Flusso massimo

Indice

Il problema del flusso massimo

Tagli

La rete residua

Il teorema flusso massimo-taglio minimo

L'algoritmo di Ford–Fulkerson

L'algoritmo di Edmonds–Karp

Applicazioni

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare il problema del flusso massimo e scriverne il modello LP;
- calcolare la capacità di un taglio s–t e usare i tagli come limiti superiori del valore di ogni flusso;
- costruire la rete residua di un flusso, trovare un cammino aumentante e il suo collo di bottiglia, e aumentare il flusso;
- dimostrare il teorema flusso massimo-taglio minimo e il teorema di integralità;
- eseguire gli algoritmi di Ford–Fulkerson e di Edmonds–Karp, leggere un taglio minimo all'arresto e darne i tempi di esecuzione;
- calcolare un accoppiamento massimo in un grafo bipartito e un insieme massimo di cammini arco-disgiunti come flussi massimi.

Prerequisiti

- Da questo modulo, Capitolo 1 «Grafi»: cammini orientati, la visita in ampiezza e la visita in profondità.
- Da questo modulo, Capitolo 4 «Modelli di flusso su reti»: conservazione del flusso, flusso attraverso un taglio, modello di flusso a costo minimo e i suoi vertici interi.
- Dal modulo Programmazione lineare, Capitolo 15 «La geometria della programmazione lineare»: una funzione lineare raggiunge il massimo su un poliedro limitato non vuoto.

Il problema del flusso massimo

Introduzione: Il problema del flusso massimo

- In questa sezione definiamo il problema del flusso massimo: inviare quanto più flusso possibile da una sorgente s a un pozzo t, rispettando le capacità degli archi
- È uno dei problemi di base dell'ottimizzazione su reti: modella condotte, traffico, reti di comunicazione e molti problemi di assegnamento
- Introduciamo la rete di riferimento del capitolo e scriviamo il problema come modello di Programmazione lineare, il modello MF

Definizione 1: problema del flusso massimo (1/2)

*Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato con $n = |N|$ nodi e $m = |A|$ archi, due nodi distinti s, la **sorgente**, e t, il **pozzo**, e una **capacità** $u_{ij} \geq 0$ per ogni arco $(i, j) \in A$.*

- *Un **flusso ammissibile** è un vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ con $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ per ogni arco $(i, j) \in A$ e conservazione del flusso in ogni nodo diverso da s e t:*

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{s, t\}.$$

Definizione: problema del flusso massimo (2/2)

- *Il **valore** del flusso è il deflusso netto della sorgente:*

$$v = \sum_{(s,j)\in\delta^+(s)} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in\delta^-(s)} x_{js}.$$

- *Il **problema del flusso massimo** chiede un flusso ammissibile di valore massimo, un **flusso massimo**. Il suo valore si indica con $\tilde{v}$.*

Osservazioni sulla definizione

- Le capacità sono finite, e il flusso $\boldsymbol{x} = 0$, di valore 0, è sempre ammissibile.
- I nodi diversi da s e t trasmettono tutto ciò che ricevono: il flusso lascia s e attraversa la rete verso t.
- Come nel Capitolo 4 «Modelli di flusso su reti», $\delta^+(i)$ e $\delta^-(i)$ sono gli archi che escono dal nodo i e che vi entrano, e gli archi sono numerati $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in ordine lessicografico.

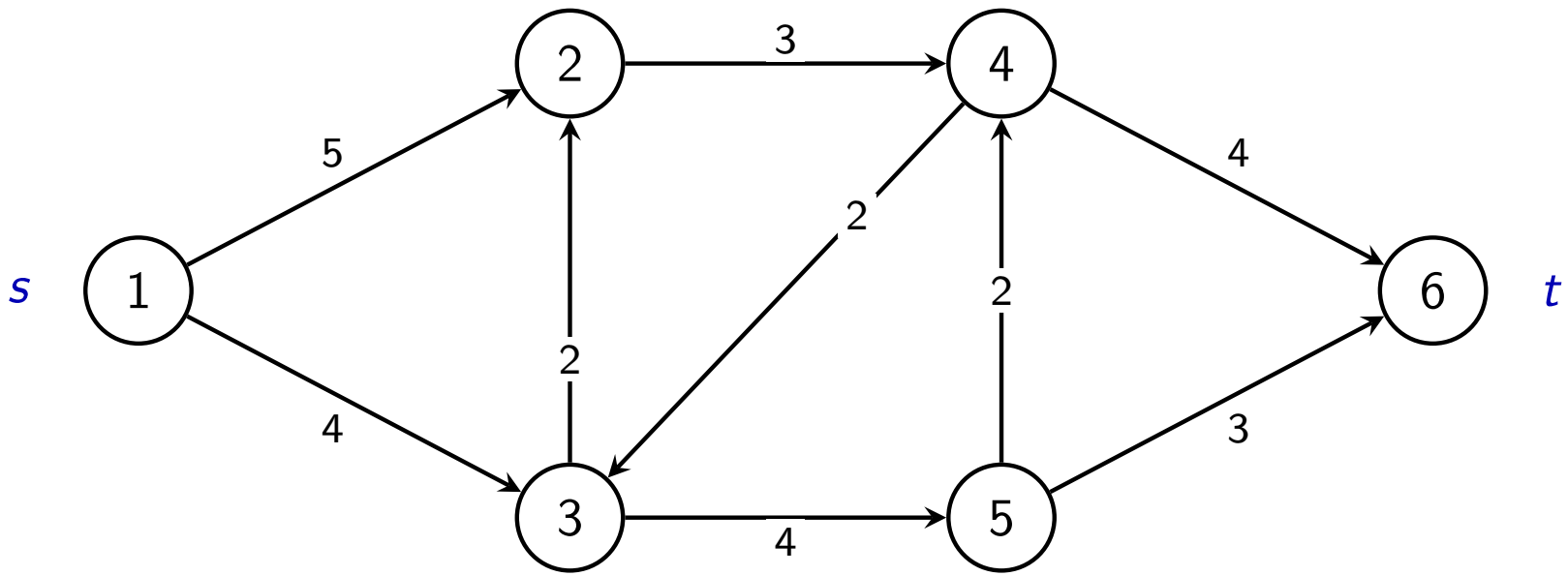
Esempio: la rete di riferimento (1/4)

- Diamo le capacità al grafo di riferimento del Capitolo 1 «Grafi», con sorgente $s = 1$ e pozzo $t = 6$
- La tabella dà anche un flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$, che usiamo in tutto il capitolo

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
u_{ij}	5	4	3	2	4	2	4	2	3
$\bar{x}_{ij}$	3	0	3	0	2	2	1	0	2

Esempio: la rete di riferimento (2/4)

Nella figura ogni arco porta la sua capacità u_{ij}.



Esempio: la rete di riferimento (3/4)

- Il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ della tabella è ammissibile: rispetta le capacità e si conserva nei nodi $2, 3, 4, 5$
- Per esempio, nel nodo 4:

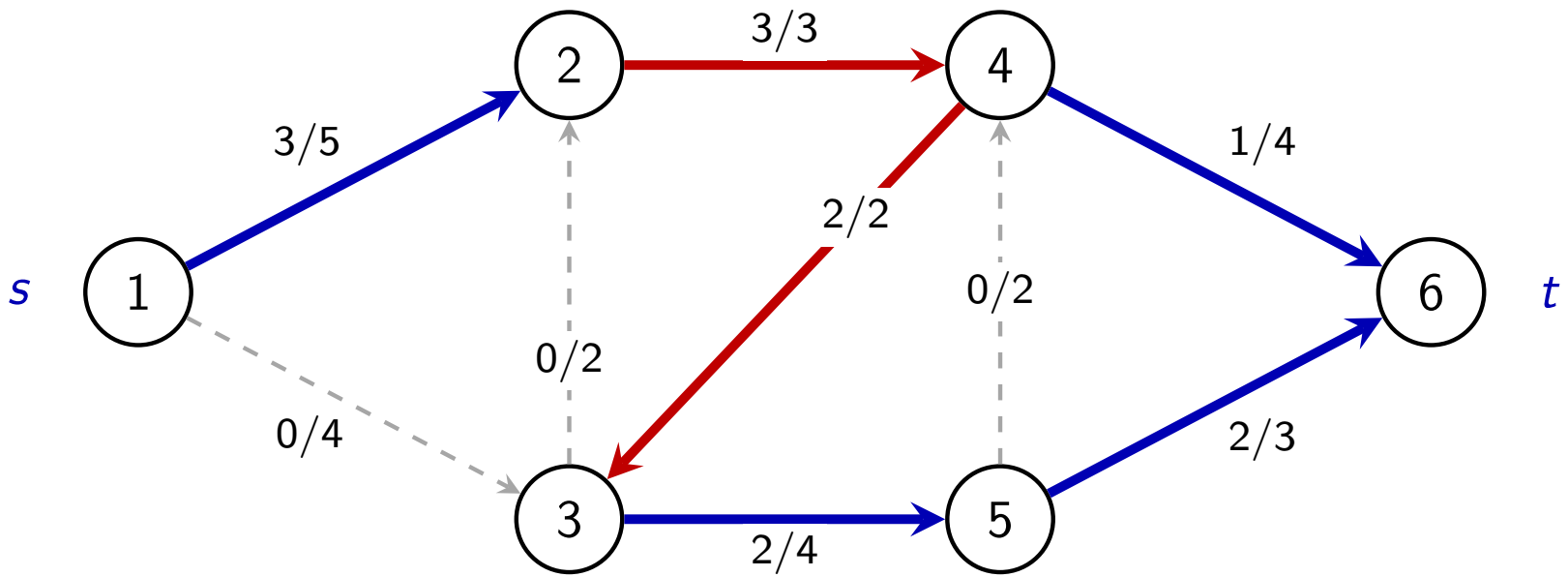
  afflusso $\bar{x}_{24}+\bar{x}_{54} = 3+0 = 3,$ deflusso $\bar{x}_{43}+\bar{x}_{46} = 2+1 = 3$
- Il suo valore è

$$v = \bar{x}_{12} + \bar{x}_{13} = 3 + 0 = 3,$$

  e il nodo 6 riceve $\bar{x}_{46} + \bar{x}_{56} = 1 + 2 = 3$ unità

Esempio: la rete di riferimento (4/4)

Nella figura ogni arco porta $\bar{x}_{ij}/u_{ij}$: gli archi con $0 < \bar{x}_{ij} < u_{ij}$ sono blu, gli archi saturi ($\bar{x}_{ij} = u_{ij}$) rossi e gli archi vuoti grigi e tratteggiati.



Le variabili del modello LP

- Scriviamo ora il problema del flusso massimo come modello di Programmazione lineare
- Usiamo una variabile continua x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$, il flusso sull'arco
- e una variabile v, il valore del flusso

Il modello MF

Con queste variabili, un modello LP per il problema del flusso massimo è il seguente:

$$\max \quad v$$

$$\text{soggetto a} \quad \sum_{(s,j)\in\delta^+(s)} x_{sj} - \sum_{(j,s)\in\delta^-(s)} x_{js} = v,$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} = 0, \qquad \forall i \in N \setminus \{s,t\},$$

$$\sum_{(t,j)\in\delta^+(t)} x_{tj} - \sum_{(j,t)\in\delta^-(t)} x_{jt} = -v,$$

$$x_{ij} \le u_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad \forall (i,j) \in A,$$

$$v \in \mathbb{R}.$$

Questo modello LP si chiama modello MF.

La funzione obiettivo e i vincoli

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello MF:

- la funzione obiettivo massimizza il valore del flusso;
- il vincolo di s afferma che il deflusso netto di s è v, e il vincolo di t che l'afflusso netto di t è v;
- i vincoli dei nodi $i \in N \setminus \{s, t\}$ sono i vincoli di conservazione del flusso degli altri nodi;
- i vincoli $x_{ij} \leq u_{ij}$ impongono le capacità, e i vincoli $x_{ij} \geq 0$ e $v \in \mathbb{R}$ definiscono le variabili del modello LP.

Due osservazioni sul modello MF

- Ogni arco contribuisce con $+x_{ij}$ alla riga della sua coda e con $-x_{ij}$ alla riga della sua testa, quindi i membri sinistri dei vincoli di conservazione (quelli di s, degli altri nodi e di t) sommano a zero: il vincolo di t segue dagli altri.

- Nel Capitolo 4, sezione «Casi speciali» il problema del flusso massimo è un modello di flusso a costo minimo: bilanci nulli e costi nulli, più l'arco (t, s) con capacità $+\infty$ e costo -1.
- Chiamando v il flusso x_{ts} su questo arco, i vincoli di s, degli altri nodi e di t sono i suoi vincoli di conservazione, e $\min(-x_{ts})$ è $\max v$.

Flussi ammissibili e modello MF

- Un flusso ammissibile rispetta le capacità e si conserva in ogni nodo diverso da s e t
- Il suo valore v è il deflusso netto di s
- Il problema del flusso massimo è il LP MF: massimizzare v rispettando conservazione e capacità

Riepilogo

Il problema:

- Un flusso ammissibile soddisfa $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ e la conservazione nei nodi diversi da s e t
- Il suo valore v è il deflusso netto della sorgente; un flusso massimo ha il valore più grande $\tilde{v}$

Il modello:

- Il modello MF massimizza v; il vincolo di t segue dagli altri
- È un modello di flusso a costo minimo con l'arco in più (t, s) di costo -1

La rete di riferimento: $s = 1$, $t = 6$, e il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ di valore 3

Tagli

Introduzione: Tagli

- In questa sezione dividiamo i nodi in due parti, una con s e una con t: un taglio s–t
- Ogni unità di flusso da s a t deve attraversare il taglio, quindi la capacità di un taglio limita il valore di ogni flusso
- Questi limiti sono la chiave per riconoscere un flusso massimo: sono l'altra metà del teorema flusso massimo-taglio minimo

Definizione 2: taglio s–t

*Sia $S \subseteq N$ con $s \in S$ e $t \notin S$. Il **taglio** s–t $(S, N \setminus S)$ è la partizione dei nodi in S e $N \setminus S$.*

- *I suoi **archi in avanti** sono gli archi di $\delta^+(S)$, da S a $N \setminus S$, e i suoi **archi all'indietro** gli archi di $\delta^-(S)$, da $N \setminus S$ a S.*
- *La sua **capacità** è la capacità totale degli archi in avanti:*

$$u(S, N \setminus S) = \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} u_{ij}.$$

- *Un **taglio minimo** è un taglio s–t di capacità minima.*

Osservazioni sui tagli

- Le capacità degli archi all'indietro non entrano in $u(S, N \setminus S)$.
- Ogni nodo diverso da s e t può stare da una parte o dall'altra, quindi una rete ha 2^{n-2} tagli s–t.
- Come nel Capitolo 4, per un insieme di archi F scriviamo

$$x(F) = \sum_{(i,j) \in F} x_{ij}.$$

Il prossimo lemma mostra che il flusso netto attraverso ogni taglio s–t è lo stesso: il valore v del flusso.

