# Modelli di flusso su reti

# Indice


Reti e flussi

Il modello di flusso di costo minimo

Condizioni di ammissibilità

Rimozione dei limiti inferiori

Istanze non bilanciate

Totale unimodularità e integralità

Il modello duale e i costi ridotti

Casi speciali

Un'istanza di trasbordo

Errori tipici

In sintesi

# Obiettivi (1/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- descrivere una rete con bilanci, limiti inferiori, capacità e costi, e scrivere il modello di flusso di costo minimo, anche in forma matriciale con la matrice di incidenza;
- verificare le condizioni necessarie per l'esistenza di un flusso ammissibile, e costruire controesempi;
- rimuovere i limiti inferiori con una sostituzione, e bilanciare un'istanza con un nodo fittizio;

# Obiettivi (2/2)

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- dimostrare che la matrice di incidenza è totalmente unimodulare, e dedurne che il modello ha soluzioni ottime intere quando i dati sono interi;
- scrivere il duale con i potenziali $\pi_i$, calcolare i costi ridotti e certificare l'ottimalità di un flusso;
- riconoscere il cammino minimo, il flusso massimo, il trasporto e l'assegnamento come modelli di flusso di costo minimo.

# Prerequisiti

- Da questo modulo, il capitolo «Grafi»: grafi orientati, matrice di incidenza nodo–arco, alberi ricoprenti e rango della matrice di incidenza

- Dal modulo *Programmazione lineare*, i capitoli «Teoria della dualità» e «La geometria della programmazione lineare»: il duale di un LP, dualità debole e forte, vertici di un poliedro

- Dal modulo *Algebra lineare*, i capitoli «Matrici» e «Sistemi di equazioni lineari»: determinanti, sviluppo di Laplace lungo una colonna e regola di Cramer

# Reti e flussi

# Introduzione: Reti e flussi

- Aggiungiamo dati a un grafo orientato: un **bilancio** su ogni nodo, e un limite inferiore, una capacità e un costo su ogni arco
- Un **flusso** invia unità lungo gli archi, in modo che ogni nodo invii esattamente il suo bilancio
- Sono gli oggetti di tutta la parte del corso sui flussi: li fissiamo sulla **rete di riferimento**, che usiamo in tutti gli esempi del capitolo

## Definizione 1: rete

*Una **rete** è un grafo orientato $G = (N, A)$, con $n = |N|$ nodi e $m = |A|$ archi, insieme ai seguenti dati.*

- *Ogni nodo $i \in N$ ha un **bilancio** $b_i \in \mathbb{R}$. Il nodo è un **nodo di offerta** se $b_i > 0$, un **nodo di domanda** se $b_i < 0$, e un **nodo di trasbordo** se $b_i = 0$.*
- *Ogni arco $(i, j) \in A$ ha un **limite inferiore** $l_{ij}$ e una **capacità** $u_{ij}$, con $0 \leq l_{ij} \leq u_{ij} \leq +\infty$, e un **costo** $c_{ij} \in \mathbb{R}$ per unità di flusso.*

*Quando i limiti inferiori non sono dati, $l_{ij} = 0$ per ogni arco.*

## Definizione 2: flusso

*Sia $G = (N, A)$ una rete. Un* ***flusso*** *è un vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ con una componente $x_{ij}$, la quantità inviata lungo l'arco, per ogni $(i, j) \in A$.*

- *Il flusso soddisfa il vincolo di* ***conservazione del flusso*** *del nodo $i$ se ciò che esce da $i$ meno ciò che entra in $i$ è uguale al bilancio:*

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = b_i.$$

- *Il flusso è* ***ammissibile*** *se soddisfa la conservazione del flusso in ogni nodo e $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ per ogni arco. Il suo* ***costo*** *è $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$.*

# Leggere i vincoli di conservazione

- Un nodo di offerta invia $b_i$ unità in più di quante ne riceve
- Un nodo di domanda riceve $-b_i$ unità in più di quante ne invia
- Un nodo di trasbordo trasmette tutto ciò che riceve

- Con la matrice di incidenza nodo–arco $\boldsymbol{B}$ del capitolo «Grafi», la conservazione del flusso in tutti i nodi si scrive

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- La riga $i$ di $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ è il flusso uscente meno il flusso entrante di $i$

# Esempio: la rete di riferimento (1/3)

- Aggiungiamo i dati al grafo di riferimento del capitolo «Grafi», con gli archi numerati $a_1, a_2, \ldots, a_9$ in ordine lessicografico
- I bilanci sono

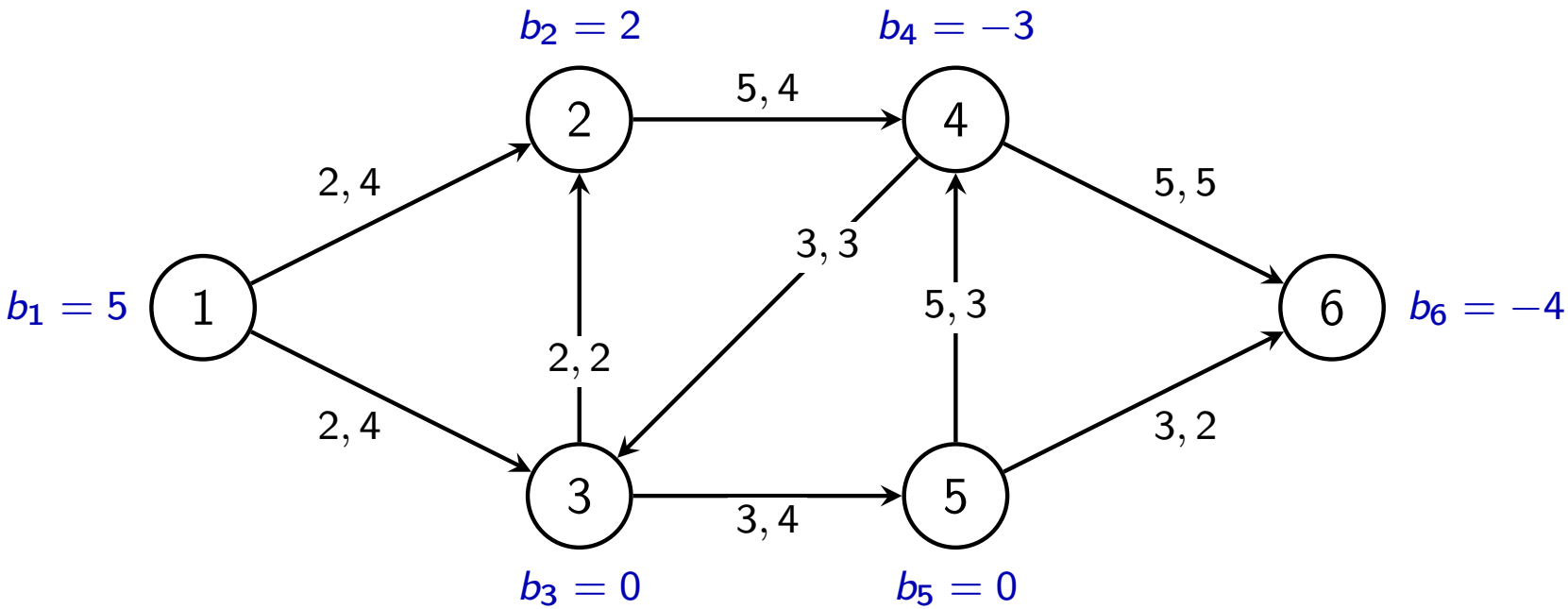
$$b_1 = 5, \qquad b_2 = 2, \qquad b_3 = 0,$$
$$b_4 = -3, \qquad b_5 = 0, \qquad b_6 = -4,$$

  quindi i nodi 1 e 2 offrono 7 unità, i nodi 4 e 6 le domandano, e i nodi 3 e 5 sono nodi di trasbordo
- I limiti inferiori sono nulli, e i costi e le capacità sono:

| arco | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(2,4)$ | $(3,2)$ | $(3,5)$ | $(4,3)$ | $(4,6)$ | $(5,4)$ | $(5,6)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{ij}$ | 2 | 2 | 5 | 2 | 3 | 3 | 5 | 5 | 3 |
| $u_{ij}$ | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 | 5 | 3 | 2 |

# Esempio: la rete di riferimento (2/3)

Nella figura ogni arco porta la coppia $c_{ij}, u_{ij}$, e ogni nodo il suo bilancio $b_i$ (in blu).



