P ha un arco entrante e un arco uscente di P: $\boldsymbol{x}^P$ è ammissibile per il modello $D(\mathrm{PD})$, con valore $L(P) = T$
- Una soluzione ammissibile del modello PD e una soluzione ammissibile del suo duale con lo stesso valore sono entrambe ottime, per la dualità debole

Dimostrazione (2/2)

- Siano $\boldsymbol{t}$ ottima per il modello PD e $P = i_0, i_1, \ldots, i_k$ un cammino critico
- Sommando i vincoli dei suoi archi,

$$T = t_{n+1} - t_0 = \sum_{s=0}^{k-1} \left(t_{i_{s+1}} - t_{i_s} \right) \geq \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} = L(P) = T,$$

quindi ogni vincolo di un arco di P vale con l'uguaglianza

□

In ogni calendario di durata minima
le attività critiche iniziano al loro inizio al più presto,
che coincide con il loro inizio al più tardi.

Esempio (1/2)

- Per il caso di studio il modello PD ha 16 variabili e 19 vincoli; per esempio, il vincolo dell'arco $(5, 8)$ è $t_8 - t_5 \geq 4$
- Risolto con Gurobi, $z(\mathrm{PD}) = z(D(\mathrm{PD})) = 44$, e la soluzione duale ottima restituita da Gurobi è il vettore di incidenza del cammino critico START$, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14,$FINISH
- La soluzione ottima del modello PD non è unica: ES e LS sono entrambe ottime, e differiscono, per esempio, sull'attività 4, con $ES_4 = 16$ e $LS_4 = 20$

Esempio (2/2)

- Con $\boldsymbol{t} = ES$ i costi ridotti $\bar{c}_{ij} = ES_j - EF_i$ sono nulli su ogni arco tranne

$$\bar{c}_{58} = 9, \qquad \bar{c}_{9,10} = 2, \qquad \bar{c}_{11,14} = 1, \qquad \bar{c}_{13,15} = 4$$

- Gli archi $(3,4)$, $(4,7)$, $(7,8)$, $(8,13)$ sono stretti, ma gli archi stretti dall'attività 13 non raggiungono FINISH, quindi la catena $4, 7, 8, 13$ non sta su un cammino critico

Riepilogo

Il modello PD:

- minimizza $t_{n+1} - t_0$ soggetto a $t_j - t_i \geq d_i$ su ogni arco
- ES e LS sono calendari ottimi

Il modello duale:

- manda un'unità di flusso da START a FINISH lungo un cammino massimo
- ogni cammino critico è una soluzione duale ottima; entrambi i valori ottimi sono T
- i tempi di inizio sono potenziali, gli archi stretti hanno costo ridotto nullo

Due cammini critici e variazioni delle durate

Introduzione: Variazioni delle durate

- Chi pianifica si chiede spesso che cosa succede al progetto se un'attività dura di più, o se più squadre la rendono più breve
- Le scorte e i cammini critici rispondono senza eseguire di nuovo il metodo
- Un secondo esempio, con due cammini critici, mostra perché contano tutti i cammini critici

Proposizione 3: variazione di una durata

Siano j un'attività, $\delta > 0$ e T' la durata minima del progetto dopo la variazione.

(a) *Se d_j aumenta di δ, allora $T' = T + \max\{0, \delta - TS_j\}$.*

(b) *Se d_j diminuisce di $\delta < d_j$, allora $T - \delta \leq T' \leq T$, e $T' = T$ se qualche cammino critico non contiene j.*

Dimostrazione (1/2)

- Per il teorema sulla durata minima del progetto, T è la lunghezza massima di un cammino da START a FINISH
- La variazione cambia di $\pm\delta$ la lunghezza dei cammini che passano per j, e solo di quelli

(a) Per il teorema sulla scorta totale, i cammini più lunghi per j crescono fino a $L_j + \delta = T - TS_j + \delta$

- se $TS_j > 0$, i cammini critici evitano j e mantengono la lunghezza T;
- se $TS_j = 0$, i cammini che evitano j hanno lunghezza al più $T < T + \delta$

In entrambi i casi $T' = \max\{T,\ T - TS_j + \delta\}$

Dimostrazione (2/2)