Lemma 1: flusso attraverso un taglio s–t

Sia $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile di valore* v*. Allora, per ogni taglio* s–t $(S, N \setminus S)$*,*

$$v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)).$$

In particolare, con $S = N \setminus \{t\}$*, l'afflusso netto di* t *è* v*.*

Dimostrazione

- Sia b_i il deflusso netto del nodo i con il flusso $\boldsymbol{x}$: $b_s = v$ e $b_i = 0$ per $i \notin \{s, t\}$
- Allora $\boldsymbol{x}$ soddisfa la conservazione del flusso con questi bilanci, e il Capitolo 4, Lemma «flusso attraverso un taglio» dà

$$x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = \sum_{i \in S} b_i, \quad \forall S \subseteq N$$

1. Con $S = N$ nessun arco esce da S o vi entra, quindi $\sum_{i \in N} b_i = 0$ e $b_t = -v$.
2. Per un taglio s–t, $s \in S$ e $t \notin S$, quindi $\sum_{i \in S} b_i = b_s = v$.

□

Corollario 1: dualità debole

Per ogni flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$ *di valore* v *e ogni taglio* s–t $(S, N \setminus S)$,

$$v \leq u(S, N \setminus S),$$

con l'uguaglianza se e solo se $x_{ij} = u_{ij}$ *per ogni* $(i,j) \in \delta^+(S)$ *e* $x_{ij} = 0$ *per ogni* $(i,j) \in \delta^-(S)$. *In caso di uguaglianza,* $\boldsymbol{x}$ *è un flusso massimo e* $(S, N \setminus S)$ *è un taglio minimo.*

Dimostrazione

Per il lemma del flusso attraverso un taglio s–t, e per i limiti $x_{ij} \leq u_{ij}$ su $\delta^+(S)$ e $x_{ij} \geq 0$ su $\delta^-(S)$,

$$v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) \leq u(S, N \setminus S) - 0.$$

- L'uguaglianza vale se e solo se ogni limite usato è stretto, arco per arco.
- In caso di uguaglianza, ogni flusso ammissibile $\boldsymbol{x}'$ ha valore $v' \leq u(S, N \setminus S) = v$, e ogni taglio s–t $(S', N \setminus S')$ ha $u(S', N \setminus S') \geq v = u(S, N \setminus S)$.

□

Esempio: i tagli della rete di riferimento (1/3)

La rete di riferimento ha $2^4 = 16$ tagli s–t. Accanto a ogni insieme S, la capacità $u(S, N \setminus S)$:

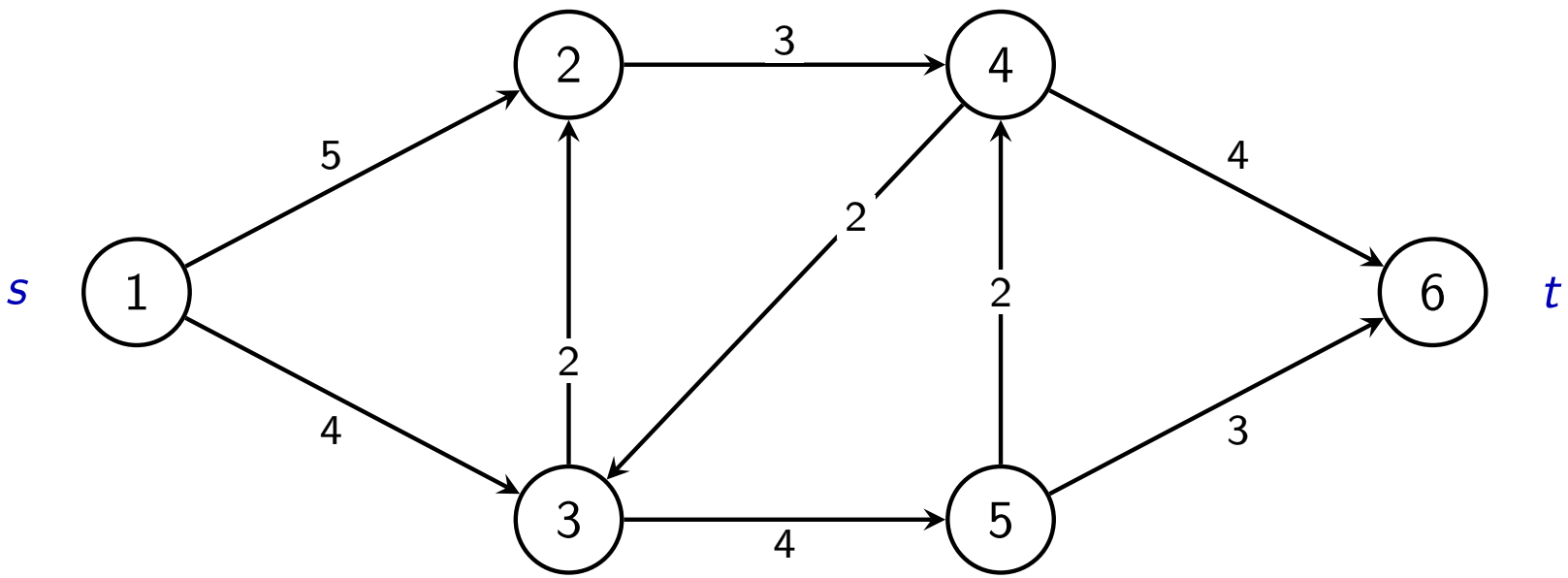
S	u	S	u	S	u	S	u
$\{1\}$	9	$\{1,2\}$	7	$\{1,3\}$	11	$\{1,4\}$	15
$\{1,5\}$	14	$\{1,2,3\}$	7	$\{1,2,4\}$	10	$\{1,2,5\}$	12
$\{1,3,4\}$	15	$\{1,3,5\}$	12	$\{1,4,5\}$	18	$\{1,2,3,4\}$	8
$\{1,2,3,5\}$	8	$\{1,2,4,5\}$	13	$\{1,3,4,5\}$	14	$\{1,2,3,4,5\}$	7

Esempio: i tagli della rete di riferimento (2/3)

- La capacità minima è 7, raggiunta da tre tagli:

$$S = \{1, 2\}, \qquad S = \{1, 2, 3\}, \qquad S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Per il corollario di dualità debole, nessun flusso ammissibile ha valore maggiore di 7



Esempio: i tagli della rete di riferimento (3/3)

- Per $S = \{1, 2, 3\}$ gli archi in avanti sono $(2, 4)$, $(3, 5)$, e l'arco all'indietro è $(4, 3)$
- Con il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ della rete di riferimento, il flusso netto attraverso il taglio è il valore:

$$\bar{x}_{24} + \bar{x}_{35} - \bar{x}_{43} = 3 + 2 - 2 = 3 = v$$

- e la capacità del taglio è

$$u(S, N \setminus S) = u_{24} + u_{35} = 3 + 4 = 7$$

Osservazione 1: la capacità di un taglio

La capacità $u(S, N \setminus S)$ somma solo le capacità degli archi in avanti.

- *Per $S = \{1, 2, 3\}$ è $u_{24} + u_{35} = 7$.*
- *Aggiungendo la capacità dell'arco all'indietro $(4, 3)$ si otterrebbe 9, che non limita nulla.*
- *Un flusso su un arco all'indietro riporta unità in S e abbassa il flusso netto attraverso il taglio.*

Flussi e tagli

- Il flusso netto attraverso ogni taglio s–t è il valore v
- Quindi $v \leq u(S, N \setminus S)$ per ogni flusso e ogni taglio, con l'uguaglianza quando gli archi in avanti sono saturi e gli archi all'indietro vuoti
- Sulla rete di riferimento nessun flusso ha valore maggiore di 7

Riepilogo

Tagli:

- Un taglio s–t $(S, N \setminus S)$ ha $s \in S$ e $t \notin S$
- La sua capacità somma solo le capacità degli archi in avanti

Flussi attraverso i tagli:

- Il flusso netto attraverso ogni taglio è $v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S))$
- Dualità debole: $v \leq u(S, N \setminus S)$; l'uguaglianza certifica un flusso massimo e un taglio minimo

Rete di riferimento: tre tagli minimi di capacità 7

La rete residua

Introduzione: La rete residua

- In questa sezione ci chiediamo come si può migliorare un flusso ammissibile
- La rete residua raccoglie, arco per arco, quanto flusso si può ancora inviare in ciascuna direzione: aumentando un flusso o diminuendone uno
- Un cammino da s a t nella rete residua, un cammino aumentante, aumenta il valore del flusso: è il passo di base di tutti gli algoritmi di questo capitolo

Un'ipotesi: niente archi opposti

- Nel resto del capitolo G non ha coppie di archi opposti (i, j) e (j, i), come il grafo di riferimento
- Un arco (j, i) opposto a (i, j) si può sostituire con gli archi (j, k) e (k, i) attraverso un nuovo nodo k, entrambi con capacità u_{ji}
- La conservazione in k dà $x_{jk} = x_{ki}$, e i flussi delle due reti si corrispondono, con lo stesso valore

Definizione 3: rete residua

Sia $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile. La* ***rete residua*** $G(\boldsymbol{x}) = (N, A(\boldsymbol{x}))$ *ha, per ogni arco* $(i, j) \in A$*:*

- *l'****arco in avanti*** (i, j)*, con* ***capacità residua*** $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$*, se* $x_{ij} < u_{ij}$*;*
- *l'****arco all'indietro*** (j, i)*, con capacità residua* $r_{ji} = x_{ij}$*, se* $x_{ij} > 0$*.*

Osservazioni sulla rete residua

- La capacità residua r_{ij} è quanto flusso si può ancora inviare da i a j: aumentando x_{ij} su un arco in avanti, o diminuendo x_{ji} su un arco all'indietro.

- Un arco vuoto dà solo il suo arco in avanti, un arco saturo solo il suo arco all'indietro, e un arco con $0 < x_{ij} < u_{ij}$ entrambi.
- Quindi $G(\boldsymbol{x})$ ha al più $2m$ archi, tutti con capacità residua positiva.

- Senza archi opposti in G, ogni coppia ordinata di nodi porta al più un arco residuo.

Definizione 4: cammino aumentante

Sia $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile. Un* ***cammino aumentante*** *è un cammino orientato* P *da* s *a* t *in* $G(\boldsymbol{x})$*. Il suo* ***collo di bottiglia*** *è*

$$\delta = \min_{(i,j)\in P} r_{ij} > 0.$$

Aumentare $\boldsymbol{x}$ *lungo* P *significa inviare* δ *unità lungo* P*: per ogni arco di* P*,*

- *se è un arco in avanti* (i,j)*, allora* $x_{ij} := x_{ij} + \delta$*;*
- *se è un arco all'indietro* (j,i)*, con* $(i,j) \in A$*, allora* $x_{ij} := x_{ij} - \delta$*.*

Lemma 2: aumento

Aumentando un flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$ *di valore* v *lungo un cammino aumentante* P *con collo di bottiglia* δ *si ottiene un flusso ammissibile* $\boldsymbol{x}'$ *di valore* $v + \delta$.

- Verifichiamo le tre proprietà di un flusso ammissibile di valore $v + \delta$: i limiti, la conservazione e il valore

Dimostrazione (1/2)

- I nodi di P sono distinti e G non ha archi opposti, quindi ogni arco di A cambia al più una volta

1. *Limiti.* Su un arco in avanti,

$$x_{ij} + \delta \leq x_{ij} + r_{ij} = u_{ij};$$

su un arco all'indietro,

$$x_{ij} - \delta \geq x_{ij} - r_{ji} = 0.$$

Dimostrazione (2/2)

2. *Conservazione.* Sia $k \notin \{s, t\}$ un nodo di P.
   - L'arco di P che entra in k aumenta di δ l'afflusso netto di k: un arco in avanti (h, k) aumenta x_{hk}, un arco all'indietro (h, k) diminuisce x_{kh}.
   - Allo stesso modo, l'arco di P che esce da k aumenta di δ il deflusso netto di k.
   - Le due variazioni si compensano, e i nodi fuori da P non sono toccati.

3. *Valore.* Il cammino P lascia s una volta e non vi rientra più, quindi il deflusso netto di s cresce di δ.

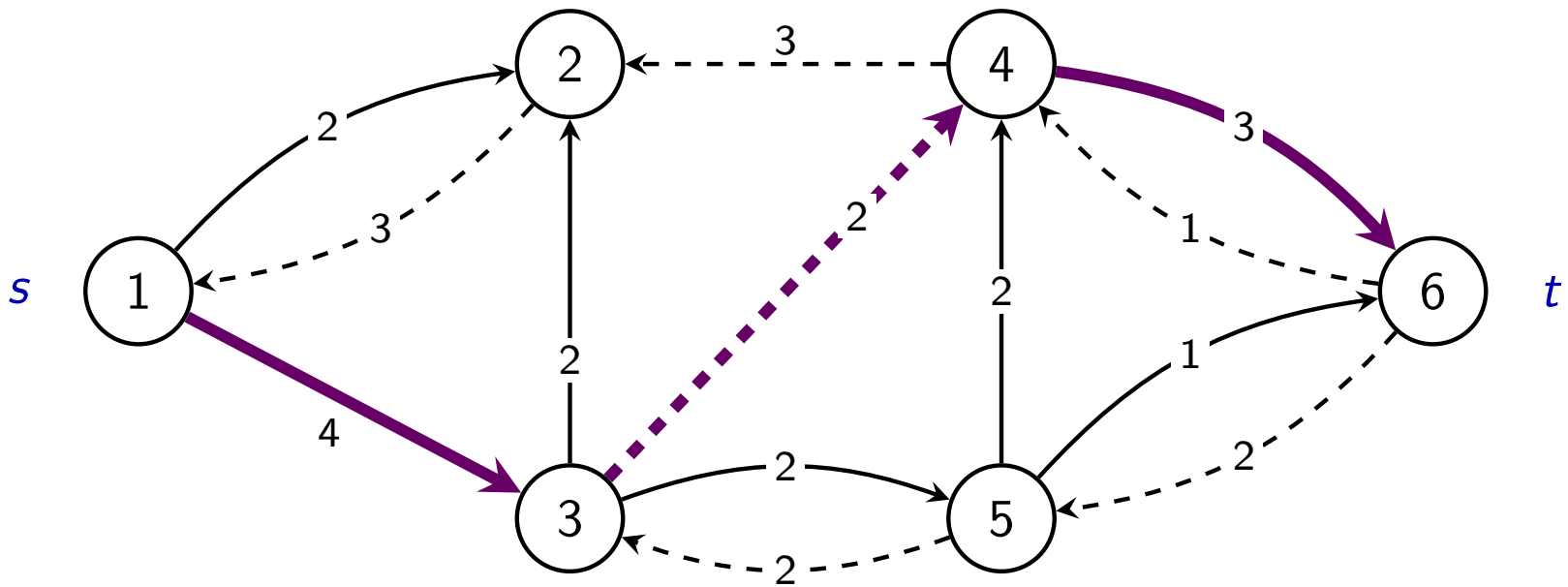
□

Esempio: la rete residua di $\bar{\boldsymbol{x}}$ (1/5)

- Per il flusso $\bar{\boldsymbol{x}}$ della rete di riferimento, di valore 3, la rete residua $G(\bar{\boldsymbol{x}})$ ha 13 archi
- I sei archi all'indietro sono $(2,1)$, $(3,4)$, $(4,2)$, $(5,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$
- L'arco $(2,4)$ è saturo, quindi dà solo l'arco all'indietro $(4,2)$, con $r_{42} = \bar{x}_{24} = 3$
- L'arco $(1,2)$ ha $0 < \bar{x}_{12} = 3 < 5$, quindi dà l'arco in avanti $(1,2)$, con $r_{12} = 2$, e l'arco all'indietro $(2,1)$, con $r_{21} = 3$

Esempio: la rete residua di $\bar{x}$ (2/5)

La rete residua $G(\bar{x})$: ogni arco porta r_{ij}, gli archi all'indietro sono tratteggiati e il cammino aumentante trovato poi è viola.