# Esempio: la rete di riferimento (3/3)

- Il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ con

$$\bar{x}_{12} = 1,\ \bar{x}_{13} = 4,\ \bar{x}_{24} = 3,\ \bar{x}_{32} = 0,\ \bar{x}_{35} = 4,$$
$$\bar{x}_{43} = 0,\ \bar{x}_{46} = 2,\ \bar{x}_{54} = 2,\ \bar{x}_{56} = 2$$

  è ammissibile

- Per esempio, nel nodo 4 il flusso uscente è $\bar{x}_{43} + \bar{x}_{46} = 2$, il flusso entrante è $\bar{x}_{24} + \bar{x}_{54} = 5$, e

$$2 - 5 = -3 = b_4$$

- Gli archi $(1, 3)$, $(3, 5)$ e $(5, 6)$ sono saturi

- Il costo di $\bar{\boldsymbol{x}}$ è 63

# Dai nodi agli insiemi di nodi

- La conservazione vale nodo per nodo: guardiamo ora che cosa succede a un intero **insieme di nodi**
- Per un insieme di nodi $S \subseteq N$, indichiamo con
  - $\delta^+(S)$ gli archi con la coda in $S$ e la testa fuori da $S$,
  - $\delta^-(S)$ gli archi con la testa in $S$ e la coda fuori da $S$,
- Per un insieme di archi $F$, scriviamo

$$x(F) = \sum_{(i,j) \in F} x_{ij}$$

## Lemma 1: flusso attraverso un taglio

*Sia* $\boldsymbol{x}$ *un vettore che soddisfa la conservazione del flusso in ogni nodo di una rete* $G = (N, A)$*. Allora, per ogni* $S \subseteq N$*,*

$$x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = \sum_{i \in S} b_i.$$

- Idea della dimostrazione: sommare i vincoli di conservazione dei nodi di $S$, e guardare quali archi restano

# Dimostrazione

- Sommiamo i vincoli di conservazione dei nodi di $S$; il termine noto è $\sum_{i \in S} b_i$
- Un arco con entrambi gli estremi in $S$ compare due volte, con $+x_{ij}$ nella riga della coda e $-x_{ij}$ nella riga della testa: si cancella
- Un arco di $\delta^+(S)$ compare solo nella riga della coda, con $+x_{ij}$
- Un arco di $\delta^-(S)$ compare solo nella riga della testa, con $-x_{ij}$
- Gli altri archi non compaiono

□

# Flusso attraverso un taglio nella rete di riferimento

- Nella rete di riferimento, l'insieme $S = \{1, 2, 3\}$ ha

$$\delta^+(S) = \{(2, 4), (3, 5)\}, \qquad \delta^-(S) = \{(4, 3)\}$$

- Il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ dà

$$\bar{x}_{24} + \bar{x}_{35} - \bar{x}_{43} = 3 + 4 - 0 = 7 = b_1 + b_2 + b_3$$

# Riepilogo

**Reti**:

- bilanci sui nodi; limiti inferiori, capacità e costi sugli archi
- nodi di offerta ($b_i > 0$), nodi di domanda ($b_i < 0$), nodi di trasbordo ($b_i = 0$)

**Flussi**:

- un flusso ammissibile soddisfa $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{b}$ e i limiti
- attraverso ogni taglio, il flusso uscente netto è uguale al bilancio totale dei nodi interni

# Il modello di flusso di costo minimo

# Introduzione: Il modello di flusso di costo minimo

- Fra tutti i flussi ammissibili cerchiamo il **meno costoso**
- Il problema è un modello di Programmazione lineare con una variabile per arco e un'equazione per nodo
- La struttura speciale della sua matrice, la matrice di incidenza, dà tutte le proprietà di questo capitolo

## Definizione 3: problema di flusso di costo minimo

*Data una rete $G = (N, A)$ con bilanci $b_i$, limiti inferiori $l_{ij}$, capacità $u_{ij}$ e costi $c_{ij}$, il* ***problema di flusso di costo minimo*** *chiede un flusso ammissibile di costo minimo.*

- Usiamo una variabile continua $x_{ij}$ per ogni arco $(i, j) \in A$, il flusso sull'arco

# Il modello MCF

Con queste variabili, un modello di Programmazione lineare (LP) per il problema di flusso di costo minimo è il seguente:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = b_i, \qquad \forall i \in N,$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A.$$

Questo modello LP si indica come modello MCF.

# Funzione obiettivo e vincoli

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello $\mathrm{MCF}$:

- la funzione obiettivo lineare minimizza il costo totale del flusso;
- i primi vincoli sono i vincoli di **conservazione del flusso**, uno per ogni nodo;
- infine, gli ultimi vincoli impongono il limite inferiore e la capacità di ogni arco.

# Il modello MCF in forma matriciale

- Con la matrice di incidenza nodo–arco $\boldsymbol{B}$, il vettore $\boldsymbol{c}$ dei costi e i vettori $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{u}$ dei limiti, il modello MCF è

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \ : \ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \right\}$$

- Il modello ha $m$ variabili e $n$ equazioni
- La colonna di $x_{ij}$ in $\boldsymbol{B}$ ha solo due elementi non nulli, $+1$ nella riga $i$ e $-1$ nella riga $j$
- Questa struttura dà **tutte le proprietà** di questo capitolo

# Esempio: il modello MCF della rete di riferimento (1/2)

Per la rete di riferimento il modello MCF ha 9 variabili e 6 equazioni:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
\min & 2x_{12} & +2x_{13} & +5x_{24} & +2x_{32} & +3x_{35} & +3x_{43} & +5x_{46} & +5x_{54} & +3x_{56} & & \\
\text{soggetto a} & x_{12} & +x_{13} & & & & & & & & = & 5 \\
& -x_{12} & & +x_{24} & -x_{32} & & & & & & = & 2 \\
& & -x_{13} & & +x_{32} & +x_{35} & -x_{43} & & & & = & 0 \\
& & & -x_{24} & & & +x_{43} & +x_{46} & -x_{54} & & = & -3 \\
& & & & & -x_{35} & & & +x_{54} & +x_{56} & = & 0 \\
& & & & & & & -x_{46} & & -x_{56} & = & -4
\end{array}
$$

# Esempio: il modello MCF della rete di riferimento (2/2)

Insieme ai limiti:

$$
\begin{aligned}
0 \leq x_{12} \leq 4,\\
0 \leq x_{13} \leq 4,\\
0 \leq x_{24} \leq 4,\\
0 \leq x_{32} \leq 2,\\
0 \leq x_{35} \leq 4,\\
0 \leq x_{43} \leq 3,\\
0 \leq x_{46} \leq 5,\\
0 \leq x_{54} \leq 3,\\
0 \leq x_{56} \leq 2.
\end{aligned}
$$

La matrice dei coefficienti delle equazioni è la matrice di incidenza $\boldsymbol{B}$ del grafo di riferimento.

