Grafi

Indice

Grafi non orientati e orientati

Rappresentazioni di un grafo

Connettività

Alberi e foreste

Il rango della matrice di incidenza

Visita di un grafo

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- usare le nozioni di base dei grafi orientati e non orientati: adiacenza, grado, passeggiate, cammini e cicli;
- rappresentare un grafo mediante una matrice di adiacenza, liste di adiacenza, una lista degli archi o una matrice di incidenza nodo–arco, e confrontare lo spazio richiesto da ciascuna rappresentazione;
- trovare le componenti connesse e le componenti fortemente connesse di un grafo;
- riconoscere un albero attraverso caratterizzazioni equivalenti e calcolare il rango della matrice di incidenza;
- eseguire la visita in ampiezza e in profondità, costruire l'albero dei predecessori e dimostrare che la visita individua i nodi raggiungibili in tempo $O(|N| + |A|)$.

Prerequisiti

- Dal modulo *Algebra lineare*, i capitoli «Vettori» e «Matrici»: matrici, combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti e rango di una matrice
- Dal modulo *Analisi matematica 1*, i capitoli «Insiemi» e «Relazioni binarie»: insiemi, relazioni e classi di equivalenza
- Dal modulo *Algoritmi*, il capitolo «Notazione asintotica»: la notazione $O(\cdot)$ per il tempo di esecuzione di un algoritmo
- Non è necessaria alcuna conoscenza della teoria dei grafi: ogni nozione è definita in questo capitolo

Grafi non orientati e orientati

Introduzione: Grafi non orientati e orientati

- I grafi sono il linguaggio di tutto il modulo: strade, condotte, cavi e progetti sono reti di nodi e archi
- Definiamo i grafi non orientati (vertici e spigoli) e i grafi orientati (nodi e archi), con i loro gradi
- Introduciamo il **grafo di riferimento**, usato in tutti gli esempi del capitolo
- Chiudiamo con passeggiate, cammini e cicli, il modo di muoversi lungo un grafo

Definizione 1: grafo non orientato

*Un **grafo non orientato** $G = (V, E)$ è formato da un insieme finito V di **vertici** e da un insieme E di **spigoli**, ciascuno dei quali è un sottoinsieme di V con due elementi:*

$$E \subseteq \big\{ \{u, v\} : u, v \in V,\ u \neq v \big\}.$$

Scriviamo $n = |V|$ e $m = |E|$, e i vertici sono etichettati $1, 2, \ldots, n$.

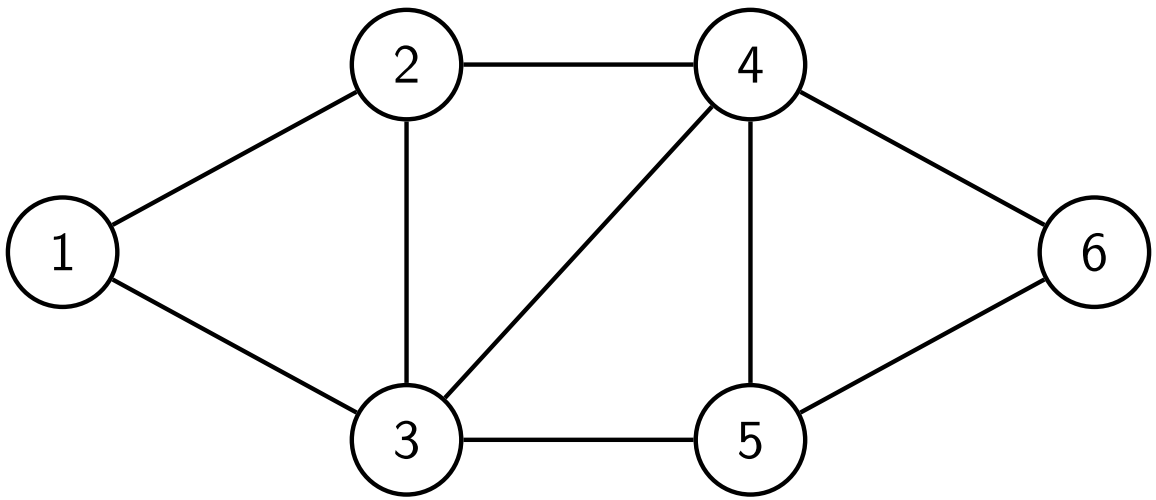
- *I vertici u e v sono gli **estremi** dello spigolo $\{u, v\}$; lo spigolo è **incidente** a u e a v, e u e v sono **adiacenti**.*
- *L'**intorno** di v è $N(v) = \{ u \in V : \{u, v\} \in E \}$, l'insieme degli spigoli incidenti è $\delta(v) = \{ \{u, v\} \in E : u \in V \}$ e il **grado** di v è $\deg(v) = |\delta(v)|$.*

Esempio: un grafo non orientato (1/2)

