Flusso di costo minimo

Indice

La rete residua con i costi

Circolazioni e loro scomposizione

Condizioni di ottimalità dei cicli negativi

Condizioni di ottimalità con i potenziali

Un primo flusso ammissibile

L'algoritmo di cancellazione dei cicli
- Trovare un ciclo negativo
- L'algoritmo
- Cancellazione dei cicli sulla rete di riferimento

L'algoritmo dei cammini minimi successivi
- Cammini minimi successivi sulla rete di riferimento

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- costruire la rete residua di un flusso con le capacità residue e i costi, calcolare il costo di uno dei suoi cicli e aumentare il flusso lungo di esso;
- scomporre in cicli una circolazione e la differenza di due flussi ammissibili;
- dimostrare che un flusso ammissibile è ottimo se e solo se la sua rete residua non ha cicli negativi, e se e solo se esistono potenziali con costi ridotti non negativi, e riconoscere un'istanza illimitata;
- trovare un primo flusso ammissibile con un flusso massimo;
- eseguire l'algoritmo di cancellazione dei cicli e l'algoritmo dei cammini minimi successivi, e dimostrarne la correttezza.

Prerequisiti

- Da questo modulo, il capitolo «Cammini minimi»: l'algoritmo di Bellman–Ford con la rilevazione di un ciclo negativo, l'algoritmo di Dijkstra e i potenziali $\pi_i = -\tilde{d}(i)$ come certificato.

- Il capitolo «Modelli di flusso su reti»: il modello del flusso di costo minimo, il flusso attraverso un taglio, la sostituzione dei limiti inferiori, i potenziali e i costi ridotti.

- Il capitolo «Flusso massimo»: la rete residua $G(\boldsymbol{x})$, i cammini aumentanti e l'algoritmo di Edmonds–Karp.

Dove eravamo

- Nel capitolo «Modelli di flusso su reti» il problema del flusso di costo minimo è il PL

$$\min\{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} : \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}\}$$

  Potenziali π_i i cui costi ridotti $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ sono positivi solo sugli archi vuoti e negativi solo sugli archi saturi certificano che un flusso è ottimo.

- Sulla rete di riferimento il flusso ottimo $\tilde{\boldsymbol{x}}$ costa 60, e $\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$ lo certifica.

Dove eravamo: dal certificato a un algoritmo

- Nel capitolo «Flusso massimo» un flusso cresce lungo i cammini aumentanti della rete residua $G(\boldsymbol{x})$.
- In questo capitolo il certificato diventa un algoritmo:
  - abbassiamo il costo di un flusso ammissibile lungo cicli di $G(\boldsymbol{x})$,
  - oppure costruiamo il flusso lungo cammini minimi di $G(\boldsymbol{x})$ mantenendo vero il certificato.

La rete residua con i costi

Introduzione: La rete residua con i costi

- In questa sezione aggiungiamo i costi alla rete residua del capitolo sul flusso massimo
- Un arco in avanti dove il flusso può crescere, un arco all'indietro dove può diminuire, con il costo opposto
- Aumentare il flusso lungo un ciclo di questa rete lo mantiene ammissibile e ne cambia il costo: è la mossa di base di tutto il capitolo

La rete di questo capitolo

- La rete $G = (N, A)$ ha
  - bilanci b_i con $\sum_{i \in N} b_i = 0$,
  - limiti inferiori l_{ij},
  - capacità u_{ij} (finite o $+\infty$),
  - costi c_{ij},

  come nel capitolo «Modelli di flusso su reti».

- Gli archi sono numerati $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in ordine lessicografico.

Niente coppie di archi opposti

- L'insieme A non contiene coppie di archi opposti (i, j), (j, i).
- Un arco (j, i) opposto a (i, j) si può sostituire con gli archi (j, k) e (k, i) attraverso un nuovo nodo di trasbordo k:
  - entrambi con i limiti di (j, i),
  - il primo con il suo costo e il secondo con costo 0.
- I flussi e i loro costi non cambiano.

Definizione 1: rete residua

Sia $\boldsymbol{x}$ *un vettore con* $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ *per ogni arco. La* ***rete residua*** $G(\boldsymbol{x}) = (N, A(\boldsymbol{x}))$ *ha, per ogni arco* $(i,j) \in A$*:*

- *l'**arco in avanti*** (i,j)*, se* $x_{ij} < u_{ij}$*, con* ***capacità residua*** $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ *e costo* c_{ij}*;*
- *l'**arco all'indietro*** (j,i)*, se* $x_{ij} > l_{ij}$*, con capacità residua* $r_{ji} = x_{ij} - l_{ij}$ *e costo* $-c_{ij}$*.*

Indichiamo con c_{ij}^{x} *il costo dell'arco* (i,j) *di* $G(\boldsymbol{x})$*.*

Archi in avanti e archi all'indietro

- Un arco in avanti può portare altre r_{ij} unità su (i, j).
- Un arco all'indietro (j, i) rimanda unità da j a i diminuendo x_{ij}, e risparmia c_{ij} per unità.
- Un arco di A dà due archi di $G(\boldsymbol{x})$ esattamente quando $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$.
- Con $\boldsymbol{l} = 0$ e senza i costi, $G(\boldsymbol{x})$ è la rete residua del capitolo «Flusso massimo».

Definizione 2: cicli della rete residua

Sia W un ciclo orientato di $G(\boldsymbol{x})$. Il suo ***costo*** *e la sua* ***capacità residua*** *sono*

$$c(W) = \sum_{(i,j)\in W} c_{ij}^{x}, \qquad r(W) = \min_{(i,j)\in W} r_{ij},$$

e W è un ***ciclo negativo*** *se $c(W) < 0$.*

Aumentare x *lungo W di θ, con $0 < \theta \leq r(W)$, significa*

- *aumentare x_{ij} di θ per ogni arco in avanti (i,j) di W,*
- *diminuire x_{ij} di θ per ogni arco $(i,j) \in A$ il cui arco all'indietro (j,i) sta in W.*

Che cosa succede a x quando lo aumentiamo lungo un ciclo di $G(x)$?

I limiti e i bilanci restano soddisfatti,
e il costo cambia di θ volte il costo del ciclo.

Proposizione 1: aumento lungo un ciclo

Sia $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$, *sia* W *un ciclo di* $G(\boldsymbol{x})$ *e* $0 < \theta \leq r(W)$, *e sia* $\boldsymbol{x}'$ *il vettore* $\boldsymbol{x}$ *aumentato lungo* W *di* θ. *Allora* $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{u}$, *ogni nodo ha lo stesso flusso uscente meno entrante in* $\boldsymbol{x}'$ *e in* $\boldsymbol{x}$, *e*

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \theta\, c(W).$$

Dimostrazione (1/2)

Verifichiamo le tre affermazioni arco per arco.

1. *Limiti.* Su un arco in avanti,

$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta \leq x_{ij} + r_{ij} = u_{ij}.$$

   Se l'arco all'indietro (j, i) sta in W, allora

$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta \geq x_{ij} - r_{ji} = l_{ij}.$$

2. *Bilanci.* Aumentare di θ lungo un arco (i, k) di $G(\boldsymbol{x})$ alza di θ il flusso uscente meno entrante di i e abbassa di θ quello di k: un arco in avanti manda più flusso da i a k, un arco all'indietro manda meno flusso da k a i. Ogni nodo di W è la coda di un arco di W e la testa di un altro, quindi le variazioni si compensano.

Dimostrazione (2/2)

3. *Costo.* Un arco in avanti cambia il costo di

$$c_{ij}\theta = c^x_{ij}\theta;$$

un arco all'indietro (j, i) lo cambia di

$$-c_{ij}\theta = c^x_{ji}\theta.$$

Sommando lungo W si ottiene $\theta\, c(W)$.

□

Aumentare lungo un ciclo negativo

- Se $\boldsymbol{x}$ è un flusso ammissibile, lo è anche $\boldsymbol{x}'$.
- Lungo un ciclo negativo il costo diminuisce di $\theta\,|c(W)|$.

Ora: la rete residua di un flusso della rete di riferimento,
e un ciclo negativo al suo interno.

Esempio: il flusso più costoso (1/5)

Usiamo la rete di riferimento del capitolo «Modelli di flusso su reti», con limiti inferiori nulli e i bilanci

$$\boldsymbol{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4).$$

I costi e le capacità sono

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
c_{ij}	2	2	5	2	3	3	5	5	3
u_{ij}	4	4	4	2	4	3	5	3	2

Esempio: il flusso più costoso (2/5)

- Il flusso ammissibile più costoso, calcolato con Gurobi massimizzando il costo, è

$$\boldsymbol{x}^0 = (1, 4, 4, 1, 4, 1, 3, 3, 1), \qquad \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^0 = 80,$$

  con le componenti nell'ordine degli archi.

- È l'unico flusso di costo 80, come conferma l'enumerazione dei 12 flussi ammissibili interi.

- Ogni arco di A dà uno o due archi di $G(\boldsymbol{x}^0)$, con la loro capacità residua e il loro costo: sono nella tabella della slide successiva.

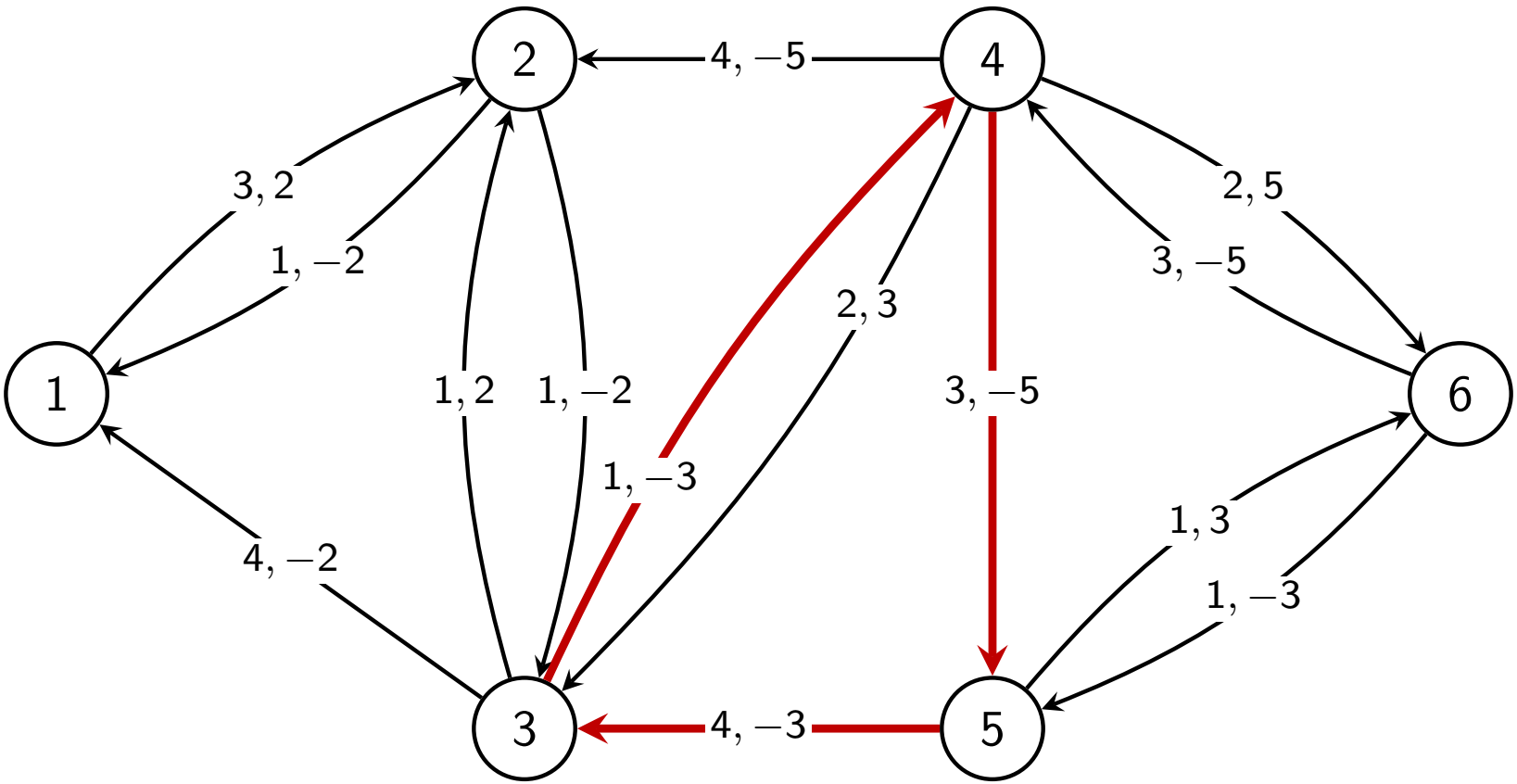
Esempio: il flusso più costoso (3/5)

Ogni arco dà i seguenti archi di $G(\boldsymbol{x}^0)$; ogni casella è la coppia r, c di capacità residua e costo:

arco (i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
x_{ij}^0	1	4	4	1	4	1	3	3	1
in avanti (i,j)	$3,2$	–	–	$1,2$	–	$2,3$	$2,5$	–	$1,3$
all'indietro (j,i)	$1,-2$	$4,-2$	$4,-5$	$1,-2$	$4,-3$	$1,-3$	$3,-5$	$3,-5$	$1,-3$

Esempio: il flusso più costoso (4/5)

Ogni arco di $G(\boldsymbol{x}^0)$ porta la coppia r_{ij}, c_{ij}^x; il ciclo $W = 4, 5, 3, 4$ è rosso.



Esempio: il flusso più costoso (5/5)

- Il ciclo $W = 4, 5, 3, 4$ usa gli archi all'indietro di $(5, 4)$, $(3, 5)$ e $(4, 3)$:

$$c(W) = -5 - 3 - 3 = -11, \qquad r(W) = \min\{3, 4, 1\} = 1.$$

- Aumentando di $\theta = 1$, x_{54}, x_{35} e x_{43} diminuiscono di un'unità. Il nuovo flusso

$$\boldsymbol{x}^1 = (1, 4, 4, 1, 3, 0, 3, 2, 1)$$

è ammissibile e costa $80 - 11 = 69$.

- L'unità che girava lungo il ciclo orientato $3, 5, 4, 3$ di G costava 11 e non consegnava nulla.