# Riepilogo

- Il problema di flusso di costo minimo è l'LP

$$\min\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} : \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}\}$$

- Una variabile per arco, un'equazione di conservazione per nodo
- Ogni colonna di $\boldsymbol{B}$ ha esattamente un $+1$ (la coda) e un $-1$ (la testa)

# Condizioni di ammissibilità

# Introduzione: Condizioni di ammissibilità

- Prima di cercare il flusso meno costoso, ci chiediamo se un flusso ammissibile **esiste**
- Il lemma sul flusso attraverso un taglio dà due condizioni necessarie: il bilanciamento della rete e la condizione di taglio
- Mostriamo con controesempi che il bilanciamento da solo non basta

## Definizione 4: rete bilanciata

*Una rete è **bilanciata** se* $\sum_{i \in N} b_i = 0$*, cioè se l'offerta totale è uguale alla domanda totale.*

## Proposizione 1: una rete ammissibile è bilanciata

*Se una rete* $G = (N, A)$ *ha un flusso ammissibile, allora* $\sum_{i \in N} b_i = 0$*.*

# Dimostrazione

- Applichiamo il lemma sul flusso attraverso un taglio con $S = N$
- Nessun arco esce da $N$ o entra in $N$, quindi

$$\delta^+(N) = \delta^-(N) = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \sum_{i \in N} b_i = 0$$

- In forma matriciale: le righe di $\boldsymbol{B}$ sommano al vettore nullo, e quindi anche le componenti di $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ sommano a zero

□

## Proposizione 2: condizione di taglio

*Se una rete* $G = (N, A)$ *ha un flusso ammissibile, allora per ogni* $S \subseteq N$

$$\sum_{i \in S} b_i \leq u(\delta^+(S)) - l(\delta^-(S)),$$

*dove* $u(F)$ *e* $l(F)$ *sono le somme delle capacità e dei limiti inferiori degli archi di* $F$*.*

# Dimostrazione

- Sia $\boldsymbol{x}$ un flusso ammissibile
- Usiamo il lemma sul flusso attraverso un taglio, i limiti $x_{ij} \leq u_{ij}$ su $\delta^+(S)$ e i limiti $x_{ij} \geq l_{ij}$ su $\delta^-(S)$:

$$\sum_{i \in S} b_i = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) \leq u(\delta^+(S)) - l(\delta^-(S)).$$

□

# Leggere la condizione di taglio

- L'offerta dei nodi di $S$, al netto della loro domanda, deve poter uscire da $S$ attraverso gli archi di $\delta^+(S)$
- Gli archi di $\delta^-(S)$ portano in $S$ almeno i loro limiti inferiori
- Una rete bilanciata può comunque **non avere flussi ammissibili**: il bilanciamento è solo una condizione necessaria

# Esempio: reti bilanciate senza flussi ammissibili (1/2)

- Teniamo gli archi, i costi e le capacità della rete di riferimento e cambiamo i bilanci
- **Primo caso.** Con $b_5 = -1$, $b_6 = 1$ e $b_i = 0$ per gli altri nodi, la rete è bilanciata
- Ma il nodo 6 non ha archi uscenti: per $S = \{6\}$ si ha $\delta^+(S) = \emptyset$
- La condizione di taglio non vale, perché $b_6 = 1 > 0$

# Esempio: reti bilanciate senza flussi ammissibili (2/2)

- **Secondo caso.** Con $b_1 = 9$, $b_6 = -8$ e gli altri bilanci come nella rete di riferimento, la rete è bilanciata, perché

$$9 + 2 - 3 - 8 = 0$$

- Per $S = \{1\}$ si ha

$$u(\delta^+(S)) = u_{12} + u_{13} = 8 < 9 = b_1 :$$

il nodo 1 non può inviare la sua offerta

- Nella rete di riferimento, invece, tutti i 62 insiemi $S$ con $\emptyset \neq S \neq N$ soddisfano la condizione di taglio, e il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ è ammissibile

# Riepilogo

- Una rete con un flusso ammissibile è **bilanciata**
- Ogni taglio può trasportare l'offerta netta dei nodi interni: la **condizione di taglio**
- Queste condizioni sono **necessarie**: una rete bilanciata può non avere flussi ammissibili

# Rimozione dei limiti inferiori

# Introduzione: Rimozione dei limiti inferiori

- I limiti inferiori obbligano a mandare flusso su alcuni archi
- Un cambio di variabili li sposta nei bilanci e nelle capacità, e lascia una rete con **limiti inferiori nulli**
- Da qui in poi possiamo sempre supporre $\boldsymbol{l} = 0$, come facciamo nella sezione sul modello duale

## Definizione 5: sostituzione dei limiti inferiori

*Data una rete con limiti inferiori* $\boldsymbol{l}$*, la* ***rete sostituita*** *ha gli stessi nodi, archi e costi, limiti inferiori nulli e*

$$b'_i = b_i - \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} l_{ij} + \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} l_{ji}, \qquad \forall i \in N,$$

$$u'_{ij} = u_{ij} - l_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A,$$

*cioè* $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{l}$ *e* $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{l}$.

# Inviare in anticipo i limiti inferiori

Le $l_{ij}$ unità che devono viaggiare su $(i, j)$ si inviano in anticipo.

- La coda $i$ ha $l_{ij}$ unità in meno da inviare
- La testa $j$ ha $l_{ij}$ unità in meno da ricevere
- L'arco ha $l_{ij}$ unità in meno di capacità libera

## Proposizione 3: rimozione dei limiti inferiori

*La trasformazione* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}$ *è una corrispondenza biunivoca fra i flussi ammissibili di una rete e quelli della sua rete sostituita, e*

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{l}.$$

*Quindi i due modelli* MCF *hanno le stesse soluzioni ottime, a meno della traslazione di* $\boldsymbol{l}$*, e i loro valori ottimi differiscono per la costante* $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{l}$*.*

# Dimostrazione

La trasformazione è lineare e invertibile, con inversa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{l}$. Per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$:

1. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se e solo se

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{b}';$$

2. $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$ se e solo se $0 \leq \boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{u} - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}'$;

3. $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{l}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{l}$.

Il costo di ogni flusso ammissibile cambia della stessa costante, quindi le soluzioni ottime si corrispondono. □

# Esempio: un limite inferiore nella rete di riferimento (1/2)

- Nella rete di riferimento imponiamo $l_{32} = 1$: almeno un'unità deve viaggiare da 3 a 2
- La colonna di $(3, 2)$ in $\boldsymbol{B}$ ha $+1$ nella riga 3 e $-1$ nella riga 2, quindi

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{l} = (0, -1, 1, 0, 0, 0)'$$

- Quindi

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{l} = (5,\ 3,\ -1,\ -3,\ 0,\ -4)', \qquad u'_{32} = 2 - 1 = 1$$

# Esempio: un limite inferiore nella rete di riferimento (2/2)

- La costante nell'obiettivo è

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{l} = c_{32}\, l_{32} = 2$$

- Il nodo 3 diventa un nodo di domanda, perché ha già inviato un'unità, e il nodo 2 ha un'unità in più da inviare
- La rete sostituita ha valore ottimo 60
- Aggiungendo la costante 2, il valore ottimo con $l_{32} = 1$ è 62

# Riepilogo

- La sostituzione $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}'$ rimuove i limiti inferiori
- I nuovi dati sono

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{l}, \qquad \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{l}$$

- L'obiettivo cambia della costante $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{l}$

# Istanze non bilanciate

# Introduzione: Istanze non bilanciate

- Nella pratica l'offerta totale spesso **supera** la domanda totale: non tutta l'offerta viene usata
- Un'istanza così non ha flussi ammissibili con le uguaglianze, perché non è bilanciata
- Un **nodo fittizio** assorbe l'eccesso e la trasforma in una rete bilanciata

## Definizione 6: istanza non bilanciata

*Un'istanza con* $\sum_{i \in N} b_i > 0$ *è* ***non bilanciata****: l'offerta totale supera la domanda totale. Ogni domanda deve essere soddisfatta, e ogni nodo di offerta* $i$ *invia al più* $b_i$ *unità:*

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} \leq b_i, \quad \forall i \in N : \; b_i > 0,$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in N : \; b_i \leq 0,$$

*con i limiti* $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ *e l'obiettivo* $\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \, x_{ij}$.

