Il simplesso su reti

Indice

L'algoritmo del simplesso sul modello del flusso di costo minimo

Basi e alberi ricoprenti

Potenziali e ottimalità

Il pivot

L'algoritmo del simplesso su reti

Un esempio senza capacità

Degenerazione e alberi fortemente ammissibili

Un esempio con capacità e un pivot degenere

L'albero iniziale: Fase 0

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- dimostrare che le basi del modello di flusso di costo minimo corrispondono agli alberi ricoprenti e calcolare una soluzione ad albero eliminando le foglie;
- calcolare i potenziali di un albero ricoprente e i costi ridotti, e verificare l'ottimalità di una soluzione ad albero con archi ai limiti inferiori o superiori;
- eseguire un pivot, individuando l'arco entrante, il ciclo orientato, il passo e l'arco uscente, e aggiornare flussi, albero e potenziali;
- riconoscere un pivot degenere, verificare la forte ammissibilità di una struttura ad albero e applicare la regola dell'arco uscente che la preserva e impedisce i cicli;
- trovare una struttura ad albero iniziale con la Fase 0 sulla rete ausiliaria oppure dimostrare che non esistono flussi ammissibili.

Prerequisiti

- Da questo modulo, il capitolo «Grafi»: alberi ricoprenti, foglie, cicli fondamentali e rango della matrice di incidenza nodo-arco.
- Da questo modulo, il capitolo «Modelli di flusso su reti»: il modello di flusso di costo minimo, la rimozione dei limiti inferiori, i potenziali, i costi ridotti e l'istanza di trasbordo sulla rete di riferimento.
- Dal modulo Programmazione lineare, i capitoli «Algoritmo del simplesso», «Condizioni di ottimalità e regole pivot», «Fase 0 dell'algoritmo del simplesso» e «Simplesso rivisto»: basi, soluzioni di base, costi ridotti, pivot, degenerazione e Fase 0.

L'algoritmo del simplesso sul modello del flusso di costo minimo

Introduzione: L'algoritmo del simplesso sul modello del flusso di costo minimo

- Il modello del flusso di costo minimo è un problema di programmazione lineare: l'algoritmo del simplesso può risolverlo
- In questa sezione leggiamo basi, soluzioni di base e pivot sul modello MCF
- Una differenza: una variabile fuori base può stare a zero *oppure alla propria capacità*
- Così prepariamo l'algoritmo del simplesso su reti: le stesse operazioni, senza matrici

Base e soluzione di base (1/2)

Definizione 1: base e soluzione di base (1/2)

Sia $G = (N, A)$ *una rete con* n *nodi e* m *archi, il cui grafo non orientato sottostante è connesso. La rete ha bilanci* b_i *tali che* $\sum_{i \in N} b_i = 0$, *costi* c_{ij}, *limiti inferiori nulli e capacità* $0 < u_{ij} \leq +\infty$.

Indichiamo con $\boldsymbol{M}$ *la matrice ottenuta eliminando dalla matrice di incidenza nodo-arco* $\boldsymbol{B}$ *la riga del nodo* n, *con* $\boldsymbol{M}_a$ *la colonna di* $\boldsymbol{M}$ *associata all'arco* a, *e sia* $\boldsymbol{h} = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})'$.

Base e soluzione di base (2/2)

Definizione: base e soluzione di base (2/2)

- *Una **base** è un insieme $T \subseteq A$ di $n-1$ archi le cui colonne $\boldsymbol{M}_a$, con $a \in T$, sono linearmente indipendenti. Gli archi di T sono **di base**; gli altri sono **fuori base**.*
- *Lo **stato dei limiti** degli archi fuori base è una partizione di $A \setminus T$ in due insiemi L e U, dove ogni arco in U ha capacità finita.*
- *La **soluzione di base** associata a (T, L, U) è il vettore $\boldsymbol{x}$ con $x_{ij} = 0$ sugli archi in L, $x_{ij} = u_{ij}$ sugli archi in U e $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{h}$. È **ammissibile** se $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ per ogni arco di T.*

Il modello del capitolo

- In tutto il capitolo la rete ha le proprietà della definizione. Rimuoviamo i limiti inferiori come nel capitolo «Modelli di flusso su reti», eliminiamo gli archi con $u_{ij} = 0$ e scriviamo il modello MCF come

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \ : \ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \right\}.$$

- La base è un insieme di colonne; L e U indicano a quale limite è fissata ciascuna variabile fuori base.

- I valori delle variabili di base risolvono il sistema quadrato

$$\boldsymbol{M}_T \boldsymbol{x}_T = \boldsymbol{h} - \sum_{a \in U} \boldsymbol{M}_a u_a,$$

che ha soluzione unica perché $\boldsymbol{M}_T$ è non singolare.

Lemma 1: l'equazione ridondante

Supponiamo che il grafo non orientato sottostante a G sia connesso e che $\sum_{i \in N} b_i = 0$. Allora $\boldsymbol{M}$ ha rango $n - 1$ e un vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ soddisfa $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{b}$ se e solo se soddisfa $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{h}$.

Dimostrazione

La matrice $\boldsymbol{M}$ ha rango $n-1$ per il corollario «basi della matrice di incidenza» del capitolo «Grafi»: eliminando una riga di $\boldsymbol{B}$ restano $n-1$ righe linearmente indipendenti.

- Se $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{b}$, in particolare $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{h}$.
- Viceversa, ogni colonna di $\boldsymbol{B}$ contiene un $+1$ e un -1, quindi la somma delle righe di $\boldsymbol{B}$ è il vettore nullo. Se $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{h}$, la componente n di $\boldsymbol{Bx}$ vale

$$-\sum_{i=1}^{n-1} b_i = b_n.$$

□

Soluzioni di base del modello MCF

- Quindi ogni soluzione di base soddisfa i vincoli di conservazione in tutti i nodi, compreso il nodo n.

- La definizione coincide con quella dell'algoritmo del simplesso, con una differenza:
  - nel capitolo «Algoritmo del simplesso» del modulo Programmazione lineare ogni variabile fuori base è fissata a zero;
  - qui una variabile fuori base può trovarsi anche al limite superiore u_{ij}.

Con basi e stati dei limiti, ricordiamo
come si muove l'algoritmo del simplesso quando le variabili
hanno limiti.

L'algoritmo del simplesso con limiti (1/2)

- Come nel capitolo «Simplesso rivisto», i **moltiplicatori del simplesso** $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ associati alla base T risolvono il primo sistema

$$\boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{c}'_T,$$

  e il costo ridotto della variabile x_a è $c_a - \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{M}_a$.

- Il modello MCF è un problema di minimizzazione.
  - Una variabile fuori base al limite inferiore riduce il costo aumentando se il suo costo ridotto è negativo.
  - Una variabile fuori base al limite superiore riduce il costo diminuendo se il suo costo ridotto è positivo.

L'algoritmo del simplesso con limiti (2/2)

- Se nessuna variabile fuori base può ridurre il costo, la soluzione di base è ottimale.
- Altrimenti una di esse entra in base: il test dei rapporti determina il massimo passo che mantiene le variabili di base entro i rispettivi limiti, e una variabile di base che raggiunge un limite esce dalla base.
- L'**algoritmo del simplesso su reti** esegue le stesse operazioni senza matrici:
  - le basi sono alberi ricoprenti,
  - i moltiplicatori sono potenziali calcolati lungo l'albero,
  - il test dei rapporti si svolge lungo un ciclo.

Esempio

Basi della rete di riferimento. Nella rete di riferimento del capitolo «Modelli di flusso su reti» la matrice $\boldsymbol{M}$ è la matrice di incidenza privata della riga del nodo 6; una base contiene $n - 1 = 5$ archi.

- Gli archi $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$ danno una sottomatrice 5×5 di $\boldsymbol{M}$ con determinante 1: formano una base.
- Gli archi $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 6)$ toccano ogni nodo, ma contengono il ciclo $2, 4, 3, 2$: la somma delle colonne di $(2, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$ è zero e il determinante è 0.
- Tra i 126 insiemi di 5 archi, esattamente 55 danno una sottomatrice non singolare: sono i 55 alberi ricoprenti del grafo di riferimento. Tutti questi determinanti valgono 1 oppure -1.

Riepilogo

Basi del modello MCF:

- In una rete connessa l'equazione del nodo n è ridondante
- Una base è un insieme di $n-1$ archi con colonne linearmente indipendenti in $\boldsymbol{M}$

Soluzioni di base:

- Gli archi fuori base sono fissati a 0 (insieme L) o alla propria capacità (insieme U)
- La soluzione di base segue dal sistema quadrato della base

Basi e alberi ricoprenti

Introduzione: Basi e alberi ricoprenti

- Dimostriamo che le basi del modello MCF sono esattamente gli alberi ricoprenti della rete
- Le loro matrici sono triangolari con determinante ± 1: le soluzioni ad albero sono intere
- Definiamo le strutture ad albero e calcoliamo a mano una soluzione ad albero, eliminando le foglie
- È il primo passo di ogni iterazione dell'algoritmo del simplesso su reti

Teorema 1: le basi corrispondono agli alberi ricoprenti

Supponiamo che il grafo non orientato sottostante a $G = (N, A)$ *sia connesso. Un insieme* T *di* $n - 1$ *archi è una base se e solo se è un albero ricoprente.*

Inoltre, per ogni albero ricoprente T *si possono ordinare le righe e le colonne di* $\boldsymbol{M}_T$ *in modo che la matrice sia triangolare inferiore, con elementi diagonali pari a* ± 1*; dunque* $\det(\boldsymbol{M}_T) = \pm 1$.

Dimostrazione (1/3)

Utilizziamo i risultati del capitolo «Grafi».

1. *Indipendenza delle colonne.* La componente del nodo n di $\sum_{a \in T} \lambda_a \boldsymbol{B}_a$ è l'opposto della somma delle altre componenti, perché la somma delle righe di $\boldsymbol{B}$ è zero. Quindi

$$\sum_{a \in T} \lambda_a \boldsymbol{M}_a = 0 \quad \iff \quad \sum_{a \in T} \lambda_a \boldsymbol{B}_a = 0.$$

2. *Un albero ricoprente è una base.* Le sue colonne in $\boldsymbol{B}$ sono linearmente indipendenti per il lemma «colonne di una foresta».

Dimostrazione (2/3)

3. *Una base è un albero ricoprente.*
   - Se gli $n-1$ archi di T fossero aciclici, formerebbero un albero ricoprente per il teorema «caratterizzazioni di un albero»(c).
   - Altrimenti T contiene un ciclo, le cui colonne sono linearmente dipendenti per il lemma «colonne di un ciclo», e T non è una base.

Dimostrazione (3/3)

4. *Forma triangolare.* Per induzione su n; per $n = 2$ la matrice è 1×1 con elemento ± 1.
   - Per $n \geq 3$ l'albero ha almeno due foglie (lemma «foglie»), quindi ha una foglia $\ell \neq n$, con il suo unico arco a_ℓ.
   - Nella riga ℓ di $\boldsymbol{M}_T$ l'unico elemento non nullo è ± 1, nella colonna di a_ℓ.

5. Mettiamo per prime la riga ℓ e la colonna di a_ℓ. Eliminandole resta la matrice costruita allo stesso modo per l'albero ricoprente $T \setminus \{a_\ell\}$ dei nodi $N \setminus \{\ell\}$, che contengono ancora n: per induzione si può ordinare in forma triangolare inferiore.

   Sviluppando lungo la prima riga, $\det(\boldsymbol{M}_T) = \pm 1$.

□

Corollario 1: soluzioni ad albero intere

Se i bilanci e le capacità finite sono interi, ogni soluzione di base del modello MCF *è intera.*

Dimostrazione

- Il termine noto $\boldsymbol{h} - \sum_{a \in U} \boldsymbol{M}_a u_a$ è intero.
- $\det(\boldsymbol{M}_T) = \pm 1$ per il teorema «le basi corrispondono agli alberi ricoprenti».
- Per la regola di Cramer tutte le variabili di base sono intere.

È il risultato di integralità del capitolo «Modelli di flusso su reti», applicato alle basi. □

Le basi sono gli alberi ricoprenti: diamo ora un nome a un albero ricoprente insieme allo stato dei limiti degli altri archi.

Definizione 2: struttura ad albero e soluzione ad albero

Sia T un albero ricoprente di G. Una ***struttura ad albero*** *è una tripla (T, L, U), dove L e U formano una partizione di $A \setminus T$ e ogni arco in U ha capacità finita. La* ***soluzione ad albero*** *associata è la soluzione di base: $x_{ij} = 0$ su L, $x_{ij} = u_{ij}$ su U e $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{b}$.*

- *La struttura ad albero è* ***ammissibile*** *se $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ su ogni arco di T.*
- *Una struttura ad albero ammissibile è* ***degenere*** *se qualche arco di T ha $x_{ij} = 0$ o $x_{ij} = u_{ij}$.*

Osservazione 1: base e stato dei limiti

- *L'albero T è la base. Gli insiemi L e U indicano soltanto a quale limite è fissato ciascun arco fuori base.*
- *Un arco in U è fuori base anche se il suo flusso u_{ij} è positivo.*
- *Un arco di T può avere flusso 0 oppure u_{ij}: la soluzione ad albero è allora degenere, ma l'arco rimane di base.*

Proposizione 1: calcolo della soluzione ad albero eliminando le foglie

Sia (T, L, U) *una struttura ad albero e siano* ***bilanci residui***

$$\hat{b}_i = b_i - \sum_{(i,j)\in U} u_{ij} + \sum_{(j,i)\in U} u_{ji}, \qquad \forall i \in N.$$

Finché restano archi dell'albero: scegli una foglia $\ell \neq n$ *dell'albero residuo, con il suo arco* a *e il nodo adiacente* j*; poni* $x_a = \hat{b}_\ell$ *se* $a = (\ell, j)$ *e* $x_a = -\hat{b}_\ell$ *se* $a = (j, \ell)$*; aggiungi* $\hat{b}_\ell$ *a* $\hat{b}_j$*; elimina* ℓ *e* a*.*

I valori ottenuti, con $x = 0$ *su* L *e* $x = u$ *su* U*, sono la soluzione ad albero.*

Dimostrazione (1/2)

Il bilancio residuo $\hat{b}_i$ è il bilancio del nodo i dopo aver trasferito al termine noto i flussi sugli archi di U.