Riepilogo

La rete residua $G(\boldsymbol{x})$:

- un arco in avanti di costo c_{ij} dove x_{ij} può crescere, con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$
- un arco all'indietro di costo $-c_{ij}$ dove x_{ij} può diminuire, con $r_{ji} = x_{ij} - l_{ij}$

Aumentare lungo un ciclo W di $G(\boldsymbol{x})$:

- mantiene i limiti e i bilanci
- cambia il costo di $\theta\, c(W)$: lungo un ciclo negativo il costo diminuisce

Circolazioni e loro scomposizione

Introduzione: Circolazioni e loro scomposizione

- In questa sezione studiamo i vettori bilanciati in ogni nodo: le circolazioni
- Ogni circolazione è una somma di multipli positivi di cicli orientati
- La differenza di due flussi ammissibili è una circolazione su $G(\boldsymbol{x})$: ogni flusso ammissibile si raggiunge da $\boldsymbol{x}$ lungo cicli di $G(\boldsymbol{x})$, ed è questa la chiave delle condizioni di ottimalità

Definizione 3: circolazione

Sia $H = (N, F)$ un grafo orientato. Una ***circolazione*** *su H è un vettore $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^F$ con $\boldsymbol{y} \geq 0$ tale che in ogni nodo il flusso uscente sia uguale a quello entrante:*

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} y_{ij} = \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} y_{ji}, \qquad \forall i \in N.$$

Il ***vettore di incidenza*** $\boldsymbol{\chi}^W$ *di un ciclo orientato W di H, con $\chi^W_a = 1$ sugli archi di W e $\chi^W_a = 0$ altrove, è una circolazione.*

Lemma 1: scomposizione in cicli

Sia $\boldsymbol{y} \neq 0$ *una circolazione su* $H = (N, F)$, *con* p *archi in cui* $y_a > 0$. *Allora esistono cicli orientati* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *di* H, *con* $k \leq p$, *formati da archi con* $y_a > 0$, *e numeri* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k > 0$ *tali che*

$$\boldsymbol{y} = \sum_{h=1}^{k} \theta_h \boldsymbol{\chi}^{W_h}.$$

Se $\boldsymbol{y}$ *è intero, i numeri* θ_h *sono interi.*

La dimostrazione costruisce i cicli uno alla volta:

si seguono gli archi con $y > 0$ finché un nodo si ripete,
si toglie il ciclo trovato e si ricomincia.

Dimostrazione (1/3)

Per induzione su p.

1. *Un ciclo.* Sia (i_0, i_1) un arco con $y_{i_0 i_1} > 0$.
   - Il nodo i_1 riceve un flusso entrante positivo, quindi per la conservazione del flusso qualche arco (i_1, i_2) ha $y_{i_1 i_2} > 0$.
   - Proseguendo allo stesso modo costruiamo una passeggiata orientata di archi con $y > 0$.
   - Poiché N è finito un nodo si ripete, e il tratto di passeggiata fra le sue due occorrenze è un ciclo orientato W_1.

Dimostrazione (2/3)

2. *Rimozione.* Sia $\theta_1 = \min_{a \in W_1} y_a > 0$. Il vettore

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \theta_1 \boldsymbol{\chi}^{W_1}$$

- è non negativo,
- è bilanciato, come differenza di vettori bilanciati,
- ha al più $p - 1$ archi positivi, perché $y'_a = 0$ su un arco di W_1 che realizza il minimo.

Dimostrazione (3/3)

3. *Induzione.* Se $\boldsymbol{y}' = 0$, allora $\boldsymbol{y} = \theta_1 \boldsymbol{\chi}^{W_1}$. Altrimenti l'induzione dà

$$\boldsymbol{y}' = \sum_{h=2}^{k} \theta_h \boldsymbol{\chi}^{W_h}$$

con $k - 1 \leq p - 1$ cicli di archi con $y'_a > 0$, quindi $y_a > 0$.

Se $\boldsymbol{y}$ è intero, θ_1 è una delle sue componenti e $\boldsymbol{y}'$ è intero, quindi tutti i θ_h sono interi.

□

Lemma 2: la differenza di due flussi ammissibili

Siano $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{x}'$ *flussi ammissibili. Definiamo* $\boldsymbol{y}$ *sugli archi di* $G(\boldsymbol{x})$*: per ogni* $(i,j) \in A$*,*

$$y_{ij} = x'_{ij} - x_{ij} \quad \text{sull'arco in avanti } (i,j), \text{ se } x'_{ij} > x_{ij},$$
$$y_{ji} = x_{ij} - x'_{ij} \quad \text{sull'arco all'indietro } (j,i), \text{ se } x'_{ij} < x_{ij},$$

e $y = 0$ *sugli altri archi di* $G(\boldsymbol{x})$*. Allora* $\boldsymbol{y}$ *è una circolazione su* $G(\boldsymbol{x})$ *con* $y_{ij} \leq r_{ij}$*, e*

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \sum_{(i,j)\in A(\boldsymbol{x})} c^x_{ij}\, y_{ij} = \sum_{h=1}^{k} \theta_h\, c(W_h)$$

per ogni scomposizione $\boldsymbol{y} = \sum_{h=1}^{k} \theta_h \boldsymbol{\chi}^{W_h}$ *in cicli di* $G(\boldsymbol{x})$*.*

Dimostrazione (1/3)

Verifichiamo che $\boldsymbol{y}$ vive su $G(\boldsymbol{x})$, che è bilanciato, e il suo costo.

1. Se $x'_{ij} > x_{ij}$, allora $x_{ij} < x'_{ij} \leq u_{ij}$: l'arco in avanti esiste e

$$y_{ij} \leq u_{ij} - x_{ij} = r_{ij}.$$

Se $x'_{ij} < x_{ij}$, allora $x_{ij} > x'_{ij} \geq l_{ij}$: l'arco all'indietro esiste e

$$y_{ji} \leq x_{ij} - l_{ij} = r_{ji}.$$

Dimostrazione (2/3)

2. Come nella dimostrazione della Proposizione 1, y su un arco (i, k) di $G(\boldsymbol{x})$ aggiunge y al flusso uscente meno entrante di i e lo sottrae a quello di k, esattamente come fa il passaggio da $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}'$ sull'arco corrispondente di A.

   Quindi il flusso uscente meno entrante di $\boldsymbol{y}$ nel nodo i è

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}')_i - (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})_i = b_i - b_i = 0.$$

Dimostrazione (3/3)

3. Un arco in avanti contribuisce con $c_{ij}(x'_{ij} - x_{ij})$, un arco all'indietro con

$$-c_{ij}(x_{ij} - x'_{ij}) = c_{ij}(x'_{ij} - x_{ij}) :$$

il totale è $\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})$. Con la scomposizione,

$$\sum c^x_{ij} y_{ij} = \sum_h \theta_h \sum_{(i,j)\in W_h} c^x_{ij} = \sum_h \theta_h \, c(W_h).$$

□

Ogni flusso ammissibile si raggiunge lungo cicli

- Per il Lemma 1 una tale scomposizione esiste: $\boldsymbol{x}'$ è $\boldsymbol{x}$ aumentato lungo i cicli $W_1, W_2, \ldots, W_k$ di $G(\boldsymbol{x})$ di $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

- Poiché $\boldsymbol{y}$ è positivo su al più un arco di $G(\boldsymbol{x})$ per ogni arco di A, $k \leq m$.

Ora: la scomposizione sulla rete di riferimento,
dal flusso più costoso al flusso ottimo.

Esempio: da $\boldsymbol{x}^0$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (1/2)

- Confrontiamo $\boldsymbol{x}^0$ del primo esempio, di costo 80, con il flusso ottimo del capitolo «Modelli di flusso su reti», di costo 60:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2).$$

- La differenza è

$$\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^0 = (1, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -2, 1),$$

quindi $\boldsymbol{y}$ è positivo su otto archi di $G(\boldsymbol{x}^0)$: gli archi in avanti $(1, 2)$ e $(5, 6)$, con $y = 1$, e gli archi all'indietro

$$y_{31} = 1, \quad y_{23} = 1, \quad y_{53} = 1, \quad y_{34} = 1, \quad y_{64} = 1, \quad y_{45} = 2.$$

Esempio: da $\boldsymbol{x}^0$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (2/2)

Seguiamo la dimostrazione del Lemma 1, partendo ogni volta dal primo arco con $y > 0$ in ordine lessicografico e lasciando ogni nodo lungo il suo arco con $y > 0$ di testa più piccola:

h	ciclo W_h	θ_h	$c(W_h)$
1	$1, 2, 3, 1$	1	$2 - 2 - 2 = -2$
2	$3, 4, 5, 3$	1	$-3 - 5 - 3 = -11$
3	$4, 5, 6, 4$	1	$-5 + 3 - 5 = -7$

- Per il Lemma 2, $\boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^0 = -2 - 11 - 7 = -20 = 60 - 80$.
- I tre cicli sono tutti negativi, e W_2 è il ciclo $4, 5, 3, 4$ del primo esempio, scritto a partire dal nodo 3.

Riepilogo

Circolazioni:

- Una circolazione è una somma di multipli positivi di cicli orientati
- Con componenti intere, i multipli sono interi

La differenza di due flussi ammissibili:

- È una circolazione su $G(\boldsymbol{x})$: ogni flusso ammissibile si raggiunge da $\boldsymbol{x}$ lungo cicli di $G(\boldsymbol{x})$
- Il costo cambia di $\sum_h \theta_h \, c(W_h)$

Condizioni di ottimalità dei cicli negativi

Introduzione: Condizioni di ottimalità dei cicli negativi

- In questa sezione dimostriamo la prima condizione di ottimalità: un flusso ammissibile è ottimo esattamente quando la sua rete residua non ha cicli negativi
- La dimostrazione usa soltanto la scomposizione della sezione precedente
- Vediamo anche quando il modello è illimitato: un ciclo negativo con capacità infinite

Teorema 1: ottimalità e cicli negativi

Un flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$ è ottimo se e solo se la sua rete residua $G(\boldsymbol{x})$ non ha cicli negativi.

Dimostrazione (1/2)

Dimostriamo le due implicazioni.

Un ciclo negativo migliora $\boldsymbol{x}$.

- Sia W un ciclo negativo di $G(\boldsymbol{x})$ e $\theta = \min\{r(W), 1\} > 0$.
- Per la Proposizione 1, $\boldsymbol{x}$ aumentato lungo W di θ è un flusso ammissibile di costo

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \theta\, c(W) < \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x},$$

quindi $\boldsymbol{x}$ non è ottimo.

Dimostrazione (2/2)

Senza cicli negativi $\boldsymbol{x}$ è ottimo.

- Sia $\boldsymbol{x}'$ un flusso ammissibile qualsiasi. Per il Lemma 2,

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \sum_h \theta_h \, c(W_h)$$

  con cicli W_h di $G(\boldsymbol{x})$ e $\theta_h > 0$.
- Ogni $c(W_h)$ è non negativo, quindi $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$.

□

Due osservazioni sul teorema

- La dimostrazione confronta due flussi attraverso la loro differenza, e non usa la dualità della PL.
- Quando alcune capacità sono infinite il modello può essere illimitato, e la proposizione seguente dice esattamente quando.

Proposizione 2: istanze illimitate

Supponiamo che il modello MCF *abbia un flusso ammissibile. Il modello è illimitato se e solo se* G *ha un ciclo orientato* C *di costo negativo,*

$$\sum_{(i,j)\in C} c_{ij} < 0,$$

i cui archi hanno tutti $u_{ij} = +\infty$.

Dimostrazione (1/3)

Se. Sia $\boldsymbol{x}$ ammissibile.

- Ogni arco di C ha $x_{ij} < u_{ij} = +\infty$, quindi C è un ciclo di archi in avanti di $G(\boldsymbol{x})$ con $r(C) = +\infty$.

- Aumentando lungo C di un qualsiasi $\theta > 0$ si ottengono flussi ammissibili di costo

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \theta\, c(C),$$

che tende a $-\infty$.

Dimostrazione (2/3)

Solo se. Supponiamo che non esista un tale ciclo C, e fissiamo un flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$.

- Sia R la più grande capacità residua finita di un arco di $G(\boldsymbol{x})$ ($R = 0$ se non ce ne sono), e

$$K = \max_{(i,j) \in A} |c_{ij}|.$$

- Sia $\boldsymbol{x}'$ un flusso ammissibile qualsiasi, scomposto come nel Lemma 2.

Dimostrazione (3/3)

1. Un ciclo W_h con $c(W_h) < 0$ ha un arco a di capacità residua finita: gli archi all'indietro hanno capacità residua finita, e un ciclo di archi in avanti con capacità infinita sarebbe un ciclo C. Quindi
$$\theta_h \leq y_a \leq r_a \leq R.$$
2. W_h ha al più n archi, quindi $c(W_h) \geq -nK$; i cicli sono al più m.

Quindi $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} - m\,R\,n\,K$ per ogni $\boldsymbol{x}'$ ammissibile: il modello è limitato.

□

I modelli limitati hanno un flusso ottimo

- Un PL ammissibile e limitato ha una soluzione ottima (Programmazione lineare, capitolo «La geometria della Programmazione Lineare»).
- Con capacità finite il modello MCF non è mai illimitato.

Esempio: un flusso non ottimo (1/2)

- Il flusso ammissibile

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (1, 4, 3, 0, 4, 0, 2, 2, 2)$$

del capitolo «Modelli di flusso su reti» costa 63.

- La sua rete residua ha il ciclo $W = 1, 2, 4, 5, 3, 1$, formato dagli archi in avanti $(1, 2)$, $(2, 4)$ e dagli archi all'indietro $(4, 5)$, $(5, 3)$, $(3, 1)$:

$$c(W) = 2+5-5-3-2 = -3, \quad r(W) = \min\{3, 1, 2, 4, 4\} = 1.$$

Esempio: un flusso non ottimo (2/2)

- Per il Teorema 1 $\bar{\boldsymbol{x}}$ non è ottimo.
- Aumentando di 1 si ottiene $\tilde{\boldsymbol{x}}$, di costo $63 - 3 = 60$.
- La diminuzione 3 è lo scarto di $\bar{\boldsymbol{x}}$ calcolato con la soluzione duale nel capitolo «Modelli di flusso su reti».

Esempio: un'istanza illimitata

- Modifichiamo la rete di riferimento: $c_{54} = -12$ e $u_{35} = u_{54} = u_{43} = +\infty$.
- Il ciclo orientato $3, 5, 4, 3$ di G costa

$$3 - 12 + 3 = -6$$

  e ha capacità infinite.
- Per la Proposizione 2 il modello è illimitato, come conferma Gurobi: ogni unità mandata lungo il ciclo abbassa il costo di 6.

Riepilogo

Ottimalità:

- Un flusso ammissibile è ottimo se e solo se la sua rete residua non ha cicli negativi
- La dimostrazione usa la scomposizione in cicli, non la dualità della PL

Istanze illimitate:

- Un modello ammissibile è illimitato se e solo se un ciclo orientato negativo ha tutte le capacità infinite
- Con capacità finite il modello non è mai illimitato

Condizioni di ottimalità con i potenziali

Introduzione: Condizioni di ottimalità con i potenziali

- In questa sezione traduciamo «nessun ciclo negativo» in potenziali con costi ridotti non negativi
- I potenziali sono un certificato facile da verificare, arco per arco
- Sugli archi di A danno le condizioni degli scarti complementari del capitolo «Modelli di flusso su reti», ora dimostrate senza la dualità della PL

Costi ridotti sulla rete residua

- Dati i potenziali $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$, il costo ridotto di un arco (i, j) di $G(\boldsymbol{x})$ è
$$c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j.$$
- Per un arco in avanti è $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$, il costo ridotto del capitolo «Modelli di flusso su reti».
- Per l'arco all'indietro (j, i) di (i, j) è
$$-c_{ij} - \pi_j + \pi_i = -\bar{c}_{ij}.$$

Lungo un ciclo i potenziali si elidono

- Lungo un ciclo W di $G(\boldsymbol{x})$ i potenziali si elidono a due a due (somma telescopica), come nel capitolo «Cammini minimi»:

$$c(W) = \sum_{(i,j)\in W} \left(c_{ij}^{x} - \pi_i + \pi_j\right).$$

- Quindi, se tutti i costi ridotti sono non negativi, nessun ciclo è negativo.