Esempio: la rete residua di $\bar{x}$ (3/5)

- La visita in profondità del Capitolo 1 dal nodo 1, con gli archi residui di ogni nodo per indice crescente della testa, etichetta i nodi $1, 2, 3, 4, 6$:
  - da 2 l'unico arco residuo torna a 1;
  - da 3 la visita prende l'arco all'indietro $(3, 4)$ (2 è etichettato);
  - da 4 l'arco $(4, 6)$.

- Il cammino aumentante è $P = 1, 3, 4, 6$ (viola), con collo di bottiglia

$$\delta = \min\{r_{13},\ r_{34},\ r_{46}\} = \min\{4,\ 2,\ 3\} = 2.$$

Esempio: la rete residua di $\bar{x}$ (4/5)

- L'aumento dà

$$x_{13} = 0 + 2 = 2, \qquad x_{43} = 2 - 2 = 0, \qquad x_{46} = 1 + 2 = 3,$$

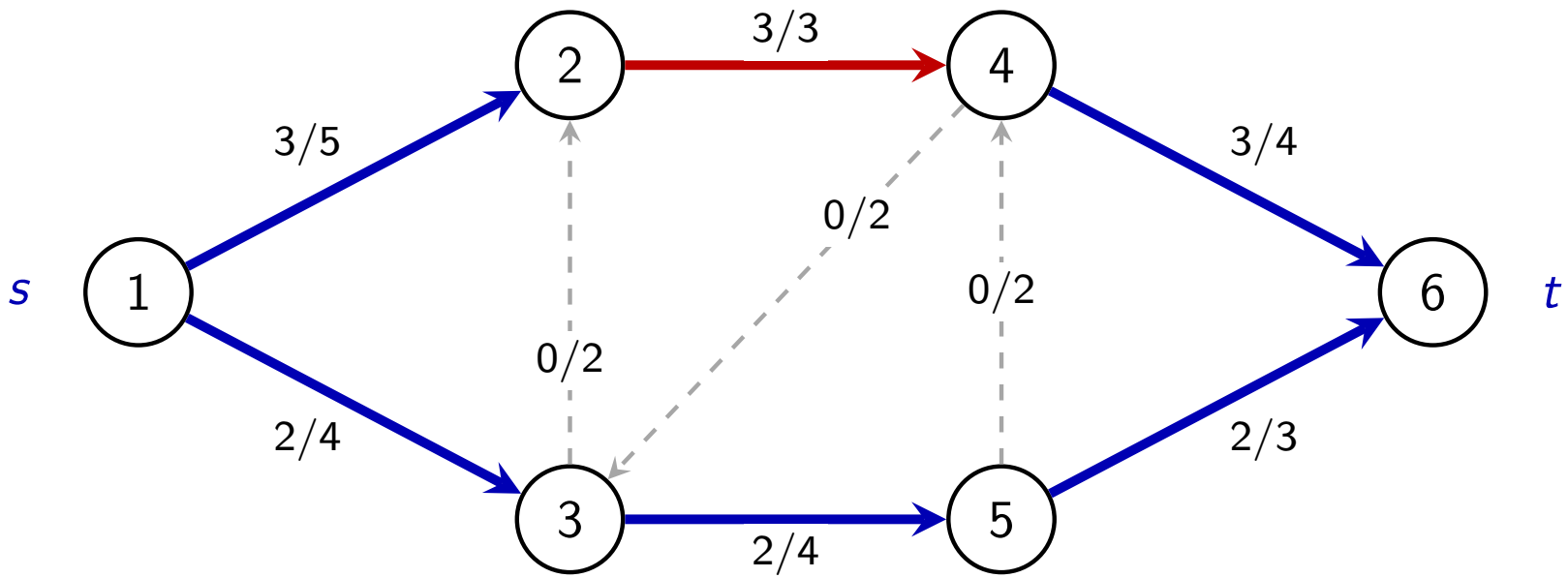
  dove x_{43} diminuisce lungo l'arco all'indietro $(3, 4)$; il valore è $3 + 2 = 5$

- Le due unità che andavano da 4 a 3 ora vanno da 4 a 6

- Il nodo 3 riceve due nuove unità da 1, che proseguono lungo $3, 5, 6$

Esempio: la rete residua di $\bar{x}$ (5/5)

Il flusso dopo l'aumento, di valore 5 (ogni arco porta x_{ij}/u_{ij}):



Gli archi all'indietro servono davvero?

Il prossimo esempio mostra che cosa succede se i flussi possono solo crescere.

Esempio: perché servono gli archi all'indietro (1/3)

Supponiamo che da $\bar{\boldsymbol{x}}$ usiamo solo gli archi in avanti della rete residua, così che i flussi possano solo crescere.

- La visita in profondità sugli archi in avanti trova il cammino $1, 3, 5, 4, 6$, con

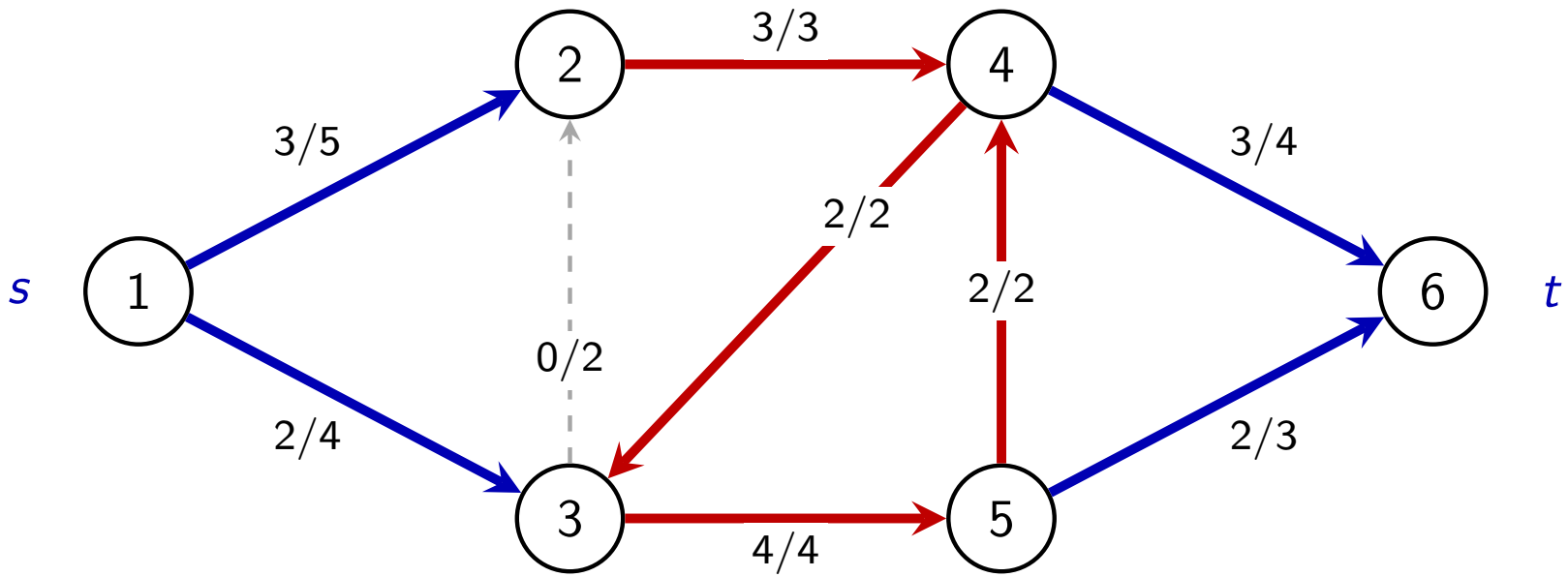
$$\delta = \min\{4, 2, 2, 3\} = 2$$

- Il valore diventa 5 con il flusso

$$\boldsymbol{x} = (3, 2, 3, 0, 4, 2, 3, 2, 2)$$

Esempio: perché servono gli archi all'indietro (2/3)

Il flusso $\boldsymbol{x}$ di valore 5 (ogni arco porta x_{ij}/u_{ij}):



- Ora gli archi in avanti $(2,4)$ e $(3,5)$ che escono da $\{1,2,3\}$ sono saturi: la visita etichetta solo $1,2,3$, e il metodo si ferma con valore 5

Esempio: perché servono gli archi all'indietro (3/3)

- Il valore non è massimo: per $S = \{1, 2, 3\}$, il lemma del flusso attraverso un taglio dà

$$v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = 7 - 2 = 5$$

- Le due unità sull'arco all'indietro $(4, 3)$ del taglio, mandate lì dalle prime scelte, tornano in S

- Solo l'arco all'indietro $(3, 4)$ della rete residua può annullarle: da questo flusso, i cammini aumentanti

$$1, 3, 4, 5, 6 \qquad \text{e} \qquad 1, 3, 4, 6,$$

il primo con gli archi all'indietro $(3, 4)$ e $(4, 5)$, con $\delta = 1$ ciascuno, raggiungono il valore 7

Aumentare lungo la rete residua

- La rete residua ha un arco in avanti dove il flusso può crescere e un arco all'indietro dove può diminuire
- Inviare il collo di bottiglia δ lungo un cammino da s a t della rete residua mantiene il flusso ammissibile e ne aumenta il valore di δ
- Gli archi all'indietro annullano le scelte precedenti

Riepilogo

La rete residua $G(\boldsymbol{x})$:

- Arco in avanti (i, j) con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$
- Arco all'indietro (j, i) con $r_{ji} = x_{ij}$ se $x_{ij} > 0$

Cammini aumentanti:

- Un cammino da s a t in $G(\boldsymbol{x})$, con collo di bottiglia $\delta = \min r_{ij}$
- Aumento: $+\delta$ sugli archi in avanti, $-\delta$ sugli archi di quelli all'indietro; il valore cresce di δ

Archi all'indietro: senza di essi il metodo può fermarsi al valore 5 sulla rete di riferimento

Il teorema flusso massimo-taglio minimo

Introduzione: Il teorema flusso massimo-taglio minimo

- In questa sezione dimostriamo il risultato centrale del capitolo: un flusso è massimo esattamente quando non esiste un cammino aumentante
- Il valore massimo di un flusso è uguale alla capacità minima di un taglio: il limite della dualità debole è sempre raggiunto
- La dimostrazione ci dice anche come leggere un taglio minimo da un flusso massimo

Teorema 1: flusso massimo-taglio minimo

Sia $\boldsymbol{x}$ *un flusso ammissibile di valore* v*. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\boldsymbol{x}$ *è un flusso massimo;*

(b) *la rete residua* $G(\boldsymbol{x})$ *non ha cammini aumentanti;*

(c) $v = u(S, N \setminus S)$ *per qualche taglio* s*–*t $(S, N \setminus S)$*.*

Inoltre, un flusso massimo esiste, e il valore massimo di un flusso è uguale alla capacità minima di un taglio s*–*t*:*

$$\tilde{v} = \min \left\{ u(S, N \setminus S) \ : \ S \subseteq N, \ s \in S, \ t \notin S \right\}.$$

Come procede la dimostrazione

- Dimostriamo la catena (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)
- (a) $\Rightarrow$ (b) usa il lemma di aumento, e (c) $\Rightarrow$ (a) il corollario di dualità debole
- Il cuore è (b) $\Rightarrow$ (c): i nodi raggiungibili da s nella rete residua danno il taglio
- L'esistenza di un flusso massimo viene dalla Programmazione lineare

Dimostrazione (1/3)

(a) implica (b). Un cammino aumentante darebbe, per il lemma di aumento, un flusso ammissibile di valore $v + \delta > v$.

(b) implica (c). Sia S l'insieme dei nodi raggiungibili da s in $G(\boldsymbol{x})$; allora $s \in S$ e, per (b), $t \notin S$.

1. Se un arco $(i, j) \in \delta^+(S)$ avesse $x_{ij} < u_{ij}$, l'arco in avanti (i, j) sarebbe in $G(\boldsymbol{x})$, e j sarebbe raggiungibile: quindi $x_{ij} = u_{ij}$.
2. Se un arco $(i, j) \in \delta^-(S)$ avesse $x_{ij} > 0$, l'arco all'indietro (j, i), con $j \in S$, sarebbe in $G(\boldsymbol{x})$, e i sarebbe raggiungibile: quindi $x_{ij} = 0$.
3. Per il corollario di dualità debole, $v = u(S, N \setminus S)$.

Dimostrazione (2/3)

(c) implica (a). Per il corollario di dualità debole.

Esistenza e uguaglianza.

- La regione ammissibile del modello MF è non vuota ($\boldsymbol{x} = 0$, $v = 0$) e limitata:

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \qquad |v| \leq \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}$$

- Quindi il modello ha una soluzione ottima (Capitolo 15 «La geometria della programmazione lineare»)

Dimostrazione (3/3)

- Per un flusso massimo, (a) implica (c): qualche taglio ha capacità $\tilde{v}$
- Per il corollario di dualità debole nessun taglio ha capacità minore

Quindi

$$\tilde{v} = \min \left\{ u(S, N \setminus S) \ : \ S \subseteq N, \ s \in S, \ t \notin S \right\}.$$

□

Che cosa dà il teorema

- La dimostrazione di (b) implica (c) è costruttiva: in un flusso massimo, i nodi raggiungibili da s nella rete residua formano un taglio minimo.
- Un flusso e un taglio con $v = u(S, N \setminus S)$ si certificano a vicenda: il taglio dimostra che nessun flusso è migliore, e il flusso dimostra che nessun taglio è più piccolo.