Mostriamo che ogni passo conserva questa proprietà: gli archi dell'albero rimasti devono soddisfare i vincoli di conservazione con i bilanci residui correnti.

1. Alla foglia ℓ l'unica incognita rimasta è x_a, quindi il vincolo di conservazione di ℓ diventa
   - $x_a = \hat{b}_\ell$ se ℓ è la coda di a,
   - $-x_a = \hat{b}_\ell$ se ℓ è la sua testa.

Dimostrazione (2/2)

2. Nel vincolo del nodo j l'arco a compare con $-x_a$ se $a = (\ell, j)$ e con $+x_a$ se $a = (j, \ell)$. Trasferendo il termine noto al secondo membro, $\hat{b}_j$ aumenta di $x_a = \hat{b}_\ell$ oppure di $-x_a = \hat{b}_\ell$.

3. Ogni albero con almeno due nodi ha una foglia diversa da n (lemma «foglie» del capitolo «Grafi»), quindi la procedura termina quando resta il solo nodo n.

   Il suo vincolo è soddisfatto per il lemma «l'equazione ridondante», e la soluzione è unica per il teorema «le basi corrispondono agli alberi ricoprenti».

□

Calcolo di una soluzione ad albero

- Negli esempi la foglia scelta è sempre quella con **indice più piccolo** diverso da n.
- Ogni foglia trasferisce il suo bilancio residuo al nodo adiacente.
- Quindi il flusso su un arco dell'albero è uguale alla somma dei bilanci residui dei nodi che l'arco separa da n, come nel lemma «flusso attraverso un taglio» del capitolo «Modelli di flusso su reti».

Esempio: il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ come soluzione ad albero (1/4)

Usiamo la rete di riferimento del capitolo «Modelli di flusso su reti», con $\boldsymbol{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ e

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
c_{ij}	2	2	5	2	3	3	5	5	3
u_{ij}	4	4	4	2	4	3	5	3	2

Prendiamo la struttura ad albero

$$T = \{(1,2), (2,4), (3,2), (4,6), (5,4)\},$$
$$U = \{(1,3), (3,5), (5,6)\},$$
$$L = \{(4,3)\}.$$

Esempio: il flusso $\bar{x}$ come soluzione ad albero (2/4)

Gli archi di U sono fissati alla capacità e i loro flussi passano al termine noto. I bilanci residui sono

$$\hat{\boldsymbol{b}} = (5-4,\ 2,\ 0+4-4,\ -3,\ 0+4-2,\ -4+2) = (1, 2, 0, -3, 2, -2).$$

- Il nodo 1 invia 4 unità su $(1, 3) \in U$: $\hat{b}_1 = 5 - 4$.
- Il nodo 3 riceve 4 unità su $(1, 3)$ e ne invia 4 su $(3, 5)$: $\hat{b}_3 = 0 + 4 - 4$.
- Il nodo 5 riceve 4 unità su $(3, 5)$ e ne invia 2 su $(5, 6)$: $\hat{b}_5 = 0 + 4 - 2$.
- Il nodo 6 riceve 2 unità su $(5, 6)$: $\hat{b}_6 = -4 + 2$.

Esempio: il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ come soluzione ad albero (3/4)

Le foglie vengono eliminate nell'ordine $1, 3, 2, 5, 4$:

foglia ℓ	arco dell'albero	flusso	nuovo bilancio residuo di j
1	$(1,2)$	$x_{12} = \hat{b}_1 = 1$	$\hat{b}_2 = 2 + 1 = 3$
3	$(3,2)$	$x_{32} = \hat{b}_3 = 0$	$\hat{b}_2 = 3 + 0 = 3$
2	$(2,4)$	$x_{24} = \hat{b}_2 = 3$	$\hat{b}_4 = -3 + 3 = 0$
5	$(5,4)$	$x_{54} = \hat{b}_5 = 2$	$\hat{b}_4 = 0 + 2 = 2$
4	$(4,6)$	$x_{46} = \hat{b}_4 = 2$	$\hat{b}_6 = -2 + 2 = 0$

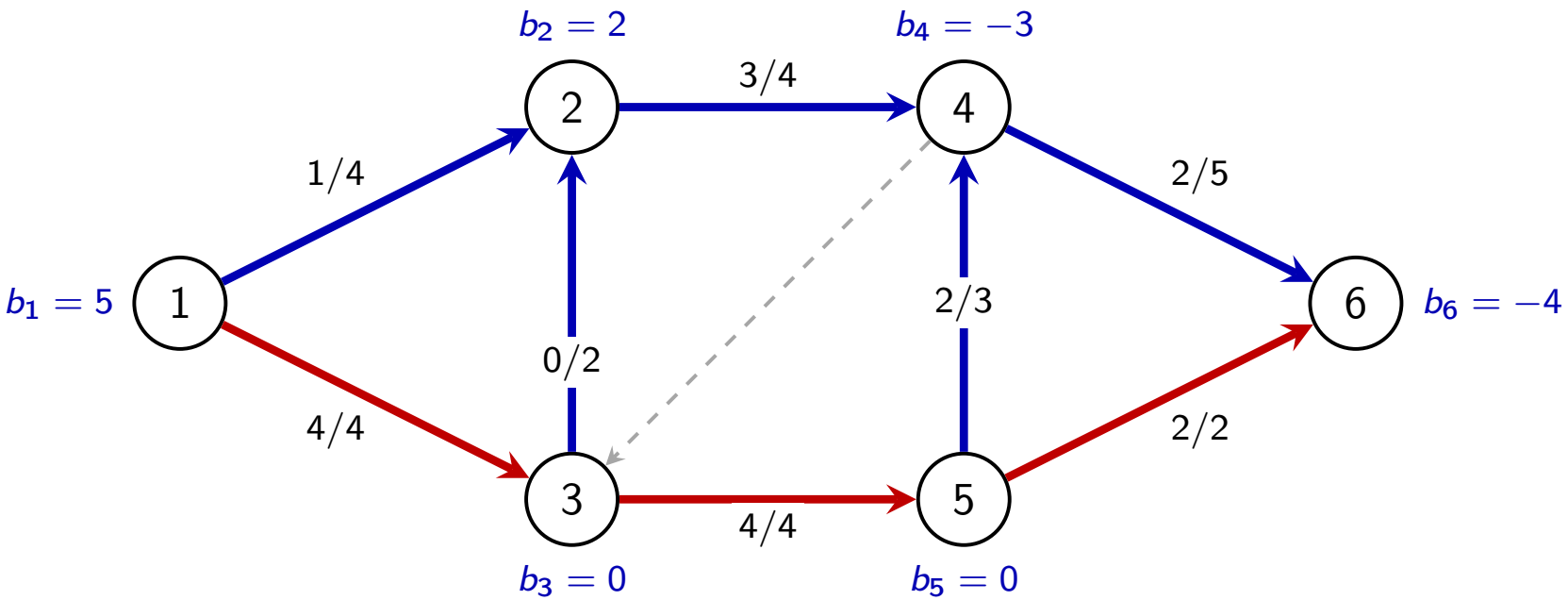
La soluzione ad albero è il flusso

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (1, 4, 3, 0, 4, 0, 2, 2, 2)$$

del capitolo «Modelli di flusso su reti», con costo 63.

Esempio: il flusso $\bar{x}$ come soluzione ad albero (4/4)

Archi dell'albero blu, archi di U rossi, l'arco di L grigio e tratteggiato; su ogni arco x_{ij}/u_{ij}.



L'arco dell'albero $(3, 2)$ ha flusso 0: la struttura ad albero è ammissibile e degenere.

Riepilogo

Basi e alberi:

- Le basi del modello MCF sono gli alberi ricoprenti
- Le loro matrici sono triangolari con determinante ± 1: dati interi danno soluzioni ad albero intere

Soluzioni ad albero:

- Una soluzione ad albero fissa gli archi di L a 0 e quelli di U alla capacità
- I flussi sugli archi dell'albero si calcolano eliminando le foglie, con i bilanci residui

Potenziali e ottimalità

Introduzione: Potenziali e ottimalità

- I moltiplicatori del simplesso di una base diventano *potenziali* sui nodi, calcolati dalla radice dell'albero
- Il costo ridotto di un arco fuori base è il costo del suo ciclo fondamentale
- Dai segni dei costi ridotti leggiamo se una soluzione ad albero è ottimale
- Quando non lo è, gli stessi segni dicono come migliorarla

Definizione 3: potenziali di un albero

Sia T un albero ricoprente di G. Il nodo n è la ***radice*** *di T. I* ***potenziali*** *di T sono i valori π_i, per $i \in N$, tali che*

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0, \quad \forall (i,j) \in T, \qquad \pi_n = 0.$$

Calcolo dei potenziali

- I potenziali si calcolano a partire dalla radice, come nel certificato del capitolo «Modelli di flusso su reti»:
  - $\pi_n = 0$;
  - per un arco (i, j) dell'albero con un estremo già noto,

$$\pi_j = \pi_i - c_{ij} \qquad \text{oppure} \qquad \pi_i = \pi_j + c_{ij}.$$

- La normalizzazione $\pi_n = 0$ corrisponde alla riga cancellata del nodo n in $\boldsymbol{M}$.

Lemma 2: potenziali e moltiplicatori del simplesso

I potenziali di un albero ricoprente T esistono e sono unici. Il vettore $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1})$ è il vettore dei moltiplicatori del simplesso della base T e $\bar{c}_{ij}$ è il costo ridotto di x_{ij}.

Inoltre, π_i è il costo del cammino nell'albero da i a n, dove un arco percorso dalla coda alla testa conta $+c_{ij}$ e un arco percorso dalla testa alla coda conta $-c_{ij}$.

Dimostrazione (1/2)

Scriviamo $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1})$ per i primi $n-1$ potenziali, e $\pi_n = 0$.

1. La colonna di (i, j) in $\boldsymbol{M}$ ha $+1$ nella riga i e -1 nella riga j, dato che la riga di n è eliminata. Quindi

$$\boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{M}_{(i,j)} = \pi_i - \pi_j, \quad \text{anche quando } i = n \text{ o } j = n.$$

2. Il sistema $\boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{c}'_T$ si scrive $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$ sugli archi dell'albero, cioè $\bar{c}_{ij} = 0$. La sua matrice è non singolare per il teorema «le basi corrispondono agli alberi ricoprenti», quindi i potenziali esistono e sono unici, e

$$c_{ij} - \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{M}_{(i,j)} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = \bar{c}_{ij}.$$

Dimostrazione (2/2)

3. Sia $i = v_0, v_1, \ldots, v_r = n$ il cammino nell'albero.
   - Un arco percorso dalla coda alla testa dà $\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t} = c_{v_{t-1}v_t}$.
   - Un arco percorso dalla testa alla coda dà $\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t} = -c_{v_t v_{t-1}}$.

   Sommando, i termini si cancellano a vicenda e resta $\pi_i - \pi_n = \pi_i$.

□

Il costo di un ciclo

- Un **ciclo** C di G si percorre in una delle sue due direzioni.
- Gli archi attraversati dalla coda alla testa sono percorsi **in avanti**, gli altri **all'indietro**.
- Il costo del ciclo è

$$c(C) = \sum_{(i,j) \text{ in avanti}} c_{ij} - \sum_{(i,j) \text{ all'indietro}} c_{ij}.$$

Lemma 3: il costo di un ciclo

Per ogni vettore di potenziali π e ogni ciclo C percorso in una direzione,

$$c(C) = \sum_{(i,j) \text{ in avanti}} \bar{c}_{ij} - \sum_{(i,j) \text{ all'indietro}} \bar{c}_{ij}.$$

In particolare, se π sono i potenziali di un albero ricoprente T e C è il ciclo fondamentale di un arco $(k,l) \notin T$, percorso nella direzione di (k,l), allora $c(C) = \bar{c}_{kl}$.

Dimostrazione

Sia C il ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_r = v_0$ e sia a_t l'arco che collega v_{t-1} e v_t.

1. Se $a_t = (v_{t-1}, v_t)$ è percorso in avanti,
   $\bar{c}_{a_t} = c_{a_t} - (\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t})$.
   Se $a_t = (v_t, v_{t-1})$ è percorso all'indietro,
   $-\bar{c}_{a_t} = -c_{a_t} - (\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t})$.
2. Sommando lungo il ciclo, i termini $\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t}$ si cancellano e danno $\pi_{v_0} - \pi_{v_r} = 0$: si ottiene la formula.
3. Per il ciclo fondamentale di (k, l), ogni arco dell'albero ha $\bar{c}_{ij} = 0$ e (k, l) è in avanti: la somma è $\bar{c}_{kl}$.