Teorema 2: ottimalità con i costi ridotti

Un flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$ *è ottimo se e solo se esistono potenziali* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ *tali che*

$$c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j \geq 0 \qquad \text{per ogni arco } (i,j) \text{ di } G(\boldsymbol{x}).$$

Dimostrazione (1/2)

Se. Per la somma telescopica ogni ciclo di $G(\boldsymbol{x})$ ha $c(W) \geq 0$, e $\boldsymbol{x}$ è ottimo per il Teorema 1.

Solo se. Sia $\boldsymbol{x}$ ottimo: per il Teorema 1, $G(\boldsymbol{x})$ non ha cicli negativi.

1. Aggiungiamo un nodo r e un arco (r, i) di costo 0 per ogni $i \in N$. Nel nuovo grafo ogni nodo è raggiungibile da r, e i cicli sono quelli di $G(\boldsymbol{x})$, perché nessun arco entra in r: nessuno è negativo.

Dimostrazione (2/2)

2. Per il Teorema «equazioni di Bellman» del capitolo «Cammini minimi», le distanze $d(i)$ da r sono finite e

$$d(j) \leq d(i) + c_{ij}^{x} \qquad \text{per ogni arco } (i,j) \text{ di } G(\boldsymbol{x}).$$

3. Con $\pi_i = -d(i)$ otteniamo

$$c_{ij}^{x} - \pi_i + \pi_j = c_{ij}^{x} + d(i) - d(j) \geq 0.$$

□

Corollario 1: scarti complementari

Siano $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile e* $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$. *La condizione del Teorema 2 vale se e solo se, per ogni arco* $(i,j) \in A$,

$$\bar{c}_{ij} > 0 \;\Rightarrow\; x_{ij} = l_{ij}, \qquad\qquad \bar{c}_{ij} < 0 \;\Rightarrow\; x_{ij} = u_{ij}.$$

In particolare, $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$ *implica* $\bar{c}_{ij} = 0$.

Dimostrazione

- L'arco $(i,j) \in A$ dà l'arco in avanti, di costo ridotto $\bar{c}_{ij}$, quando $x_{ij} < u_{ij}$, e l'arco all'indietro, di costo ridotto $-\bar{c}_{ij}$, quando $x_{ij} > l_{ij}$.
- Quindi la condizione sugli archi che vengono da (i,j) si scrive

$$x_{ij} < u_{ij} \;\Rightarrow\; \bar{c}_{ij} \geq 0, \qquad\qquad x_{ij} > l_{ij} \;\Rightarrow\; \bar{c}_{ij} \leq 0.$$

- Poiché $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$, la prima implicazione equivale a $\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$, e la seconda a $\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = l_{ij}$.
- Se $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$, valgono entrambe le implicazioni e $\bar{c}_{ij} = 0$.

□

Il certificato del capitolo «Modelli di flusso su reti»

- Con $\boldsymbol{l} = 0$ queste sono le condizioni del Corollario «certificato dei costi ridotti» del capitolo «Modelli di flusso su reti».
- Là erano dimostrate sufficienti con la dualità della PL.
- Il Teorema 2 mostra che ogni flusso ottimo ha potenziali di questo tipo, che con $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$ formano una soluzione duale ottima.

I potenziali della dimostrazione

- I potenziali della dimostrazione sono $\pi_i = -d(i)$, le distanze da r cambiate di segno, come $\pi_i = -\tilde{d}(i)$ nel capitolo «Cammini minimi».

- Si possono traslare di una costante; li normalizziamo con $\pi_n = 0$.

Esempio: il certificato del flusso ottimo (1/2)

Prendiamo $\tilde{\boldsymbol{x}}$ e i potenziali $\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$ del capitolo «Modelli di flusso su reti». I costi ridotti degli archi di $G(\tilde{\boldsymbol{x}})$ sono $\bar{c}_{ij}$ sugli archi in avanti e $-\bar{c}_{ij}$ sugli archi all'indietro:

arco (i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
$\tilde{x}_{ij}$	2	3	4	0	3	0	2	1	2
$\bar{c}_{ij}$	0	0	-3	2	0	11	0	0	-7
in avanti (i,j)	0	0	–	2	0	11	0	0	–
all'indietro (j,i)	0	0	3	–	0	–	0	0	7

Esempio: il certificato del flusso ottimo (2/2)

- Tutti i 14 archi di $G(\tilde{\boldsymbol{x}})$ hanno costo ridotto non negativo: per il Teorema 2, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ è ottimo.

- Nella forma del Corollario 1: $(3,2)$ e $(4,3)$ sono vuoti, $(2,4)$ e $(5,6)$ sono saturi.

- I potenziali sono i costi delle passeggiate più economiche di $G(\tilde{\boldsymbol{x}})$ che finiscono in ciascun nodo, cambiati di segno. Per esempio, la passeggiata $6,4,5,3,1$ usa quattro archi all'indietro e costa

$$-5-5-3-2=-15=-\pi_1 :$$

in G è il cammino $1,3,5,4,6$ dell'albero ricoprente del capitolo «Modelli di flusso su reti».

Riepilogo

Ottimalità con i potenziali:

- Un flusso ammissibile è ottimo se e solo se qualche vettore di potenziali dà costi ridotti non negativi su tutti gli archi di $G(\boldsymbol{x})$
- Questi potenziali sono le distanze in $G(\boldsymbol{x})$ da un nodo collegato a tutti gli altri, cambiate di segno

Sugli archi di A:

- $\bar{c}_{ij}$ positivo solo sugli archi al limite inferiore
- $\bar{c}_{ij}$ negativo solo sugli archi saturi

Un primo flusso ammissibile

Introduzione: Un primo flusso ammissibile

- L'algoritmo di cancellazione dei cicli della prossima sezione migliora un flusso ammissibile: gliene serve uno da cui partire
- In questa sezione lo troviamo con un flusso massimo, da una super sorgente a un super pozzo
- Lo stesso calcolo dice se la rete ha almeno un flusso ammissibile

Partire da un flusso ammissibile

- Un algoritmo che migliora un flusso ammissibile ha bisogno di un flusso ammissibile da cui partire.
- Con la sostituzione del capitolo «Modelli di flusso su reti» possiamo supporre $\boldsymbol{l} = 0$.

Definizione 4: rete ausiliaria

Siano $G = (N, A)$ *una rete bilanciata con* $\boldsymbol{l} = 0$ *e*

$$D = \sum_{i \in N : b_i > 0} b_i$$

la sua offerta totale. La ***rete ausiliaria*** *aggiunge a* G

- *una* ***super sorgente*** s *e un* ***super pozzo*** t,
- *un arco* (s, i) *di capacità* b_i *per ogni nodo di offerta* i,
- *un arco* (i, t) *di capacità* $-b_i$ *per ogni nodo di domanda* i;

gli archi di A *mantengono le loro capacità.*

Proposizione 3: un flusso ammissibile da un flusso massimo

La rete G ha un flusso ammissibile se e solo se il flusso massimo da s a t della rete ausiliaria ha valore D. In tal caso, un flusso massimo ristretto agli archi di A è un flusso ammissibile di G.

Dimostrazione (1/2)

Il valore di un flusso da s a t è il flusso che esce da s, al più la capacità totale D degli archi (s, i).

1. *Solo se.* Sia $\boldsymbol{x}$ ammissibile, e poniamo $x_{si} = b_i$ sugli archi (s, i) e $x_{it} = -b_i$ sugli archi (i, t).
   - In un nodo di offerta il flusso uscente meno entrante diventa $b_i - x_{si} = 0$, in un nodo di domanda $b_i + x_{it} = 0$, e i nodi di trasbordo non cambiano.
   - È un flusso da s a t di valore D, quindi massimo.

Dimostrazione (2/2)

2. *Se.* Un flusso massimo abbia valore D. Allora tutti gli archi (s, i) sono saturi. Il valore è anche il flusso che entra in t, e gli archi (i, t) hanno capacità totale

$$\sum_{i:b_i<0} (-b_i) = D,$$

perché la rete è bilanciata: anch'essi sono saturi.

3. La conservazione in $i \in N$ dà allora, lungo gli archi di A, flusso uscente meno entrante pari a

$$x_{si} - x_{it} = b_i,$$

e le capacità sono rispettate: la restrizione ad A è un flusso ammissibile.

□

Il calcolo del flusso massimo

- Calcoliamo il flusso massimo con l'algoritmo di Edmonds–Karp del capitolo «Flusso massimo»:
  - una visita in ampiezza da s nella rete residua,
  - che esamina gli archi uscenti da un nodo per indice crescente della testa (s prima del nodo 1, t dopo il nodo n).

- Il flusso massimo ignora i costi: dà un flusso ammissibile, di solito lontano dall'ottimo.

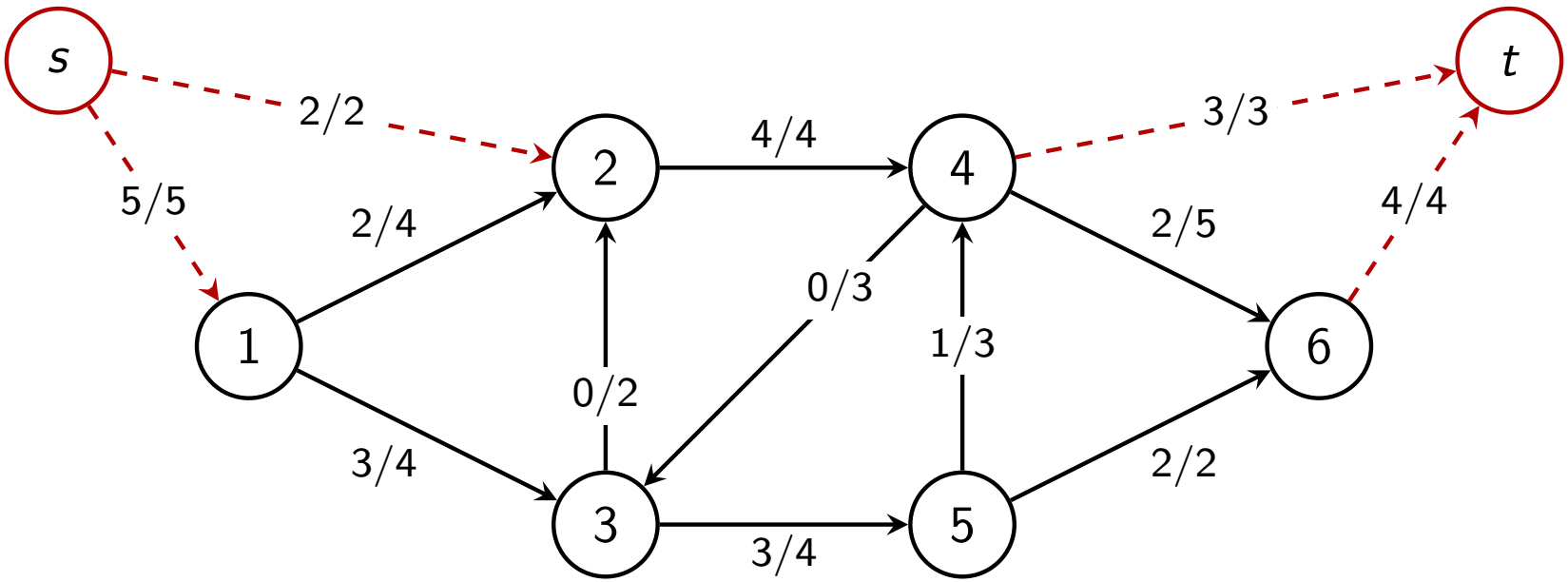
Esempio: un flusso ammissibile della rete di riferimento (1/2)

- La rete di riferimento ha $D = 5 + 2 = 7$.
- La rete ausiliaria aggiunge gli archi $(s, 1)$, $(s, 2)$ con capacità 5, 2, e $(4, t)$, $(6, t)$ con capacità 3, 4.
- I cammini aumentanti dell'algoritmo di Edmonds–Karp sono:

cammino	nodi	unità
1	$s, 2, 4, t$	2
2	$s, 1, 2, 4, t$	1
3	$s, 1, 2, 4, 6, t$	1
4	$s, 1, 3, 5, 6, t$	2
5	$s, 1, 3, 5, 4, 6, t$	1

Esempio: un flusso ammissibile della rete di riferimento (2/2)

Il valore è $7 = D$, quindi la rete ha un flusso ammissibile. Ogni arco porta x_{ij}/u_{ij} (gli archi nuovi sono rossi e tratteggiati):



La restrizione ad A è $(2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$: su questa istanza è il flusso ottimo $\tilde{\boldsymbol{x}}$. È una coincidenza, perché la visita non guarda mai i costi.

Riepilogo

La rete ausiliaria:

- Una super sorgente alimenta i nodi di offerta e un super pozzo è alimentato dai nodi di domanda
- L'ammissibilità diventa un problema di flusso massimo

Il test:

- La rete ha un flusso ammissibile se e solo se il flusso massimo satura tutti gli archi nuovi (valore D)
- Il flusso massimo ignora i costi: il suo flusso è ammissibile, in generale non ottimo

L'algoritmo di cancellazione dei cicli

Introduzione: L'algoritmo di cancellazione dei cicli

- In questa sezione la condizione dei cicli negativi diventa un algoritmo: finché c'è un ciclo negativo, si aumenta lungo di esso
- Troviamo i cicli negativi con l'algoritmo di Bellman–Ford, e alla fine le sue etichette danno i potenziali
- Dimostriamo che l'algoritmo è corretto con dati interi, e lo eseguiamo sulla rete di riferimento

Cancellare un ciclo negativo

- Il Teorema 1 suggerisce un algoritmo dovuto a Klein: finché $G(\boldsymbol{x})$ ha un ciclo negativo, si aumenta lungo di esso.
- Aumentando di $r(W)$ si satura un arco di W, che esce da $G(\boldsymbol{x})$: il ciclo è **cancellato**.

Trovare un ciclo negativo

- Un ciclo negativo di $G(\boldsymbol{x})$ può non essere raggiungibile da un nodo dato.
- Eseguiamo l'algoritmo di Bellman–Ford del capitolo «Cammini minimi» da un nuovo nodo r collegato a ogni nodo da un arco di costo 0.
- La sua prima passata dà etichetta 0 a ogni nodo, e scriviamo la tabella da lì.

Proposizione 4: Bellman–Ford sulla rete residua (1/2)

Sia $d^0(j) = 0$ *per ogni* $j \in N$ *e, per* $k \geq 1$,

$$d^k(j) = \min \left\{ d^{k-1}(j), \min_{(i,j) \in A(\boldsymbol{x})} \left(d^{k-1}(i) + c_{ij}^{x} \right) \right\}$$

per ogni $j \in N$.

(a) $d^k(j)$ *è il costo minimo di una passeggiata di* $G(\boldsymbol{x})$ *con al più* k *archi che finisce in* j*; la passeggiata senza archi ha costo* 0.