## Definizione 7: nodo fittizio

*Siano* $P = \{i \in N : b_i > 0\}$ *i nodi di offerta e* $e = \sum_{i \in N} b_i > 0$ *l'eccesso. La* ***rete bilanciata*** *aggiunge un* ***nodo fittizio*** $d$ *con bilancio* $b_d = -e$*, e un arco* $(i, d)$ *per ogni* $i \in P$ *con* $l_{id} = 0$*,* $u_{id} = +\infty$ *e* $c_{id} = 0$*.*

## Proposizione 4: il nodo fittizio

*Le soluzioni ammissibili dell'istanza non bilanciata e i flussi ammissibili della rete bilanciata si corrispondono, con lo stesso costo: un flusso della rete bilanciata ristretto ad A è ammissibile per l'istanza non bilanciata, e una soluzione dell'istanza non bilanciata diventa un flusso ammissibile con* $x_{id} = b_i - (\textit{flusso uscente} - \textit{flusso entrante di } i)$.

# Dimostrazione (1/2)

- Per un vettore $\boldsymbol{x}$ su $A$, sia $s_i(\boldsymbol{x})$ il flusso uscente meno il flusso entrante del nodo $i$ lungo gli archi di $A$
- **Dalla rete bilanciata.** Sia $(\boldsymbol{x}, (x_{id})_{i \in P})$ ammissibile per la rete bilanciata
- In $i \in P$ la conservazione si scrive

$$s_i(\boldsymbol{x}) + x_{id} = b_i \quad \text{con } x_{id} \geq 0, \qquad \text{quindi } s_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i$$

- Negli altri nodi di $N$ si scrive $s_i(\boldsymbol{x}) = b_i$

# Dimostrazione (2/2)

- **Verso la rete bilanciata.** Sia $\boldsymbol{x}$ ammissibile per l'istanza non bilanciata, e poniamo $x_{id} = b_i - s_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$ per $i \in P$
- La conservazione vale in ogni nodo di $N$, e in $d$ il flusso entrante è

$$\sum_{i \in P} x_{id} = \sum_{i \in P} b_i - \sum_{i \in N} s_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \notin P} s_i(\boldsymbol{x})$$

$$= \sum_{i \in P} b_i - 0 + \sum_{i \notin P} b_i = e,$$

  perché i valori $s_i(\boldsymbol{x})$ sommano a zero: ogni arco di $A$ dà $+x_{ij}$ alla sua coda e $-x_{ij}$ alla sua testa

- Quindi $d$ riceve esattamente $-b_d = e$ unità

Gli archi fittizi costano zero, quindi i due costi coincidono. □

# Gli archi fittizi

- Il flusso su $(i, d)$ è la parte dell'offerta di $i$ che **non viene usata**
- Se la domanda totale supera l'offerta totale e le domande sono limiti superiori, un nodo fittizio $d$ con bilancio

$$b_d = -\sum_{i \in N} b_i$$

e archi $(d, j)$ verso i nodi di domanda bilancia la rete allo stesso modo

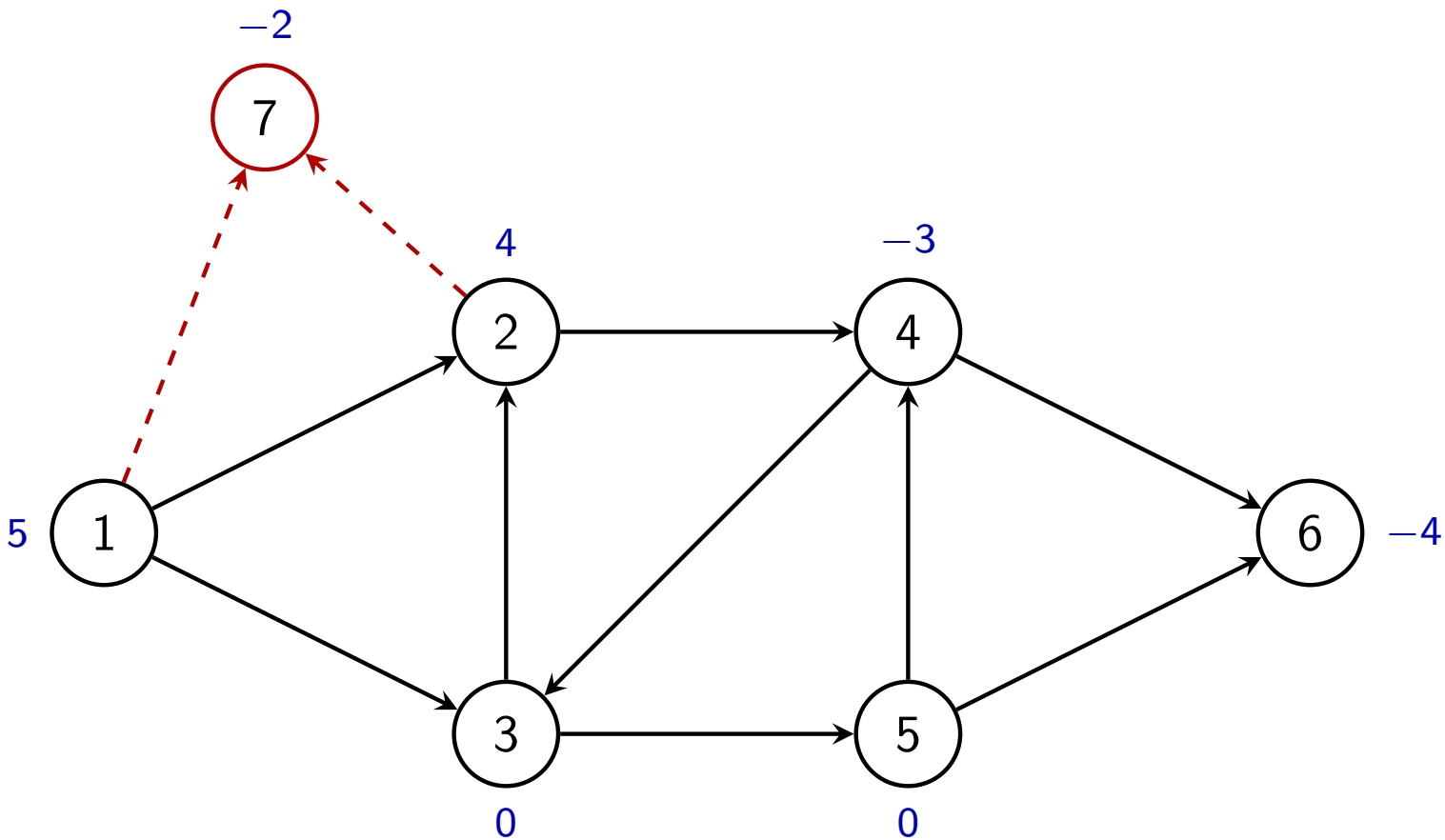
# Esempio: un nodo fittizio nella rete di riferimento (1/2)

- Nella rete di riferimento portiamo l'offerta del nodo 2 a $b_2 = 4$
- L'offerta totale è 9, la domanda totale è 7, e l'eccesso è $e = 2$
- La rete bilanciata aggiunge il nodo 7 con $b_7 = -2$, e gli archi $(1, 7)$ e $(2, 7)$ con costo 0 e capacità $+\infty$
- Il suo flusso ottimo, calcolato con Gurobi, spedisce tutte le 4 unità del nodo 2 e solo 3 unità del nodo 1:

$$x_{17} = 2, \qquad x_{27} = 0, \qquad \text{con valore ottimo } 56$$

# Esempio: un nodo fittizio nella rete di riferimento (2/2)

La rete bilanciata: il nodo fittizio 7 e gli archi fittizi (tratteggiati), con i bilanci in blu.



# Riepilogo

- Un'istanza non bilanciata diventa una rete bilanciata con un **nodo fittizio** che assorbe l'eccesso
- Gli archi fittizi costano zero, quindi il costo del flusso non cambia
- Il flusso su un arco fittizio è l'offerta non usata della sua coda

# Totale unimodularità e integralità

# Introduzione: Totale unimodularità e integralità

- In molte applicazioni il flusso deve essere **intero**: veicoli, persone, container
- Dimostriamo che la matrice di incidenza è totalmente unimodulare, e che quindi ogni vertice della regione ammissibile è intero
- Conseguenza: il modello $\mathrm{MCF}$ risolto come LP dà già un flusso ottimo intero, e i vincoli di interezza si hanno gratis

## Definizione 8: matrice totalmente unimodulare

*Una matrice intera* $\boldsymbol{M}$ *è* ***totalmente unimodulare*** *(TU) se il determinante di ogni sottomatrice quadrata di* $\boldsymbol{M}$ *vale* $0$, $+1$ *o* $-1$. *Una sottomatrice quadrata si ottiene scegliendo* $k$ *righe e* $k$ *colonne, per un qualsiasi* $k \geq 1$.