□

Teorema 2: ottimalità di una soluzione ad albero

Sia (T, L, U) *una struttura ad albero ammissibile, con soluzione ad albero* $\boldsymbol{x}$ *e potenziali* $\boldsymbol{\pi}$*. Se*

$$\bar{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in L, \qquad\qquad \bar{c}_{ij} \leq 0, \quad \forall (i,j) \in U,$$

allora $\boldsymbol{x}$ *è una soluzione ottimale del modello* MCF*. Se le disuguaglianze sono strette,* $\boldsymbol{x}$ *è l'unica soluzione ottimale.*

Dimostrazione (1/2)

Sia $\boldsymbol{y}$ un flusso ammissibile. Per il lemma «costo e costo ridotto» del capitolo «Modelli di flusso su reti»,

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\pi}, \qquad \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\pi},$$

quindi

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \sum_{(i,j)\in A} \bar{c}_{ij}\,(y_{ij} - x_{ij}).$$

Dimostrazione (2/2)

- Sugli archi di T il termine è zero, poiché $\bar{c}_{ij} = 0$.
- Sugli archi di L, $x_{ij} = 0 \leq y_{ij}$ e $\bar{c}_{ij} \geq 0$: il termine è $\bar{c}_{ij} y_{ij} \geq 0$.
- Sugli archi di U, $x_{ij} = u_{ij} \geq y_{ij}$ e $\bar{c}_{ij} \leq 0$: il termine è $\bar{c}_{ij}(y_{ij} - u_{ij}) \geq 0$.

Quindi $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$.

Con disuguaglianze strette, $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ implica $y_{ij} = 0$ su L e $y_{ij} = u_{ij}$ su U; i flussi su T sono allora quelli della soluzione ad albero, che è unica (teorema «le basi corrispondono agli alberi ricoprenti»), e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. □

Leggere le condizioni di ottimalità

- Sono le condizioni del corollario «certificato a costo ridotto» del capitolo «Modelli di flusso su reti»:
  - un arco con costo ridotto positivo è vuoto,
  - un arco con costo ridotto negativo è saturo,
  - ogni arco dell'albero ha costo ridotto nullo.

- Un arco di L con $\bar{c}_{ij} < 0$, o di U con $\bar{c}_{ij} > 0$, viola queste condizioni.

- Per il lemma «il costo di un ciclo», inviando flusso lungo il suo ciclo fondamentale nella direzione opportuna il costo diminuisce di $|\bar{c}_{ij}|$ per unità.

Esempio: potenziali e costi ridotti dell'albero di $\bar{x}$ (1/3)

Per la struttura ad albero del flusso $\bar{x}$,
$T = \{(1,2),(2,4),(3,2),(4,6),(5,4)\}$, partiamo dalla radice 6:

$$\pi_6 = 0, \qquad \pi_4 = \pi_6 + c_{46} = 5,$$

$$\pi_2 = \pi_4 + c_{24} = 10, \qquad \pi_5 = \pi_4 + c_{54} = 10,$$

$$\pi_1 = \pi_2 + c_{12} = 12, \qquad \pi_3 = \pi_2 + c_{32} = 12.$$

Ad esempio, $\pi_1 = c_{12} + c_{24} + c_{46} = 12$ è il costo del cammino nell'albero $1, 2, 4, 6$.

Esempio: potenziali e costi ridotti dell'albero di $\bar{x}$ (2/3)

I costi ridotti degli archi fuori base sono

$$\bar{c}_{13} = 2 - 12 + 12 = 2, \qquad \bar{c}_{35} = 3 - 12 + 10 = 1,$$

$$\bar{c}_{43} = 3 - 5 + 12 = 10, \qquad \bar{c}_{56} = 3 - 10 + 0 = -7.$$

- L'arco $(4,3) \in L$ ha $\bar{c}_{43} \geq 0$ e l'arco $(5,6) \in U$ ha $\bar{c}_{56} \leq 0$.
- Gli archi $(1,3)$ e $(3,5)$ sono in U con costo ridotto positivo: le condizioni del teorema «ottimalità di una soluzione ad albero» non sono soddisfatte.

Esempio: potenziali e costi ridotti dell'albero di $\bar{x}$ (3/3)

- Il ciclo fondamentale di $(1,3)$, percorso nella direzione dell'arco, è $1,3,2,1$: percorre $(1,3)$ e $(3,2)$ in avanti e $(1,2)$ all'indietro.
- Il suo costo è

$$c_{13} + c_{32} - c_{12} = 2 + 2 - 2 = 2 = \bar{c}_{13}.$$

- Riducendo x_{13} e inviando flusso lungo il ciclo nella direzione opposta, il costo diminuisce di 2 per unità.

Riepilogo

Potenziali:

- Sono nulli nella radice e rendono nullo il costo ridotto degli archi dell'albero
- Sono i moltiplicatori del simplesso della base T

Ottimalità:

- Il costo ridotto di un arco fuori base è il costo del suo ciclo fondamentale
- Una soluzione ad albero con $\bar{c} \geq 0$ su L e $\bar{c} \leq 0$ su U è ottimale

Il pivot

Introduzione: Il pivot

- Quando le condizioni di ottimalità non valgono, un arco ammissibile per l'ingresso entra nell'albero
- Si invia flusso lungo il suo ciclo fondamentale, quanto i limiti lo permettono
- Un arco bloccante esce dall'albero: otteniamo una nuova struttura ad albero e il costo non aumenta
- Cambiano solo i potenziali di un sottoalbero: l'aggiornamento costa poco

Il pivot del simplesso su reti (1/2)

Definizione 4: il pivot del simplesso su reti (1/2)

Sia (T, L, U) una struttura ad albero ammissibile, con soluzione ad albero $\boldsymbol{x}$ e potenziali $\boldsymbol{\pi}$.

- *Un arco è **ammissibile per l'ingresso** se appartiene a L con $\bar{c}_{ij} < 0$, oppure a U con $\bar{c}_{ij} > 0$. L'**arco entrante** $e = (k, l)$ è quello ammissibile con il massimo $|\bar{c}_{ij}|$; in caso di parità, il primo in ordine lessicografico.*
- *Il **ciclo del pivot** C è il ciclo fondamentale di e, percorso nella direzione di e se $e \in L$, e nella direzione opposta se $e \in U$.*

Il pivot del simplesso su reti (2/2)

Definizione: il pivot del simplesso su reti (2/2)

- *La **capacità residua** di un arco di C è $u_{ij} - x_{ij}$ se l'arco è percorso in avanti ($+\infty$ se $u_{ij} = +\infty$) e x_{ij} se è percorso all'indietro. Il **passo** θ è la minima capacità residua lungo C; gli archi che la raggiungono sono **bloccanti**.*
- *L'**apice** w di C è il primo nodo comune ai cammini nell'albero da k e da l alla radice n. L'**arco uscente** f è l'ultimo arco bloccante incontrato percorrendo C nella sua direzione a partire da w.*

*Un pivot con $\theta = 0$ è **degenere**.*

Inviare flusso lungo il ciclo

- Inviare θ unità lungo C aumenta il flusso sugli archi in avanti e lo diminuisce su quelli all'indietro.
- L'arco entrante è in avanti se appartiene a L (il suo flusso deve aumentare) e all'indietro se appartiene a U (il suo flusso deve diminuire).
- Siano p e q gli estremi di e nella direzione di C: $p = k$, $q = l$ se $e \in L$, e $p = l$, $q = k$ se $e \in U$. Partendo dall'apice, C segue
  - il cammino nell'albero da w fino a p,
  - l'arco e da p a q,
  - il cammino nell'albero da q fino a w.
- Anche l'arco entrante può uscire: la sua capacità residua è u_{kl}, quindi $\theta \leq u_{kl}$.

Proposizione 2: il pivot

Nelle ipotesi della definizione del pivot, sia $\theta < +\infty$ *e sia* $\boldsymbol{x}'$ *ottenuto da* $\boldsymbol{x}$ *aggiungendo* θ *sugli archi in avanti di* C *e sottraendo* θ *sugli archi all'indietro.*

(a) $\boldsymbol{x}'$ *è un flusso ammissibile e* $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - \theta\,|\bar{c}_{kl}|$.

(b) $T' = T \cup \{e\} \setminus \{f\}$ *è un albero ricoprente e* $\boldsymbol{x}'$ *è la soluzione ad albero della struttura* (T', L', U')*, dove* f *va in* U *se è in avanti in* C *e in* L *se è all'indietro. Se* $f = e$*, allora* $T' = T$ *ed* e *passa da* L *a* U *o da* U *a* L.

Dimostrazione (1/3)

Sia $\varepsilon_a = +1$ sugli archi in avanti e -1 sugli archi all'indietro di C, e sia $\boldsymbol{x}^C$ il vettore di incidenza con segno di C, con $x_a^C = \varepsilon_a$ su C e 0 altrove: allora

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{x}^C.$$

1. *Conservazione.* Per il lemma «colonne di un ciclo» del capitolo «Grafi»,

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^C = \sum_{a \in C} \varepsilon_a \boldsymbol{B}_a = 0, \qquad \text{quindi } \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}.$$

2. *Limiti.* Un arco in avanti aumenta di $\theta \leq u_{ij} - x_{ij}$, un arco all'indietro diminuisce di $\theta \leq x_{ij}$, gli altri archi non cambiano.

Dimostrazione (2/3)

3. *Costo.* Per il lemma «il costo di un ciclo», poiché gli archi dell'albero hanno $\bar{c}_{ij} = 0$,

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \theta\, c(C) = \theta\, \varepsilon_e \bar{c}_{kl}.$$

   - Se $e \in L$, allora $\varepsilon_e = +1$ e $\bar{c}_{kl} < 0$.
   - Se $e \in U$, allora $\varepsilon_e = -1$ e $\bar{c}_{kl} > 0$.

   In entrambi i casi $\varepsilon_e \bar{c}_{kl} = -|\bar{c}_{kl}|$.

Dimostrazione (3/3)

4. *Il nuovo albero.* C è l'unico ciclo di $T \cup \{e\}$ (proposizione «ciclo fondamentale» del capitolo «Grafi»). Togliendo $f \in C$ resta un grafo connesso, perché il resto di C collega ancora gli estremi di f; ha $n-1$ archi, quindi è un albero ricoprente (teorema «caratterizzazioni di un albero»(b)).

5. *La nuova soluzione ad albero.* Gli archi fuori base diversi da e e f mantengono flusso e limite. L'arco f è bloccante: dopo il passo $x'_f = u_f$ se è in avanti e $x'_f = 0$ se è all'indietro. Quindi $\boldsymbol{x}'$ soddisfa $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$ e i limiti fissati da (T', L', U'), ed è la soluzione ad albero per il teorema «le basi corrispondono agli alberi ricoprenti».

□

Proposizione 3: l'aggiornamento dei potenziali

Nel pivot della proposizione «il pivot», sia $f \neq e$ e siano R e S gli insiemi di nodi delle due componenti di $T \setminus \{f\}$, con $n \in R$. Allora e ha un estremo in R e uno in S, e i potenziali di T' sono

$$\pi'_i = \pi_i, \quad \forall i \in R,$$

$$\pi'_i = \begin{cases} \pi_i - \bar{c}_{kl} & \text{se } l \in S, \\ \pi_i + \bar{c}_{kl} & \text{se } k \in S, \end{cases} \quad \forall i \in S.$$

Dimostrazione

L'albero T' è connesso e $T' \setminus \{e\} = T \setminus \{f\}$ non ha archi tra R e S: quindi e collega R e S. Verifichiamo che i valori π' dell'enunciato sono i potenziali di T', che sono unici per il lemma «potenziali e moltiplicatori del simplesso».

1. Gli archi di $T' \setminus \{e\}$ hanno entrambi gli estremi in R oppure entrambi in S, dove tutti i potenziali cambiano della stessa quantità: il loro costo ridotto resta 0.
2. Se $l \in S$, allora $c_{kl} - \pi'_k + \pi'_l = c_{kl} - \pi_k + \pi_l - \bar{c}_{kl} = 0$.
   Se $k \in S$, allora $c_{kl} - \pi'_k + \pi'_l = c_{kl} - \pi_k - \bar{c}_{kl} + \pi_l = 0$.
3. La radice n è in R, quindi $\pi'_n = \pi_n = 0$.

□

Che cosa cambia dopo un pivot

- Cambiano solo i potenziali del sottoalbero S staccato da f, tutti della stessa quantità.
- Se $f = e$, l'albero e i potenziali non cambiano.
- I costi ridotti cambiano solo sugli archi che hanno un estremo in R e l'altro in S.

Proposizione 4: problema illimitato

Se $\theta = +\infty$, allora e $\in L$, il ciclo C è un ciclo orientato i cui archi hanno capacità infinita, il suo costo è $-|\bar{c}_{kl}| < 0$ e il modello MCF è illimitato.

Dimostrazione

- Un arco all'indietro ha capacità residua finita x_{ij}.
- Un arco in avanti con capacità finita ha capacità residua finita $u_{ij} - x_{ij}$.

Quindi ogni arco di C è in avanti con $u_{ij} = +\infty$; in particolare e è in avanti, quindi $e \in L$.