Proposizione: Bellman–Ford sulla rete residua (2/2)

(b) *$G(\boldsymbol{x})$ ha un ciclo negativo se e solo se $d^n \neq d^{n-1}$. In tal caso, se $d^n(j) < d^{n-1}(j)$, i predecessori letti all'indietro da j, una riga per passata dalla riga n alla riga 1, danno una passeggiata di $G(\boldsymbol{x})$ con n archi, che finisce in j e contiene un ciclo negativo.*

(c) *Se $d^k = d^{k-1}$ per qualche $k \leq n$, i potenziali $\pi_i = -d^k(i)$ soddisfano $c^x_{ij} - \pi_i + \pi_j \geq 0$ su ogni arco di $G(\boldsymbol{x})$.*

Dimostrazione (1/3)

Sia H la rete $G(\boldsymbol{x})$ più il nodo r e gli archi (r, i) di costo 0, e siano D^k le etichette di Bellman–Ford da r in H:

$$D^1(i) = 0 \quad \text{per ogni } i \in N, \qquad D^k(r) = 0 \quad \text{per ogni } k.$$

1. Per induzione su k, $D^{k+1}(j) = d^k(j)$ per $j \in N$:
   - le ricorsioni coincidono, e l'arco (r, j) offre $D^k(r) + 0 = 0$, che non abbassa mai il minimo perché $d^{k-1}(j) \leq d^0(j) = 0$;
   - una passeggiata da r con $k+1$ archi è un arco (r, i) seguito da una passeggiata di $G(\boldsymbol{x})$ con k archi da i: questo dimostra (a).

Dimostrazione (2/3)

2. In H ogni nodo è raggiungibile da r, e i cicli sono quelli di $G(\boldsymbol{x})$.
   - Per il Teorema «rilevazione di un ciclo negativo» del capitolo «Cammini minimi», applicato agli $n+1$ nodi di H, un ciclo negativo esiste se e solo se $D^{n+1} \neq D^n$, cioè $d^n \neq d^{n-1}$.
   - La passeggiata da r con $n+1$ archi letta nelle righe $n+1, \ldots, 2$ di H, che sono le nostre righe $n, \ldots, 1$, contiene un ciclo negativo.
   - Senza il suo primo arco $(r, \cdot)$ è una passeggiata di $G(\boldsymbol{x})$ con n archi, e il ciclo non contiene r. Questo dimostra (b).

Dimostrazione (3/3)

3. Se $d^k = d^{k-1}$, la passata successiva ripete le etichette:

$$d^k(j) \leq d^k(i) + c^x_{ij} \qquad \text{per ogni arco } (i,j) \text{ di } G(\boldsymbol{x}),$$

che è (c) con $\pi = -d^k$.

□

Regole di questo capitolo

- Gli archi di $G(\boldsymbol{x})$ si esaminano in ordine lessicografico; come nel capitolo «Cammini minimi», a parità nel minimo vince la coda più piccola, e un predecessore cambia solo quando l'etichetta diminuisce strettamente.
- Se $d^n \neq d^{n-1}$, j è il nodo più piccolo con $d^n(j) < d^{n-1}(j)$, e il ciclo è il tratto di passeggiata fra le due occorrenze del primo nodo incontrato due volte, leggendo la passeggiata dal suo primo nodo.
- Alla fine i potenziali $\pi_i = -d^k(i)$ si traslano in modo che $\pi_n = 0$.

Algorithm: Algoritmo di cancellazione dei cicli

Input : una rete bilanciata con $\boldsymbol{l} = 0$, capacità u_{ij}, costi c_{ij}
Output : un flusso ottimo $\boldsymbol{x}$ con il suo certificato π, oppure «inammissibile», oppure «illimitato»

1 **Passo 0 (avvio).** Se un ciclo di archi con $u_{ij} = +\infty$ ha costo negativo, `STOP`: illimitato.
2 Trova un flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$ con un flusso massimo della rete ausiliaria.
3 Se il suo valore è minore di D, `STOP`: inammissibile.
4 **Passo 1 (ciclo negativo).** Esegui Bellman–Ford su $G(\boldsymbol{x})$ da $d^0 = 0$.
5 Se $d^k = d^{k-1}$ per qualche $k \leq n$, `STOP`: $\boldsymbol{x}$ è ottimo, con $\pi = -d^k$.
6 Altrimenti leggi un ciclo negativo W dalla tabella.
7 **Passo 2 (cancellazione).** Aumenta $\boldsymbol{x}$ lungo W di $\theta = r(W)$ e torna al Passo 1.

Osservazioni sul Passo 0

- Il test del Passo 0 è la Proposizione 4 applicata al grafo degli archi con $u_{ij} = +\infty$ e dei loro costi.
- Quando il test non scatta, ogni ciclo negativo di $G(\boldsymbol{x})$ ha un arco di capacità residua finita (dimostrazione della Proposizione 2), quindi $r(W) < +\infty$ nel Passo 2.
- Nel Passo 0 va bene un qualsiasi flusso ammissibile; il flusso massimo è un modo per trovarlo.

Teorema 3: correttezza della cancellazione dei cicli

Siano interi i bilanci, le capacità e i costi, con capacità eventualmente $+\infty$, e l'algoritmo superi il Passo 0 con un flusso ammissibile intero $\boldsymbol{x}^0$. Allora

- *ogni flusso dell'algoritmo è intero e ammissibile,*
- *ogni iterazione abbassa il costo di almeno* 1*,*
- *l'algoritmo si ferma dopo al più* $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^0 - z(\mathrm{MCF})$ *iterazioni con un flusso ottimo.*

Dimostrazione (1/2)

Per la Proposizione 2 il modello è limitato, quindi ha un valore ottimo $z(\mathrm{MCF})$.

1. Se $\boldsymbol{x}$ è intero, le capacità residue sono interi positivi o $+\infty$, e $r(W)$ è un intero positivo, perché $r(W) < +\infty$. Per la Proposizione 1 il nuovo flusso è ammissibile e intero.

2. Il costo cambia di $r(W)\, c(W)$, dove $r(W) \geq 1$ e $c(W) \leq -1$ sono interi: diminuisce di almeno 1.

Dimostrazione (2/2)

3. Il costo parte da $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^0$ e non scende mai sotto $z(\mathrm{MCF})$, quindi le iterazioni sono al più

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^0 - z(\mathrm{MCF}).$$

Alla fine $G(\boldsymbol{x})$ non ha cicli negativi (Proposizione 4), e $\boldsymbol{x}$ è ottimo per il Teorema 1.

□

Tempo di calcolo

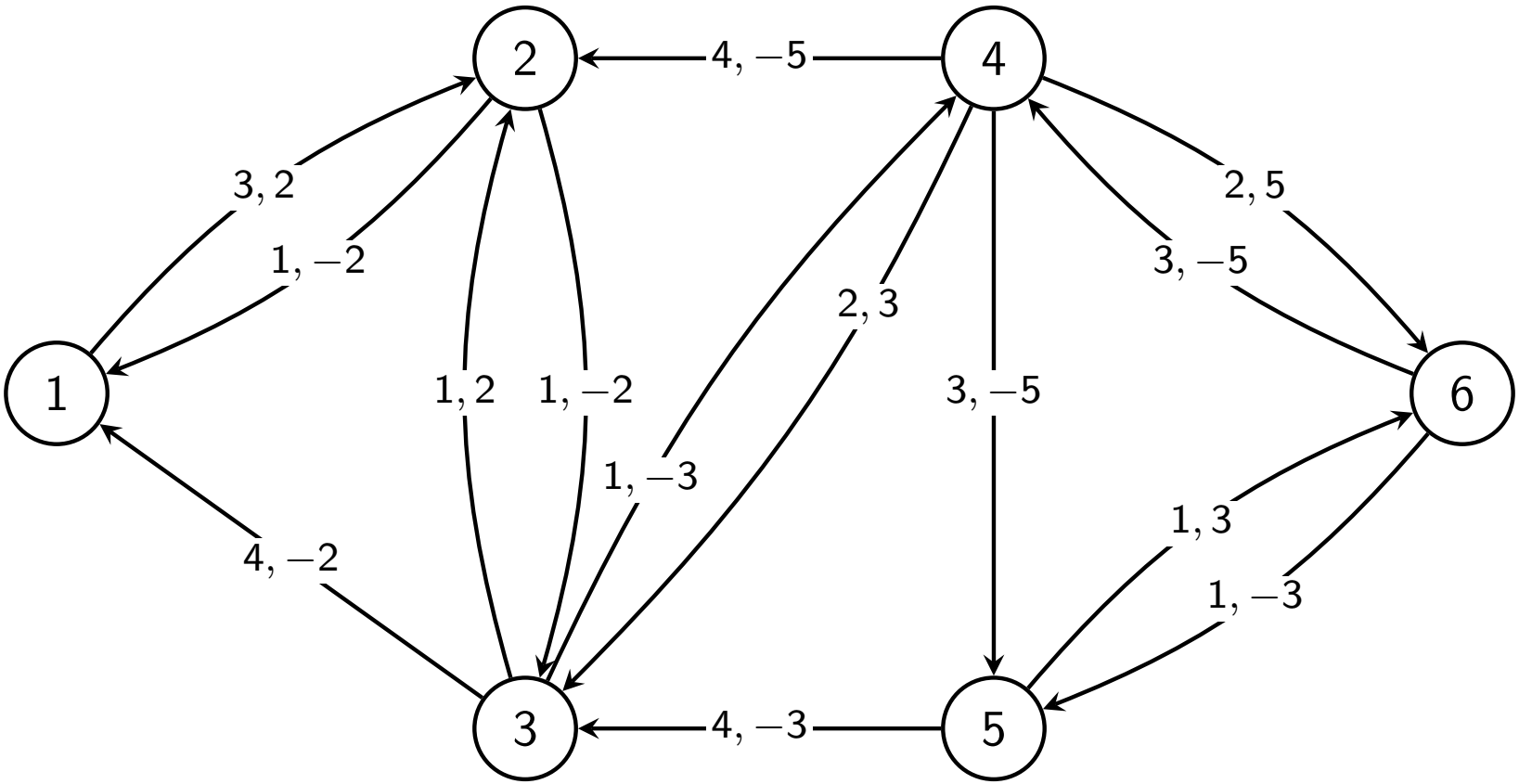
- $G(\boldsymbol{x})$ ha al più $2m$ archi, quindi il Passo 1 richiede tempo $O(n\,m)$.
- Con capacità finite, $U = \max u_{ij}$ e $K = \max |c_{ij}|$, ogni flusso costa fra $-mKU$ e mKU: al più $2mKU$ iterazioni, e tempo $O(n\,m^2 KU)$.
- Il limite dipende dalla grandezza dei numeri K e U, non solo da n e m: è un limite **pseudo-polinomiale**.

Cancellazione dei cicli sulla rete di riferimento

- Sulla rete di riferimento il Passo 0 restituisce $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (l'esempio della sezione precedente), e l'algoritmo si ferma alla prima esecuzione di Bellman–Ford.
- Per vederlo all'opera, partiamo dal flusso più costoso $\boldsymbol{x}^0$ del primo esempio, di costo 80.
- Nelle tabelle ogni riga è una passata k; accanto a un'etichetta che è diminuita, fra parentesi, il suo nuovo predecessore. Le caselle lette all'indietro per trovare la passeggiata sono in grassetto.

Esempio: iterazione 1 (1/4)

$G(\boldsymbol{x}^0)$ è la rete residua del primo esempio, con la coppia r_{ij}, c_{ij}^x su ogni arco:



Esempio: iterazione 1 (2/4)

Bellman–Ford su $G(\boldsymbol{x}^0)$ dà:

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$	$d^k(6)$
0	0	0	0	0	0	0
1	-2 (2)	-5 (4)	-3 (5)	-5 (6)	-5 (4)	0
2	-7 (2)	-10 (4)	-8 (5)	-6 (3)	-10 (4)	-2 (5)
3	-12 (2)	-11 (4)	-13 (5)	-11 (3)	-11 (4)	-7 (5)
4	-15 (3)	-16 (4)	-14 (5)	-16 (3)	-16 (4)	-8 (5)
5	-18 (2)	-21 (4)	-19 (5)	-17 (3)	-21 (4)	-13 (5)
6	-23 (2)	-22 (4)	-24 (5)	-22 (3)	-22 (4)	-18 (5)

Esempio: iterazione 1 (3/4)

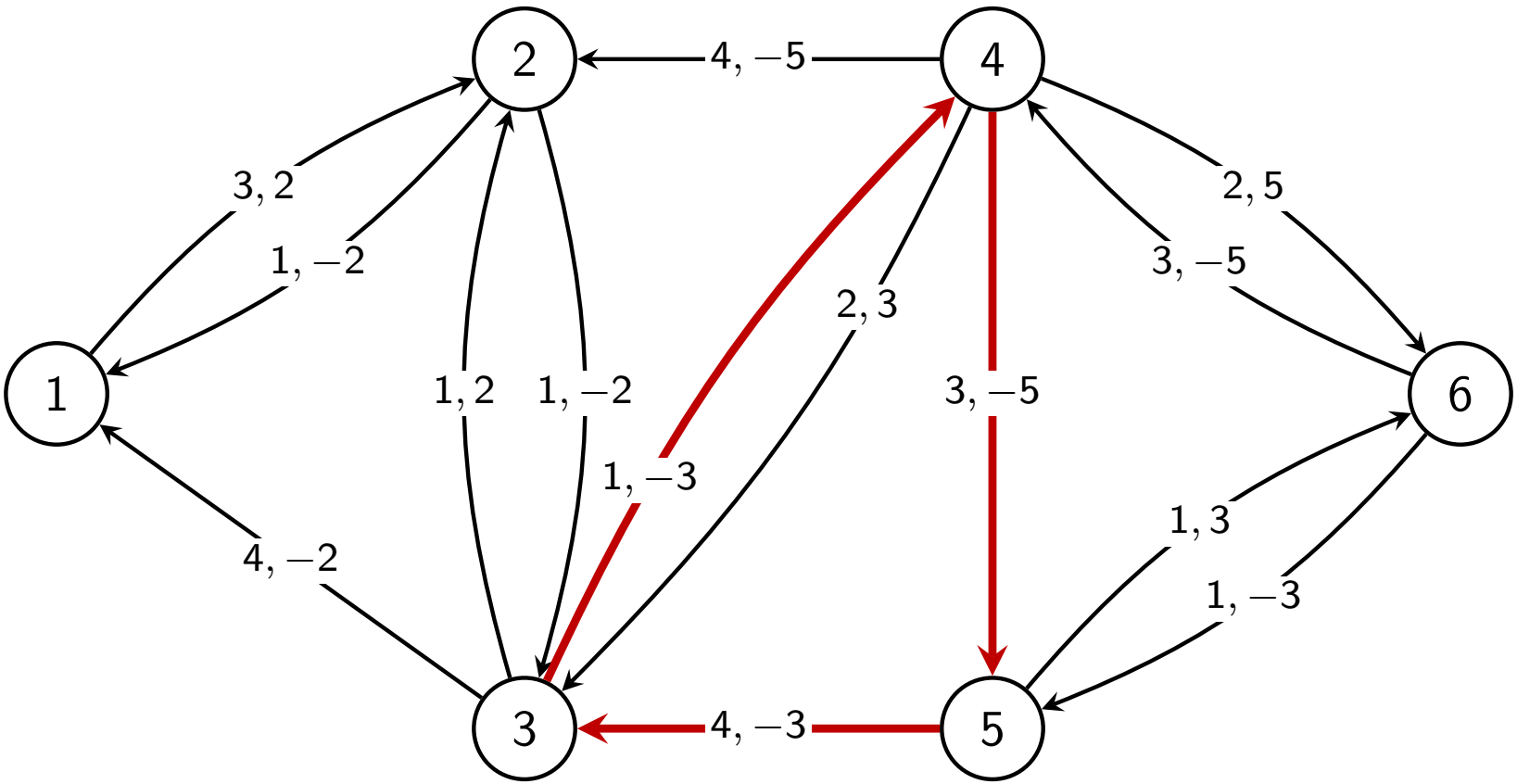
- Nella passata 6 diminuiscono tutte le etichette, quindi $j = 1$.
- Leggendo all'indietro: la riga 6 dà 2, la riga 5 per il nodo 2 dà 4, poi 3, 5, 4, 6.
- La passeggiata $6, 4, 5, 3, 4, 2, 1$ incontra due volte il nodo 4:

$$W = 4, 5, 3, 4, \qquad c(W) = -11, \qquad r(W) = 1.$$

- Il nuovo flusso è $\boldsymbol{x}^1 = (1, 4, 4, 1, 3, 0, 3, 2, 1)$, di costo 69.