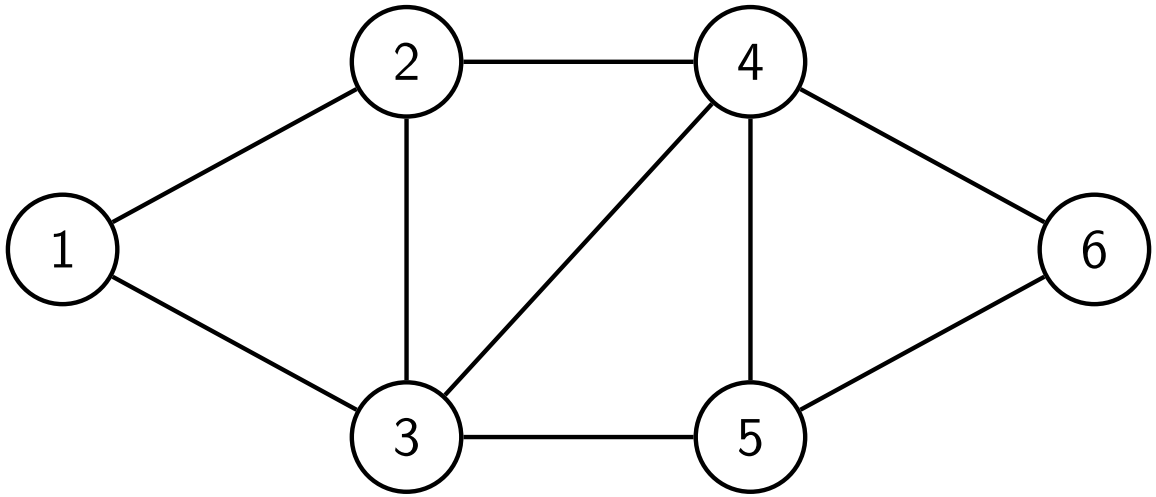
Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con $n = 6$ vertici e $m = 9$ spigoli:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$E = \big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\big\}.$$



Esempio: un grafo non orientato (2/2)



- L'intorno del vertice 3 è $N(3) = \{1, 2, 4, 5\}$, quindi $\deg(3) = 4$
- I gradi dei sei vertici sono

$$\deg(1) = 2, \quad \deg(2) = 3, \quad \deg(3) = 4,$$
$$\deg(4) = 4, \quad \deg(5) = 3, \quad \deg(6) = 2.$$

- Nell'esempio la somma dei gradi è un numero pari, il doppio del numero degli spigoli
- Non è un caso: vale in ogni grafo non orientato

Proposizione 1: lemma della stretta di mano

Per ogni grafo non orientato $G = (V, E)$ *abbiamo*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,m.$$

Dimostrazione

- La somma conta le coppie (v, e) con $v \in V$, $e \in \delta(v)$
- Ogni spigolo $e = \{u, v\}$ compare esattamente in due coppie, (u, e) e (v, e)
- Quindi il numero di coppie è $2m$ □

Sull'esempio. La somma dei gradi è

$$2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 18 = 2 \cdot 9.$$

Molte reti hanno un verso: una strada a senso unico, una condotta, una precedenza fra due attività.

Orientiamo ora gli spigoli e otteniamo i **grafi orientati**.

Definizione 2: grafo orientato (1/2)

*Un **grafo orientato** $G = (N, A)$ è dato da un insieme finito N di **nodi** e da un insieme A di **archi**, ogni arco essendo una coppia ordinata di nodi distinti:*

$$A \subseteq \{ (i,j) : i,j \in N,\ i \neq j \}.$$

Scriviamo $n = |N|$ e $m = |A|$, e i nodi sono etichettati $1, 2, \ldots, n$.

- *L'arco (i,j) va dalla sua **coda** i alla sua **testa** j; j è un **successore** di i e i è un **predecessore** di j.*

Definizione: grafo orientato (2/2)

- *La **stella uscente** $\delta^+(i) = \{ (i,j) \in A \}$ contiene gli archi uscenti da i, e la **stella entrante** $\delta^-(i) = \{ (j,i) \in A \}$ gli archi entranti in i.*
- *Il **grado uscente** di i è $\deg^+(i) = |\delta^+(i)|$ e il **grado entrante** è $\deg^-(i) = |\delta^-(i)|$.*

Archi antiparalleli e grafo sottostante

- Gli archi (i, j) e (j, i) sono diversi: si chiamano **antiparalleli** e possono appartenere entrambi ad A
- Il **grafo non orientato sottostante** a $G = (N, A)$ ha lo spigolo $\{i, j\}$ per ogni arco (i, j) o (j, i) di A: si ottiene ignorando l'orientamento degli archi

Esempio: il grafo di riferimento (1/3)