Come nella proposizione «il pivot», $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x}^C$ è ammissibile per ogni $t \geq 0$, con costo

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - t\,|\bar{c}_{kl}|,$$

che tende a $-\infty$. □

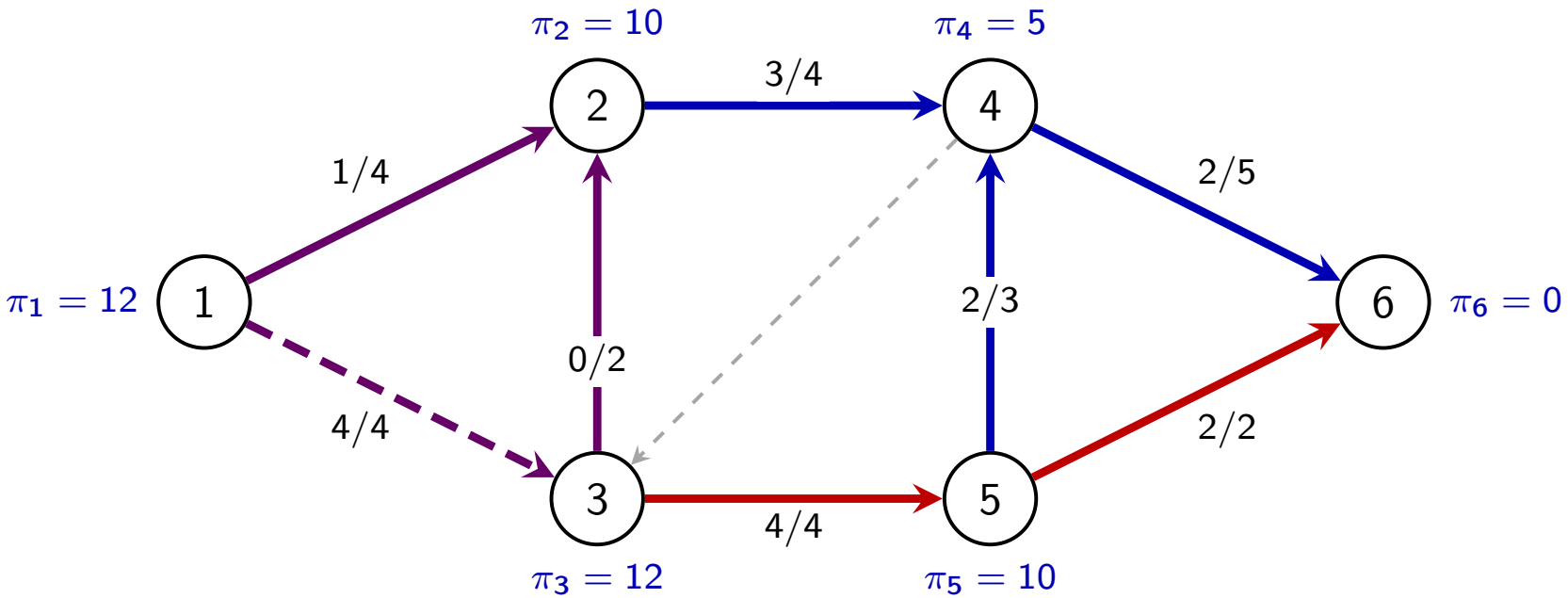
Esempio: un pivot dall'albero di $\bar{\boldsymbol{x}}$ (1/4)

Riprendiamo l'esempio dei potenziali dell'albero di $\bar{\boldsymbol{x}}$. Gli archi ammissibili per l'ingresso sono $(1,3)$ e $(3,5)$, entrambi in U, con $\bar{c}_{13} = 2$ e $\bar{c}_{35} = 1$.

- *Arco entrante.* Il massimo $|\bar{c}_{ij}|$ è 2: $e = (1,3)$.
- È in U, quindi C è percorso contro $(1,3)$: $p = 3$ e $q = 1$.
- *Apice.* I cammini nell'albero fino alla radice sono $1, 2, 4, 6$ e $3, 2, 4, 6$: l'apice è $w = 2$.

Esempio: un pivot dall'albero di $\bar{x}$ (2/4)

Gli archi di C sono viola, l'arco entrante è tratteggiato; accanto a ogni nodo il suo potenziale.



Esempio: un pivot dall'albero di $\bar{x}$ (3/4)

Da $w = 2$ il ciclo va $2 \to 3$ lungo $(3,2)$, $3 \to 1$ lungo $(1,3)$, $1 \to 2$ lungo $(1,2)$:

arco di C	$(3,2)$	$(1,3)$	$(1,2)$
direzione	$-$	$-$	$+$
residuo	0	4	3

- *Passo e arco uscente.* $\theta = \min\{0,4,3\} = 0$ e l'unico arco bloccante è $(3,2)$.
- Esce dall'albero; è all'indietro, quindi va in L. Il pivot è degenere.

Esempio: un pivot dall'albero di $\bar{x}$ (4/4)

Aggiornamento.

- Il flusso non cambia e il costo resta 63.
- Il nuovo albero è

$$T' = \{(1,2),(1,3),(2,4),(4,6),(5,4)\},$$

dove $(1,3)$ è un arco di base alla sua capacità.

- Togliendo $(3,2)$ da T si stacca $S = \{3\}$, che contiene $l = 3$:

$$\pi'_3 = \pi_3 - \bar{c}_{13} = 12 - 2 = 10.$$

Riepilogo

Il pivot:

- Invia θ unità lungo il ciclo fondamentale dell'arco entrante, orientato in modo che il flusso dell'arco si allontani dal suo limite
- Il costo diminuisce di $\theta|\bar{c}_{kl}|$; con $\theta = +\infty$ il problema è illimitato

L'aggiornamento:

- L'arco uscente è l'ultimo arco bloccante a partire dall'apice
- Cambiano solo i potenziali del sottoalbero che esso stacca

L'algoritmo del simplesso su reti

Introduzione: L'algoritmo del simplesso su reti

- Mettiamo insieme i pezzi: soluzione ad albero, potenziali, costi ridotti e pivot
- Il risultato è l'algoritmo del simplesso su reti, che passa da un albero all'altro
- Vediamo quando si ferma, e come legge sulla rete l'algebra del simplesso rivisto

L'algoritmo del simplesso su reti (1/2)

Algorithm: Algoritmo del simplesso su reti (1/2)

Input : una rete $G = (N, A)$ con una struttura ad albero ammissibile (T, L, U)

Output : una soluzione ad albero ottimale, oppure un ciclo che dimostra che il problema è illimitato

1 **Passo 0 (inizializzazione).** Calcola la soluzione ad albero $\boldsymbol{x}$ eliminando le foglie,

2 e i potenziali $\boldsymbol{\pi}$ dalla radice n, con $\pi_n = 0$.

3 **Passo 1 (test di ottimalità).** Calcola i costi ridotti $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$.

4 Se $\bar{c}_{ij} \geq 0$ su L e $\bar{c}_{ij} \leq 0$ su U, `STOP`: $\boldsymbol{x}$ è ottimale.

5 **Passo 2 (arco entrante).** Scegli l'arco ammissibile per l'ingresso e con il massimo $|\bar{c}_{ij}|$.

6 Orienta il suo ciclo C come e se $e \in L$, e contro e se $e \in U$.

L'algoritmo del simplesso su reti (2/2)

Algorithm: Algoritmo del simplesso su reti (2/2)

7 **Passo 3 (test dei rapporti).** Calcola θ, la minima capacità residua lungo C.

8 Se $\theta = +\infty$, `STOP`: il problema è illimitato.

9 Altrimenti l'arco uscente f è l'ultimo arco bloccante lungo C a partire dall'apice.

10 **Passo 4 (aggiornamento).** Invia θ unità lungo C e poni $T := T \cup \{e\} \setminus \{f\}$.

11 L'arco f va in U o in L.

12 Aggiorna i potenziali del sottoalbero staccato da f e torna al Passo 1.

Come funziona l'algoritmo (1/2)

- Nel Passo 2 le parità si risolvono con l'ordine lessicografico degli archi.
- Il Passo 0 usa la procedura della proposizione «calcolo della soluzione ad albero eliminando le foglie».
- Il Passo 4 usa gli aggiornamenti delle proposizioni «il pivot» e «l'aggiornamento dei potenziali».

Come funziona l'algoritmo (2/2)

- L'arresto al Passo 1 è corretto per il teorema «ottimalità di una soluzione ad albero».
- L'arresto al Passo 3 è corretto per la proposizione «problema illimitato».
- Ogni struttura incontrata è ammissibile per la proposizione «il pivot».
- Con bilanci e capacità interi tutti i flussi sono interi (corollario «soluzioni ad albero intere»), e con costi interi tutti i potenziali sono interi.

Proposizione 5: terminazione senza pivot degeneri

Se ogni pivot dell'algoritmo ha $\theta > 0$, l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di pivot.

Dimostrazione

- Una struttura ad albero determina la sua soluzione ad albero, quindi il suo costo.
- Per la proposizione «il pivot» ogni pivot con $\theta > 0$ riduce il costo di $\theta|\bar{c}_{kl}| > 0$, quindi nessuna struttura ad albero si ripete.
- Le strutture ad albero sono in numero finito: al più $\binom{m}{n-1}$ alberi, ciascuno con al più 2^{m-n+1} stati dei limiti.

□

L'algebra del pivot (1/2)

- Nella terminologia del capitolo «Simplesso rivisto», i potenziali risolvono il primo sistema $\boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{c}'_T$.
- Il secondo sistema $\boldsymbol{M}_T \boldsymbol{d} = \boldsymbol{M}_e$ si risolve con il cammino nell'albero da k a l: per il lemma «colonne di un ciclo» del capitolo «Grafi»,
  - $d_a = +1$ sugli archi del cammino percorsi dalla coda alla testa,
  - $d_a = -1$ sugli altri archi del cammino,
  - $d_a = 0$ fuori dal cammino.
- Aumentando x_e di t le variabili di base cambiano di $-t\,\boldsymbol{d}$: è il flusso inviato lungo il ciclo fondamentale.

L'algebra del pivot (2/2)

- Il metodo dei potenziali per il problema di trasporto del capitolo «Trasporto e assegnamento» è l'algoritmo del simplesso su reti sul grafo bipartito di origini e destinazioni.
- Le celle di base formano un albero ricoprente.
- I potenziali e i costi ridotti sono quelli di questo capitolo.

Riepilogo

L'algoritmo:

- Passa da un albero all'altro: potenziali dalla radice, costi ridotti, arco entrante, ciclo, passo, arco uscente
- Si ferma con una soluzione ad albero ottimale, oppure con un ciclo che dimostra l'illimitatezza

Terminazione:

- Senza pivot degeneri il costo diminuisce a ogni pivot e l'algoritmo termina

Un esempio senza capacità

Introduzione: Un esempio senza capacità

- Eseguiamo l'algoritmo del simplesso su reti sulla rete di riferimento, senza capacità
- A ogni iterazione: potenziali, costi ridotti, arco entrante, ciclo, passo e arco uscente
- Senza capacità U è vuoto: solo gli archi all'indietro del ciclo possono bloccare

L'istanza

Usiamo la rete di riferimento con i bilanci $\boldsymbol{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ e i costi

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
c_{ij}	2	2	5	2	3	3	5	5	3

ma senza capacità: $u_{ij} = +\infty$ per ogni arco, quindi $U = \emptyset$.

- La struttura ad albero iniziale invia le 5 unità del nodo 1 lungo il cammino $1, 3, 5, 4$ e le 2 unità del nodo 2 lungo $(2, 4)$; il nodo 4 trattiene 3 unità e ne inoltra 4 al nodo 6:

$$T = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,4)\},$$
$$L = \{(1,2), (3,2), (4,3), (5,6)\},$$
$$U = \emptyset.$$

Come leggere le iterazioni

- Ogni soluzione ad albero dell'esempio è non degenere.
- Ogni tabella riporta lo stato degli archi (T, L, U), i flussi e i costi ridotti.
- Ogni tabella del ciclo elenca gli archi di C a partire dall'apice.
- Nelle figure gli archi dell'albero sono blu, quelli di L grigi e tratteggiati, quelli di C viola e l'arco entrante viola e tratteggiato; su ogni arco il suo flusso.

Esempio: iterazione 1 (1/3)

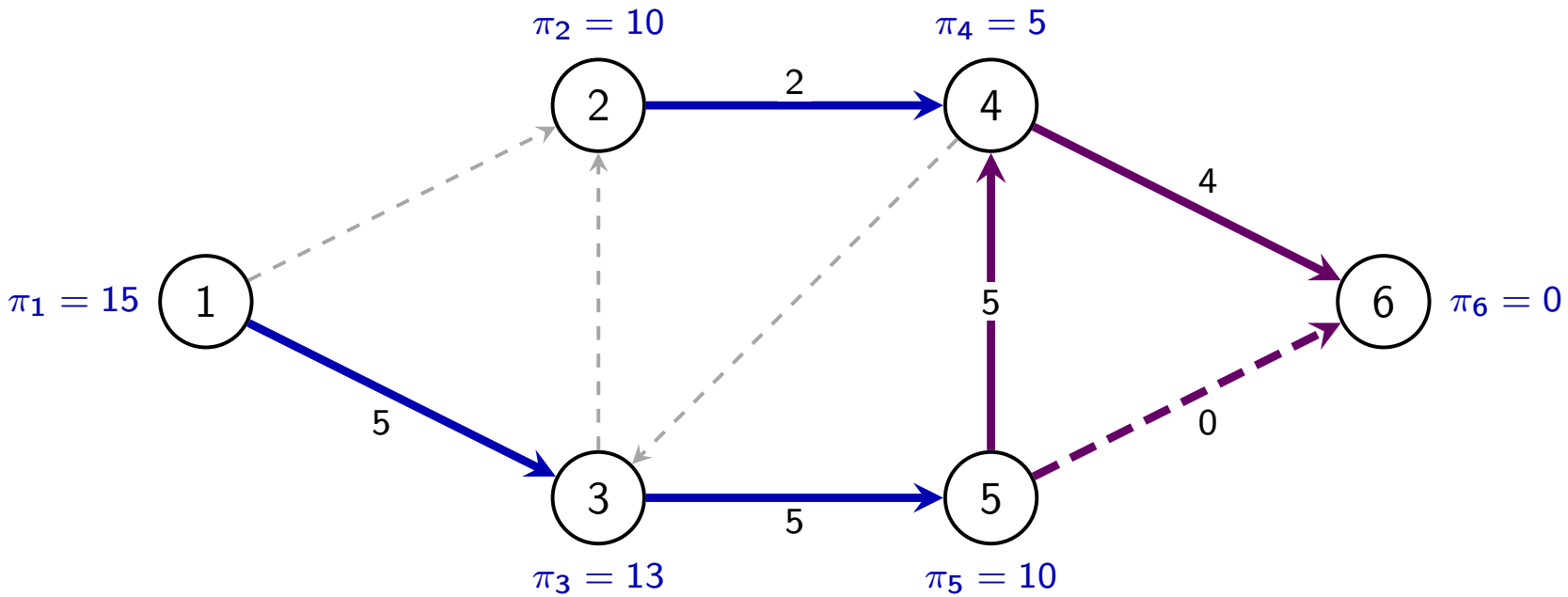
I potenziali sono $\pi = (15, 10, 13, 5, 10, 0)$ e il costo è 80.