Esempio: iterazione 1 (4/4)

Il ciclo $W = 4, 5, 3, 4$ in $G(\boldsymbol{x}^0)$ è rosso: aumentando di $r(W) = 1$ l'arco $(4, 3)$ si svuota.



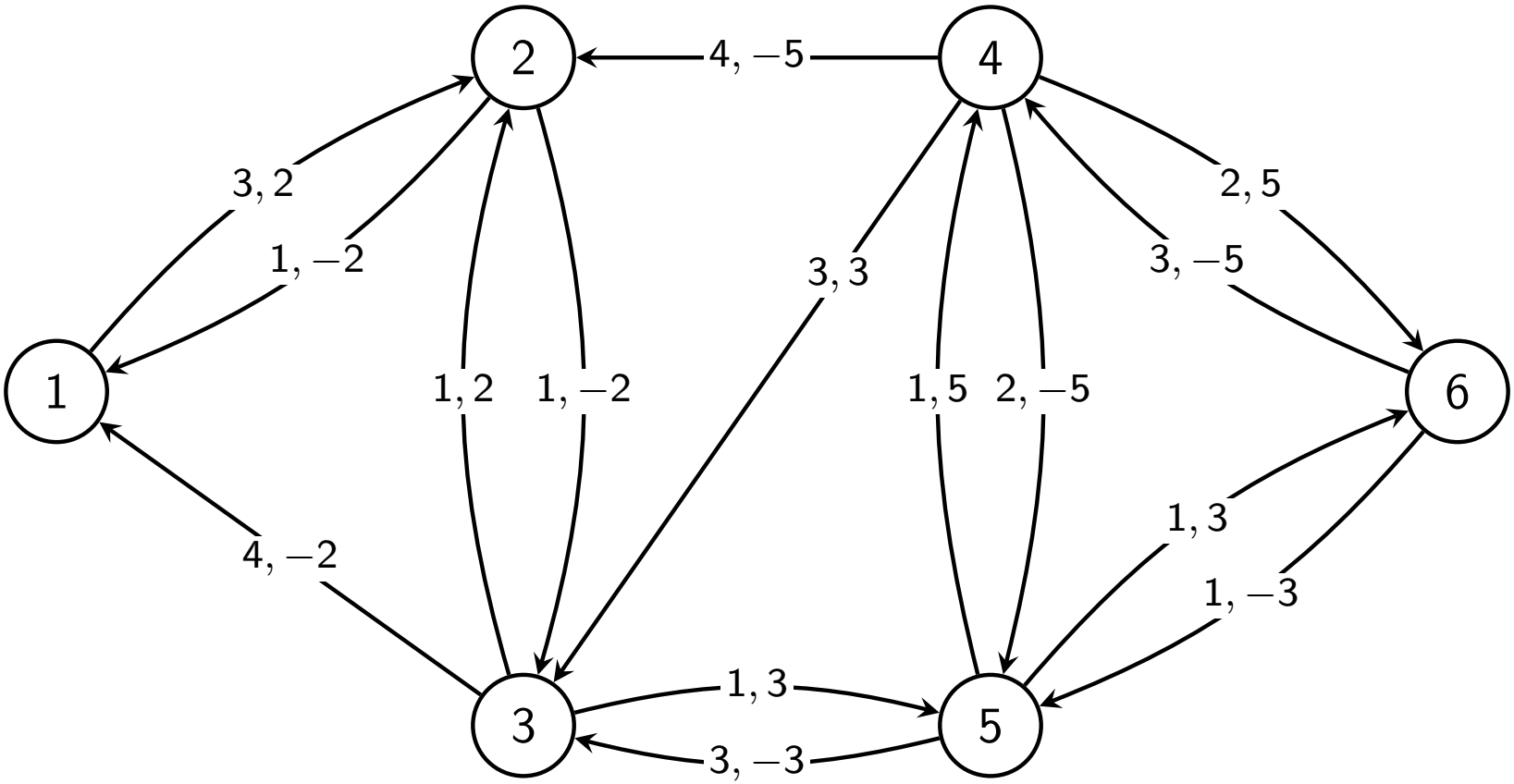
Esempio: iterazione 2 (1/5)

Gli archi di W cambiano: $(4,5)$ e $(5,3)$ perdono un'unità, $(3,4)$ scompare e compaiono gli archi in avanti $(3,5)$, $(5,4)$. $G(\boldsymbol{x}^1)$ è (ogni casella è la coppia r, c):

arco (i,j)	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
x_{ij}^1	1	4	4	1	3	0	3	2	1
in avanti (i,j)	$3,2$	–	–	$1,2$	$1,3$	$3,3$	$2,5$	$1,5$	$1,3$
all'indietro (j,i)	$1,-2$	$4,-2$	$4,-5$	$1,-2$	$3,-3$	–	$3,-5$	$2,-5$	$1,-3$

Esempio: iterazione 2 (2/5)

$G(\boldsymbol{x}^1)$, con la coppia r_{ij}, c_{ij}^x su ogni arco:



Esempio: iterazione 2 (3/5)

Bellman–Ford su $G(\boldsymbol{x}^1)$ dà:

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$	$d^k(6)$
0	0	0	0	0	0	0
1	-2 (2)	-5 (4)	-3 (5)	-5 (6)	-5 (4)	0
2	-7 (2)	-10 (4)	-8 (5)	-5	-10 (4)	-2 (5)
3	-12 (2)	-10	-13 (5)	-7 (6)	-10	-7 (5)
4	-15 (3)	-12 (4)	-13	-12 (6)	-12 (4)	-7
5	-15	-17 (4)	-15 (5)	-12	-17 (4)	-9 (5)
6	-19 (2)	-17	-20 (5)	-14 (6)	-17	-14 (5)

Esempio: iterazione 2 (4/5)

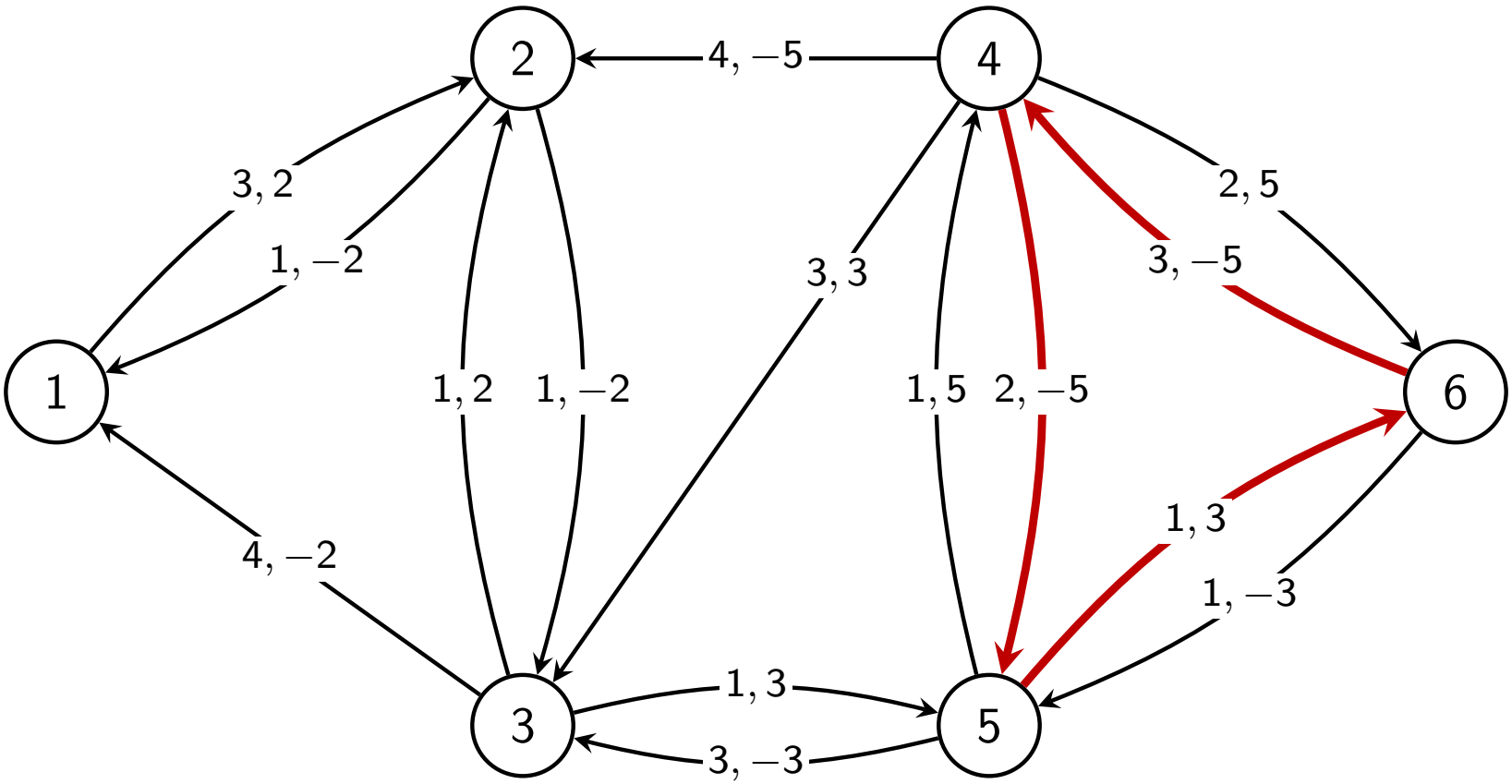
- Di nuovo $j = 1$, e la passeggiata è $6, 4, 5, 6, 4, 2, 1$.
- $W = 6, 4, 5, 6$, formato dagli archi all'indietro di $(4, 6)$ e $(5, 4)$ e dall'arco in avanti $(5, 6)$:

$$c(W) = -5 - 5 + 3 = -7, \qquad r(W) = \min\{3, 2, 1\} = 1.$$

- Il nuovo flusso è $\boldsymbol{x}^2 = (1, 4, 4, 1, 3, 0, 2, 1, 2)$, di costo 62.

Esempio: iterazione 2 (5/5)

Il ciclo $W = 6, 4, 5, 6$ in $G(\boldsymbol{x}^1)$ è rosso: aumentando di $r(W) = 1$ l'arco $(5, 6)$ si satura.

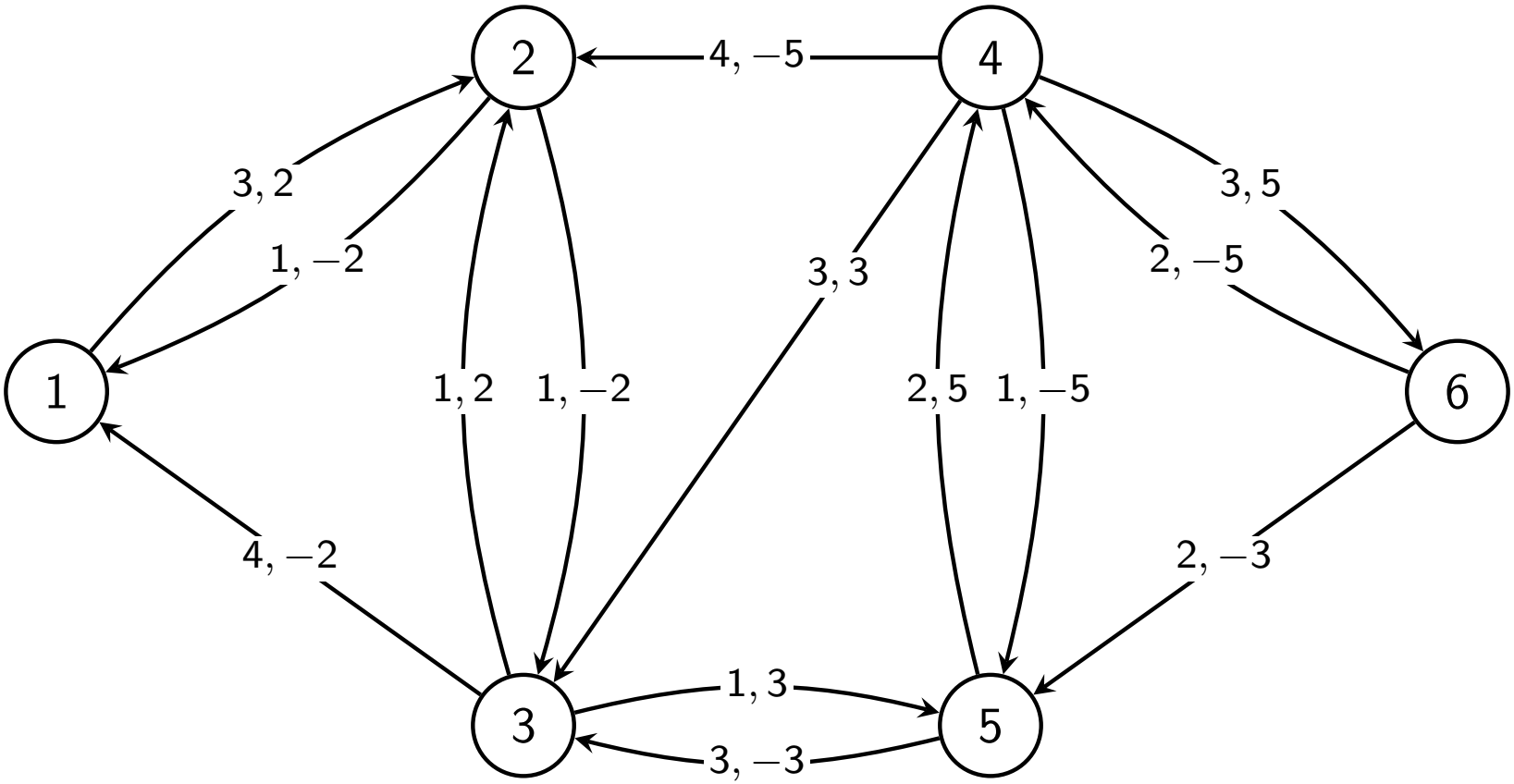


Esempio: iterazione 3 (1/5)

- In $G(\boldsymbol{x}^2)$ l'arco $(5, 6)$ è saturo: resta solo il suo arco all'indietro $(6, 5)$, con $r = 2$.
- Gli archi $(6, 4)$, $(4, 5)$ hanno capacità residue 2 e 1.
- Gli archi in avanti $(4, 6)$, $(5, 4)$ hanno capacità residue 3 e 2.