- Con $k = 1$ la definizione richiede che ogni elemento di una matrice TU sia $0$, $+1$ o $-1$

**Teorema 1: la matrice di incidenza è totalmente unimodulare**

*La matrice di incidenza nodo–arco* $\boldsymbol{B}$ *di ogni grafo orientato* $G = (N, A)$ *è totalmente unimodulare.*

- Idea della dimostrazione: induzione sulla dimensione $k$ della sottomatrice, usando che ogni colonna di $\boldsymbol{B}$ ha esattamente un $+1$ e un $-1$

# Dimostrazione (1/2)

- Sia $\boldsymbol{M}$ una sottomatrice $k \times k$ di $\boldsymbol{B}$; dimostriamo $\det(\boldsymbol{M}) \in \{0, +1, -1\}$ per induzione su $k$
- Per $k = 1$ l'elemento vale 0, $+1$ o $-1$
- Sia $k \geq 2$. Ogni colonna di $\boldsymbol{B}$ ha esattamente un $+1$ e un $-1$, quindi ogni colonna di $\boldsymbol{M}$ ha **al più due** elementi non nulli
- I casi sono tre

# Dimostrazione (2/2)

1. *Una colonna di* $\boldsymbol{M}$ *è nulla.* Allora $\det(\boldsymbol{M}) = 0$.

2. *Una colonna di* $\boldsymbol{M}$ *ha esattamente un elemento non nullo,* $\pm 1$*.* Lo sviluppo di Laplace lungo questa colonna dà $\det(\boldsymbol{M}) = \pm \det(\boldsymbol{M}')$, dove $\boldsymbol{M}'$ è una sottomatrice $(k-1) \times (k-1)$ di $\boldsymbol{B}$: per induzione $\det(\boldsymbol{M}') \in \{0, +1, -1\}$.

3. *Ogni colonna di* $\boldsymbol{M}$ *ha due elementi non nulli,* $+1$ *e* $-1$*.* Allora le righe di $\boldsymbol{M}$ sommano al vettore nullo, sono linearmente dipendenti, e $\det(\boldsymbol{M}) = 0$.

□

# Esempio: sottomatrici della matrice di incidenza di riferimento (1/2)

Prendiamo le righe $2, 3, 4$ della matrice di incidenza $\boldsymbol{B}$ del grafo di riferimento e due scelte di tre colonne.

| | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | $-1$ | 0 |

| | $a_3$ | $a_4$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $-1$ | 0 |
| 3 | 0 | 1 | $-1$ |
| 4 | $-1$ | 0 | 1 |

- La colonna di $a_1 = (1, 2)$ nella prima matrice ha un solo elemento non nullo (caso 2): sviluppando lungo di essa, e poi lungo la colonna di $a_5$, il determinante vale $-1$

# Esempio: sottomatrici della matrice di incidenza di riferimento (2/2)

- Gli archi $a_3 = (2, 4)$, $a_4 = (3, 2)$, $a_6 = (4, 3)$ della seconda matrice formano il ciclo $2, 4, 3, 2$
- Tutti i loro estremi sono fra le righe scelte: ogni colonna ha $+1$ e $-1$ (caso 3), e il determinante vale 0
- La matrice $\boldsymbol{B}$ ha 5004 sottomatrici quadrate; il calcolo di tutti i loro determinanti conferma che assumono solo i valori $-1$, 0 e $+1$

# Vertici interi

- Un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$ di un poliedro $P$ è un **vertice** se non è il punto medio di due punti distinti di $P$, come nel capitolo «La geometria della programmazione lineare» del modulo *Programmazione lineare*

- Per un insieme di archi $F$, indichiamo con $\boldsymbol{B}_F$ la sottomatrice delle colonne di $F$, e con $\boldsymbol{x}_F$ le corrispondenti componenti di $\boldsymbol{x}$

- Mostriamo ora che la totale unimodularità rende intero ogni vertice del poliedro del modello $\mathrm{MCF}$

## Teorema 2: vertici interi

*Sia* $G = (N, A)$ *una rete con bilanci interi* $\boldsymbol{b}$*, limiti inferiori interi* $\boldsymbol{l}$ *e capacità* $\boldsymbol{u}$ *intere o pari a* $+\infty$*. Allora ogni vertice di*

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \right\}$$

*è un vettore intero.*

- Idea della dimostrazione: le componenti strettamente comprese fra i loro limiti risolvono un sistema non singolare con dati interi, e la regola di Cramer divide per det $= \pm 1$

# Dimostrazione (1/3)

- Sia $\bar{\boldsymbol{x}}$ un vertice di $P$, e sia

$$F = \{\, a \in A : l_a < \bar{x}_a < u_a \,\}$$

  l'insieme degli archi strettamente compresi fra i loro limiti
- Se $F = \emptyset$, ogni componente di $\bar{\boldsymbol{x}}$ è un limite, quindi un intero

1. *Le colonne di $\boldsymbol{B}_F$ sono linearmente indipendenti.* Altrimenti $\boldsymbol{B}_F \boldsymbol{d}_F = 0$ per qualche $\boldsymbol{d} \neq 0$ con $d_a = 0$ per $a \notin F$. Per $\varepsilon > 0$ piccolo sia $\bar{\boldsymbol{x}} + \varepsilon \boldsymbol{d}$ sia $\bar{\boldsymbol{x}} - \varepsilon \boldsymbol{d}$ rispettano i limiti stretti su $F$ e $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, quindi stanno in $P$, e $\bar{\boldsymbol{x}}$ è il loro punto medio: una contraddizione.

# Dimostrazione (2/3)

2. *Il sistema per $\bar{\boldsymbol{x}}_F$ ha dati interi.* Ogni $a \notin F$ ha $\bar{x}_a \in \{l_a, u_a\}$, un intero, quindi

$$\boldsymbol{B}_F \bar{\boldsymbol{x}}_F = \boldsymbol{b} - \sum_{a \notin F} \boldsymbol{B}_a \bar{x}_a =: \hat{\boldsymbol{b}}$$

è intero.

3. *Regola di Cramer.* $\boldsymbol{B}_F$ ha rango $|F|$, quindi $|F|$ delle sue righe formano una matrice quadrata non singolare $\boldsymbol{M}$, e $\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}}_F = \hat{\boldsymbol{b}}_R$ su queste righe $R$. Per la regola di Cramer ogni componente di $\bar{\boldsymbol{x}}_F$ è

$$\frac{\det(\boldsymbol{M}_a)}{\det(\boldsymbol{M})},$$

con $\boldsymbol{M}_a$ una matrice intera.

# Dimostrazione (3/3)

4. Per il teorema sulla matrice di incidenza, $\boldsymbol{B}$ è totalmente unimodulare, quindi

$$\det(\boldsymbol{M}) = \pm 1,$$

e ogni componente di $\bar{\boldsymbol{x}}_F$ è un intero.

□

## Corollario 1: integralità del modello di flusso di costo minimo

*Siano interi i bilanci, i limiti inferiori e le capacità, con ogni capacità finita. Se il modello* MCF *ha una soluzione ammissibile, allora ha una soluzione ottima intera, per qualsiasi vettore dei costi* $\boldsymbol{c}$.