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
stato	L	T	T	L	T	L	T	T	L
x_{ij}	0	5	2	0	5	0	4	5	0
$\bar{c}_{ij}$	-3	0	0	-1	0	11	0	0	-7

- Gli archi ammissibili per l'ingresso sono $(1,2)$, $(3,2)$ e $(5,6)$.
- L'arco entrante è $e = (5,6)$, con $\bar{c}_{56} = -7$. È in L, quindi C segue $(5,6)$.

Esempio: iterazione 1 (2/3)

I cammini nell'albero fino alla radice sono $5, 4, 6$ e 6: l'apice è $w = 6$ e C è $6, 4, 5, 6$.



Esempio: iterazione 1 (3/3)

arco di C	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
direzione	$-$	$-$	$+$
residuo	4	5	$+\infty$

- $\theta = 4$ e $(4,6)$ esce dall'albero, verso L.
- Le 4 unità per il nodo 6 viaggiano ora su $(5,6)$ invece che lungo $5,4,6$, e il costo diventa $80 - 4 \cdot 7 = 52$.
- Togliendo $(4,6)$ si stacca $S = \{1,2,3,4,5\}$, che contiene $k = 5$: questi potenziali cambiano di $\bar{c}_{56} = -7$.

Esempio: iterazione 2 (1/3)

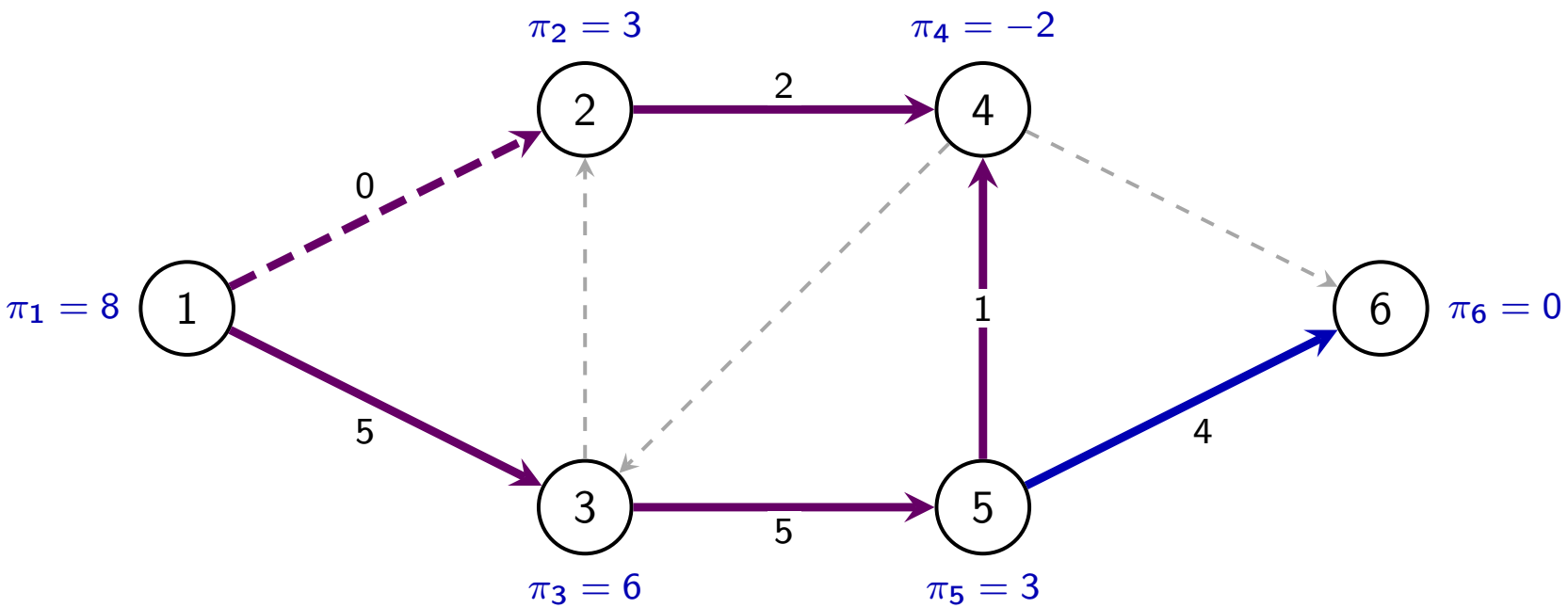
I potenziali sono $\boldsymbol{\pi} = (8, 3, 6, -2, 3, 0)$ e il costo è 52.

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
stato	L	T	T	L	T	L	L	T	T
x_{ij}	0	5	2	0	5	0	0	1	4
$\bar{c}_{ij}$	-3	0	0	-1	0	11	7	0	0

- Gli archi ammissibili per l'ingresso sono $(1,2)$ e $(3,2)$.
- L'arco entrante è $e = (1,2)$, con $\bar{c}_{12} = -3$, in L.

Esempio: iterazione 2 (2/3)

I cammini nell'albero fino alla radice sono $1, 3, 5, 6$ e $2, 4, 5, 6$: l'apice è $w = 5$ e C è $5, 3, 1, 2, 4, 5$.



Esempio: iterazione 2 (3/3)

arco di C	$(3,5)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(5,4)$
direzione	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
residuo	5	5	$+\infty$	$+\infty$	1

- $\theta = 1$ e $(5,4)$ esce dall'albero, verso L.
- L'unità per il nodo 4 che viaggiava lungo $1,3,5,4$, al costo 10, viaggia ora lungo $1,2,4$, al costo 7: il costo diventa $52 - 1 \cdot 3 = 49$.
- Togliendo $(5,4)$ si stacca $S = \{2,4\}$, che contiene $l = 2$: questi potenziali cambiano di $-\bar{c}_{12} = 3$.

Esempio: iterazione 3 (1/2)

I potenziali sono $\pi = (8, 6, 6, 1, 3, 0)$ e il costo è 49.

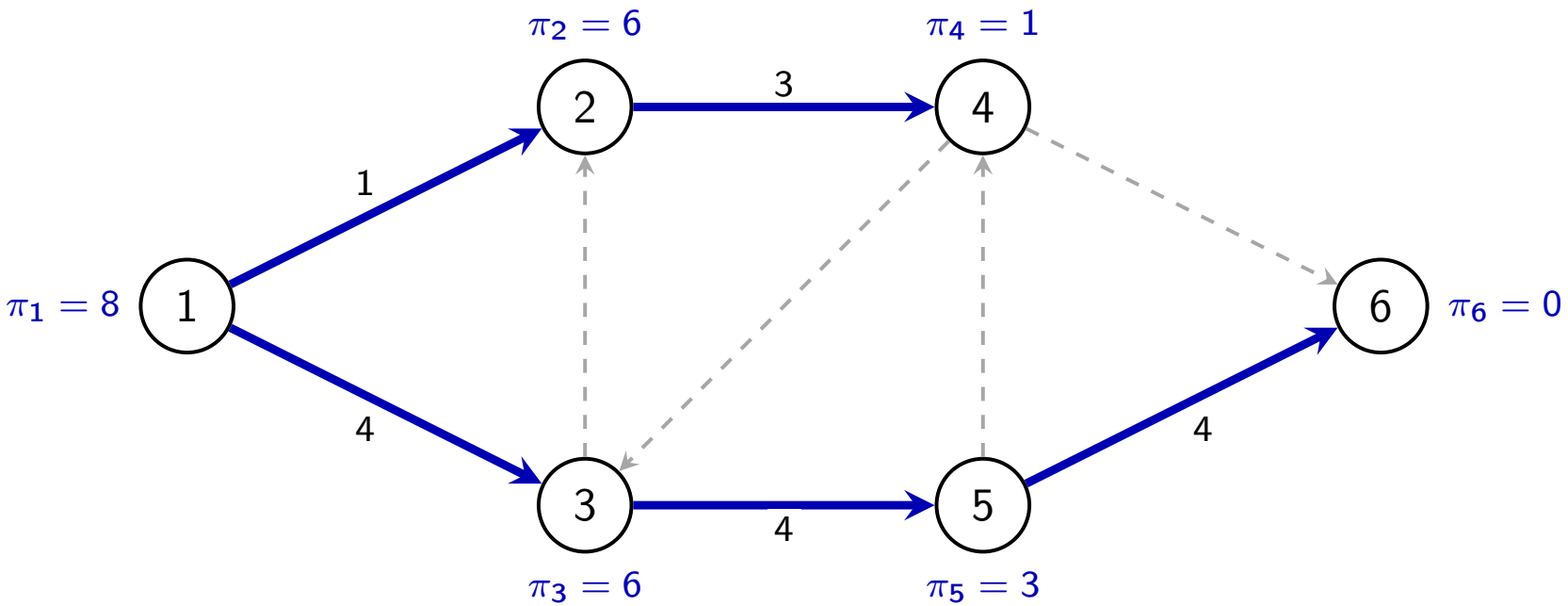
arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
stato	T	T	T	L	T	L	L	L	T
x_{ij}	1	4	3	0	4	0	0	0	4
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	2	0	8	4	3	0

Tutti gli archi di L hanno $\bar{c}_{ij} > 0$: `STOP`. Per il teorema «ottimalità di una soluzione ad albero» il flusso $x_{12} = 1$, $x_{13} = 4$, $x_{24} = 3$, $x_{35} = 4$, $x_{56} = 4$ è l'unico flusso ottimale, con valore

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 49.$$

Esempio: iterazione 3 (2/2)

L'albero ottimale, con i suoi potenziali e flussi.



Verifica del risultato

- Gurobi (gurobipy) conferma il valore ottimale 49 e il flusso ottimale.
- L'enumerazione di tutte le strutture ad albero ammissibili dà lo stesso ottimo unico.
- Il flusso ottimale invia 4 unità su $(5, 6)$, la cui capacità nel capitolo «Modelli di flusso su reti» è $u_{56} = 2$: con le capacità questo flusso non è ammissibile e il valore ottimale sale da 49 a 60.

Riepilogo

Senza capacità:

- U è vuoto e solo gli archi all'indietro possono bloccare

Sulla rete di riferimento:

- Due pivot abbassano il costo da 80 a 52 e poi a 49
- I costi ridotti dell'ultimo albero sono positivi su tutti gli archi fuori base: l'ottimo è unico

Degenerazione e alberi fortemente ammissibili

Introduzione: Degenerazione e alberi fortemente ammissibili

- Un pivot degenere cambia l'albero ma non il flusso, né il costo
- Una sequenza di pivot degeneri potrebbe tornare a un albero già incontrato: l'algoritmo cicherebbe
- Gli alberi fortemente ammissibili e la regola dell'arco uscente lo escludono
- Il risultato: l'algoritmo del simplesso su reti termina sempre

Definizione 5: struttura ad albero fortemente ammissibile

Sia (T, L, U) una struttura ad albero ammissibile con soluzione ad albero ***x*** *e radice n. Per un nodo $i \neq n$, l'arco dell'albero tra i e il nodo successivo del suo cammino verso la radice* ***punta verso la radice*** *se i è la sua coda, e* ***in senso opposto alla radice*** *se i è la sua testa. La struttura ad albero è* ***fortemente ammissibile*** *se*

- *ogni arco dell'albero con $x_{ij} = 0$ punta verso la radice, e*
- *ogni arco dell'albero con $x_{ij} = u_{ij}$ punta in senso opposto alla radice.*

Leggere la definizione

- Equivalentemente, da ogni nodo si può inviare una quantità positiva di flusso alla radice lungo il suo cammino nell'albero.
  - Un arco che punta verso la radice è percorso in avanti e richiede $x_{ij} < u_{ij}$.
  - Un arco che punta in senso opposto è percorso all'indietro e richiede $x_{ij} > 0$.

- Una struttura ad albero ammissibile non degenere è fortemente ammissibile.

Pivot degeneri e cicli

- In un pivot degenere il flusso e il costo non cambiano, ma l'albero sì.
- La proposizione «terminazione senza pivot degeneri» non esclude che una sequenza di pivot degeneri torni a una struttura ad albero già incontrata.
- L'algoritmo andrebbe allora in **ciclo**, come l'algoritmo del simplesso del capitolo «Condizioni di ottimalità e regole pivot».