Esempio: iterazione 3 (2/5)

$G(\boldsymbol{x}^2)$, con la coppia r_{ij}, c_{ij}^x su ogni arco:



Esempio: iterazione 3 (3/5)

Bellman–Ford su $G(\boldsymbol{x}^2)$ dà:

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$	$d^k(6)$
0	0	0	0	0	0	0
1	-2 (2)	-5 (4)	-3 (5)	-5 (6)	-5 (4)	0
2	-7 (2)	-10 (4)	-8 (5)	-5	-10 (4)	0
3	-12 (2)	-10	-13 (5)	-5	-10	0
4	-15 (3)	-11 (3)	-13	-5	-10	0
5	-15	-13 (1)	-13	-5	-10	0
6	-15	-13	-15 (2)	-5	-10	0

Esempio: iterazione 3 (4/5)

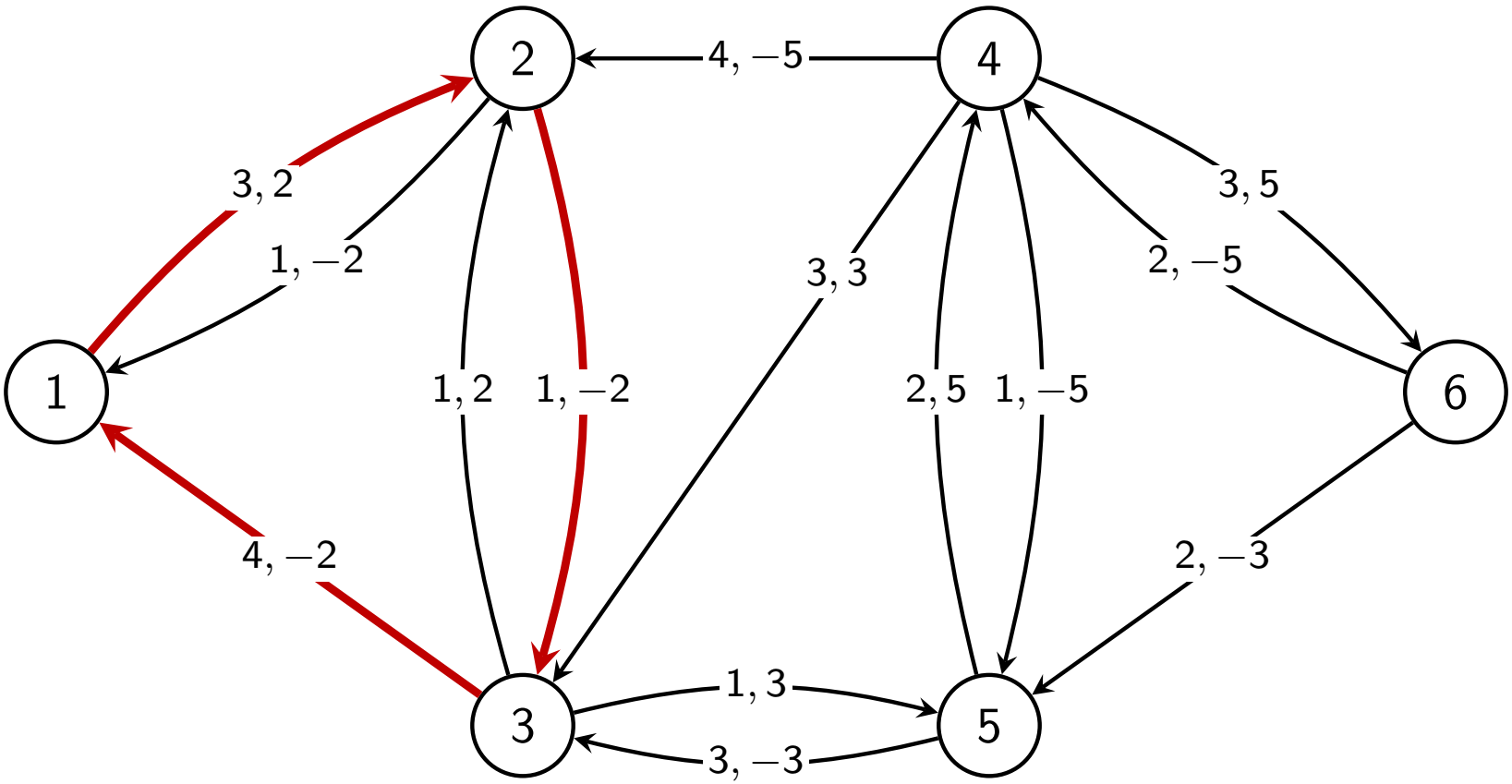
- Nella passata 6 diminuisce solo il nodo 3: $j = 3$, e la passeggiata è $6, 4, 5, 3, 1, 2, 3$.
- Il nodo 3 è incontrato due volte: $W = 3, 1, 2, 3$, formato dall'arco all'indietro di $(1, 3)$, dall'arco in avanti $(1, 2)$ e dall'arco all'indietro di $(3, 2)$:

$$c(W) = -2 + 2 - 2 = -2, \qquad r(W) = \min\{4, 3, 1\} = 1.$$

- Il nuovo flusso è $\boldsymbol{x}^3 = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2) = \tilde{\boldsymbol{x}}$, di costo 60.

Esempio: iterazione 3 (5/5)

Il ciclo $W = 3, 1, 2, 3$ in $G(\boldsymbol{x}^2)$ è rosso: aumentando di $r(W) = 1$ l'arco $(3, 2)$ si svuota.



Esempio: iterazione 4

- Bellman–Ford su $G(\tilde{\boldsymbol{x}})$ ripete le righe 0–5 dell'iterazione 3, e nella passata 6 nessuna etichetta diminuisce:

$$d^6 = d^5 = (-15, -13, -13, -5, -10, 0).$$

- L'algoritmo si ferma con $\tilde{\boldsymbol{x}}$, certificato da

$$\boldsymbol{\pi} = -d^6 = (15, 13, 13, 5, 10, 0),$$

già normalizzati con $\pi_6 = 0$: i potenziali del capitolo «Modelli di flusso su reti».

Le iterazioni della cancellazione dei cicli

iterazione	costo di $\boldsymbol{x}$	j	ciclo W	$c(W)$	$r(W)$
1	80	1	$4, 5, 3, 4$	-11	1
2	69	1	$6, 4, 5, 6$	-7	1
3	62	3	$3, 1, 2, 3$	-2	1
4	60	–	nessuno	–	–

- Il limite del Teorema 3 ammette $80 - 60 = 20$ iterazioni; ne bastano tre.
- I tre cicli sono quelli della scomposizione dell'esempio «da $\boldsymbol{x}^0$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}$», trovati in un ordine diverso.

Riepilogo

L'algoritmo di cancellazione dei cicli:

- Parte da un flusso ammissibile e cancella cicli negativi di $G(\boldsymbol{x})$
- I cicli si trovano con Bellman–Ford a partire da etichette tutte uguali a 0

Correttezza:

- Con dati interi ogni cancellazione abbassa il costo di almeno 1
- Alla fine le etichette danno i potenziali che certificano il flusso ottimo
- Il numero di iterazioni è pseudo-polinomiale

L'algoritmo dei cammini minimi successivi

Introduzione: L'algoritmo dei cammini minimi successivi

- L'algoritmo di cancellazione dei cicli mantiene il flusso ammissibile e cerca il certificato
- In questa sezione facciamo il contrario: manteniamo vero il certificato e costruiamo il flusso, mandandolo lungo cammini minimi dai nodi in eccesso ai nodi in deficit
- I potenziali rendono non negative tutte le lunghezze, quindi si può usare l'algoritmo di Dijkstra

Definizione 5: pseudoflusso e squilibri

Uno ***pseudoflusso*** *è un vettore* $\boldsymbol{x}$ *con* $\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$*, che può violare la conservazione del flusso. Lo* ***squilibrio*** *del nodo* i *è*

$$e_i = b_i - \left(\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} \right) :$$

l'offerta che i *deve ancora mandare se* $e_i > 0$ *(un* ***nodo in eccesso****), la domanda che deve ancora ricevere se* $e_i < 0$ *(un* ***nodo in deficit****).*

Pseudoflussi

- Uno pseudoflusso è un flusso ammissibile esattamente quando $\boldsymbol{e} = 0$.
- La somma degli squilibri è zero, perché lo è quella dei bilanci e ogni arco aggiunge x_{ij} alla sua coda e lo toglie alla sua testa.
- La rete residua $G(\boldsymbol{x})$ di uno pseudoflusso si definisce come nella Definizione 1.

Aumentare lungo un cammino

- Aumentare $\boldsymbol{x}$ lungo un cammino P di $G(\boldsymbol{x})$ da s a t di

$$\delta \leq r(P) = \min_{(i,j)\in P} r_{ij}$$

si definisce come per i cicli:

- i limiti restano soddisfatti,
- e_s diminuisce di δ, e_t aumenta di δ,
- il costo cresce di $\delta\, c(P)$, dove $c(P) = \sum_{(i,j)\in P} c^x_{ij}$.

L'idea dell'algoritmo

- Mantenere potenziali con costi ridotti non negativi su $G(\boldsymbol{x})$, la condizione del Teorema 2, mentre gli squilibri vanno a zero.
- Con $\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{\pi} = 0$ e costi $c_{ij} \geq 0$ la condizione vale all'inizio.

Ora: come aggiornare i potenziali dopo un aumento in modo che i costi ridotti restino non negativi.

Lemma 3: i cammini minimi mantengono non negativi i costi ridotti (1/2)

Siano $\boldsymbol{x}$ *uno pseudoflusso e* $\boldsymbol{\pi}$ *potenziali con*

$$\bar{c}_{ij}^{\pi} = c_{ij}^{x} - \pi_i + \pi_j \geq 0 \quad \textit{su ogni arco di } G(\boldsymbol{x}).$$

Siano $d(i)$ *le distanze da un nodo* s *in* $G(\boldsymbol{x})$ *con le lunghezze* $\bar{c}^{\pi}$ ($d(i) = +\infty$ *se* i *non è raggiungibile*), t *un nodo con* $d(t) < +\infty$, P *un cammino minimo da* s *a* t, *e*

$$\pi'_i = \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}, \qquad \forall i \in N.$$

Lemma: i cammini minimi mantengono non negativi i costi ridotti (2/2)

(a) $c^x_{ij} - \pi'_i + \pi'_j \geq 0$ *su ogni arco di* $G(\boldsymbol{x})$.

(b) $c^x_{ij} - \pi'_i + \pi'_j = 0$ *su ogni arco di* P.

(c) *Se* $\boldsymbol{x}'$ *è* $\boldsymbol{x}$ *aumentato lungo* P *di* $\delta \leq r(P)$, *allora* $c^{x'}_{ij} - \pi'_i + \pi'_j \geq 0$ *su ogni arco di* $G(\boldsymbol{x}')$.

Dimostrazione (1/3)

Sia $\hat{d}(i) = \min\{d(i), d(t)\}$. Il costo ridotto di (i,j) con $\boldsymbol{\pi}'$ è

$$\bar{c}_{ij}^{\pi} + \hat{d}(i) - \hat{d}(j).$$

(a) Sia (i,j) un arco di $G(\boldsymbol{x})$.

- Se $d(i) < +\infty$, un cammino minimo fino a i seguito da (i,j) dà $d(j) \leq d(i) + \bar{c}_{ij}^{\pi}$, quindi

$$\hat{d}(j) \leq \min\{d(i) + \bar{c}_{ij}^{\pi},\, d(t)\} \leq \hat{d}(i) + \bar{c}_{ij}^{\pi},$$

  perché $\bar{c}_{ij}^{\pi} \geq 0$.
- Se $d(i) = +\infty$, allora $\hat{d}(i) = d(t) \geq \hat{d}(j)$.

In entrambi i casi il nuovo costo ridotto è non negativo.

Dimostrazione (2/3)

(b) I sottocammini di P sono minimi (Lemma «ottimalità dei sottocammini» del capitolo «Cammini minimi»), quindi

$$d(j) = d(i) + \bar{c}_{ij}^{\pi} \qquad \text{su ogni arco di } P,$$

e $d(i) \leq d(t)$ lungo P perché le lunghezze sono non negative.

Quindi $\hat{d} = d$ su P, e il nuovo costo ridotto è 0.

Dimostrazione (3/3)

(c) Aumentare lungo P cambia $G(\boldsymbol{x})$ solo sugli archi di P:

- un arco (i, j) di P può scomparire, e l'arco opposto (j, i) può comparire;
- l'opposto di un arco residuo ha il costo opposto, quindi per (b) costo ridotto 0;
- gli altri archi mantengono i loro costi ridotti, non negativi per (a).

□

Perché «cammini minimi successivi»

- Per ogni cammino P da s a t i potenziali si elidono:

$$\sum_{(i,j)\in P} \bar{c}_{ij}^{\pi} = c(P) - \pi_s + \pi_t.$$

- Un cammino minimo per i costi ridotti è un cammino di costo minimo di $G(\boldsymbol{x})$.

- Il flusso viaggia lungo i cammini più economici, da cui il nome dell'algoritmo.

Algorithm: Algoritmo dei cammini minimi successivi (1/2)

Input : una rete bilanciata con $\boldsymbol{l} = 0$, b_i e u_{ij} interi, costi $c_{ij} \geq 0$

Output : un flusso ottimo $\boldsymbol{x}$ con il certificato $\boldsymbol{\pi}$, o «inammissibile»

1 **Passo 0 (inizializzazione).** Poni $\boldsymbol{x} := 0$, $\boldsymbol{\pi} := 0$ ed $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{b}$.
2 **Passo 1 (scelta).** Se $\boldsymbol{e} = 0$, `STOP`: $\boldsymbol{x}$ è ottimo, con $\boldsymbol{\pi}$.
3 Altrimenti sia s il nodo di indice più piccolo con $e_s > 0$.

Algorithm: Algoritmo dei cammini minimi successivi (2/2)

4 **Passo 2 (cammini minimi).** Esegui Dijkstra da s su $G(\boldsymbol{x})$, lunghezze $c^x_{ij} - \pi_i + \pi_j$.

5 Se nessun nodo con $e_t < 0$ è raggiungibile, `STOP`: inammissibile.

6 Altrimenti t è il nodo raggiungibile con $e_t < 0$ e $d(t)$ minimo, P il suo cammino.

7 **Passo 3 (aumento).** Poni $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$ per ogni $i \in N$.

8 Aumenta $\boldsymbol{x}$ lungo P di $\delta := \min\{e_s, -e_t, r(P)\}$; aggiorna e_s, e_t.

9 Torna al Passo 1.

Regole di questo capitolo

- L'algoritmo di Dijkstra risolve le parità con l'indice più piccolo, come nel capitolo «Cammini minimi».
- Fra i nodi in deficit alla stessa distanza, t è quello di indice più piccolo.

Teorema 4: correttezza dell'algoritmo dei cammini minimi successivi

Con l'input dell'algoritmo, all'inizio di ogni iterazione $\boldsymbol{x}$ *è uno pseudoflusso intero e* $c_{ij}^{x} - \pi_i + \pi_j \geq 0$ *su ogni arco di* $G(\boldsymbol{x})$. *L'algoritmo si ferma dopo al più*

$$D = \sum_{i:b_i>0} b_i$$

iterazioni. Se si ferma al Passo 1, $\boldsymbol{x}$ *è un flusso ottimo; se si ferma al Passo 2, la rete non ha flussi ammissibili.*

Dimostrazione (1/3)

Dimostriamo l'invariante, poi il limite e i due arresti.