(b) Nessun cammino si allunga e ogni cammino perde al più δ, quindi

$$T - \delta \leq T' \leq T$$

Un cammino critico che evita j mantiene la lunghezza T

□

Esempio (1/5)

Un progetto ha 8 attività con i predecessori immediati e le durate della tabella.

attività j	predecessori immediati	d_j
1	—	2 giorni
2	3	2 giorni
3	—	4 giorni
4	1	3 giorni
5	1	5 giorni
6	3, 4	5 giorni
7	4, 5	3 giorni
8	6, 7	3 giorni

Esempio (2/5)

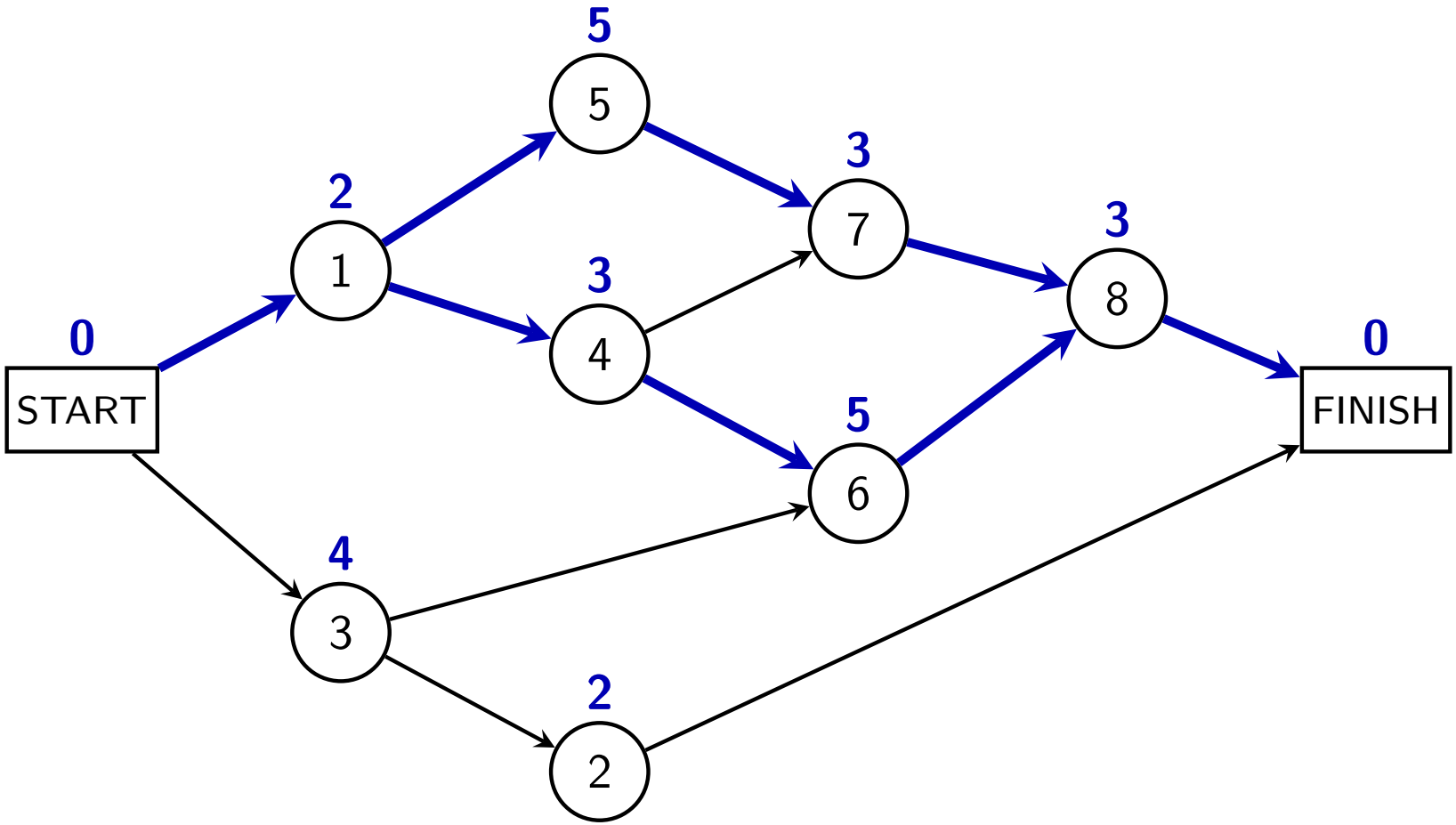
- L'attività 2 segue l'attività 3, quindi l'ordine topologico non è quello naturale
- START libera 1 e 3; il nodo 1 è rimosso per primo e libera 4 e 5; poi 3 è il nodo libero di indice più piccolo e libera 2, che viene prima di 4
- L'ordine è $0, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, e la passata in avanti e quella all'indietro danno i tempi della tabella che segue