Esempio: le quattro strutture ad albero di $\bar{\boldsymbol{x}}$ (1/2)

Nel flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ gli archi $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,6)$, $(5,4)$ sono strettamente tra i loro limiti e collegano tutti i nodi tranne il 3. Un albero ricoprente che li contiene aggiunge un arco a un limite incidente nel nodo 3, e ogni scelta dà una struttura ad albero con la stessa soluzione ad albero $\bar{\boldsymbol{x}}$:

arco aggiunto	flusso	cammino da 3 alla radice	l'arco punta	fortemente ammissibile
$(3,2)$	0	$3,2,4,6$	verso la radice	sì
$(1,3)$	$4 = u_{13}$	$3,1,2,4,6$	in senso opposto	sì
$(3,5)$	$4 = u_{35}$	$3,5,4,6$	verso la radice	no
$(4,3)$	0	$3,4,6$	in senso opposto	no

Esempio: le quattro strutture ad albero di $\bar{\boldsymbol{x}}$ (2/2)

- Con $(3, 5)$ nell'albero, nessun flusso può lasciare il nodo 3 verso la radice, perché $(3, 5)$ è saturo.
- Con $(4, 3)$, nessun flusso può raggiungere 4 da 3, perché $(4, 3)$ è vuoto.
- Il pivot dell'esempio «un pivot dall'albero di $\bar{\boldsymbol{x}}$» passa dalla prima struttura alla seconda.

Lemma 4: pivot degeneri

Sia (T, L, U) fortemente ammissibile e sia C il ciclo di un pivot, percorso a partire dall'apice w: il cammino nell'albero P da w a p, l'arco e, il cammino nell'albero Q da q a w. Allora ogni arco di Q e l'arco e hanno capacità residua positiva. In particolare, se $\theta = 0$, tutti gli archi bloccanti stanno su P.

Dimostrazione

- La capacità residua di e è $u_{kl} > 0$: vale $u_{kl} - 0$ se $e \in L$ e $x_{kl} = u_{kl}$ se $e \in U$.
- L'apice w sta sul cammino nell'albero da q alla radice, quindi Q è la prima parte di questo cammino, percorsa verso la radice.
- Per la forte ammissibilità da q si può inviare una quantità positiva di flusso alla radice lungo questo cammino: ogni arco di Q ha capacità residua positiva nella direzione di C.

□

Teorema 3: la regola dell'arco uscente mantiene la forte ammissibilità

Se (T, L, U) è fortemente ammissibile e $\theta < +\infty$, la struttura ad albero ottenuta dal pivot, con l'arco uscente della definizione del pivot, è fortemente ammissibile.

Dimostrazione (1/3)

Sia C il ciclo $w = v_0, v_1, \ldots, v_r = w$ nella sua direzione, con f tra v_s e v_{s+1}, e sia $\boldsymbol{x}'$ il nuovo flusso. Siano i un nodo e y il primo nodo di C sul suo cammino verso la radice in T.

1. *Il nuovo cammino.* Se il cammino di i non incontra C, è lo stesso in T'. Altrimenti il cammino di i in T' va
   - da i a y come in T,
   - poi da y a w dentro $C \setminus \{f\}$,
   - poi da w alla radice come in T.

   Le due parti esterne non usano archi di C, quindi i loro flussi non cambiano e portano ancora flusso positivo verso la radice.

Dimostrazione (2/3)

2. *La parte dentro C.*
   - Se $y = v_t$ con $t \leq s$, il cammino va $v_t, v_{t-1}, \ldots, v_0 = w$, contro la direzione di C.
   - Se $t \geq s + 1$, va $v_t, v_{t+1}, \ldots, v_r = w$, nella direzione di C.

3. *Caso $\theta > 0$.*
   - Contro la direzione di C, la capacità residua di ogni arco aumenta di $\theta > 0$.
   - Nella direzione di C, gli archi dopo f non sono bloccanti, perché f è l'ultimo arco bloccante: la loro capacità residua era maggiore di θ e resta positiva.

Dimostrazione (3/3)

4. *Caso* $\theta = 0$. Il flusso non cambia e f sta su P per il lemma «pivot degeneri».
   - Per $t \leq s$, il cammino da v_t a w risale P: fa parte del cammino nell'albero di v_t in T, che porta flusso positivo verso la radice.
   - Per $t \geq s+1$, gli archi di P dopo f non sono bloccanti, ed e e gli archi di Q hanno capacità residua positiva per lo stesso lemma.

In tutti i casi da ogni nodo si può inviare una quantità positiva di flusso alla radice in T'. □

Teorema 4: finitezza dell'algoritmo del simplesso su reti

Se la struttura ad albero iniziale è fortemente ammissibile e ogni pivot usa l'arco uscente della definizione del pivot, allora ogni struttura ad albero incontrata è fortemente ammissibile, nessuna struttura ad albero si ripete e l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di pivot. Questo vale per qualunque regola che scelga l'arco entrante tra gli archi ammissibili per l'ingresso.

Dimostrazione (1/2)

La forte ammissibilità segue per induzione dal teorema «la regola dell'arco uscente mantiene la forte ammissibilità».

1. Un pivot con $\theta > 0$ riduce il costo (proposizione «il pivot»).

2. In un pivot degenere, f sta su P (lemma «pivot degeneri»), quindi il cammino da p alla radice passa per f e $p \in S$.
   - Se $e \in L$, allora $p = k$ e i potenziali di S cambiano di $\bar{c}_{kl} < 0$.
   - Se $e \in U$, allora $p = l$ e cambiano di $-\bar{c}_{kl} < 0$ (proposizione «l'aggiornamento dei potenziali»).

   Quindi $\sum_{i \in N} \pi_i$ diminuisce strettamente, mentre il costo non cambia.

Dimostrazione (2/2)

3. Una struttura ad albero determina il suo costo e i suoi potenziali. A ogni pivot la coppia

$$\left(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \sum_{i \in N} \pi_i\right)$$

diminuisce strettamente in ordine lessicografico, quindi nessuna struttura ad albero si ripete; le strutture sono in numero finito.

□

Dove serve la regola

- La dimostrazione usa la regola in due punti:
  - in un pivot degenere l'arco uscente sta tra l'apice e p;
  - il nuovo albero è fortemente ammissibile.

- Una scelta diversa tra gli archi bloccanti può produrre una struttura ad albero che non è fortemente ammissibile.

- Il teorema richiede una struttura ad albero iniziale fortemente ammissibile: quando non se ne conosce una, la si costruisce con una rete ausiliaria.

Riepilogo

Alberi fortemente ammissibili:

- Da ogni nodo si può spingere flusso verso la radice lungo il suo cammino nell'albero
- Scegliere come arco uscente l'ultimo arco bloccante a partire dall'apice mantiene questa proprietà

Niente cicli:

- Un pivot degenere abbassa i potenziali di un sottoalbero
- Nessuna struttura ad albero si ripete: l'algoritmo non può ciclare

Un esempio con capacità e un pivot degenere

Introduzione: Un esempio con capacità e un pivot degenere

- Eseguiamo ora l'algoritmo sulla rete di riferimento con le sue capacità
- Gli archi di U entrano diminuendo il loro flusso, e un arco saturo può uscire dall'albero verso U
- L'esecuzione contiene un pivot degenere: vediamo all'opera gli alberi fortemente ammissibili

L'istanza

Risolviamo l'istanza di trasbordo del capitolo «Modelli di flusso su reti»: la rete di riferimento con $\boldsymbol{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ e capacità

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
c_{ij}	2	2	5	2	3	3	5	5	3
u_{ij}	4	4	4	2	4	3	5	3	2

Partiamo dal flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ di costo 63 con la sua struttura ad albero fortemente ammissibile:

$$T = \{(1,2),(2,4),(3,2),(4,6),(5,4)\},$$
$$L = \{(4,3)\}, \qquad U = \{(1,3),(3,5),(5,6)\}.$$

Esempio: iterazione 1 (1/2)

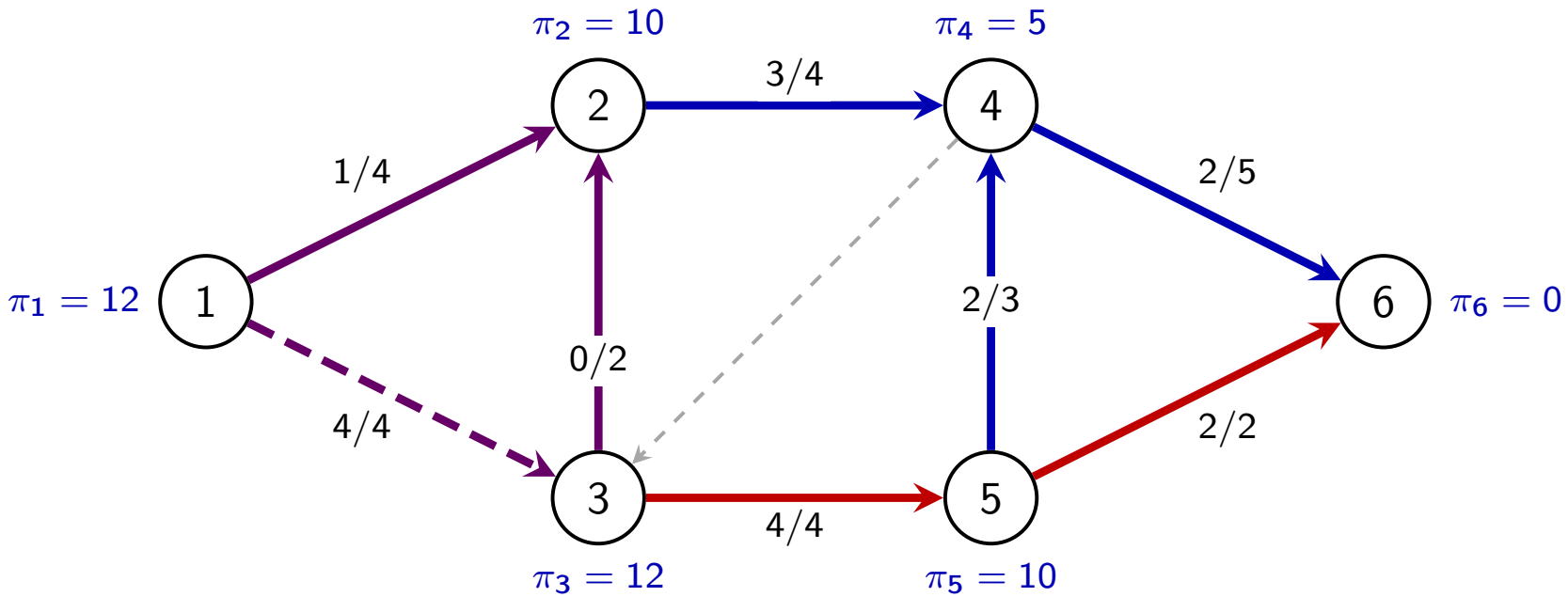
I potenziali sono $\boldsymbol{\pi} = (12, 10, 12, 5, 10, 0)$ e il costo è 63.

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
stato	T	U	T	T	U	L	T	T	U
x_{ij}	1	4	3	0	4	0	2	2	2
$\bar{c}_{ij}$	0	2	0	0	1	10	0	0	-7

- È il pivot dell'esempio «un pivot dall'albero di $\bar{\boldsymbol{x}}$»: $e = (1,3) \in U$, apice $w = 2$, $C = 2, 3, 1, 2$, capacità residue 0, 4, 3.
- $\theta = 0$: il pivot è degenere. L'arco $(3,2)$ esce dall'albero, verso L, e $(1,3)$ vi entra alla sua capacità. Il costo resta 63 e π_3 scende da 12 a 10.

Esempio: iterazione 1 (2/2)

Il ciclo del pivot degenere (viola), con l'arco entrante $(1, 3)$ tratteggiato; su ogni arco x_{ij}/u_{ij}.