1. *Invariante.*
   - All'inizio $G(0)$ ha solo gli archi in avanti, con costi $c_{ij} \geq 0$, e $\pi = 0$.
   - L'algoritmo di Dijkstra si può applicare, perché le lunghezze sono non negative, e il Lemma 3(c) mantiene non negativi i costi ridotti.
   - La quantità δ è un intero positivo, perché e_s, $-e_t$ e le capacità residue sono interi positivi (o $+\infty$), quindi $\boldsymbol{x}$ resta intero.

Dimostrazione (2/3)

2. *Limite.*
   - Se $e_s > 0$, qualche nodo ha $e_t < 0$, perché la somma degli squilibri è zero.
   - Ogni iterazione abbassa $\sum_{i:e_i>0} e_i$ di $\delta \geq 1$, e nessuno squilibrio cambia segno, perché $\delta \leq e_s$ e $\delta \leq -e_t$.
   - La somma parte da D.

3. *Arresto al Passo 1.* $\boldsymbol{e} = 0$, quindi $\boldsymbol{x}$ è un flusso ammissibile, ottimo per l'invariante e il Teorema 2.

Dimostrazione (3/3)

4. *Arresto al Passo 2.* Sia S l'insieme dei nodi raggiungibili da s. Nessun arco di $G(\boldsymbol{x})$ esce da S, quindi $x_{ij} = u_{ij}$ su $\delta^+(S)$ e $x_{ij} = 0$ su $\delta^-(S)$. Lo pseudoflusso rispetta la conservazione con i bilanci $b_i - e_i$, quindi per il Lemma «flusso attraverso un taglio» del capitolo «Modelli di flusso su reti»

$$\begin{aligned}\sum_{i \in S} b_i &= x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) + \sum_{i \in S} e_i \\ &= u(\delta^+(S)) + \sum_{i \in S} e_i > u(\delta^+(S)),\end{aligned}$$

perché $e_s > 0$ e nessun nodo di S ha $e_i < 0$. La condizione sui tagli del capitolo «Modelli di flusso su reti» non vale per S: non ci sono flussi ammissibili.

□

Tempo di calcolo e costi negativi

- **Tempo di calcolo.** Ogni iterazione esegue l'algoritmo di Dijkstra in tempo $O(n^2)$: $O(D\,n^2)$ in tutto, un limite pseudo-polinomiale.

- **Costi negativi.** Se alcuni archi di capacità finita hanno $c_{ij} < 0$, si parte da $x_{ij} = u_{ij}$ su di essi e $x_{ij} = 0$ altrove, con $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$:
  - un arco di questo tipo dà solo il suo arco all'indietro, di costo $-c_{ij} > 0$,
  - e $\boldsymbol{\pi} = 0$ va di nuovo bene.

Esempio: cammini minimi successivi

- Partiamo da

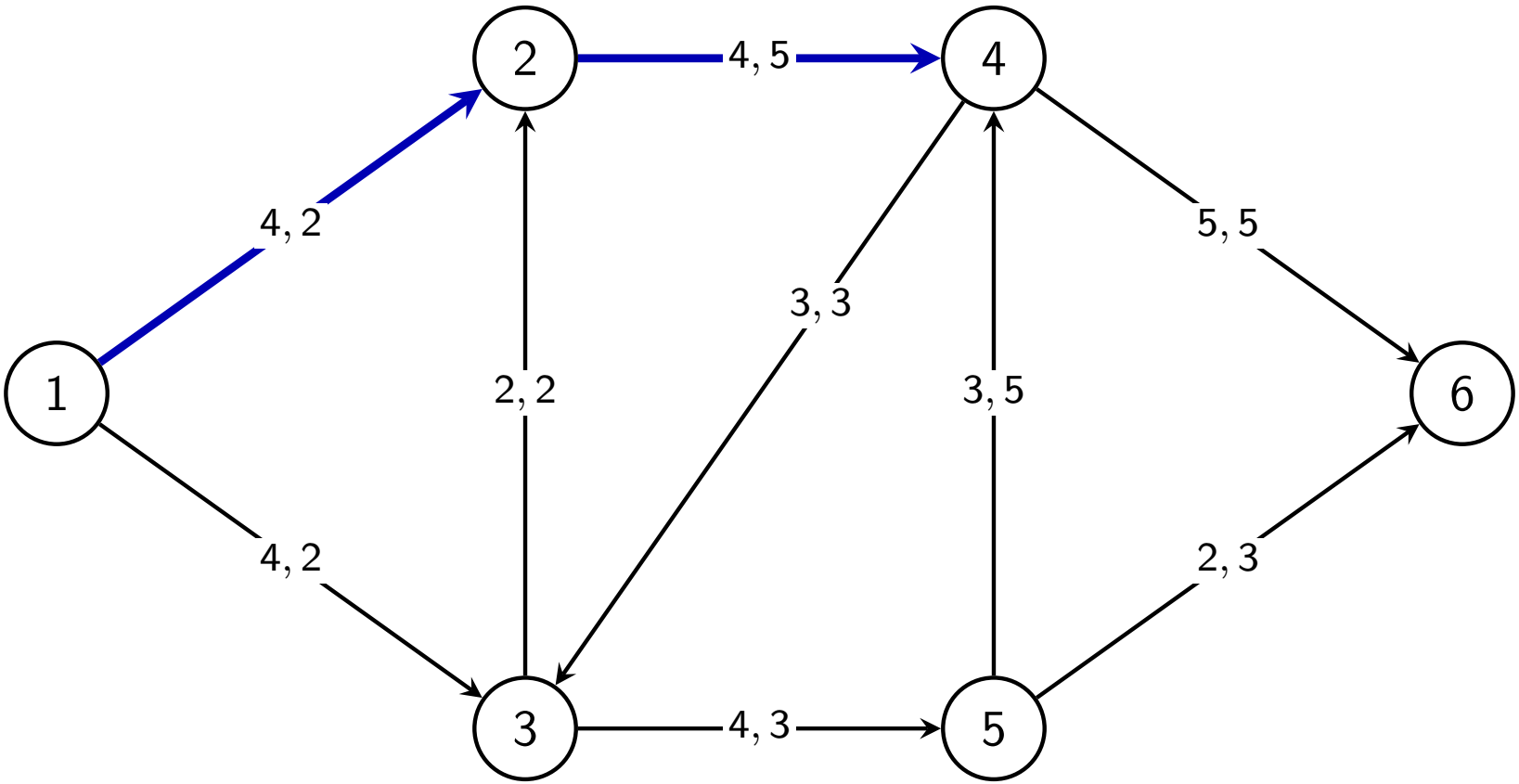
$$\boldsymbol{x} = 0, \qquad \boldsymbol{\pi} = 0, \qquad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4).$$

- In ogni iterazione mostriamo $G(\boldsymbol{x})$ con r_{ij} e il costo ridotto $c^x_{ij} - \pi_i + \pi_j$ su ogni arco, e il cammino P in blu.

- Poi: il nodo s, le distanze dell'algoritmo di Dijkstra, il nodo t, il cammino P con il suo costo ridotto $d(t)$ e il suo costo $c(P)$, la quantità δ, e i nuovi potenziali, squilibri e flusso.

Esempio: iterazione 1 (1/2)

$G(0)$ ha solo gli archi in avanti; i costi ridotti sono i costi. Il cammino $P = 1, 2, 4$ è in blu:



Esempio: iterazione 1 (2/2)

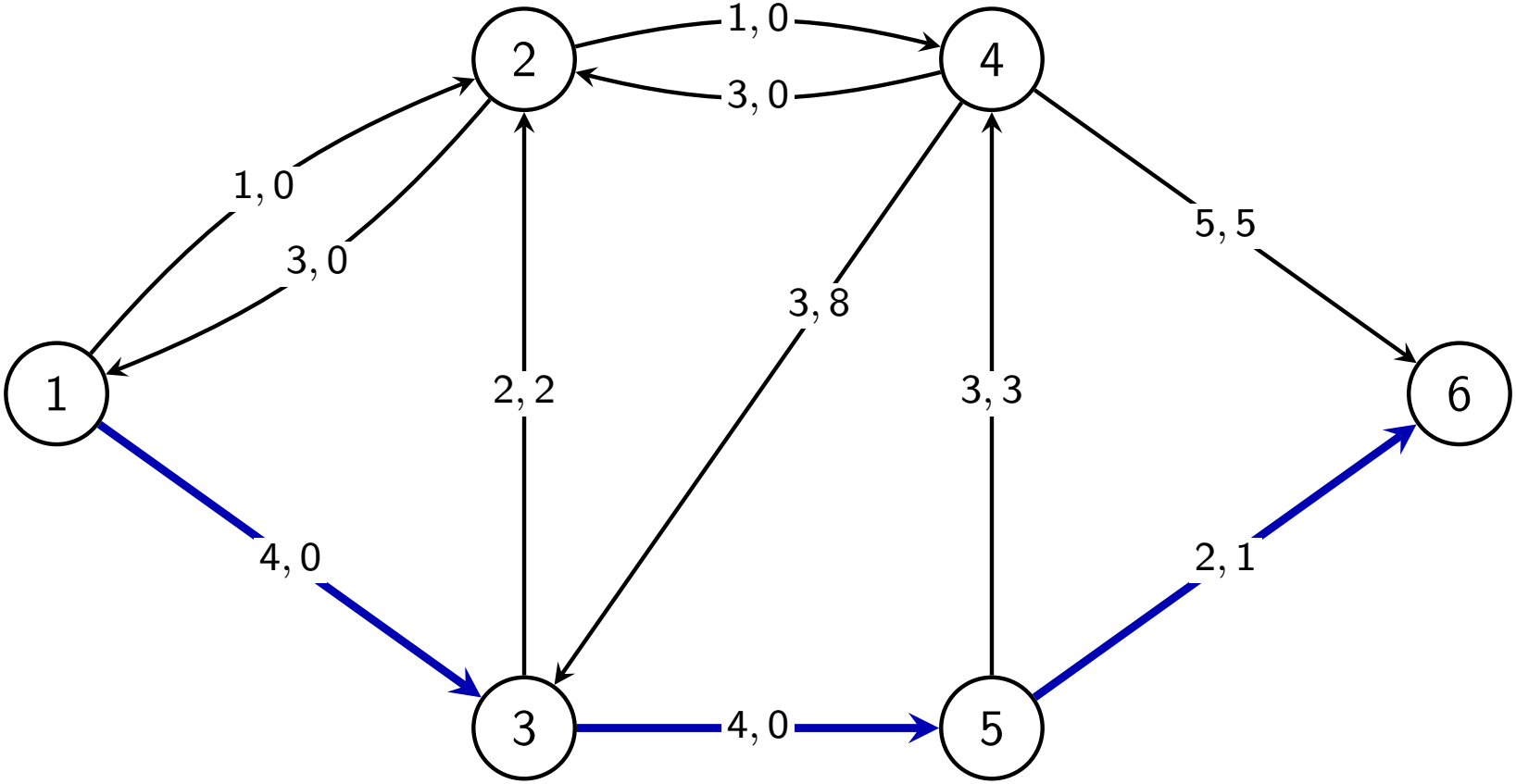
- $s = 1$, e Dijkstra dà $d = (0, 2, 2, 7, 5, 8)$.
- I nodi in deficit 4 e 6 sono a distanza 7 e 8: $t = 4$, e $P = 1, 2, 4$, con $d(t) = 7$ e $c(P) = 7$.
- $\delta = \min\{5, 3, 4, 4\} = 3$, e il nuovo flusso costa 21.
- Il nodo 6 è più lontano di t e il suo potenziale diminuisce di 7, non di 8.

Dopo l'iterazione:

$$\boldsymbol{\pi} = (0, -2, -2, -7, -5, -7),$$
$$\boldsymbol{e} = (2, 2, 0, 0, 0, -4),$$
$$\boldsymbol{x} = (3, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Esempio: iterazione 2 (1/2)

$G(\boldsymbol{x})$ con r_{ij} e il costo ridotto su ogni arco. Il cammino $P = 1, 3, 5, 6$ è in blu:



Esempio: iterazione 2 (2/2)

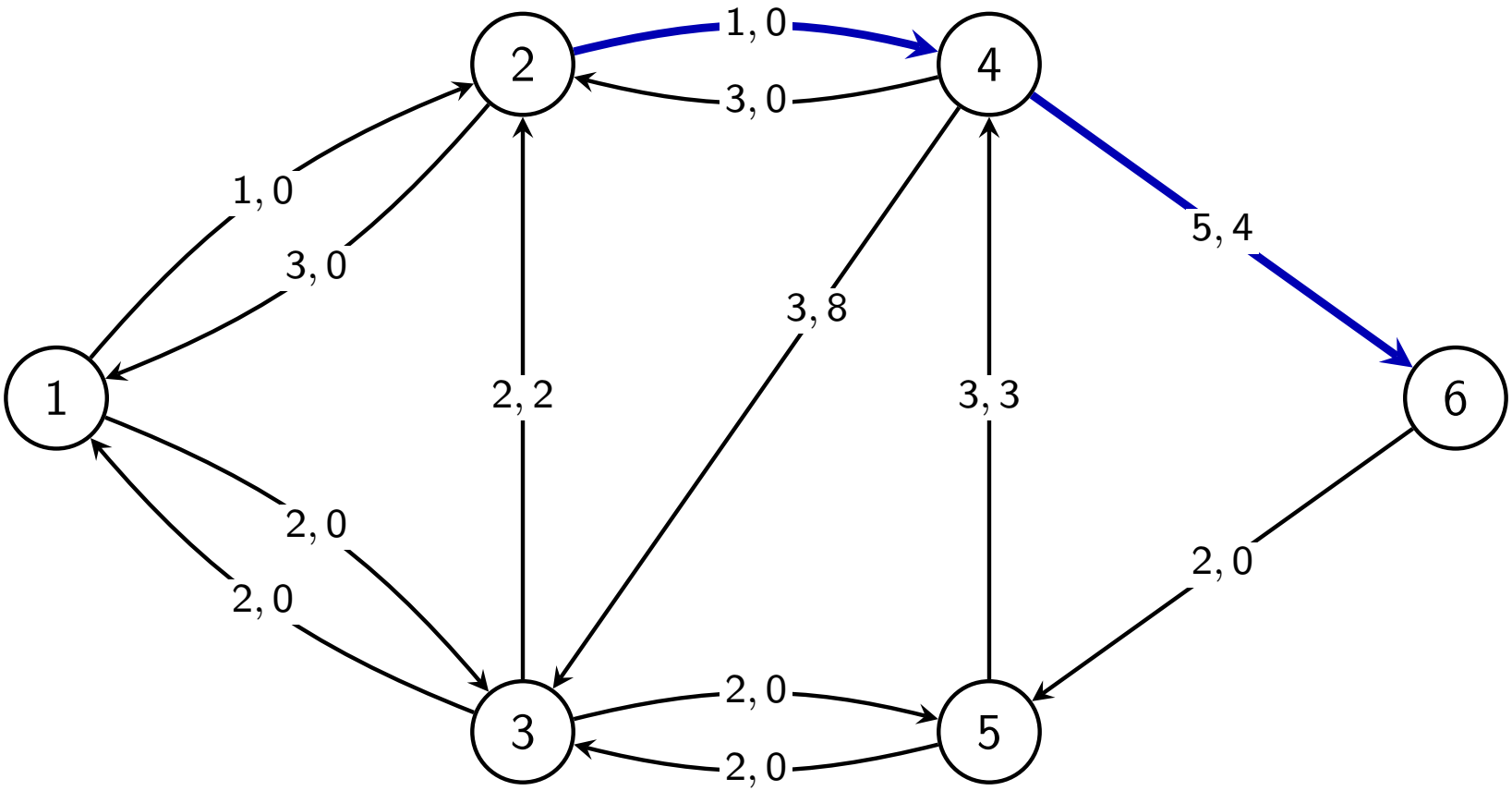
- Gli archi $(1,2)$, $(2,4)$ del primo cammino hanno ora costo ridotto 0, e così i loro archi all'indietro.
- $s = 1$, e Dijkstra dà $d = (0,0,0,0,0,1)$: $t = 6$.
- Il cammino $1,3,5,6$ ha costo ridotto $d(t) = 1$ e costo $c(P) = 8$.
- $\delta = \min\{2,4,4,4,2\} = 2$ è fissato da e_1 e da u_{56}; il nuovo flusso costa 37.