Esempio (3/5)

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critica
1	2	0	2	0	2	0	0	sì
2	2	4	6	11	13	7	7	
3	4	0	4	1	5	1	0	
4	3	2	5	2	5	0	0	sì
5	5	2	7	2	7	0	0	sì
6	5	5	10	5	10	0	0	sì
7	3	7	10	7	10	0	0	sì
8	3	10	13	10	13	0	0	sì

Esempio (4/5)

$T = 13$, e due cammini di archi stretti vanno da START a FINISH: START, 1, 4, 6, 8,FINISH e START, 1, 5, 7, 8,FINISH, entrambi di lunghezza 13 (in blu nella figura, con le durate sopra i nodi).



Esempio (5/5)

- L'attività 3 ha $TS_3 = 1$ e $FS_3 = 0$: un giorno di ritardo sposta l'inizio al più presto dell'attività 2, non la fine del progetto
- L'attività 2 ha $TS_2 = FS_2 = 7$
- Il cammino START, 1, 4, 7, 8,FINISH usa solo attività critiche, ma il suo arco $(4, 7)$ non è stretto, $EF_4 = 5 < 7 = ES_7$: la sua lunghezza è $2 + 3 + 3 + 3 = 11$, e non è critico

Ora cambiamo una durata alla volta in questo progetto,
e confrontiamo con la proposizione sulle variazioni.

Esempio (1/2)

La nuova durata e i cammini critici sono calcolati con il metodo del cammino critico, e concordano con la proposizione.

variazione	TS_j	nuovo T	cammini critici dopo la variazione
$d_5 = 5 \to 4$	0	13	START, 1, 4, 6, 8, FINISH
$d_8 = 3 \to 2$	0	12	START, 1, 4, 6, 8, FINISH; START, 1, 5, 7, 8, FINISH
$d_3 = 4 \to 6$	1	14	START, 3, 6, 8, FINISH

Esempio (2/2)

- Accorciare l'attività 5 di un giorno non accorcia il progetto: il cammino critico START, 1, 4, 6, 8,FINISH evita l'attività 5, e $T' = T = 13$ per (b). Resta un solo cammino critico
- L'attività 8 sta su entrambi i cammini critici: accorciarla di un giorno dà $T' = T - 1 = 12$, ed entrambi i cammini restano critici
- L'attività 3 dura 2 giorni in più, più della sua scorta totale $TS_3 = 1$: per (a), $T' = 13 + (2 - 1) = 14$, e START, 3, 6, 8,FINISH diventa il cammino critico

Osservazione 3: Accorciare un progetto

Per accorciare un progetto, ogni cammino critico deve diventare più breve. Quando ci sono più cammini critici, un'attività che sta su uno solo di essi non serve: si accorcia un'attività comune a tutti, oppure un'attività su ciascuno.

Riepilogo

Durate più lunghe:

- se d_j cresce di δ, il progetto dura $\max\{0, \delta - TS_j\}$ in più

Durate più brevi:

- se d_j diminuisce, il progetto guadagna al più la stessa quantità
- non guadagna nulla se un cammino critico evita j
- con più cammini critici, vanno accorciati tutti

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- Raccogliamo gli errori più frequenti con il metodo del cammino critico
- Ognuno nasce da una definizione o da un risultato di questo capitolo
- Controllali prima di risolvere gli esercizi

Errori tipici (1/4)

Osservazione 4: Sommare tutte le durate

Il caso di studio dura $T = 44$ settimane, non 79: le attività non legate da precedenze si svolgono in parallelo.