# Dimostrazione

- Il poliedro $P$ è non vuoto e limitato, perché $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$ con limiti finiti
- Una funzione lineare raggiunge il minimo su un poliedro non vuoto e limitato in un vertice (capitolo «La geometria della programmazione lineare»)
- Ogni vertice di $P$ è intero per il teorema sui vertici interi

□

# L'integralità gratis

- L'algoritmo del simplesso termina in un vertice, quindi con dati interi restituisce un flusso ottimo intero: il vincolo di interezza $x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ **si ha gratis**
- La totale unimodularità è una proprietà della **matrice**: per una matrice che non è TU, un termine noto intero può dare vertici frazionari

# Esempio: una matrice non totalmente unimodulare

- Il triangolo non orientato con vertici $1, 2, 3$ e spigoli $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{1, 3\}$, $e_3 = \{2, 3\}$ ha la matrice di incidenza vertici–spigoli

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\boldsymbol{M}) = -2,$$

  quindi $\boldsymbol{M}$ non è TU
- Il poliedro $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = 1,\ \boldsymbol{y} \geq 0\}$ contiene il solo punto

$$\boldsymbol{y} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$

  perché $\boldsymbol{M}$ è non singolare
- Questo vertice è frazionario, anche se i dati sono interi

# Riepilogo

- La matrice di incidenza di un grafo orientato è **totalmente unimodulare**
- Con bilanci e limiti interi, ogni vertice della regione ammissibile è intero
- Il modello $\mathrm{MCF}$ ha una soluzione ottima intera, per qualsiasi vettore dei costi
- Senza la totale unimodularità, dati interi possono dare vertici frazionari

# Il modello duale e i costi ridotti

# Introduzione: Il modello duale e i costi ridotti

- Il duale del modello $\mathrm{MCF}$ ha una variabile per nodo, il **potenziale** $\pi_i$
- I potenziali definiscono i **costi ridotti** degli archi
- Con essi possiamo **certificare** che un flusso è ottimo, senza solutore: è la base dei test di ottimalità degli algoritmi per i flussi

# Impostare il duale

- Per la proposizione sulla rimozione dei limiti inferiori, i limiti inferiori si possono eliminare: in questa sezione $\boldsymbol{l} = 0$ e ogni capacità è finita
- Il vincolo $x_{ij} \leq u_{ij}$ si scrive come $-x_{ij} \geq -u_{ij}$
- Seguendo le regole del capitolo «Teoria della dualità» del modulo *Programmazione lineare*, usiamo
  - una variabile duale libera $\pi_i$, il **potenziale** del nodo $i$, per la sua equazione di conservazione,
  - una variabile duale non negativa $\alpha_{ij}$ per la capacità di $(i, j)$

# Il modello $D(\mathrm{MCF})$

Con variabili duali libere $\pi_i$ per i vincoli di conservazione del flusso e variabili duali non negative $\alpha_{ij}$ per le capacità, il modello duale del modello $\mathrm{MCF}$ con $\boldsymbol{l} = 0$ è:

$$\max \sum_{i \in N} b_i \, \pi_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \, \alpha_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & \pi_i - \pi_j - \alpha_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \\ & \pi_i \in \mathbb{R}, \qquad \forall i \in N, \\ & \alpha_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in A. \end{aligned}$$

Questo modello LP si indica come modello $D(\mathrm{MCF})$.

# Descrizione del modello duale

- La colonna di $x_{ij}$ ha $+1$ nell'equazione di $i$, $-1$ nell'equazione di $j$ e $-1$ nel suo vincolo di capacità: questo dà il vincolo duale $\pi_i - \pi_j - \alpha_{ij} \leq c_{ij}$, uno per ogni arco
- Le variabili primali sono non negative, quindi i vincoli duali sono di tipo $\leq$
- Aggiungere la stessa costante a tutti i potenziali non cambia né i vincoli duali né l'obiettivo, perché $\sum_{i \in N} b_i = 0$: i potenziali si possono **normalizzare**, per esempio con $\pi_n = 0$

## Definizione 9: costo ridotto

*Dati i potenziali* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$, *il* ***costo ridotto*** *dell'arco* $(i, j) \in A$ *è*

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j.$$

- Il vincolo duale $\pi_i - \pi_j - \alpha_{ij} \leq c_{ij}$ si scrive

$$\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} \geq 0$$

- Fissati i potenziali, la scelta migliore di $\alpha_{ij} \geq 0$ è la più piccola,

$$\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$$

## Lemma 2: costo e costo ridotto

*Per ogni* $\boldsymbol{x}$ *con* $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{b}$ *e ogni* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij} = \sum_{(i,j)\in A} \bar{c}_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i\in N} b_i\, \pi_i.$$

# Dimostrazione

- Poiché $c_{ij} = \bar{c}_{ij} + \pi_i - \pi_j$, basta mostrare che

$$\sum_{(i,j)\in A} (\pi_i - \pi_j)\, x_{ij} = \sum_{i\in N} b_i \pi_i$$

- Il termine $\pi_i x_{ij}$ va alla coda e $-\pi_j x_{ij}$ alla testa, quindi

$$\sum_{(i,j)\in A} (\pi_i - \pi_j)\, x_{ij} = \sum_{i\in N} \pi_i \Bigg( \sum_{(i,j)\in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in \delta^-(i)} x_{ji} \Bigg)$$

$$= \sum_{i\in N} \pi_i\, b_i.$$

□

## Teorema 3: gap di dualità

*Siano* $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile (*$\boldsymbol{l} = 0$*) e* $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha})$ *una soluzione ammissibile del modello* $D(\mathrm{MCF})$*. Allora*

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} - \left( \sum_{i\in N} b_i \pi_i - \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} \alpha_{ij} \right)$$
$$= \sum_{(i,j)\in A} (\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij})\, x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} \alpha_{ij}\, (u_{ij} - x_{ij}) \;\geq\; 0,$$

*e le due soluzioni sono ottime se e solo se, per ogni arco,* $(\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij})\, x_{ij} = 0$ *e* $\alpha_{ij}(u_{ij} - x_{ij}) = 0$*.*

# Dimostrazione (1/2)

- Per il lemma su costo e costo ridotto, il membro sinistro è

$$\sum_{(i,j)\in A} \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\alpha_{ij}$$

- L'identità segue da

$$u_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{ij}x_{ij} + \alpha_{ij}(u_{ij} - x_{ij})$$

- Ogni termine è non negativo:
  - $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} \geq 0$ per il vincolo duale,
  - $\alpha_{ij} \geq 0$,
  - $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

# Dimostrazione (2/2)

- Se il gap è nullo, il costo primale è uguale a un valore duale, che per la disuguaglianza appena dimostrata è un limite inferiore di ogni costo primale: $\boldsymbol{x}$ è ottimo, e allo stesso modo $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha})$ è ottima
- Se entrambe sono ottime, il gap è nullo per il teorema della dualità forte del capitolo «Teoria della dualità»
- Una somma di termini non negativi è nulla se e solo se ogni termine è nullo

□

## Corollario 2: certificato dei costi ridotti

*Siano* $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile (*$\boldsymbol{l} = 0$*) e* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ *potenziali tali che, per ogni arco,*

$$\bar{c}_{ij} > 0 \;\Rightarrow\; x_{ij} = 0, \qquad\qquad \bar{c}_{ij} < 0 \;\Rightarrow\; x_{ij} = u_{ij}.$$

*Allora* $\boldsymbol{x}$ *è un flusso ottimo, e* $\boldsymbol{\pi}$ *con* $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$ *è una soluzione ottima del modello* $D(\mathrm{MCF})$.

# Dimostrazione

- La coppia $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha})$ è ammissibile per il duale, perché $\alpha_{ij} \geq 0$ e $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} \geq 0$
- Verifichiamo le due condizioni del teorema sul gap di dualità su ogni arco:
  - se $\bar{c}_{ij} \geq 0$, allora $\alpha_{ij} = 0$, e $\bar{c}_{ij} x_{ij} = 0$ perché $\bar{c}_{ij} > 0$ impone $x_{ij} = 0$;
  - se $\bar{c}_{ij} < 0$, allora $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} = 0$, e $\alpha_{ij}(u_{ij} - x_{ij}) = 0$ perché $x_{ij} = u_{ij}$
- Il gap è nullo, quindi le due soluzioni sono ottime

□

# Leggere il certificato

Un arco con costo ridotto **positivo** è **vuoto**,

un arco con costo ridotto **negativo** è **saturo**,

e un arco strettamente compreso fra i suoi limiti
ha costo ridotto **nullo**.