Esempio: il flusso massimo della rete di riferimento (1/3)

Sulla rete di riferimento il flusso

arco	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$
$\tilde{x}_{ij}$	3	4	3	0	4	0	4	1	3
u_{ij}	5	4	3	2	4	2	4	2	3

è ammissibile, con valore

$$\tilde{x}_{12} + \tilde{x}_{13} = 3 + 4 = 7.$$

Esempio: il flusso massimo della rete di riferimento (2/3)

- Per $S = \{1, 2\}$ gli archi in avanti $(1, 3)$, $(2, 4)$ sono saturi e l'arco all'indietro $(3, 2)$ è vuoto, quindi

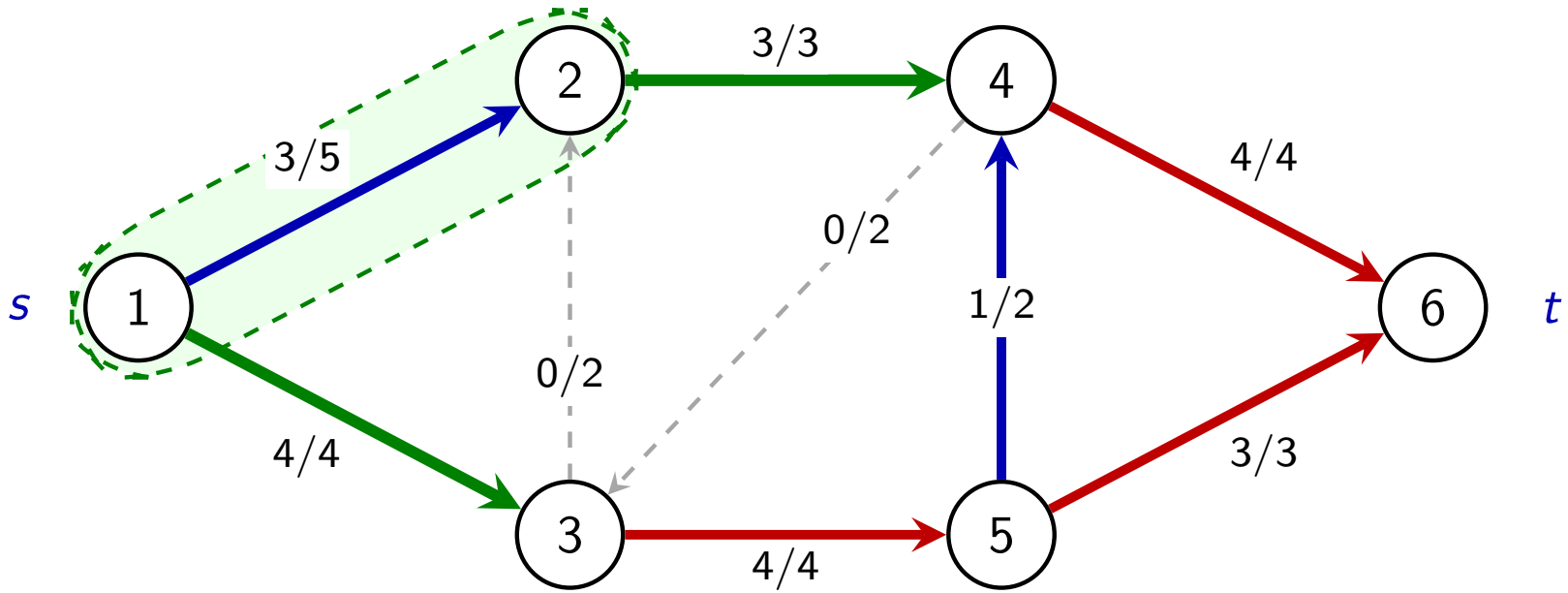
$$u(S, N \setminus S) = u_{13} + u_{24} = 4 + 3 = 7 = v$$

- Per il teorema flusso massimo-taglio minimo, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ è un flusso massimo, $\tilde{v} = 7$, e $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\})$ è un taglio minimo

- In $G(\tilde{\boldsymbol{x}})$ i nodi raggiungibili da 1 sono esattamente 1 e 2

Esempio: il flusso massimo della rete di riferimento (3/3)

Nella figura, S è ombreggiato e gli archi in avanti del taglio sono verdi.



Unicità del flusso massimo (1/2)

- Per il corollario di dualità debole, ogni flusso massimo satura gli archi in avanti e svuota gli archi all'indietro di ciascuno dei tre tagli minimi della rete di riferimento:

$$
\begin{aligned}
S = \{1,2\}: &\quad x_{13} = 4,\ x_{24} = 3,\ x_{32} = 0,\\
S = \{1,2,3\}: &\quad x_{35} = 4,\ x_{43} = 0,\\
S = \{1,2,3,4,5\}: &\quad x_{46} = 4,\ x_{56} = 3.
\end{aligned}
$$

Unicità del flusso massimo (2/2)

- La conservazione nei nodi 1 e 4 dà allora

$$x_{12} = 7 - x_{13} = 3, \qquad x_{54} = x_{43} + x_{46} - x_{24} = 1$$

- Quindi $\tilde{\boldsymbol{x}}$ è l'unico flusso massimo
- mentre il taglio minimo non è unico

Osservazione 2: archi saturi e tagli

Gli archi saturi di un flusso massimo in generale non formano un taglio.

- *Con* $\tilde{\boldsymbol{x}}$ *gli archi saturi sono* $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,6)$, *con capacità totale* 18.
- *Un taglio minimo si legge dai nodi raggiungibili da* s *nella rete residua.*

Flussi massimi e tagli minimi

- Un flusso è massimo se e solo se la sua rete residua non ha cammini aumentanti, se e solo se il suo valore è uguale alla capacità di un taglio
- Il valore massimo è uguale alla capacità minima di un taglio
- I nodi raggiungibili da s nella rete residua di un flusso massimo formano un taglio minimo

Riepilogo

Il teorema:

- Flusso massimo $\Leftrightarrow$ nessun cammino aumentante $\Leftrightarrow$ $v = u(S, N \setminus S)$ per qualche taglio
- $\tilde{v}$ è uguale alla capacità minima di un taglio s–t

Certificati:

- Un flusso e un taglio con lo stesso valore si certificano a vicenda
- Il taglio minimo si legge dai nodi raggiungibili da s, non dagli archi saturi

Rete di riferimento: $\tilde{v} = 7$, unico flusso massimo $\tilde{\boldsymbol{x}}$, taglio minimo $S = \{1, 2\}$

L'algoritmo di Ford–Fulkerson

Introduzione: L'algoritmo di Ford–Fulkerson

- In questa sezione trasformiamo il teorema flusso massimo-taglio minimo in un algoritmo
- Dimostriamo che è corretto con capacità intere, che dà un flusso massimo intero, e ne limitiamo il tempo di esecuzione
- Lo eseguiamo sulla rete di riferimento, iterazione per iterazione, e vediamo che il suo numero di aumenti può crescere con le capacità

L'idea

- Per il teorema flusso massimo-taglio minimo, un flusso si può migliorare finché la sua rete residua ha un cammino aumentante
- L'**algoritmo di Ford–Fulkerson** parte dal flusso nullo e aumenta lungo questi cammini finché non ne rimane nessuno

L'algoritmo di Ford–Fulkerson

Algorithm: Algoritmo di Ford–Fulkerson

Input : un grafo orientato $G = (N, A)$ con capacità intere $u_{ij} \geq 0$, una sorgente s e un pozzo t

Output : un flusso massimo $\boldsymbol{x}$ e un taglio minimo $(S, N \setminus S)$

1 **Passo 0 (inizializzazione).** Poni $x_{ij} := 0$ per ogni $(i, j) \in A$, e $v := 0$.

2 **Passo 1 (visita).** Costruisci la rete residua $G(\boldsymbol{x})$ e visitala da s.

3 Se t non è etichettato, `STOP`: $\boldsymbol{x}$ è un flusso massimo, e S è l'insieme dei nodi etichettati.

4 **Passo 2 (aumento).** Sia P il cammino dei predecessori da s a t, e $\delta := \min_{(i,j) \in P} r_{ij}$.

5 Aumenta $\boldsymbol{x}$ lungo P di δ, poni $v := v + \delta$, e vai al Passo 1.

La visita del Passo 1

- Il Passo 1 può usare qualunque visita del Capitolo 1, sezione «Ricerca su grafi»
- In questo modulo l'algoritmo di Ford–Fulkerson usa la **visita in profondità**:
  - *LIST* è una pila;
  - gli archi residui che escono da ogni nodo sono esaminati per indice crescente della testa;
  - la visita si ferma appena t è etichettato.
- Quando la visita non etichetta t, ha etichettato tutti i nodi raggiungibili da s (Capitolo 1, Teorema «correttezza della visita»): formano l'insieme S del Passo 1

Teorema 2: correttezza di Ford–Fulkerson

Siano le capacità intere. Allora ogni flusso calcolato dall'algoritmo di Ford–Fulkerson è intero, l'algoritmo si ferma dopo al più $\tilde{v}$ aumenti, e all'arresto $\boldsymbol{x}$ è un flusso massimo e $(S, N \setminus S)$ è un taglio minimo.

- La dimostrazione usa il lemma di aumento e il teorema flusso massimo-taglio minimo

Dimostrazione

1. *Integralità.* Il flusso nullo è intero. Se $\boldsymbol{x}$ è intero, tutte le capacità residue sono intere, quindi δ è un intero positivo e il flusso aumentato è intero.

2. *Terminazione.* Ogni flusso è ammissibile, e ogni aumento accresce il valore di $\delta \geq 1$. Nessun valore supera $\tilde{v}$, quindi gli aumenti sono al più $\tilde{v}$.

3. *Ottimalità.* All'arresto t non è etichettato, quindi $G(\boldsymbol{x})$ non ha cammini aumentanti e S è l'insieme dei nodi raggiungibili da s. La dimostrazione di (b) implica (c) dà $v = u(S, N \setminus S)$: il flusso è massimo e il taglio è minimo.

□

Corollario 2: integralità

Se tutte le capacità sono intere, esiste un flusso massimo con componenti intere.

Dimostrazione

- Il flusso restituito dall'algoritmo di Ford–Fulkerson è intero e massimo, per il teorema di correttezza di Ford–Fulkerson.

□

Due osservazioni sull'integralità

- La stessa conclusione segue dal Capitolo 4, Teorema «vertici interi»: con l'arco (t, s), il modello MF è un modello di flusso a costo minimo con dati interi, e il suo ottimo è raggiunto in un vertice intero.

- Le capacità razionali diventano intere moltiplicandole per un denominatore comune, che moltiplica ogni flusso e ogni taglio per lo stesso fattore: l'algoritmo si ferma anche con capacità razionali.

Teorema 3: tempo di esecuzione di Ford–Fulkerson

Con capacità intere, l'algoritmo di Ford–Fulkerson richiede tempo $O((n+m)\,\tilde{v})$, *e*

$$\tilde{v} \leq (n-1)\,U,$$

dove U *è la capacità più grande.*

Dimostrazione

- Ogni iterazione
  - costruisce $G(\boldsymbol{x})$ in tempo $O(m)$,
  - la visita in tempo $O(n+m)$, perché $G(\boldsymbol{x})$ ha al più $2m$ archi (Capitolo 1, Teorema «tempo di esecuzione della ricerca»),
  - e cambia al più $n-1$ flussi lungo P.
- Le iterazioni con un aumento sono al più $\tilde{v}$, più l'ultima.

- Per il corollario di dualità debole con $S = \{s\}$, $\tilde{v} \leq u(\{s\}, N \setminus \{s\})$, e da s escono al più $n-1$ archi, ciascuno con capacità al più U.

□

Un algoritmo pseudopolinomiale

- Il limite cresce con il valore U delle capacità, e non solo con il numero delle loro cifre, circa $\log_2 U$
- Il tempo di esecuzione è **pseudopolinomiale**
- L'esempio sul numero di aumenti, più avanti in questa sezione, mostra che il numero di aumenti può davvero crescere con le capacità

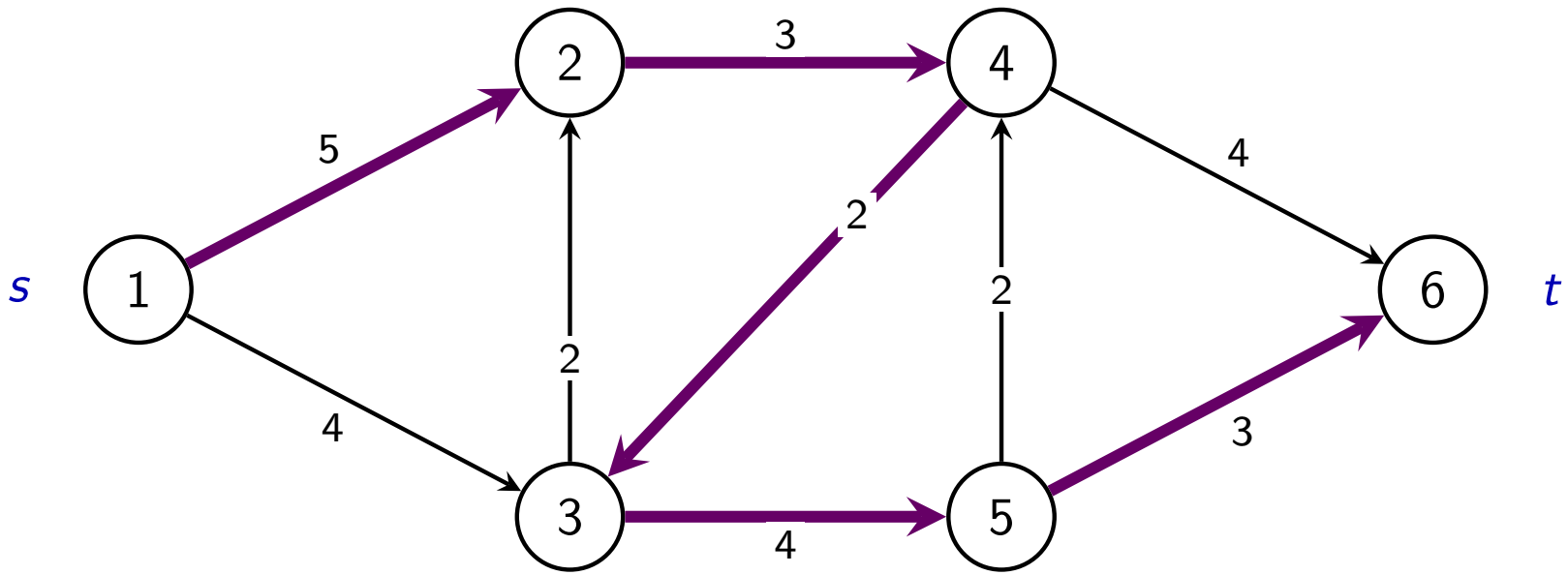
Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (1/9)

Eseguiamo l'algoritmo sulla rete di riferimento. Ogni riga è un'iterazione: il cammino aumentante, le capacità residue dei suoi archi, gli archi all'indietro che usa, il collo di bottiglia e il nuovo valore.

iterazione	cammino aumentante	r_{ij} su P	archi all'indietro	δ	v
1	$1, 2, 4, 3, 5, 6$	$5, 3, 2, 4, 3$	–	2	2
2	$1, 2, 4, 6$	$3, 1, 4$	–	1	3
3	$1, 3, 4, 6$	$4, 2, 3$	$(3, 4)$	2	5
4	$1, 3, 5, 4, 6$	$2, 2, 2, 1$	–	1	6
5	$1, 3, 5, 6$	$1, 1, 1$	–	1	7

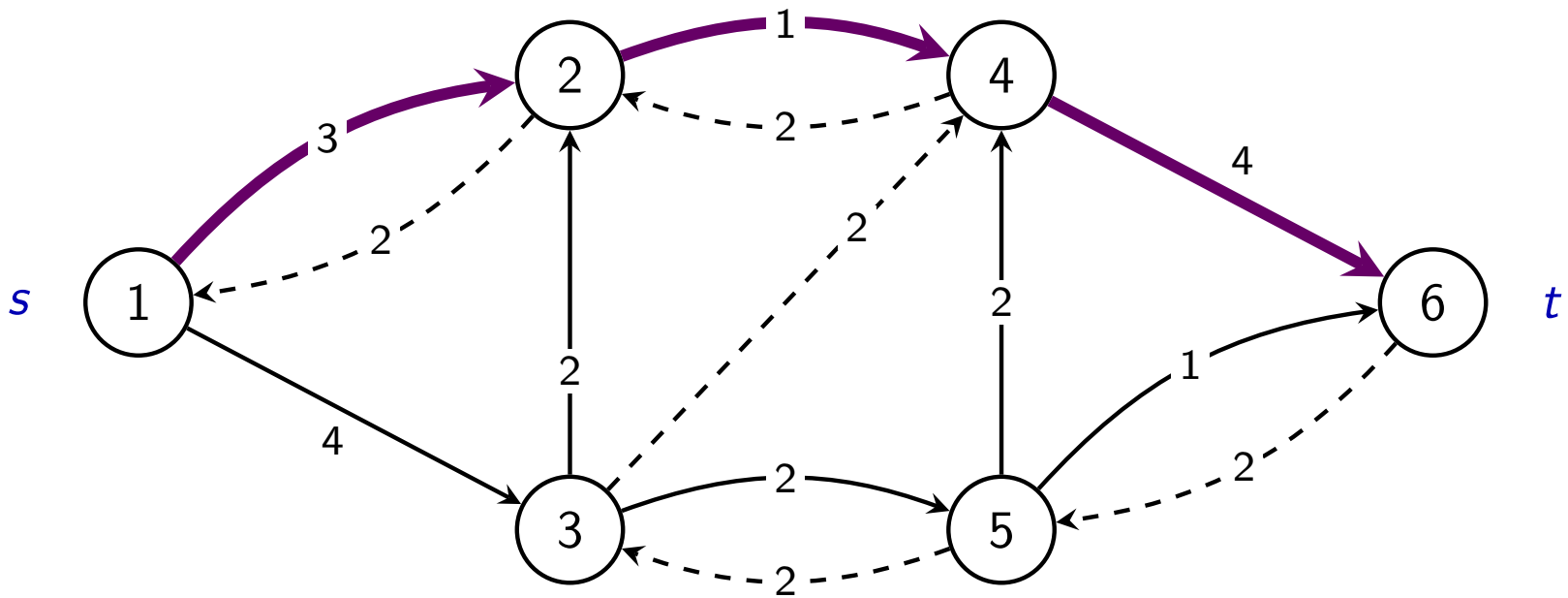
Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (2/9)

Iterazione 1. Tutti gli archi sono vuoti, $G(0) = G$; il cammino $1, 2, 4, 3, 5, 6$ (viola) ha $\delta = 2$.