Esempio: iterazione 2 (1/3)

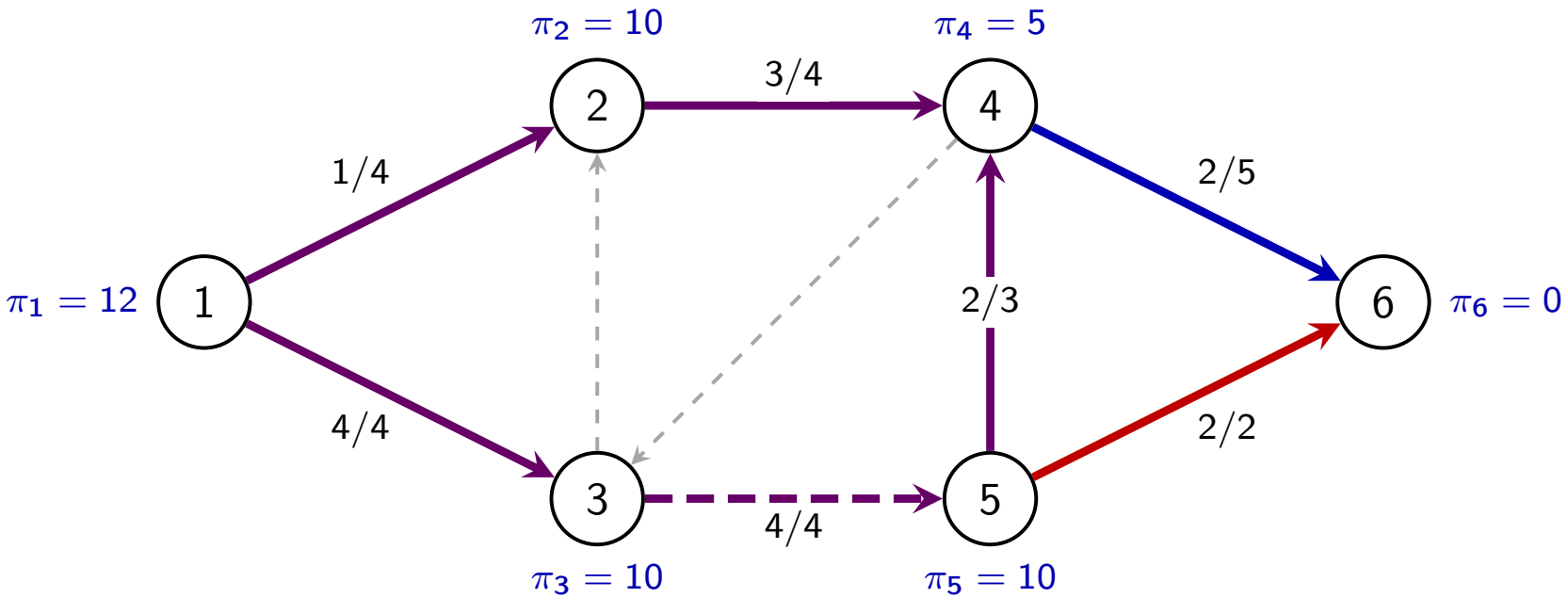
I potenziali sono $\pi = (12, 10, 10, 5, 10, 0)$ e il costo è 63.

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
stato	T	T	T	L	U	L	T	T	U
x_{ij}	1	4	3	0	4	0	2	2	2
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	2	3	8	0	0	-7

- L'unico arco ammissibile per l'ingresso è $e = (3,5) \in U$, con $\bar{c}_{35} = 3$.
- C è percorso contro di esso, con $p = 5$ e $q = 3$.

Esempio: iterazione 2 (2/3)

I cammini nell'albero fino alla radice sono $3, 1, 2, 4, 6$ e $5, 4, 6$: l'apice è $w = 4$ e C è $4, 5, 3, 1, 2, 4$.



Esempio: iterazione 2 (3/3)

arco di C	$(5,4)$	$(3,5)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(2,4)$
direzione	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
residuo	2	4	4	3	1

- $\theta = 1$ e l'arco bloccante $(2,4)$, in avanti, esce dall'albero e va in U.
- Un'unità passa dal cammino $1,3,5,4$ al cammino $1,2,4$ e il costo diventa $63 - 1 \cdot 3 = 60$.
- Togliendo $(2,4)$ si stacca $S = \{1,2,3\}$, che contiene $k = 3$: questi potenziali cambiano di $\bar{c}_{35} = 3$.

Esempio: iterazione 3 (1/2)

I potenziali sono $\pi = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$ e il costo è 60.

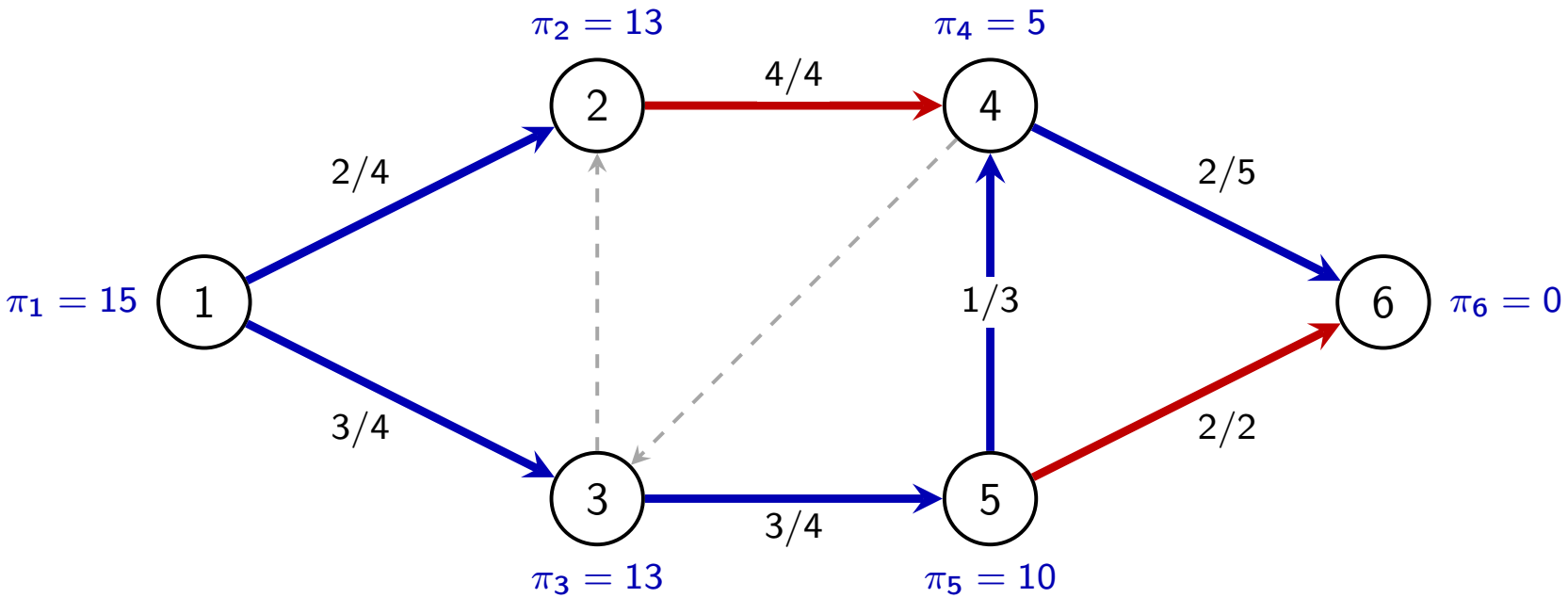
arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
stato	T	T	U	L	T	L	T	T	U
x_{ij}	2	3	4	0	3	0	2	1	2
$\bar{c}_{ij}$	0	0	-3	2	0	11	0	0	-7

- Gli archi di L hanno $\bar{c}_{32} = 2 > 0$ e $\bar{c}_{43} = 11 > 0$.
- Gli archi di U hanno $\bar{c}_{24} = -3 < 0$ e $\bar{c}_{56} = -7 < 0$: `STOP`.

Il flusso è l'unico flusso ottimale del capitolo «Modelli di flusso su reti», con valore 60, e i potenziali sono quelli del suo certificato.

Esempio: iterazione 3 (2/2)

La struttura ad albero ottimale: archi dell'albero blu, archi di U rossi; su ogni arco x_{ij}/u_{ij}.



Che cosa mostra l'esecuzione

- Le tre strutture ad albero sono fortemente ammissibili. Nella seconda l'arco di base $(1, 3)$ è alla sua capacità e punta in senso opposto alla radice, come richiede la definizione.
- Il pivot degenere non abbassa il costo: sostituisce soltanto $(3, 2)$ con $(1, 3)$ nella base.
- Viene prima perché la regola dell'arco entrante preferisce $|\bar{c}_{13}| = 2$ a $|\bar{c}_{35}| = 1$.
- Gurobi conferma il valore ottimale 60, e l'enumerazione delle strutture ad albero ammissibili dà lo stesso ottimo unico.

Riepilogo

Con le capacità:

- Gli archi di U entrano diminuendo il loro flusso
- Un arco saturo può uscire dall'albero verso U

Sulla rete di riferimento:

- Dal flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$, un pivot degenere e un pivot con $\theta = 1$ raggiungono il flusso ottimale, di valore 60

L'albero iniziale: Fase 0

Introduzione: L'albero iniziale: Fase 0

- L'algoritmo del simplesso su reti ha bisogno di una struttura ad albero iniziale fortemente ammissibile
- La Fase 0 ne costruisce una su una rete ausiliaria, con un nodo artificiale e archi artificiali
- Risponde anche a una prima domanda: la rete ha almeno un flusso ammissibile?
- Dall'albero finale della Fase 0 l'algoritmo prosegue con i costi originali

Definizione 6: rete ausiliaria

Sia $G = (N, A)$ una rete con $\sum_{i \in N} b_i = 0$. La ***rete ausiliaria*** *G^0 aggiunge a G il* ***nodo artificiale*** *$r = n + 1$, con $b_r = 0$, e un* ***arco artificiale*** *per ogni nodo $i \in N$:*

$$(i, r) \text{ se } b_i \geq 0, \qquad (r, i) \text{ se } b_i < 0,$$

con capacità $+\infty$. I costi della Fase 0 sono $c^0_{ij} = 1$ sugli archi artificiali e $c^0_{ij} = 0$ sugli archi di A. La ***Fase 0*** *applica l'algoritmo del simplesso su reti a G^0 con i costi c^0_{ij}, partendo dall'albero degli archi artificiali, con $L = A$ e $U = \emptyset$; la radice è l'ultimo nodo, r.*

Il valore della Fase 0

- Il valore della Fase 0 è il flusso totale sugli archi artificiali.
- Misura quanto il flusso è lontano dall'essere un flusso di G.
- È il problema ausiliario del capitolo «Fase 0 dell'algoritmo del simplesso», scritto sulla rete.

Proposizione 6: l'albero iniziale della Fase 0

Gli archi artificiali formano un albero ricoprente di G^0. *La sua soluzione ad albero ha* $x_{ir} = b_i$ *se* $b_i \geq 0$, $x_{ri} = -b_i$ *se* $b_i < 0$ *e* $x_{ij} = 0$ *su* A; *il suo costo è* $\sum_{i \in N} |b_i|$ *e la struttura ad albero è fortemente ammissibile.*

Dimostrazione

Gli n archi artificiali collegano ogni nodo di N a r: formano un grafo connesso con $n+1$ nodi e n archi, cioè un albero ricoprente.

- In un nodo $i \in N$ l'unico arco con flusso è il suo arco artificiale, quindi la conservazione vale. In r il flusso uscente meno quello entrante è

$$\sum_{i:\, b_i<0} (-b_i) - \sum_{i:\, b_i\geq 0} b_i = -\sum_{i\in N} b_i = 0 = b_r.$$

- Gli archi dell'albero con flusso nullo sono gli archi (i, r) con $b_i = 0$: la loro coda è i, quindi puntano verso la radice. Nessun arco dell'albero è alla sua capacità, che è $+\infty$.

□

Teorema 5: Fase 0

La Fase 0 si ferma dopo un numero finito di pivot con un valore ottimale $z_0 \geq 0$. La rete G ha un flusso ammissibile se e solo se $z_0 = 0$, e in tal caso il flusso finale della Fase 0, ristretto ad A, è un flusso ammissibile di G.

Dimostrazione (1/2)

Tutte le capacità di G^0 sono positive e la struttura ad albero iniziale è fortemente ammissibile (proposizione «l'albero iniziale della Fase 0»), quindi la Fase 0 si ferma per il teorema «finitezza dell'algoritmo del simplesso su reti».

1. Non può fermarsi al Passo 3: i costi c_{ij}^0 sono non negativi, quindi nessun ciclo ha costo negativo (proposizione «problema illimitato»).

   Si ferma al Passo 1 con un flusso ottimale, di valore $z_0 \geq 0$.

Dimostrazione (2/2)

2. Se G ha un flusso ammissibile, lo stesso flusso con zero sugli archi artificiali è ammissibile per G^0 con costo 0, quindi $z_0 = 0$.

3. Se $z_0 = 0$, ogni arco artificiale ha flusso nullo, quindi i vincoli di conservazione dei nodi di N coinvolgono solo archi di A: la restrizione ad A è un flusso ammissibile di G.

□

Quando $z_0 = 0$ l'albero finale della Fase 0 contiene ancora almeno un arco artificiale, perché la radice r deve essere collegata agli altri nodi.

La proposizione seguente mostra come proseguire da questo albero.

Proposizione 7: dalla Fase 0 al simplesso su reti

Supponiamo che la Fase 0 termini con $z_0 = 0$, *flusso* $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$, *struttura ad albero* (T, L, U) *e costi ridotti* $\bar{c}^0_{ij}$. *Applichiamo a* G^0 *l'algoritmo del simplesso su reti a partire da* (T, L, U), *con i costi* c_{ij} *su* A *e* 0 *sugli archi artificiali, facendo entrare soltanto gli archi con* $\bar{c}^0_{ij} = 0$.

Allora ogni flusso incontrato ha flusso nullo sugli archi artificiali e l'algoritmo termina con un flusso ottimale di G, *oppure dimostra che il modello* MCF *è illimitato.*

Dimostrazione (1/4)

Chiamiamo *fissati* gli archi con $\bar{c}^0_{ij} \neq 0$. Non sono in T e, per l'ottimalità della Fase 0,

- quelli con $\bar{c}^0_{ij} > 0$ sono in L, con flusso 0,
- quelli con $\bar{c}^0_{ij} < 0$ sono in U, con flusso u_{ij}.

1. *Un'identità chiave.* Sia $\boldsymbol{y}$ un flusso di G^0 che soddisfa la conservazione e i limiti. Per il lemma «costo e costo ridotto» del capitolo «Modelli di flusso su reti», e poiché il costo di $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ è $z_0 = 0$,

$$\sum_a c^0_a y_a = \sum_a \bar{c}^0_a \, (y_a - \tilde{x}^0_a).$$

Dimostrazione (2/4)

Nell'identità chiave ogni termine è

- $\bar{c}^0_a y_a \geq 0$ sugli archi fissati di L,
- $\bar{c}^0_a (y_a - u_a) \geq 0$ sugli archi fissati di U,
- 0 altrove.