# Esempio: il duale della rete di riferimento (1/2)

Per la rete di riferimento, l'obiettivo del modello $D(\mathrm{MCF})$ è

$$\begin{aligned}\max\ & 5\pi_1 + 2\pi_2 - 3\pi_4 - 4\pi_6 \\ & - \big(4\alpha_{12} + 4\alpha_{13} + 4\alpha_{24} + 2\alpha_{32} + 4\alpha_{35} \\ & \quad + 3\alpha_{43} + 5\alpha_{46} + 3\alpha_{54} + 2\alpha_{56}\big)\end{aligned}$$

- I potenziali sono liberi e $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$
- I bilanci $b_3 = b_5 = 0$ fanno sparire $\pi_3$ e $\pi_5$ dall'obiettivo

# Esempio: il duale della rete di riferimento (2/2)

Un vincolo per arco:

$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_2 - \alpha_{12} &\leq 2, \\
\pi_1 - \pi_3 - \alpha_{13} &\leq 2, \\
\pi_2 - \pi_4 - \alpha_{24} &\leq 5, \\
\pi_3 - \pi_2 - \alpha_{32} &\leq 2, \\
\pi_3 - \pi_5 - \alpha_{35} &\leq 3, \\
\pi_4 - \pi_3 - \alpha_{43} &\leq 3, \\
\pi_4 - \pi_6 - \alpha_{46} &\leq 5, \\
\pi_5 - \pi_4 - \alpha_{54} &\leq 5, \\
\pi_5 - \pi_6 - \alpha_{56} &\leq 3.
\end{aligned}$$

# Riepilogo

**Il modello duale**:

- un potenziale $\pi_i$ per nodo, una $\alpha_{ij} \geq 0$ per capacità
- i potenziali sono definiti a meno di una costante, fissata da una normalizzazione

**Costi ridotti e ottimalità**:

- il costo ridotto è $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$
- un flusso ammissibile con gli archi a costo ridotto positivo vuoti e gli archi a costo ridotto negativo saturi è ottimo
- potenziali e costi ridotti sono la base dei test di ottimalità del capitolo «Flusso di costo minimo»

# Casi speciali

# Introduzione: Casi speciali

- Diversi problemi classici sono modelli $\mathrm{MCF}$ con **dati speciali**
- Tutti i limiti inferiori sono nulli; cambiano solo i bilanci, le capacità e i costi
- Tutto ciò che abbiamo dimostrato in questo capitolo, integralità e certificati, vale per ciascuno di essi

# Casi speciali (1/2)

| problema | il modello MCF |
|---|---|
| **Cammino minimo** | $b_s = 1$, $b_t = -1$, $b_i = 0$ altrimenti; $u_{ij} = +\infty$, $c_{ij}$ la lunghezza dell'arco: l'unità di flusso viaggia da $s$ a $t$. |
| **Flusso massimo** | $b_i = 0$ e $c_{ij} = 0$ per ogni arco, più l'arco $(t, s)$ con $c_{ts} = -1$ e $u_{ts} = +\infty$: il flusso su $(t, s)$ è il valore inviato da $s$ a $t$. |

# Casi speciali (2/2)

| problema | il modello $\mathrm{MCF}$ |
|---|---|
| **Trasporto** | $N = P \cup D$ con archi dalle origini $P$ alle destinazioni $D$; $b_i$ l'offerta di $i \in P$, $-b_j$ la domanda di $j \in D$, $u_{ij} = +\infty$. |
| **Assegnamento** | un modello di trasporto con $\lvert P\rvert = \lvert D\rvert$, $b_i = 1$ per $i \in P$ e $b_j = -1$ per $j \in D$. |

- Nei quattro modelli i bilanci e i limiti sono interi, quindi i vertici interi del teorema sui vertici interi sono cammini, flussi interi e assegnamenti

# Riepilogo

- Cammino minimo, flusso massimo, trasporto e assegnamento sono **modelli di flusso di costo minimo** con bilanci, capacità e costi speciali
- I loro dati sono interi, quindi i loro modelli LP hanno vertici ottimi interi

# Un'istanza di trasbordo

# Introduzione: Un'istanza di trasbordo

- Risolviamo il modello $\mathrm{MCF}$ della rete di riferimento: due nodi di offerta, due nodi di domanda e due nodi di trasbordo
- La soluzione ottima è calcolata con Gurobi (gurobipy)
- Poi la **certifichiamo a mano** con il certificato dei costi ridotti

# Esempio: il flusso ottimo (1/2)

Il flusso ottimo $\tilde{\boldsymbol{x}}$ e il suo valore ottimo sono

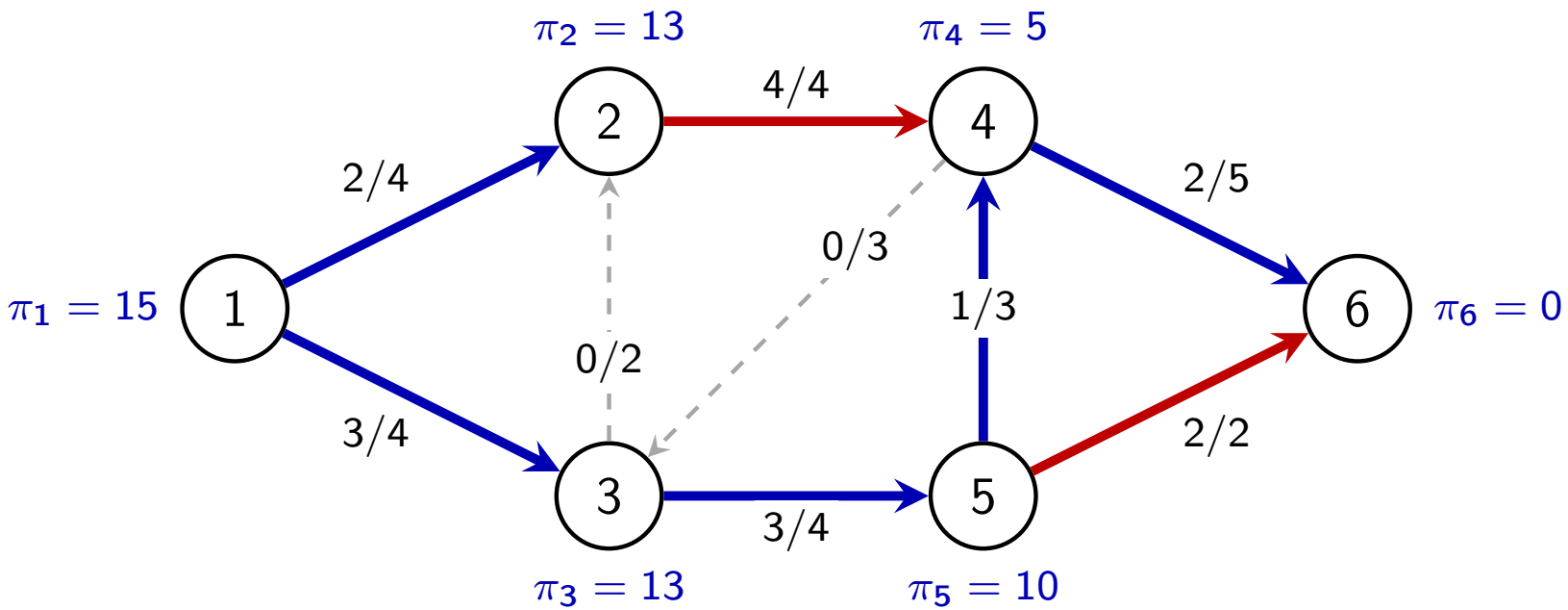
| arco | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(2,4)$ | $(3,2)$ | $(3,5)$ | $(4,3)$ | $(4,6)$ | $(5,4)$ | $(5,6)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{x}_{ij}$ | 2 | 3 | 4 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| $u_{ij}$ | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 | 5 | 3 | 2 |

$$z(\mathrm{MCF}) = 60$$

- Il flusso è intero, come garantisce il corollario sull'integralità del modello di flusso di costo minimo

# Esempio: il flusso ottimo (2/2)

Ogni arco porta $\tilde{x}_{ij}/u_{ij}$: gli archi strettamente compresi fra i loro limiti sono blu, gli archi saturi rossi, gli archi vuoti grigi e tratteggiati. Accanto a ogni nodo, il suo potenziale.