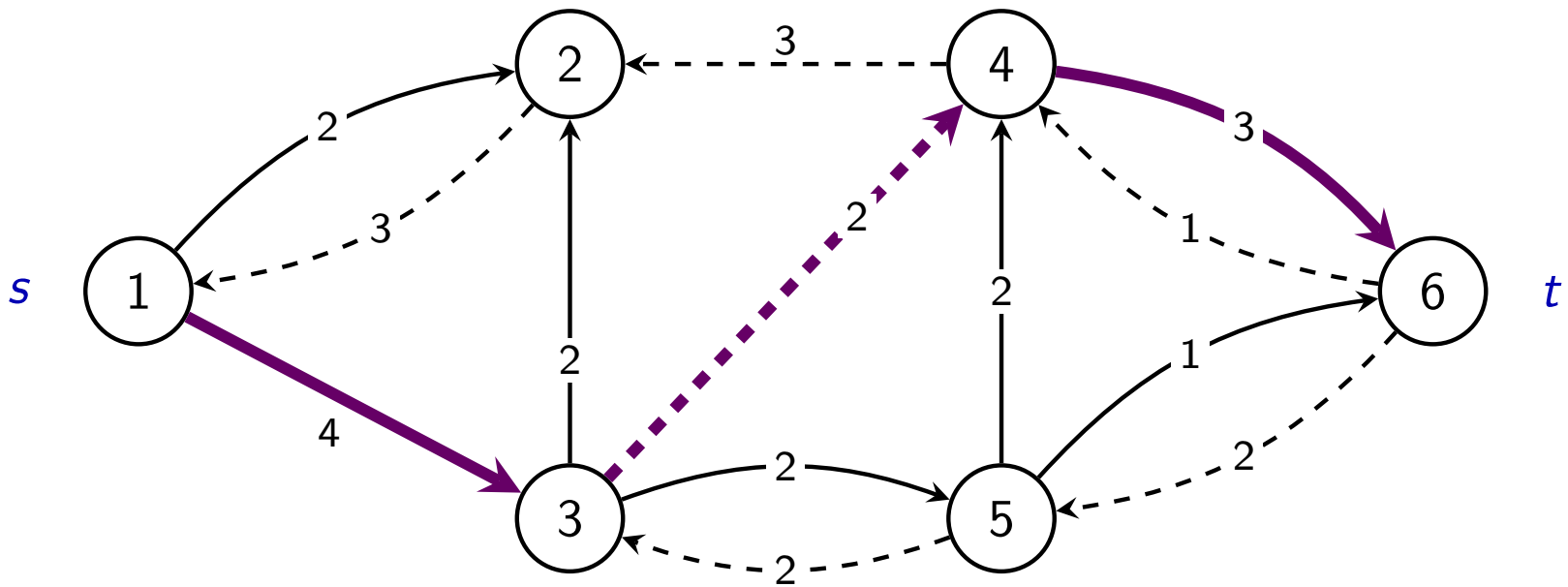
Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (3/9)

Iterazione 2. La rete residua del flusso di valore 2; il cammino $1, 2, 4, 6$ ha $\delta = 1$.



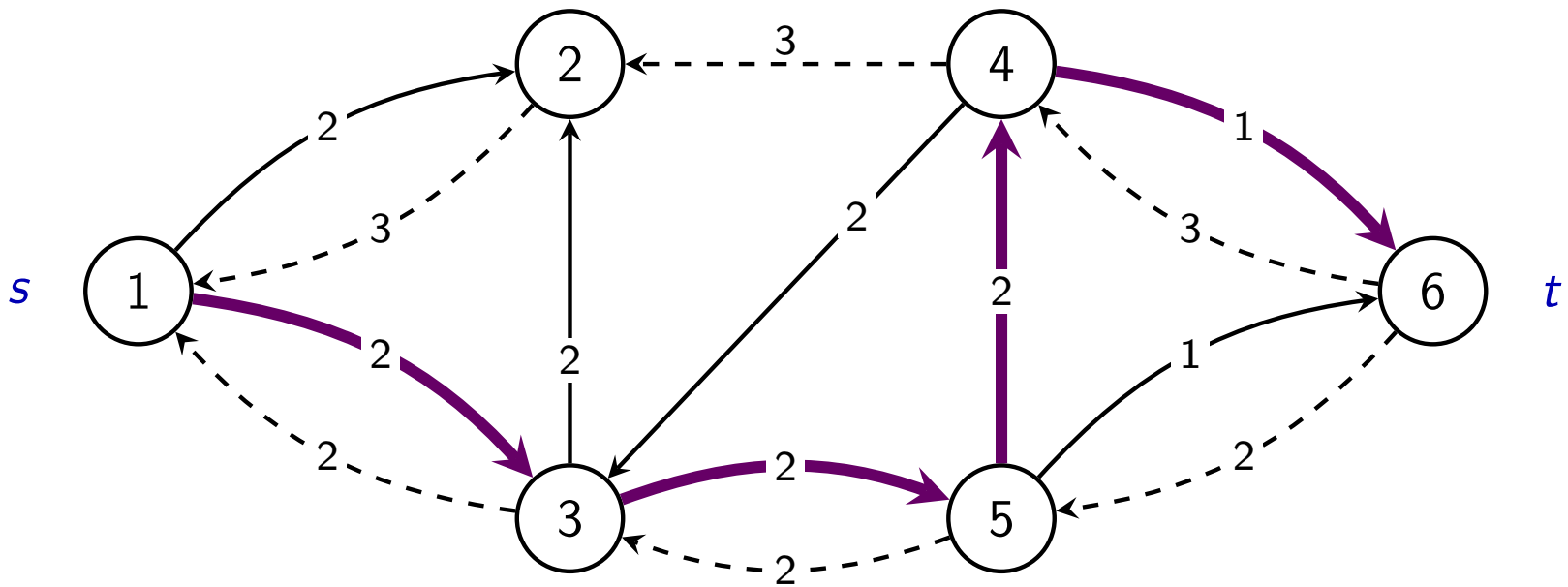
Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (4/9)

Iterazione 3. Il flusso è $\bar{\boldsymbol{x}}$; il cammino $1, 3, 4, 6$ usa l'arco all'indietro $(3, 4)$, $\delta = 2$.



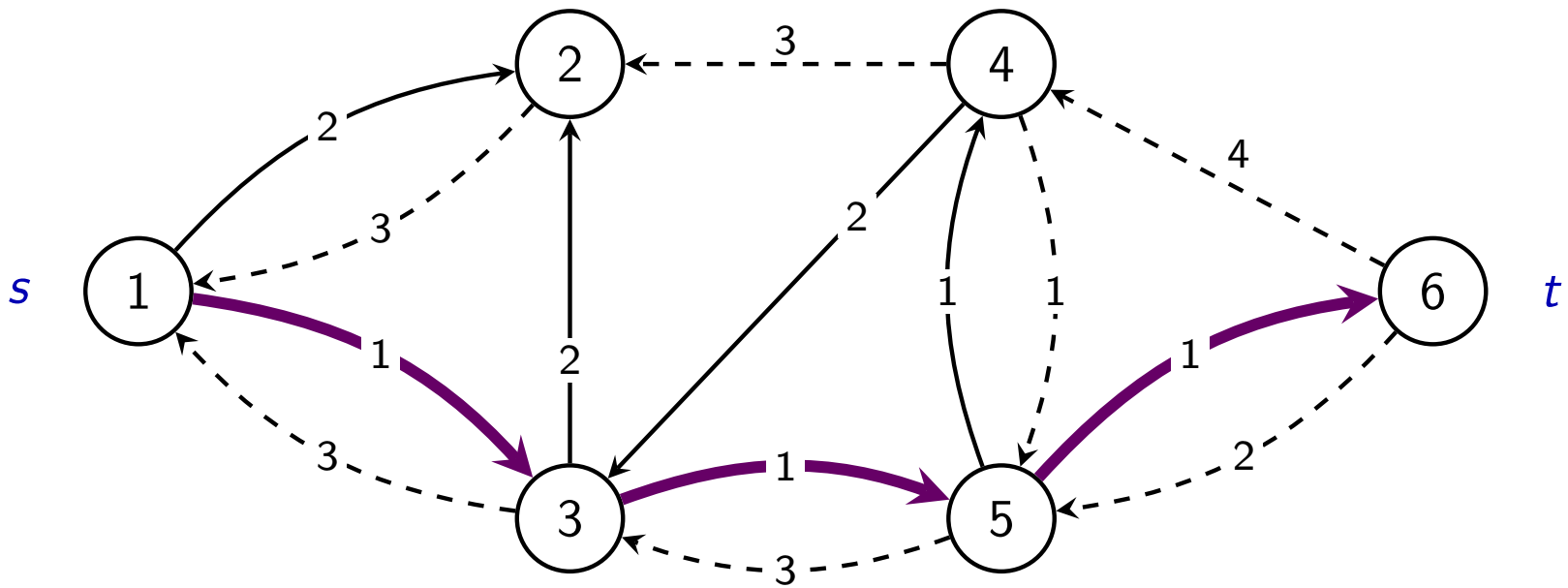
Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (5/9)

Iterazione 4. La rete residua del flusso di valore 5; il cammino $1, 3, 5, 4, 6$ ha $\delta = 1$.



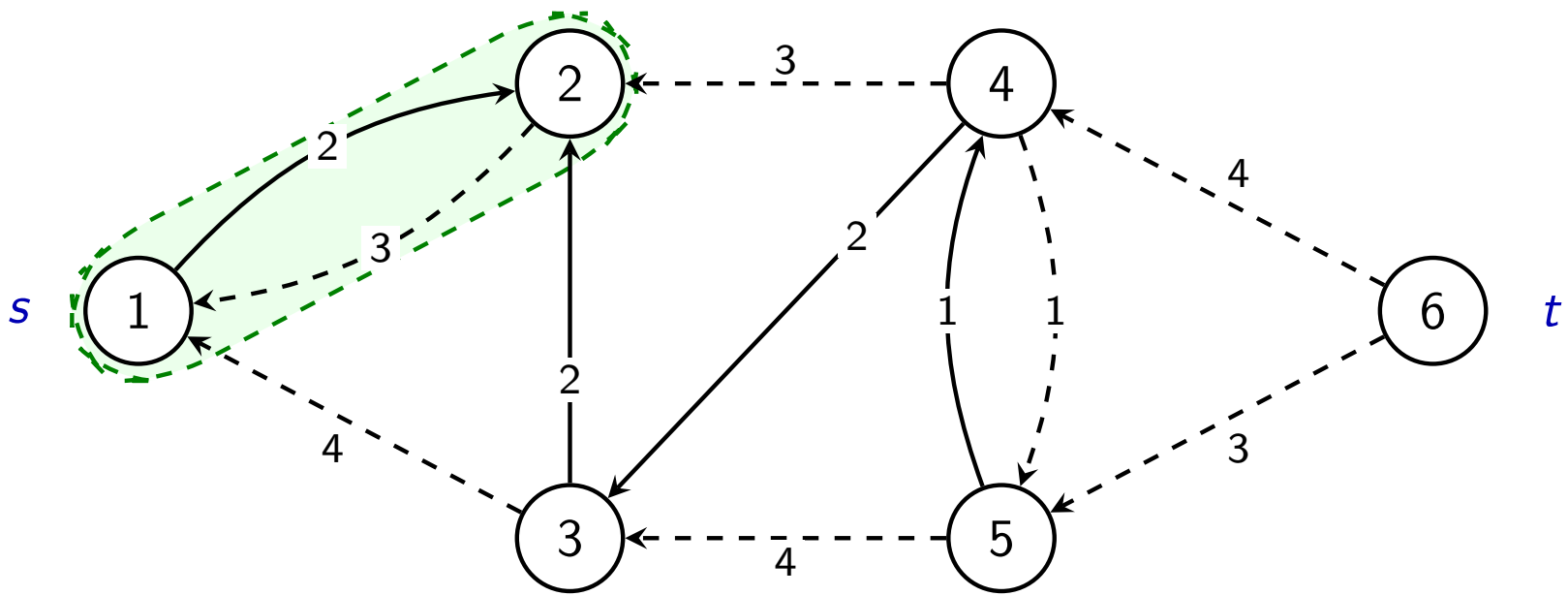
Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (6/9)

Iterazione 5. La rete residua del flusso di valore 6; il cammino $1, 3, 5, 6$ ha $\delta = 1$.



Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (7/9)

Sesta visita. La rete residua del flusso di valore 7: la visita etichetta solo 1 e 2 (ombreggiati), e l'algoritmo si ferma.



Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (8/9)

I flussi dopo ogni iterazione ($k = 0$ è il flusso nullo) sono:

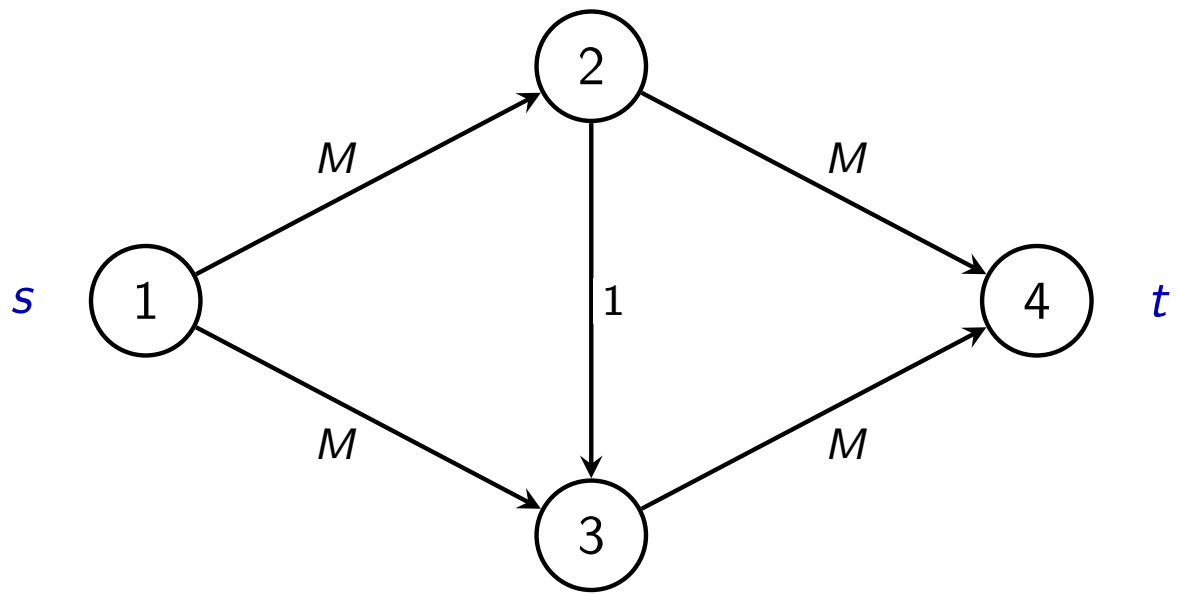
k	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{32}	x_{35}	x_{43}	x_{46}	x_{54}	x_{56}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	2	0	2	2	0	0	2
2	3	0	3	0	2	2	1	0	2
3	3	2	3	0	2	0	3	0	2
4	3	3	3	0	3	0	4	1	2
5	3	4	3	0	4	0	4	1	3

Esempio: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento (9/9)

- L'iterazione 1 è la visita in profondità del Capitolo 1, Esempio «DFS dal nodo 1»: tutti gli archi sono vuoti, $G(0) = G$, e il cammino passa per l'arco $(4, 3)$.
- Dopo l'iterazione 2 il flusso è $\bar{\boldsymbol{x}}$ della rete di riferimento, e l'iterazione 3 è l'aumento dell'esempio sulla rete residua di $\bar{\boldsymbol{x}}$: l'arco all'indietro $(3, 4)$ annulla le due unità inviate su $(4, 3)$ nell'iterazione 1.
- La sesta visita etichetta solo i nodi 1 e 2, e l'algoritmo si ferma: il flusso è il flusso massimo $\tilde{\boldsymbol{x}}$, e $S = \{1, 2\}$ dà il taglio minimo di capacità $u_{13} + u_{24} = 7$.
- L'algoritmo esegue 5 aumenti, entro il limite $\tilde{v} = 7$ del teorema di correttezza.

Esempio: molti aumenti (1/3)

- Nella rete qui sotto, M è un intero positivo
- I cammini $1, 2, 4$ e $1, 3, 4$ portano M unità ciascuno, e il taglio $S = \{1\}$ ha capacità $2M$, quindi $\tilde{v} = 2M$



Esempio: molti aumenti (2/3)

- L'algoritmo di Ford–Fulkerson ammette qualunque cammino aumentante
- Se i cammini $1, 2, 3, 4$ e $1, 3, 2, 4$ si alternano, il secondo attraverso l'arco all'indietro $(3, 2)$, ogni collo di bottiglia è $\delta = 1$, dato dall'arco $(2, 3)$ o dal suo arco all'indietro
- Servono allora $2M$ aumenti: due milioni per $M = 10^6$

Esempio: molti aumenti (3/3)

- Con la visita in profondità di questo modulo, per $M \geq 2$, i cammini sono

$$1, 2, 3, 4, \qquad 1, 2, 4, \qquad 1, 3, 2, 4, \qquad 1, 3, 4,$$

con

$$\delta = 1, \qquad M - 1, \qquad 1, \qquad M - 1$$

- Quattro aumenti

L'algoritmo di Ford–Fulkerson in breve

- L'algoritmo di Ford–Fulkerson aumenta lungo cammini della rete residua finché non ne rimane nessuno
- Con capacità intere si ferma dopo al più $\tilde{v}$ aumenti, con un flusso massimo intero e un taglio minimo
- Il suo tempo di esecuzione $O((n+m)\,\tilde{v})$ è pseudopolinomiale

Riepilogo

L'algoritmo:

- Si parte da $\boldsymbol{x} = 0$; si visita $G(\boldsymbol{x})$ da s (visita in profondità); si aumenta di δ; si ripete
- All'arresto, i nodi etichettati S danno un taglio minimo

Le sue proprietà:

- Capacità intere: flussi interi, al più $\tilde{v}$ aumenti, esiste un flusso massimo intero
- Tempo $O((n+m)\,\tilde{v})$ con $\tilde{v} \leq (n-1)\,U$: pseudopolinomiale

Rete di riferimento: 5 aumenti, $\delta = 2, 1, 2, 1, 1$, $\tilde{v} = 7$

L'algoritmo di Edmonds–Karp

Introduzione: L'algoritmo di Edmonds–Karp

- In questa sezione cambiamo solo la visita del Passo 1: la visita in ampiezza al posto della visita in profondità
- I cammini aumentanti hanno allora il minor numero di archi, e il numero di aumenti non dipende più dalle capacità
- Dimostriamo che l'algoritmo esegue al più $n\,m$ aumenti: è fortemente polinomiale

Definizione 5: algoritmo di Edmonds–Karp

*L'**algoritmo di Edmonds–Karp** è l'algoritmo di Ford–Fulkerson in cui il Passo 1 usa la **visita in ampiezza**:*

- *LIST è una coda;*
- *gli archi residui che escono da ogni nodo sono esaminati per indice crescente della testa;*
- *la visita si ferma appena t è etichettato.*

Le capacità sono numeri reali non negativi qualsiasi.

Cammini aumentanti più brevi e distanze

- Per il Capitolo 1, Proposizione «la BFS trova i cammini più corti in numero di archi», il cammino aumentante ha il numero minimo di archi fra i cammini da s a t in $G(\boldsymbol{x})$.

- Per un flusso ammissibile $\boldsymbol{x}$ e un nodo i, $d_{\boldsymbol{x}}(i)$ è il numero minimo di archi di un cammino da s a i in $G(\boldsymbol{x})$, e $d_{\boldsymbol{x}}(i) = +\infty$ se i non è raggiungibile.

Archi critici

- Un arco del cammino aumentante è **critico** se la sua capacità residua è uguale a δ: dopo l'aumento la sua capacità residua è zero, ed esce dalla rete residua.
- Un aumento lungo P diminuisce r_{ij} di δ e aumenta r_{ji} di δ su ogni arco (i, j) di P, e non cambia nessun'altra capacità residua.
- Quindi gli archi che entrano nella rete residua sono inversi di archi di P.

Lemma 3: le distanze non diminuiscono

Sia $\boldsymbol{x}'$ ottenuto da $\boldsymbol{x}$ con un aumento lungo un cammino P da s a t di $G(\boldsymbol{x})$ con il numero minimo di archi. Allora $d_{\boldsymbol{x}'}(i) \geq d_{\boldsymbol{x}}(i)$ per ogni $i \in N$.

- Nella dimostrazione mostriamo prima che $d_{\boldsymbol{x}}$ cresce al più di 1 lungo ogni arco di $G(\boldsymbol{x}')$, e poi seguiamo un cammino più breve di $G(\boldsymbol{x}')$

Dimostrazione (1/3)

Mostriamo che ogni arco (a, b) di $G(\boldsymbol{x}')$ soddisfa

$$d_{\boldsymbol{x}}(b) \leq d_{\boldsymbol{x}}(a) + 1.$$

1. Se (a, b) è un arco di $G(\boldsymbol{x})$, un cammino più breve da s ad a seguito da (a, b) raggiunge b con $d_{\boldsymbol{x}}(a) + 1$ archi.

Dimostrazione (2/3)

2. Altrimenti (a, b) è l'inverso di un arco (b, a) di P.
   - La parte di P da s a ciascuno dei suoi nodi ha il numero minimo di archi: un cammino verso quel nodo con meno archi, seguito dal resto di P, darebbe una passeggiata da s a t con meno archi di P, e un cammino al suo interno (Capitolo 1, Lemma «ogni passeggiata contiene un cammino»).
   - Quindi

$$d_x(a) = d_x(b) + 1, \quad \text{e} \quad d_x(b) \leq d_x(a) + 1.$$

Dimostrazione (3/3)

- Sia ora $s = i_0, i_1, \ldots, i_q = i$ un cammino di $G(\boldsymbol{x}')$ con $q = d_{\boldsymbol{x}'}(i)$ archi
- Lungo i suoi archi $d_{\boldsymbol{x}}$ cresce al più di 1 alla volta, quindi

$$d_{\boldsymbol{x}}(i) \leq d_{\boldsymbol{x}}(s) + q = d_{\boldsymbol{x}'}(i)$$

- Se i non è raggiungibile in $G(\boldsymbol{x}')$, allora $d_{\boldsymbol{x}'}(i) = +\infty$

□

Lemma 4: archi critici

Nell'algoritmo di Edmonds–Karp, sia l'arco residuo (i, j) critico nell'aumento al flusso $\boldsymbol{x}$, e di nuovo critico in un aumento successivo al flusso $\boldsymbol{y}$. Allora $d_{\boldsymbol{y}}(i) \geq d_{\boldsymbol{x}}(i) + 2$.

- Nella dimostrazione applichiamo il lemma «le distanze non diminuiscono» a ogni aumento fra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

Dimostrazione (1/2)

1. In $\boldsymbol{x}$, l'arco (i, j) sta su un cammino con il numero minimo di archi, quindi
$$d_{\boldsymbol{x}}(j) = d_{\boldsymbol{x}}(i) + 1;$$
dopo l'aumento $r_{ij} = 0$.

2. In $\boldsymbol{y}$ l'arco (i, j) è di nuovo nella rete residua, quindi un aumento intermedio, a un flusso $\boldsymbol{z}$, ha aumentato r_{ij}: il suo cammino usava l'arco inverso (j, i), e
$$d_{\boldsymbol{z}}(i) = d_{\boldsymbol{z}}(j) + 1.$$

Dimostrazione (2/2)

3. Le distanze non diminuiscono mai, quindi

$$d_z(j) \geq d_x(j) \qquad \text{e} \qquad d_y(i) \geq d_z(i).$$

Quindi

$$d_y(i) \geq d_z(i) = d_z(j) + 1 \geq d_x(j) + 1 = d_x(i) + 2.$$

□

Teorema 4: tempo di esecuzione di Edmonds–Karp

Per qualsiasi capacità non negativa, l'algoritmo di Edmonds–Karp si ferma dopo al più $n\,m$ aumenti con un flusso massimo e un taglio minimo, e richiede tempo $O(n\,m\,(n+m))$, cioè $O(n\,m^2)$ quando $m \geq n-1$.

Dimostrazione (1/2)

1. Ogni aumento ha almeno un arco critico: un arco di P la cui capacità residua è uguale a δ.

2. Quando (i, j) è critico, i sta prima di t su un cammino da s a t con al più $n - 1$ archi, quindi

$$0 \leq d(i) \leq n - 2.$$

Per il lemma degli archi critici questa distanza cresce di almeno 2 fra due volte in cui l'arco è critico, quindi (i, j) è critico al più

$$\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 \leq \frac{n}{2} \text{ volte.}$$

Dimostrazione (2/2)

3. Ogni arco residuo è (i, j) o (j, i) per un arco $(i, j) \in A$: ce ne sono al più $2m$, e gli aumenti sono al più

$$2m \cdot \frac{n}{2} = n\,m.$$

4. Ogni iterazione richiede tempo $O(n + m)$, come nel teorema sul tempo di esecuzione di Ford–Fulkerson. All'arresto $G(\boldsymbol{x})$ non ha cammini aumentanti, e il teorema flusso massimo-taglio minimo si applica come nella dimostrazione della correttezza di Ford–Fulkerson.

□

Un algoritmo fortemente polinomiale

- Il limite dipende solo da n e m, non dalle capacità
- L'algoritmo di Edmonds–Karp è **fortemente polinomiale**
- Si ferma anche con capacità irrazionali

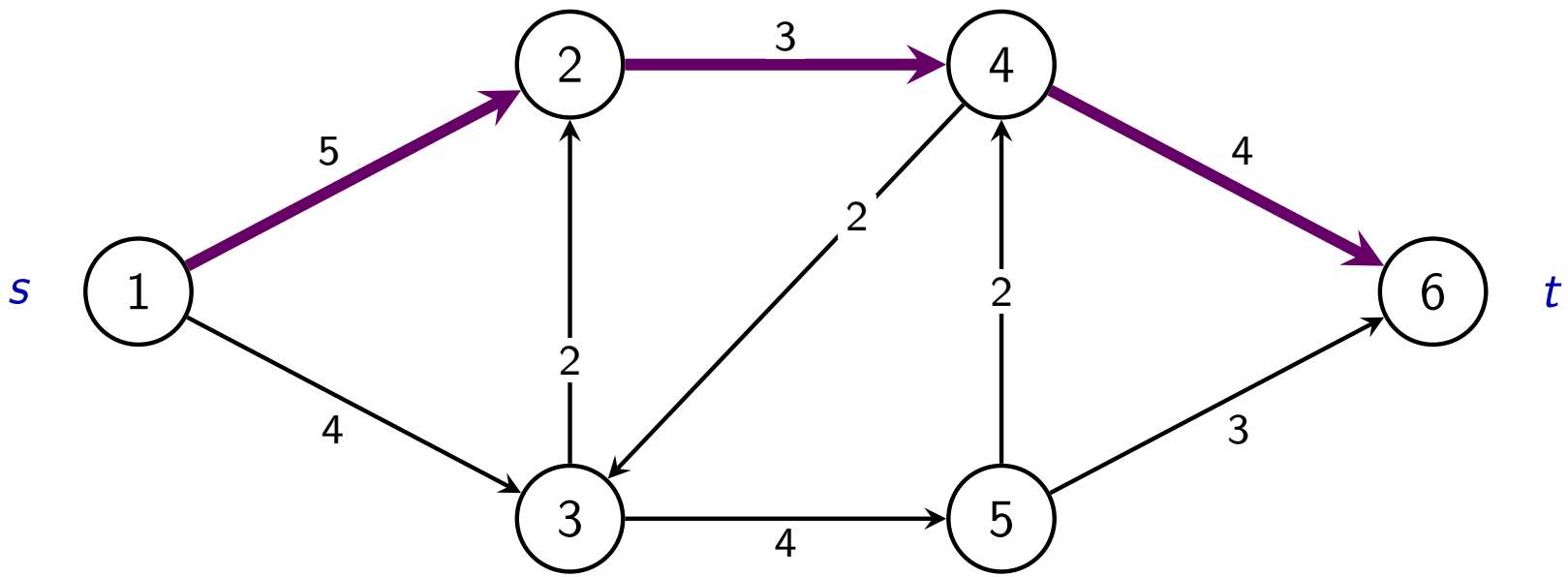
Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (1/7)

Eseguiamo l'algoritmo sulla rete di riferimento; la colonna «archi» è il numero di archi del cammino aumentante.

iterazione	cammino aumentante	archi	r_{ij} su P	archi all'indietro	δ	v
1	$1, 2, 4, 6$	3	$5, 3, 4$	–	3	3
2	$1, 3, 5, 6$	3	$4, 4, 3$	–	3	6
3	$1, 3, 5, 4, 6$	4	$1, 1, 2, 1$	–	1	7