Osservazione 5: Prendere il minimo nella passata in avanti

Un'attività inizia quando tutti i suoi predecessori immediati sono finiti: ES_j è il massimo dei loro fini al più presto. Simmetricamente, LF_j è il minimo degli inizi al più tardi dei successori.

Errori tipici (2/4)

Osservazione 6: Dimenticare START, FINISH e i loro archi

Ogni attività senza predecessori immediati ha bisogno dell'arco da START, e ogni attività senza successori dell'arco verso FINISH.

Osservazione 7: Sommare le scorte totali lungo un cammino

La catena $4, 7, 8, 13$ *del caso di studio ha in tutto* 4 *settimane di scorta, non* 16.

Errori tipici (3/4)

Osservazione 8: Confondere scorta totale e scorta libera

Un ritardo maggiore di FS_j sposta altre attività, anche quando non ritarda il progetto.

Osservazione 9: Leggere un cammino critico solo dalle attività critiche

Nel progetto con due cammini critici, il cammino $START, 1, 4, 7, 8, FINISH$ ha solo attività critiche, e non è critico: bisogna controllare che gli archi siano stretti.

Errori tipici (4/4)

Osservazione 10: Accorciare un'attività che sta su uno solo dei cammini critici

La durata del progetto non cambia.

Osservazione 11: Accettare precedenze con un ciclo

Non esiste alcun calendario, e l'ordine topologico si ferma prima di aver ordinato tutti i nodi.

Riepilogo

Calcolare i tempi:

- massimo nella passata in avanti, minimo in quella all'indietro
- START, FINISH e i loro archi fanno parte della rete; niente cicli

Leggere i risultati:

- T è la lunghezza di un cammino critico, non la somma delle durate
- le scorte sono condivise; scorta totale e scorta libera sono diverse
- i cammini critici sono fatti di archi stretti, e vanno accorciati tutti

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo i risultati principali del capitolo
- e i numeri dei due progetti che abbiamo studiato

Riepilogo (1/4)

- Un progetto ha attività con durate deterministiche e precedenze; la sua rete delle attività ha un nodo per ogni attività, più START e FINISH, e deve essere aciclica
- La lunghezza di un cammino da START a FINISH è la durata totale delle sue attività; ogni calendario dura almeno quanto ogni cammino, e i cammini critici sono i più lunghi
- La passata in avanti dà $ES_j = \max EF_i$ e $T = ES_{n+1}$, la lunghezza di un cammino critico; la passata all'indietro dà $LF_j = \min LS_k$ partendo da $LF_{n+1} = T$

Riepilogo (2/4)

- $TS_j = LS_j - ES_j$ è il ritardo che non ritarda il progetto, $FS_j \leq TS_j$ il ritardo che non sposta altre attività; i cammini critici sono i cammini di archi stretti
- Il modello PD $\min\{t_{n+1} - t_0 : t_j - t_i \geq d_i\}$ ha come duale il modello di cammino massimo, ed entrambi hanno valore ottimo T
- Aumentare d_j di δ ritarda il progetto di $\max\{0, \delta - TS_j\}$; accorciare serve solo se ogni cammino critico diventa più breve

Riepilogo (3/4)

I due progetti in breve: il caso di studio.

caso di studio	14 attività, 79 settimane in tutto;
	$T = 44$ settimane
cammino critico	START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH
j non critiche	4 $(4, 0)$, 7 $(4, 0)$, 8 $(4, 0)$,
(TS_j, FS_j)	9 $(2, 2)$, 11 $(1, 1)$, 13 $(4, 4)$
modelli LP	$z(\mathrm{PD}) = z(D(\mathrm{PD})) = 44$;
	ES e LS ottimi

Riepilogo (4/4)

I due progetti in breve: il secondo esempio.

secondo esempio	$T = 13$, 2 cammini critici:
	START, 1, 4, 6, 8, FINISH e
	START, 1, 5, 7, 8, FINISH
variazioni	$d_5 = 5 \to 4$: $T = 13$;
	$d_8 = 3 \to 2$: $T = 12$;
	$d_3 = 4 \to 6$: $T = 14$