Dopo l'iterazione:

$$\boldsymbol{\pi} = (0,-2,-2,-7,-5,-8),$$
$$\boldsymbol{e} = (0,2,0,0,0,-2),$$
$$\boldsymbol{x} = (3,2,3,0,2,0,0,0,2).$$

Esempio: iterazione 3 (1/2)

$G(\boldsymbol{x})$ con r_{ij} e il costo ridotto su ogni arco. Il cammino $P = 2, 4, 6$ è in blu:



Esempio: iterazione 3 (2/2)

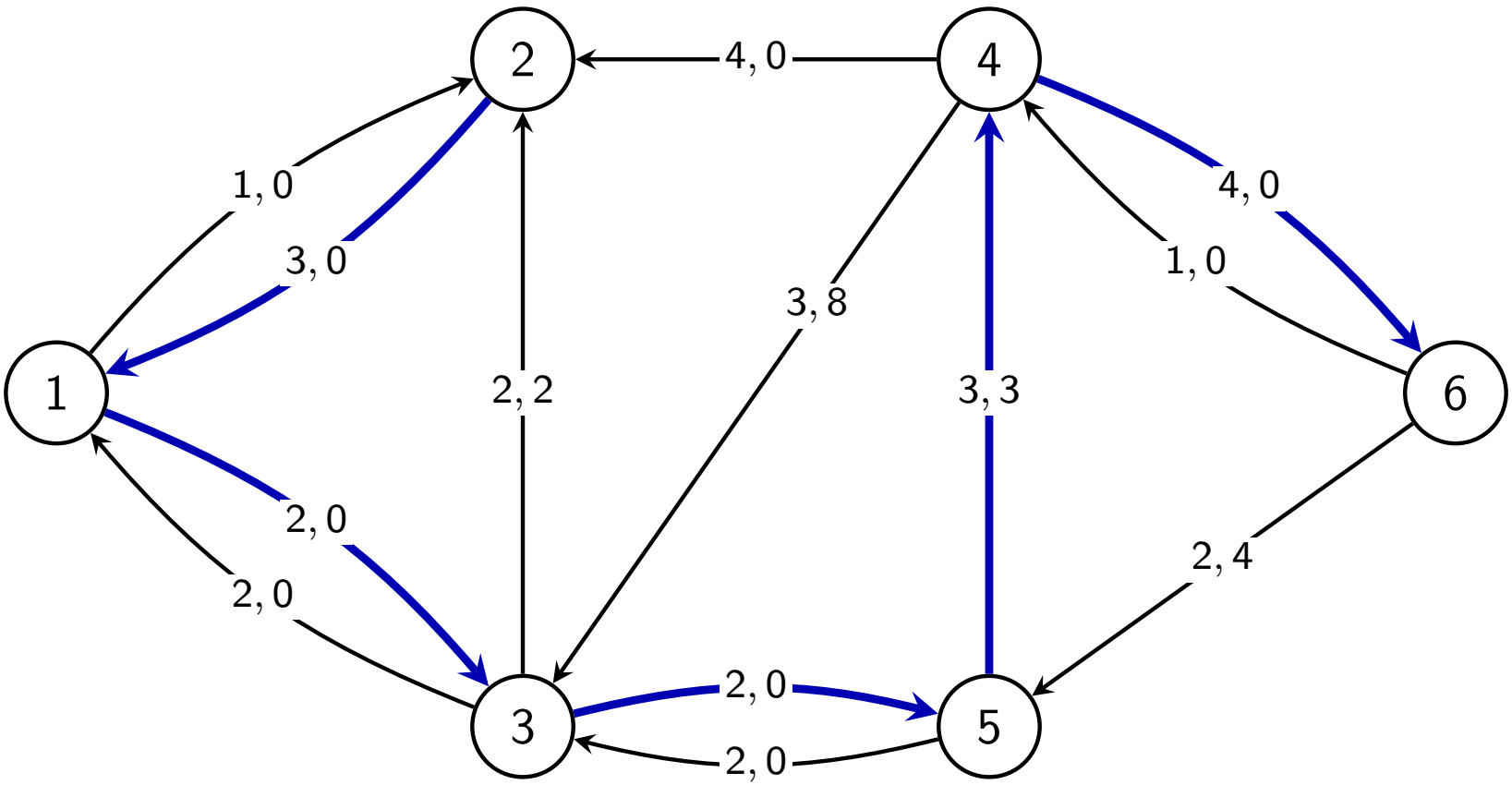
- $s = 2$, e $d(1) = 0$ attraverso l'arco all'indietro $(2, 1)$.
- Dijkstra dà $d = (0, 0, 0, 0, 0, 4)$: $t = 6$.
- Il cammino $2, 4, 6$ ha costo ridotto $d(t) = 4$ e costo $c(P) = 10$.
- Usa l'ultima unità di $(2, 4)$: $\delta = 1$, e il nuovo flusso costa 47.

Dopo l'iterazione:

$$\boldsymbol{\pi} = (0, -2, -2, -7, -5, -12),$$
$$\boldsymbol{e} = (0, 1, 0, 0, 0, -1),$$
$$\boldsymbol{x} = (3, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 0, 2).$$

Esempio: iterazione 4 (1/2)

$G(\boldsymbol{x})$ con r_{ij} e il costo ridotto su ogni arco. Il cammino $P = 2, 1, 3, 5, 4, 6$ è in blu:



Esempio: iterazione 4 (2/2)

- $s = 2$, e Dijkstra dà $d = (0, 0, 0, 3, 0, 3)$: $t = 6$.
- Il cammino $2, 1, 3, 5, 4, 6$ ha costo ridotto $d(t) = 3$ e costo $c(P) = 13$; $\delta = 1$, e il nuovo flusso costa 60.
- Usa l'arco all'indietro $(2, 1)$: un'unità che andava da 1 a 2 viene deviata da 1 attraverso 3, 5 e 4.

Dopo l'iterazione:

$$\boldsymbol{\pi} = (0, -2, -2, -10, -5, -15),$$
$$\boldsymbol{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{x} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2).$$

Esempio: la fine dell'algoritmo

- Dopo l'iterazione 4 gli squilibri sono nulli e $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}$, di costo 60.
- Traslati di 15, i potenziali diventano

$$(15, 13, 13, 5, 10, 0) :$$

i potenziali del capitolo «Modelli di flusso su reti».

Ora: le quattro iterazioni raccolte in tabelle, come nelle note.

Esempio: le iterazioni in tabelle (1/4)

Ogni riga è un'iterazione, con il nodo s, le distanze dell'algoritmo di Dijkstra e il nodo t:

it.	s	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5)$	$d(6)$	t
1	1	0	2	2	7	5	8	4
2	1	0	0	0	0	0	1	6
3	2	0	0	0	0	0	4	6
4	2	0	0	0	3	0	3	6

Esempio: le iterazioni in tabelle (2/4)

Il cammino P, il suo costo ridotto $d(t)$ e il suo costo $c(P)$, la quantità δ e il costo del nuovo flusso:

it.	P	$d(t)$	$c(P)$	δ	costo
1	$1, 2, 4$	7	7	3	21
2	$1, 3, 5, 6$	1	8	2	37
3	$2, 4, 6$	4	10	1	47
4	$2, 1, 3, 5, 4, 6$	3	13	1	60

Esempio: le iterazioni in tabelle (3/4)

Dopo ogni iterazione, i potenziali, gli squilibri e il flusso:

it.	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{x}$
0	$(0,0,0,0,0,0)$	$(5,2,0,-3,0,-4)$	$(0,0,0,0,0,0,0,0,0)$
1	$(0,-2,-2,-7,-5,-7)$	$(2,2,0,0,0,-4)$	$(3,0,3,0,0,0,0,0,0)$
2	$(0,-2,-2,-7,-5,-8)$	$(0,2,0,0,0,-2)$	$(3,2,3,0,2,0,0,0,2)$
3	$(0,-2,-2,-7,-5,-12)$	$(0,1,0,0,0,-1)$	$(3,2,4,0,2,0,1,0,2)$
4	$(0,-2,-2,-10,-5,-15)$	$(0,0,0,0,0,0)$	$(2,3,4,0,3,0,2,1,2)$

Esempio: le iterazioni in tabelle (4/4)

I costi ridotti $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ degli archi di A, prima di ogni iterazione (l'arco in avanti ha $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$, l'arco all'indietro $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$):

it.	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
1	2	2	5	2	3	3	5	5	3
2	0	0	0	2	0	8	5	3	1
3	0	0	0	2	0	8	4	3	0
4	0	0	0	2	0	8	0	3	-4

I costi dei cammini crescono

- Qui i costi $7, 8, 10, 13$ dei cammini crescono da un'iterazione all'altra: le unità successive viaggiano lungo cammini più costosi, e il costo totale è

$$3 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 10 + 13 = 60.$$

- Qui bastano quattro iterazioni, mentre il limite del Teorema 4 è $D = 7$.

Osservazione 1: Dijkstra ha bisogno dei costi ridotti

Nell'iterazione 4 *gli archi* $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,2)$, $(5,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$ *di* $G(\boldsymbol{x})$ *sono archi all'indietro con costi* c_{ij}^{x} *negativi, e l'algoritmo di Dijkstra con lunghezze negative può sbagliare (capitolo «Cammini minimi»).*

I potenziali rendono non negative tutte le lunghezze senza cambiare i cammini minimi.

Riepilogo

L'algoritmo dei cammini minimi successivi:

- Manda flusso da un nodo in eccesso a un nodo in deficit lungo un cammino minimo di $G(\boldsymbol{x})$
- Il cammino si trova con l'algoritmo di Dijkstra sui costi ridotti

Correttezza:

- L'aggiornamento $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$ mantiene non negativi i costi ridotti
- Il flusso finale è ottimo e i potenziali lo certificano
- Al più D iterazioni con dati interi

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- In questa sezione elenchiamo gli errori più frequenti con la rete residua e con i due algoritmi
- Riguardano i costi degli archi all'indietro, l'ampiezza degli aumenti, l'uso di Bellman–Ford e di Dijkstra, e i potenziali
- Riconoscerli aiuta a eseguire correttamente gli algoritmi a mano

Osservazione 2: errori tipici (1/3)

- ***Dare all'arco all'indietro il costo*** $+c_{ij}$***.*** *Un arco all'indietro diminuisce* x_{ij}*, quindi risparmia* c_{ij} *per unità: il suo costo è* $-c_{ij}$*, e la sua capacità residua è* $x_{ij} - l_{ij}$*.*
- ***Aumentare di più di*** $r(W)$***.*** *Qualche arco del ciclo uscirebbe dai suoi limiti;* $\theta = r(W)$ *è il passo più lungo possibile.*
- ***Eseguire Bellman–Ford da un solo nodo.*** *Un ciclo negativo non raggiungibile da quel nodo sfugge; le etichette partono da* 0 *su ogni nodo.*

Osservazione: errori tipici (2/3)

- ***Scambiare la passeggiata per il ciclo.*** *La passeggiata con n archi letta dalla tabella contiene un ciclo negativo, ma non è essa stessa un ciclo: il ciclo è il tratto fra due occorrenze dello stesso nodo.*
- ***Eseguire l'algoritmo di Dijkstra sui costi*** c^x_{ij}***.*** *Gli archi all'indietro possono avere costi negativi; le lunghezze sono i costi ridotti* $c^x_{ij} - \pi_i + \pi_j$.

Osservazione: errori tipici (3/3)

- ***Aggiornare i potenziali con il segno sbagliato.*** *Con $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ l'aggiornamento è $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$; i nodi più lontani di t diminuiscono solo di $d(t)$.*
- ***Prendere per ottimo il flusso massimo del Passo 0.*** *La rete ausiliaria non ha costi: il suo flusso massimo è ammissibile, e ottimo solo per caso.*

Riepilogo

Rete residua e cancellazione dei cicli:

- Gli archi all'indietro costano $-c_{ij}$; si aumenta al più di $r(W)$
- Bellman–Ford parte da etichette 0 su ogni nodo; il ciclo è un tratto della passeggiata

Cammini minimi successivi:

- Dijkstra lavora sui costi ridotti, non sui costi
- $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$, con il segno meno
- Il flusso massimo del Passo 0 è ammissibile, in generale non ottimo

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo in pochi punti le idee chiave del capitolo
- Chiudiamo con la rete di riferimento in sintesi: i flussi, i cicli, i cammini e i potenziali calcolati in questo capitolo

Riepilogo (1/3)

- La rete residua $G(\boldsymbol{x})$ ha un arco in avanti (i, j) con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ e costo c_{ij}, e un arco all'indietro (j, i) con $r_{ji} = x_{ij} - l_{ij}$ e costo $-c_{ij}$; aumentare lungo un ciclo W cambia il costo di $\theta\, c(W)$.
- Una circolazione si scompone in cicli; la differenza di due flussi ammissibili è una circolazione su $G(\boldsymbol{x})$.
- Un flusso ammissibile è ottimo se e solo se $G(\boldsymbol{x})$ non ha cicli negativi, se e solo se qualche vettore di potenziali dà costi ridotti non negativi su $G(\boldsymbol{x})$; sugli archi di A: $\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = l_{ij}$, $\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$.

Riepilogo (2/3)

- Un flusso massimo da una super sorgente a un super pozzo trova un flusso ammissibile o dimostra che non ce ne sono.
- Cancellazione dei cicli: Bellman–Ford da etichette 0 trova un ciclo negativo, aumentare di $r(W)$ lo cancella; al più $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^0 - z(\mathrm{MCF})$ iterazioni con dati interi.
- Cammini minimi successivi: Dijkstra sui costi ridotti da un nodo in eccesso al nodo in deficit più vicino, $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$; al più D iterazioni.

Riepilogo (3/3)

La rete di riferimento in sintesi.

flusso più costoso	$\boldsymbol{x}^0 = (1, 4, 4, 1, 4, 1, 3, 3, 1)$, costo 80
cancellazione dei cicli	cicli $4, 5, 3, 4$; $6, 4, 5, 6$; $3, 1, 2, 3$
(da $\boldsymbol{x}^0$)	costi $80, 69, 62, 60$
cammini minimi successivi	cammini $1, 2, 4$; $1, 3, 5, 6$; $2, 4, 6$;
	$2, 1, 3, 5, 4, 6$; costi $21, 37, 47, 60$
primo flusso ammissibile	flusso massimo di valore 7; su A è $\tilde{\boldsymbol{x}}$
flusso ottimo	$\tilde{\boldsymbol{x}} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$, $z(\mathrm{MCF}) = 60$
potenziali ($\pi_6 = 0$)	$\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$