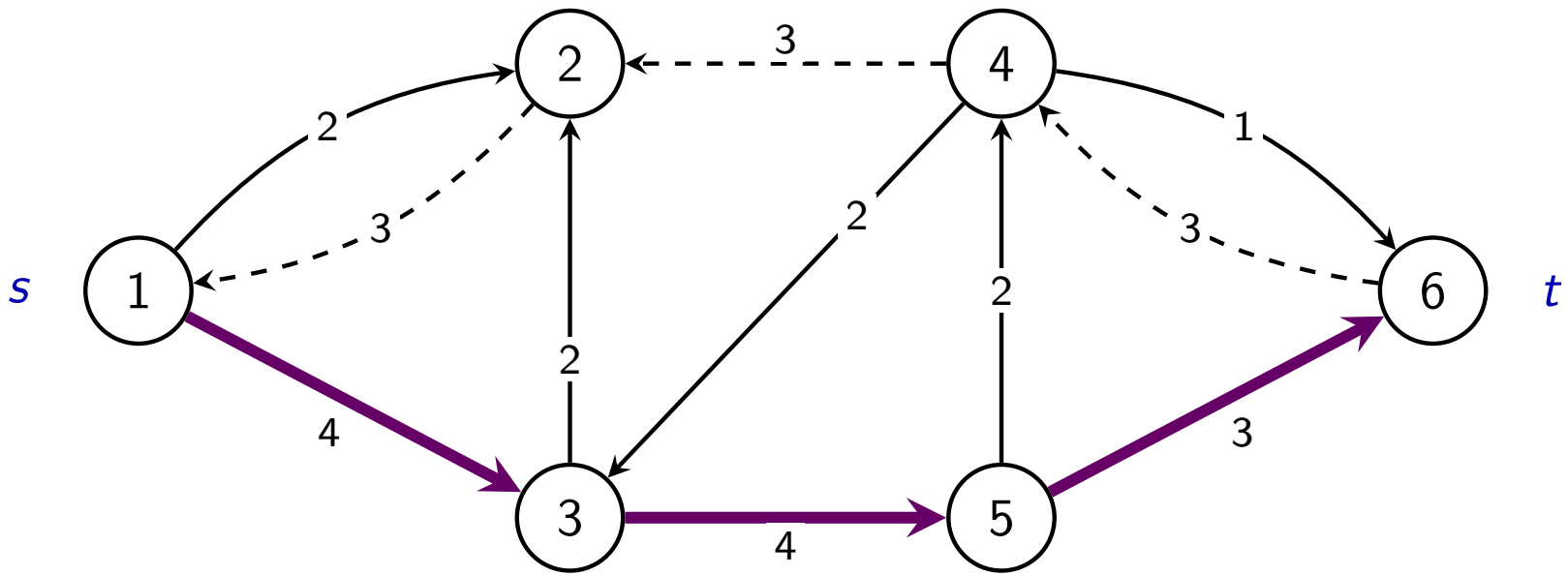
Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (2/7)

Iterazione 1. $G(0) = G$; la visita in ampiezza trova $1, 2, 4, 6$, con $\delta = 3$.



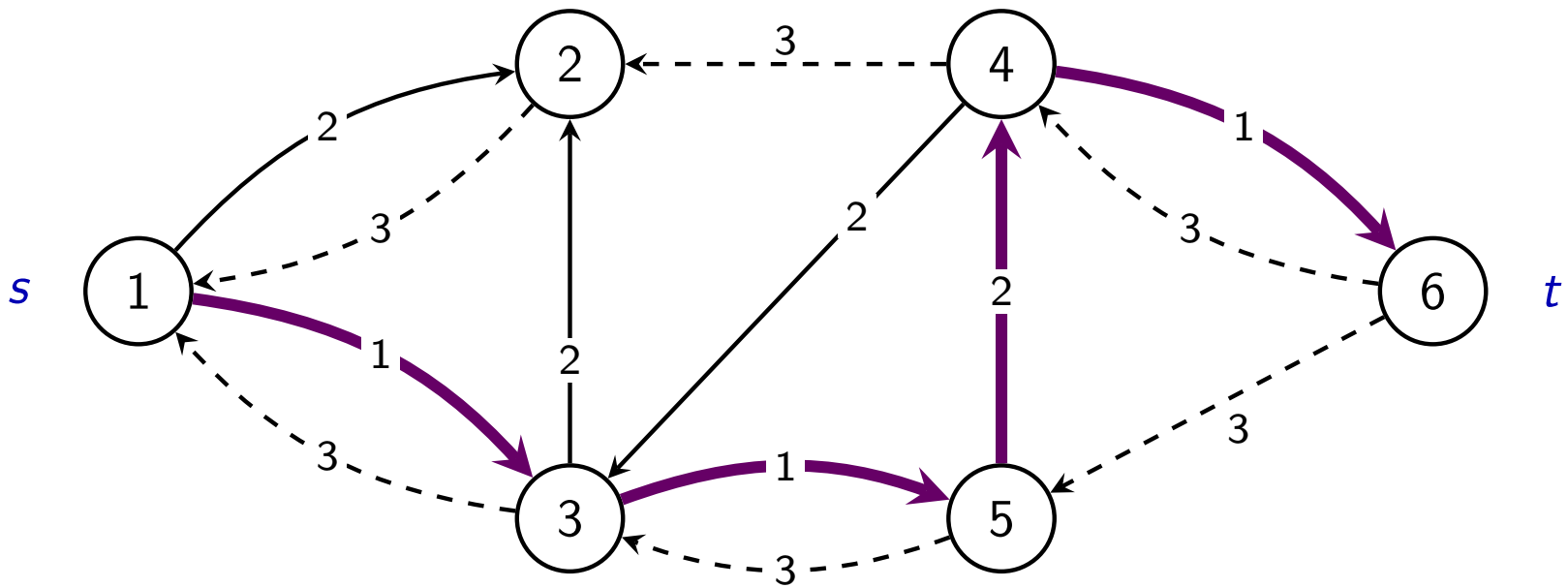
Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (3/7)

Iterazione 2. La rete residua del flusso di valore 3; il cammino $1, 3, 5, 6$ ha $\delta = 3$.



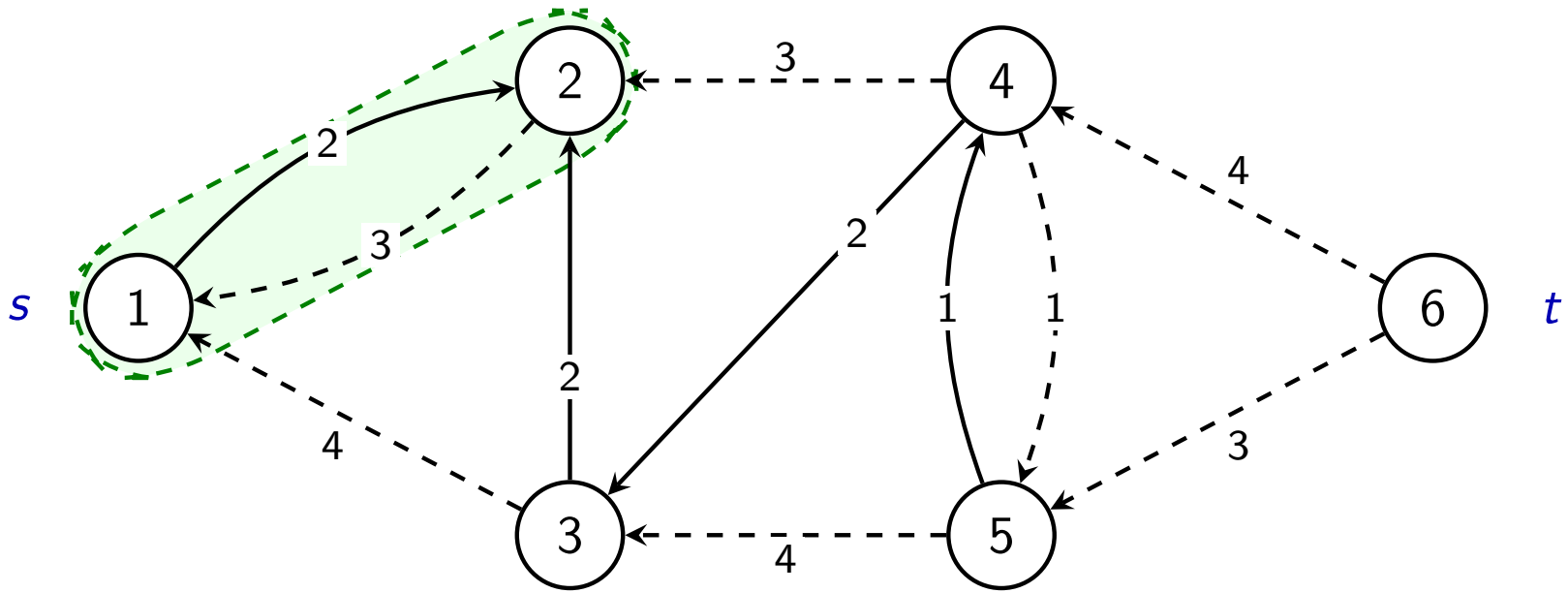
Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (4/7)

Iterazione 3. La rete residua del flusso di valore 6; il cammino $1, 3, 5, 4, 6$ ha $\delta = 1$.



Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (5/7)

Quarta visita. Il flusso è $\tilde{\boldsymbol{x}}$: la visita etichetta solo 1 e 2 (ombreggiati), come in Ford–Fulkerson.



Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (6/7)

Le distanze $d_x(i)$ nella rete residua prima di ogni visita sono:

iterazione	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5)$	$d(6)$
1	0	1	1	2	2	3
2	0	1	1	3	2	3
3	0	1	1	3	2	4
arresto	0	1	∞	∞	∞	∞

L'iterazione 1 è la visita in ampiezza del Capitolo 1, Esempio «BFS dal nodo 1», il cui cammino dell'albero fino al nodo 6 è $1, 2, 4, 6$.

Esempio: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento (7/7)

- Gli archi critici sono $(2, 4)$ nell'iterazione 1, $(5, 6)$ nell'iterazione 2, e $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$ nell'iterazione 3.
- Quando $(2, 4)$ esce dalla rete residua, $d(4)$ cresce da 2 a 3; nessuna distanza diminuisce mai.
- L'algoritmo esegue 3 aumenti, contro i 5 di Ford–Fulkerson, molto sotto il limite $n\,m = 54$.
- Termina con lo stesso flusso massimo $\tilde{\boldsymbol{x}}$, l'unico, e lo stesso taglio $S = \{1, 2\}$.
- Sulla rete dell'esempio con molti aumenti la visita in ampiezza trova $1, 2, 4$ e poi $1, 3, 4$, ciascuno con $\delta = M$: due aumenti per ogni M.

L'algoritmo di Edmonds–Karp in breve

- L'algoritmo di Edmonds–Karp aumenta lungo cammini con il minor numero di archi, trovati dalla visita in ampiezza
- Le distanze da s nella rete residua non diminuiscono mai, e ogni arco è critico al più $\frac{n}{2}$ volte
- L'algoritmo esegue al più $n\,m$ aumenti: tempo $O(n\,m^2)$, per qualsiasi capacità

Riepilogo

L'algoritmo:

- Ford–Fulkerson con la visita in ampiezza: cammini aumentanti con il minor numero di archi

L'analisi:

- Le distanze $d_{\boldsymbol{x}}(i)$ non diminuiscono mai
- Fra due volte in cui (i, j) è critico, $d(i)$ cresce di almeno 2
- Al più $n\,m$ aumenti, tempo $O(n\,m^2)$: fortemente polinomiale

Rete di riferimento: 3 aumenti, $\delta = 3, 3, 1$, lo stesso $\tilde{\boldsymbol{x}}$ e il taglio $S = \{1, 2\}$

Applicazioni

Introduzione: Applicazioni

- In questa sezione risolviamo due problemi combinatori come problemi di flusso massimo con capacità unitarie
- L'accoppiamento massimo in un grafo bipartito: assegnare lavori a lavoratori
- Il numero massimo di cammini arco-disgiunti da s a t (teorema di Menger)
- La chiave è il corollario di integralità: dà flussi 0/1, che sono accoppiamenti e cammini

Definizione 6: grafo bipartito e accoppiamento (1/2)

*Un grafo non orientato $H = (V_1 \cup V_2, E)$ è **bipartito** se V_1 e V_2 sono disgiunti e ogni spigolo ha un estremo in V_1 e uno in V_2; scriviamo gli spigoli come $\{i, j\}$ con $i \in V_1$ e $j \in V_2$.*

- *Un **accoppiamento** (matching) è un insieme $M \subseteq E$ di spigoli, a due a due senza estremi in comune.*
- *Il **problema dell'accoppiamento massimo** chiede un accoppiamento con il maggior numero di spigoli.*

Definizione: grafo bipartito e accoppiamento (2/2)

*La **rete di** H ha*

- *i nodi* $\{s\} \cup V_1 \cup V_2 \cup \{t\}$,
- *gli archi* (s, i) *per* $i \in V_1$, (i, j) *per ogni spigolo* $\{i, j\} \in E$, (j, t) *per* $j \in V_2$,
- *e tutte le capacità uguali a* 1.

- Con V_1 un insieme di lavoratori, V_2 un insieme di lavori, e uno spigolo quando un lavoratore può svolgere un lavoro, un accoppiamento assegna lavori a lavoratori, al più un lavoro per lavoratore e un lavoratore per lavoro.
- Nell'ordine dei nodi, s viene per primo e t per ultimo; gli altri nodi mantengono i loro indici.

Proposizione 1: accoppiamenti e flussi

Il numero massimo di spigoli di un accoppiamento di H è uguale al valore massimo $\tilde{v}$ di un flusso nella rete di H. Se $\tilde{\mathbf{x}}$ è un flusso massimo intero, allora $M = \{\{i,j\} \in E : \tilde{x}_{ij} = 1\}$ è un accoppiamento massimo.

- Nella dimostrazione passiamo dagli accoppiamenti ai flussi, dai flussi interi agli accoppiamenti, e chiudiamo con il corollario di integralità

Dimostrazione (1/3)

1. *Dagli accoppiamenti ai flussi.*
   - Dato un accoppiamento M, poniamo $x = 1$ sugli archi (s, i), (i, j), (j, t) di ogni spigolo $\{i, j\} \in M$, e $x = 0$ altrove.
   - Ogni nodo di $V_1 \cup V_2$ è estremo di al più uno spigolo di M, quindi il flusso è ammissibile, e il suo valore è $|M|$.

Dimostrazione (2/3)

2. *Dai flussi interi agli accoppiamenti.* Sia $\boldsymbol{x}$ un flusso ammissibile intero, quindi $x_{ij} \in \{0, 1\}$.
   - Un nodo $i \in V_1$ ha il solo arco entrante (s, i), quindi al più un arco (i, j) porta flusso.
   - Un nodo $j \in V_2$ ha il solo arco uscente (j, t), quindi al più un arco (i, j) porta flusso.
   - Quindi $M = \{\{i, j\} : x_{ij} = 1\}$ è un accoppiamento.
   - Per $S = \{s\} \cup V_1$, gli archi in avanti sono gli archi (i, j) e non ci sono archi all'indietro: per il lemma del flusso attraverso un taglio, $v = |M|$.

Dimostrazione (3/3)

3. Per il corollario di integralità esiste un flusso massimo intero $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

   - Per il punto 1, nessun accoppiamento ha più di $\tilde{v}$ spigoli,
   - e per il punto 2 l'accoppiamento di $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ha $\tilde{v}$ spigoli.