# Il certificato di ottimalità

1. I cinque archi blu $(1,2)$, $(1,3)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,4)$ formano un albero ricoprente. Chiediamo costo ridotto nullo su di essi, $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$, e normalizziamo con $\pi_6 = 0$.

2. Risalendo dal nodo 6:

$$\pi_4 = \pi_6 + c_{46} = 5, \quad \pi_5 = \pi_4 + c_{54} = 10,$$
$$\pi_3 = \pi_5 + c_{35} = 13, \quad \pi_1 = \pi_3 + c_{13} = 15,$$
$$\pi_2 = \pi_1 - c_{12} = 13.$$

3. Il potenziale $\pi_i$ è il costo del cammino sull'albero da $i$ a 6: per esempio,

$$\pi_1 = c_{13} + c_{35} + c_{54} + c_{46} = 2 + 3 + 5 + 5 = 15.$$

# Esempio: costi ridotti e ottimalità (1/2)

I costi ridotti $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ sono:

| arco | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(2,4)$ | $(3,2)$ | $(3,5)$ | $(4,3)$ | $(4,6)$ | $(5,4)$ | $(5,6)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}_{ij}$ | 0 | 0 | $-3$ | 2 | 0 | 11 | 0 | 0 | $-7$ |
| $\alpha_{ij}$ | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |

- Gli archi con $\bar{c}_{ij} > 0$, $(3,2)$ e $(4,3)$, sono vuoti
- Gli archi con $\bar{c}_{ij} < 0$, $(2,4)$ e $(5,6)$, sono saturi
- Per il certificato dei costi ridotti, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ è ottimo

# Esempio: costi ridotti e ottimalità (2/2)

- Il valore duale è

$$\sum_{i \in N} b_i \pi_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \alpha_{ij} = 86 - 26 = 60,$$

  uguale al costo di $\tilde{\boldsymbol{x}}$

- I potenziali coincidono con i valori duali restituiti da Gurobi, traslati in modo che $\pi_6 = 0$

# Unicità del flusso ottimo

- Ogni flusso ottimo ha gap nullo con $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha})$, quindi per il teorema sul gap di dualità ha

$$x_{32} = x_{43} = 0, \qquad x_{24} = 4, \qquad x_{56} = 2$$

- Il flusso sui cinque archi dell'albero è allora fissato dalla conservazione, perché le loro colonne sono linearmente indipendenti

- Quindi $\tilde{\boldsymbol{x}}$ è l'**unico** flusso ottimo

# Il gap del flusso $\bar{x}$

- Il flusso ammissibile $\bar{x}$ della rete di riferimento costa 63, e il suo gap con la stessa soluzione duale è

$$63 - 60 = 3 = \alpha_{24}(u_{24} - \bar{x}_{24}) = 3 \cdot (4 - 3) :$$

l'arco $(2, 4)$ non è usato abbastanza

# Riepilogo

- Nella rete di riferimento il flusso ottimo costa 60
- I potenziali del suo albero ricoprente danno costi ridotti positivi solo su archi vuoti e negativi solo su archi saturi
- Essi **certificano l'ottimalità** senza solutore, e mostrano che il flusso ottimo è unico

# Errori tipici

# Introduzione: Errori tipici

- Raccogliamo gli errori più frequenti nello scrivere e nell'usare i modelli di flusso su reti
- Ciascuno viene da una definizione o da un risultato di questo capitolo
- Controllali prima di risolvere gli esercizi

# Errori tipici (1/4)

**Osservazione 1: Scambiare flusso uscente e flusso entrante**

*Il vincolo di conservazione è flusso uscente meno flusso entrante uguale a $b_i$, con $b_i > 0$ in un nodo di offerta: i segni seguono la matrice di incidenza, $+1$ sulla coda.*

**Osservazione 2: Considerare sufficiente $\sum_i b_i = 0$**

*Una rete bilanciata può non avere flussi ammissibili: un taglio può essere troppo piccolo per trasportare l'offerta al suo interno.*

# Errori tipici (2/4)

## Osservazione 3: Sbagliare i segni della sostituzione

*Con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}'$ la coda di $(i, j)$ perde $l_{ij}$ unità di bilancio e la testa le guadagna; la costante $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{l}$ va aggiunta di nuovo al valore.*

## Osservazione 4: Dimenticare il nodo fittizio

*Un'istanza con più offerta che domanda non ha flussi ammissibili con le uguaglianze; gli archi fittizi devono costare zero, altrimenti l'offerta non usata viene pagata.*

# Errori tipici (3/4)

**Osservazione 5: Pretendere l'integralità per ogni matrice**

*I vertici interi richiedono una matrice TU e* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{u}$ *interi; i costi possono essere frazionari.*

**Osservazione 6: Scrivere il costo ridotto con i segni sbagliati**

*In questo modulo* $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, *con* $-\pi$ *della coda e* $+\pi$ *della testa.*

# Errori tipici (4/4)

**Osservazione 7: Aspettarsi potenziali unici**

*I potenziali sono definiti a meno di una costante additiva; si fissano con una normalizzazione come* $\pi_n = 0$.

# Riepilogo

**Scrivere i modelli**:

- flusso uscente meno flusso entrante uguale a $b_i$, con $+1$ sulla coda
- la sostituzione sposta $l_{ij}$ dalla coda alla testa, e riaggiunge $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{l}$
- un eccesso di offerta richiede un nodo fittizio con archi a costo zero

**Usare i risultati**:

- il bilanciamento è necessario, non sufficiente
- l'integralità richiede una matrice TU e $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{u}$ interi
- $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, potenziali a meno di una costante

# In sintesi

# Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo le idee chiave del capitolo sui modelli di flusso su reti
- L'ultima tabella riunisce i numeri della rete di riferimento

# Riepilogo (1/3)

- Una rete ha bilanci $b_i$, limiti inferiori $l_{ij}$, capacità $u_{ij}$ e costi $c_{ij}$; il problema di flusso di costo minimo è l'LP

$$\min\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} : \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}\}$$

- Attraverso ogni taglio il flusso uscente netto è uguale al bilancio interno; una rete ammissibile è bilanciata e soddisfa la condizione di taglio
- I limiti inferiori si rimuovono con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}'$; un eccesso di offerta va a un nodo fittizio attraverso archi a costo zero

# Riepilogo (2/3)

- La matrice di incidenza è totalmente unimodulare, quindi con $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{u}$ interi ogni vertice è intero e il modello $\mathrm{MCF}$ ha una soluzione ottima intera
- Il duale ha i potenziali $\pi_i$; con $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, un flusso con gli archi a costo ridotto positivo vuoti e quelli a costo ridotto negativo saturi è ottimo
- Cammino minimo, flusso massimo, trasporto e assegnamento sono modelli $\mathrm{MCF}$

# Riepilogo (3/3)

**La rete di riferimento in breve.**

| | |
|---|---|
| bilanci | $\boldsymbol{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ |
| flusso ottimo | $\tilde{\boldsymbol{x}} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$, $z(\mathrm{MCF}) = 60$ |
| potenziali ($\pi_6 = 0$) | $\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$ |
| archi vuoti / saturi | $(3, 2)$, $(4, 3)$ / $(2, 4)$, $(5, 6)$ |
| con $l_{32} = 1$ | $\boldsymbol{b}' = (5, 3, -1, -3, 0, -4)$, valore ottimo 62 |
| con $b_2 = 4$ (nodo fittizio 7) | $x_{17} = 2$, valore ottimo 56 |