2. *Nessun flusso artificiale.* Gli archi fissati non entrano mai nell'albero, quindi ogni flusso incontrato ne conserva i valori e ogni termine dell'identità è 0. Quindi il flusso artificiale totale $\sum_a c^0_a y_a$ è 0 e ogni arco artificiale ha flusso nullo.

Dimostrazione (3/4)

3. *I flussi ammissibili di G conservano i valori fissati.* Un flusso ammissibile $\boldsymbol{y}$ di G, con zero sugli archi artificiali, ha $\sum_a c^0_a y_a = 0$: ogni termine dell'identità si annulla, quindi $y_a = 0$ sugli archi fissati di L e $y_a = u_a$ su quelli di U.

4. *Ottimalità.* Supponiamo che l'algoritmo si fermi con flusso $\boldsymbol{x}$ e potenziali π. Come nel teorema «ottimalità di una soluzione ad albero»,
$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \sum_a \bar{c}_a(y_a - x_a).$$
Gli archi fissati danno 0 per il punto 3, gli archi dell'albero danno 0, e gli altri archi di L e U soddisfano le condizioni di arresto e danno un termine non negativo. Quindi $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$.

Dimostrazione (4/4)

5. *Illimitatezza.* Se l'algoritmo si ferma al Passo 3, i flussi $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{x}^C$ della proposizione «problema illimitato» conservano i valori fissati: per l'identità del punto 1 hanno flusso artificiale nullo, quindi sono flussi di G con costo che tende a $-\infty$.

Le strutture incontrate restano fortemente ammissibili e l'algoritmo si ferma, per il teorema «finitezza dell'algoritmo del simplesso su reti». □

Esempio: Fase 0 sulla rete di riferimento (1/6)

Per la rete di riferimento con capacità, la rete ausiliaria ha

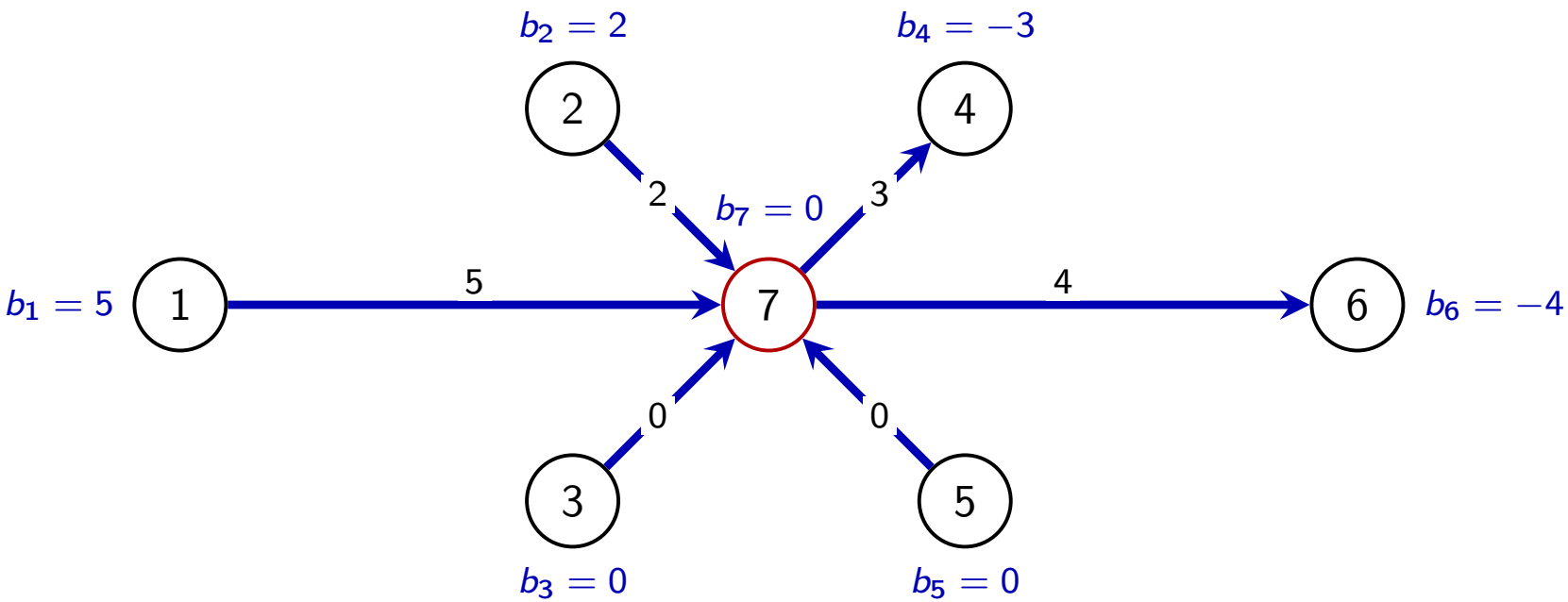
- il nodo artificiale 7;
- gli archi artificiali $(1,7)$, $(2,7)$, $(3,7)$, $(5,7)$, perché $b_1, b_2, b_3, b_5 \geq 0$, e $(7,4)$, $(7,6)$.

L'albero iniziale trasporta 5, 2, 0, 0, 3, 4 unità su questi archi, tutti gli archi di A sono vuoti e $z_0 = 14$.

I potenziali iniziali valgono $\pi_i = 1$ per i nodi con un arco $(i,7)$ e $\pi_i = -1$ per quelli con un arco $(7,i)$.

Esempio: Fase 0 sulla rete di riferimento (2/6)

L'albero iniziale (blu); gli archi di A sono vuoti e non sono disegnati.



Esempio: Fase 0 sulla rete di riferimento (3/6)

La Fase 0 esegue sei pivot: ogni arco entrante ha $\bar{c}^0_{ij} = -2$ e l'apice è sempre la radice 7.

pivot	entrante	$\bar{c}^0_{ij}$	apice	θ	archi bloccanti	uscente	z_0 dopo
1	$(2,4)$	-2	7	2	$(2,7)$	$(2,7)$	10
2	$(1,2)$	-2	7	1	$(7,4)$	$(7,4)$	8
3	$(4,6)$	-2	7	1	$(2,4)$	$(2,4)$	6
4	$(5,4)$	-2	7	0	$(5,7)$	$(5,7)$	6
5	$(3,5)$	-2	7	0	$(3,7)$	$(3,7)$	6
6	$(1,3)$	-2	7	3	$(1,7)$, $(5,4)$, $(7,6)$	$(7,6)$	0

Esempio: Fase 0 sulla rete di riferimento (4/6)

- I pivot 4 e 5 sono degeneri. Al pivot 3 l'arco $(2, 4)$ raggiunge la sua capacità e passa in U.

- Al pivot 6 il ciclo è $7, 1, 3, 5, 4, 6, 7$, con tre archi bloccanti. La regola sceglie $(7, 6)$, l'ultimo a partire dall'apice.
  - Se uscisse $(1, 7)$, l'albero conterrebbe $(5, 4)$ saturo diretto verso la radice e $(7, 6)$ vuoto diretto in senso opposto.
  - Se uscisse $(5, 4)$, l'arco vuoto $(7, 6)$ diretto in senso opposto alla radice.

  In nessuno dei due casi l'albero sarebbe fortemente ammissibile.

Esempio: Fase 0 sulla rete di riferimento (5/6)

- La Fase 0 termina con $z_0 = 0$, l'albero

$$(1,2),\ (1,3),\ (1,7),\ (3,5),\ (4,6),\ (5,4)$$

  e $U = \{(2,4)\}$.

- Tutti i potenziali dei nodi di N valgono 1, quindi $\bar{c}_{ij}^0 = 0$ su ogni arco tranne $(7,4)$ e $(7,6)$, che hanno $\bar{c}_{ij}^0 = 2$ e sono fissati.

Esempio: Fase 0 sulla rete di riferimento (6/6)

- Con i costi c_{ij} la soluzione ad albero costa 74.
- Gli archi $(7,4)$ e $(7,6)$ hanno costi ridotti -10 e -15, ma sono fissati: l'unico arco che può entrare è $(5,6)$, con $\bar{c}_{56} = -7$.
- La sua capacità residua $u_{56} = 2$ è la più piccola lungo il suo ciclo, quindi $(5,6)$ stesso è l'arco uscente e passa in U, e il costo diventa $74 - 2 \cdot 7 = 60$: l'ottimo dell'esempio con capacità.
- Se $(7,6)$ potesse entrare, 3 unità viaggerebbero da 1 a 6 attraverso il nodo artificiale, al costo 29: non sarebbe un flusso di G.

Riepilogo

Fase 0:

- Parte dalla stella fortemente ammissibile degli archi artificiali e minimizza il flusso artificiale
- $z_0 > 0$ dimostra che non esiste alcun flusso ammissibile

Dopo la Fase 0:

- Se $z_0 = 0$, il simplesso su reti prosegue dall'albero finale, con i costi originali
- Possono entrare solo gli archi con costo ridotto nullo nella Fase 0

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- Raccogliamo gli errori più frequenti quando si esegue a mano l'algoritmo del simplesso su reti
- Ognuno nasce da una definizione o da un risultato di questo capitolo
- Controllali prima di risolvere gli esercizi

Errori tipici (1/4)

Osservazione 2: considerare di base gli archi con flusso positivo

La base è l'albero T: un arco in U ha flusso positivo ma è fuori base, e un arco dell'albero può avere flusso 0 oppure u_{ij}.

Osservazione 3: usare il test dei segni di una massimizzazione

Nel modello MCF, *che è di minimizzazione, un arco di L è ammissibile per l'ingresso se $\bar{c}_{ij} < 0$ e un arco di U se $\bar{c}_{ij} > 0$.*

Errori tipici (2/4)

Osservazione 4: orientare il ciclo come l'arco entrante quando questo è in U

Il suo flusso deve diminuire, quindi il ciclo va contro di esso e l'arco entrante è all'indietro.

Osservazione 5: dimenticare l'arco entrante nel test dei rapporti

La sua capacità residua è u_{kl}; se è l'unico arco bloccante, l'albero non cambia e l'arco passa da L a U o viceversa.

Errori tipici (3/4)

Osservazione 6: aggiornare tutti i potenziali

Cambiano solo i potenziali del sottoalbero staccato dall'arco uscente, tutti di $\bar{c}_{kl}$ o di $-\bar{c}_{kl}$.

Osservazione 7: scegliere un arco bloccante qualsiasi

L'ultimo arco bloccante a partire dall'apice mantiene l'albero fortemente ammissibile; una scelta diversa può far perdere questa proprietà e la garanzia contro i cicli.

Errori tipici (4/4)

Osservazione 8: far entrare archi fissati dopo la Fase 0

Un arco con $\bar{c}_{ij}^0 \neq 0$ può rimettere flusso sugli archi artificiali; possono entrare soltanto gli archi con $\bar{c}_{ij}^0 = 0$.

Riepilogo

Basi e segni:

- La base è l'albero, non l'insieme degli archi con flusso positivo
- In una minimizzazione: $\bar{c} < 0$ su L o $\bar{c} > 0$ su U rende un arco ammissibile per l'ingresso

Il pivot:

- Ciclo contro un arco entrante di U; l'arco entrante partecipa al test dei rapporti
- Cambiano solo i potenziali di un sottoalbero; l'arco uscente è l'ultimo bloccante a partire dall'apice
- Dopo la Fase 0 gli archi fissati non entrano mai

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo le idee chiave del capitolo sull'algoritmo del simplesso su reti
- E i numeri della rete di riferimento, a colpo d'occhio

Riepilogo (1/3)

- In una rete connessa l'equazione del nodo n è ridondante; le basi del modello MCF corrispondono agli alberi ricoprenti e le loro matrici sono triangolari con determinante ± 1.
- Una struttura ad albero (T, L, U) fissa gli archi fuori base a 0 o alla loro capacità; la soluzione ad albero si calcola eliminando le foglie, i potenziali a partire dalla radice, con $\pi_n = 0$.
- Il costo ridotto di un arco fuori base è il costo del suo ciclo fondamentale; $\bar{c} \geq 0$ su L e $\bar{c} \leq 0$ su U certificano l'ottimalità.

Riepilogo (2/3)

- Un pivot invia θ unità lungo il ciclo dell'arco entrante e riduce il costo di $\theta|\bar{c}_{kl}|$; l'arco uscente è l'ultimo arco bloccante a partire dall'apice, e cambiano soltanto i potenziali di un sottoalbero.
- Gli alberi fortemente ammissibili e questa regola per l'arco uscente impediscono i cicli.
- La Fase 0 sulla rete ausiliaria dà un albero iniziale fortemente ammissibile, oppure dimostra che non esiste un flusso ammissibile.

Riepilogo (3/3)

La rete di riferimento in sintesi.

senza capacità	costi 80, 52, 49; albero ottimale $(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(5,6)$
con capacità, da $\bar{\boldsymbol{x}}$	costi 63, 63 (degenere), 60; $U = \{(2,4),(5,6)\}$
potenziali ottimali ($\pi_6 = 0$)	$(8,6,6,1,3,0)$ senza capacità, $(15,13,13,5,10,0)$ con capacità
Fase 0	z_0 da 14 a 0 in sei pivot, poi un pivot da 74 a 60