□

Esempio: lavoratori e lavori (1/3)

Quattro lavoratori $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e tre lavori $V_2 = \{5, 6, 7\}$ hanno gli spigoli

$$E = \big\{\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\big\}.$$

L'algoritmo di Edmonds–Karp sulla rete di H, con i nodi nell'ordine $s, 1, 2, \ldots, 7, t$, dà:

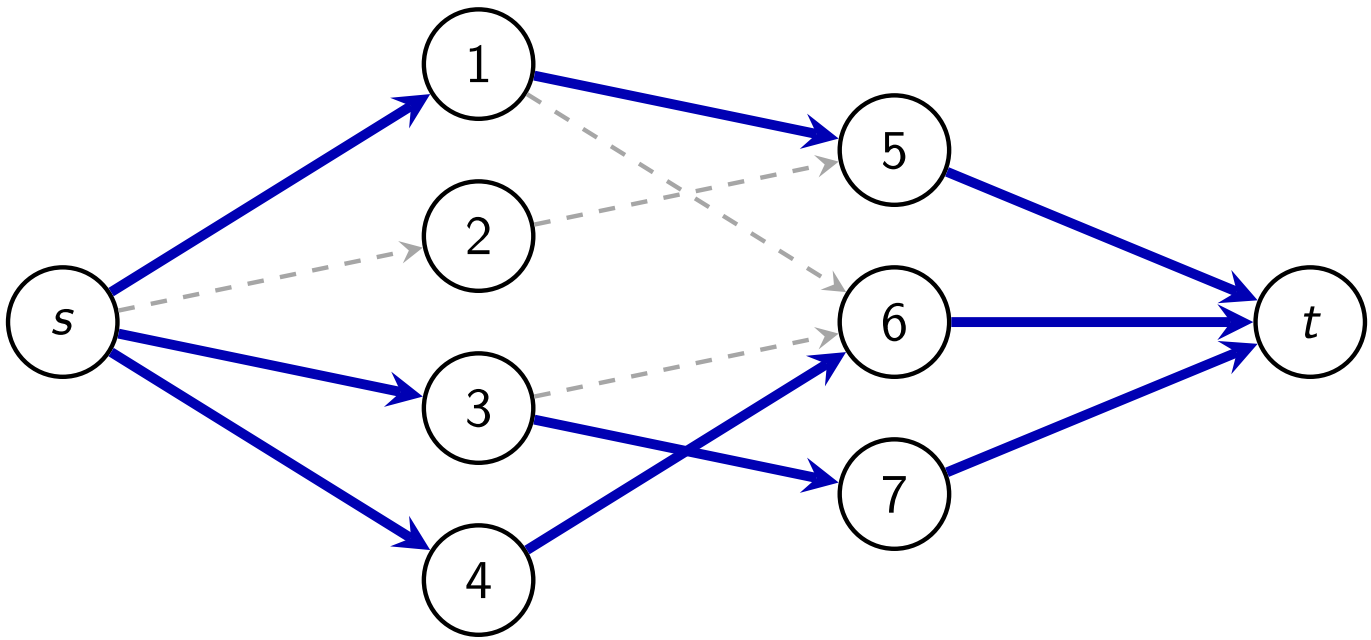
iterazione	cammino aumentante	r_{ij} su P	archi all'indietro	δ	v
1	$s, 1, 5, t$	$1, 1, 1$	–	1	1
2	$s, 3, 6, t$	$1, 1, 1$	–	1	2
3	$s, 4, 6, 3, 7, t$	$1, 1, 1, 1, 1$	$(6, 3)$	1	3

Esempio: lavoratori e lavori (2/3)

- L'iterazione 3 usa l'arco all'indietro $(6, 3)$: il lavoratore 3 lascia il lavoro 6 per il lavoro 7, e il lavoratore 4 prende il lavoro 6
- L'accoppiamento massimo è $M = \{\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$, con 3 spigoli; il lavoratore 2 resta senza lavoro
- All'arresto la visita etichetta $S = \{s, 1, 2, 4, 5, 6\}$; gli archi in avanti del taglio sono $(s, 3)$, $(5, t)$, $(6, t)$, con capacità $3 = |M|$

Esempio: lavoratori e lavori (3/3)

Nella figura gli archi con flusso 1 sono blu.



Cammini arco-disgiunti

- Due cammini orientati sono **arco-disgiunti** se non hanno archi in comune; possono condividere nodi
- Quanti cammini arco-disgiunti da s a t possiamo trovare? E quanti archi bisogna togliere per separare t da s?
- Il prossimo teorema dice che i due numeri sono uguali, e la dimostrazione è un argomento di flusso massimo

Teorema 5: Menger, versione per archi

Siano $G = (N, A)$ un grafo orientato e $s \neq t$ due nodi. Il numero massimo di cammini orientati da s a t a due a due arco-disgiunti è uguale al numero minimo di archi la cui rimozione non lascia alcun cammino orientato da s a t.

- Nella dimostrazione diamo a ogni arco capacità 1, e chiamiamo $\tilde{v}$ il valore massimo di un flusso

Dimostrazione (1/4)

Diamo a ogni arco capacità 1, e sia $\tilde{v}$ il valore massimo di un flusso.

1. *I cammini danno flussi.*
   - La somma dei vettori di incidenza di k cammini arco-disgiunti da s a t è un flusso ammissibile di valore k: ogni arco porta al più 1, e ogni cammino entra nei suoi nodi interni e ne esce.
   - Quindi $k \leq \tilde{v}$.

Dimostrazione (2/4)

2. *I flussi danno cammini.* Per il corollario di integralità esiste un flusso $\boldsymbol{x}$ con $x_{ij} \in \{0, 1\}$ e valore $\tilde{v}$. Se $\tilde{v} \geq 1$, camminiamo da s lungo archi con $x_{ij} = 1$, ciascuno usato al più una volta, finché non raggiungiamo t:
   - in un nodo $i \notin \{s, t\}$ la passeggiata ha usato un arco entrante in più degli archi uscenti, e la conservazione dà un arco uscente non usato con flusso;
   - in s la passeggiata ha usato tanti archi uscenti quanti entranti, mentre gli archi con flusso che escono da s sono $\tilde{v} \geq 1$ in più di quelli che entrano: uno non usato esiste.

Dimostrazione (3/4)

- La passeggiata termina, in t, e contiene un cammino P da s a t (Capitolo 1, Lemma «ogni passeggiata contiene un cammino»)
- Ponendo $x_{ij} = 0$ su P resta un flusso 0/1 di valore $\tilde{v} - 1$
- Ripetendo si ottengono $\tilde{v}$ cammini arco-disgiunti

Dimostrazione (4/4)

3. *Rimozione di archi.*
   - Se la rimozione di un insieme F di archi non lascia cammini da s a t, l'insieme S dei nodi ancora raggiungibili da s ha $t \notin S$ e $\delta^+(S) \subseteq F$, quindi

$$|F| \geq u(S, N \setminus S) \geq \tilde{v}.$$

   - Viceversa, ogni cammino da s a t esce da S attraverso un arco di $\delta^+(S)$: rimuovendo i $\tilde{v}$ archi in avanti di un taglio minimo (teorema flusso massimo-taglio minimo) non resta alcun cammino.

□

Esempio: cammini arco-disgiunti nel grafo (1/2)

- Sul grafo di riferimento con tutte le capacità uguali a 1, $s = 1$ e $t = 6$, l'algoritmo di Edmonds–Karp trova i cammini

$$1, 2, 4, 6 \qquad \text{e} \qquad 1, 3, 5, 6,$$

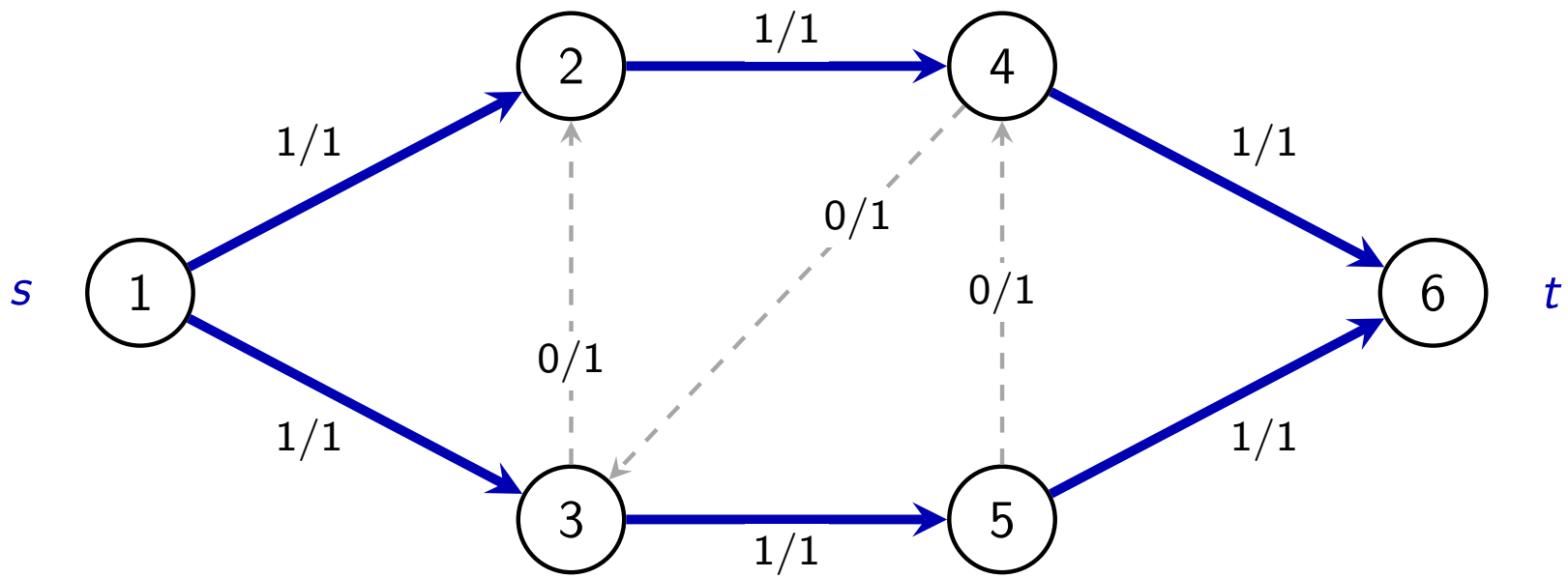
  e $\tilde{v} = 2$

- Questi due cammini sono arco-disgiunti

- Rimuovendo i due archi $(1, 2)$, $(1, 3)$ che escono dal nodo 1 non resta alcun cammino da 1 a 6: entrambi i numeri del teorema di Menger valgono 2

Esempio: cammini arco-disgiunti nel grafo (2/2)

I due cammini arco-disgiunti $1, 2, 4, 6$ e $1, 3, 5, 6$ sono blu; gli altri archi sono vuoti.



Accoppiamenti e cammini come flussi

- Un accoppiamento massimo di un grafo bipartito è un flusso massimo intero in una rete con capacità unitarie
- Lo stesso vale per i cammini arco-disgiunti da s a t
- Il taglio minimo certifica entrambi

Riepilogo

Accoppiamenti nei grafi bipartiti:

- Rete di H: $s \to V_1 \to V_2 \to t$, tutte le capacità uguali a 1
- Accoppiamento massimo = flusso massimo intero; nell'esempio $|M| = 3$

Cammini arco-disgiunti (Menger):

- Numero massimo di cammini arco-disgiunti = numero minimo di archi da rimuovere = $\tilde{v}$ con capacità unitarie
- Nel grafo di riferimento: i cammini $1, 2, 4, 6$ e $1, 3, 5, 6$

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- In questa sezione elenchiamo gli errori più comuni su tagli, reti residue e cammini aumentanti
- Riguardano la capacità di un taglio, gli archi all'indietro, il collo di bottiglia, la lettura del taglio minimo e i tempi di esecuzione
- Riconoscerli aiuta a eseguire correttamente gli algoritmi a mano

Osservazione 3: errori tipici (1/2)

- ***Contare gli archi all'indietro di un taglio.*** *La capacità $u(S, N \setminus S)$ somma solo gli archi da S a $N \setminus S$.*
- ***Dimenticare gli archi all'indietro della rete residua.*** *Con i soli archi in avanti, il metodo può fermarsi a un flusso non massimo, come al valore 5 sulla rete di riferimento.*
- ***Dare a un arco all'indietro la capacità u_{ij}.*** *L'arco all'indietro (j, i) ha $r_{ji} = x_{ij}$: si può rimandare indietro solo il flusso già inviato.*

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ***Prendere il collo di bottiglia dalle capacità.*** *Il collo di bottiglia è la più piccola capacità residua r_{ij} sul cammino, non la più piccola u_{ij}.*
- ***Aggiungere δ su un arco all'indietro.*** *Lungo un arco all'indietro (j, i) il flusso x_{ij} diminuisce di δ.*
- ***Leggere il taglio dagli archi saturi.*** *Il taglio minimo è dato dai nodi raggiungibili da s nella rete residua all'arresto; gli archi saturi non formano necessariamente un taglio.*
- ***Chiamare polinomiale Ford–Fulkerson.*** *Il suo numero di aumenti può crescere con le capacità, come i $2M$ dell'esempio con molti aumenti; Edmonds–Karp ne esegue al più $n\,m$.*

Riepilogo

Tagli e reti residue:

- Nella capacità di un taglio contano solo gli archi in avanti
- Gli archi all'indietro della rete residua servono, con $r_{ji} = x_{ij}$

Aumento:

- Il collo di bottiglia è la più piccola r_{ij} sul cammino; su un arco all'indietro il flusso diminuisce di δ

All'arresto:

- Il taglio minimo viene dai nodi raggiungibili; Ford–Fulkerson è solo pseudopolinomiale

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo le idee chiave del capitolo in pochi punti
- Chiudiamo con la rete di riferimento in sintesi: i numeri calcolati in questo capitolo

Riepilogo (1/3)

- Un flusso ammissibile rispetta le capacità e si conserva nei nodi diversi da s e t; il suo valore è il deflusso netto di s, ed è uguale al flusso netto attraverso ogni taglio s–t.
- Dualità debole: $v \leq u(S, N \setminus S)$ per ogni flusso e ogni taglio.
- La rete residua ha archi in avanti con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ e archi all'indietro con $r_{ji} = x_{ij}$; un cammino aumentante aumenta il valore del suo collo di bottiglia δ.

Riepilogo (2/3)

- Flusso massimo-taglio minimo: un flusso è massimo se e solo se non esistono cammini aumentanti, e $\tilde{v}$ è uguale alla capacità minima di un taglio; con capacità intere esiste un flusso massimo intero.
- Ford–Fulkerson (visita in profondità): con capacità intere al più $\tilde{v}$ aumenti, pseudopolinomiale. Edmonds–Karp (visita in ampiezza): al più $n\,m$ aumenti, tempo $O(n\,m^2)$.
- Gli accoppiamenti massimi nei grafi bipartiti e i cammini arco-disgiunti sono flussi massimi interi.

Riepilogo (3/3)

La rete di riferimento in sintesi.

capacità, $s = 1$, $t = 6$	$\boldsymbol{u} = (5, 4, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 3)$
flusso massimo (unico)	$\tilde{\boldsymbol{x}} = (3, 4, 3, 0, 4, 0, 4, 1, 3)$, $\tilde{v} = 7$
tagli minimi, capacità 7	$S = \{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
Ford–Fulkerson (DFS)	5 aumenti, $\delta = 2, 1, 2, 1, 1$
Edmonds–Karp (BFS)	3 aumenti, $\delta = 3, 3, 1$
tutte le capacità 1	cammini arco-disgiunti $1, 2, 4, 6$ e $1, 3, 5, 6$