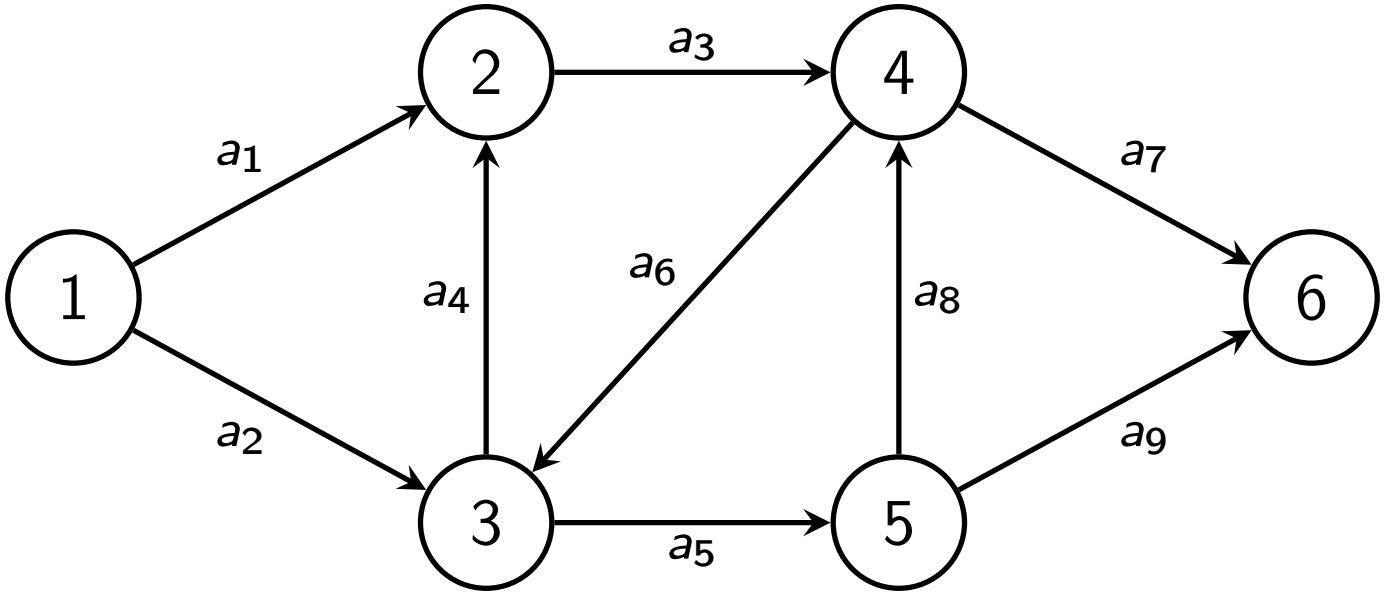
Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $n = 6$ nodi e $m = 9$ archi:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,2), (3,5), (4,3), (4,6), (5,4), (5,6)\}.$$

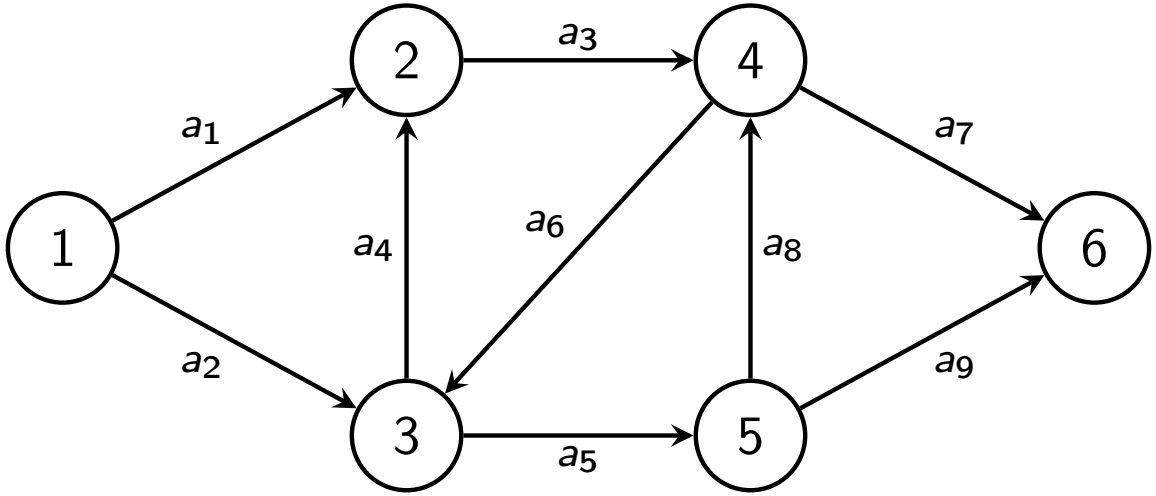
- Gli archi sono numerati $a_1, a_2, \ldots, a_9$ in questo ordine (lessicografico), come nella figura della slide successiva

Esempio: il grafo di riferimento (2/3)



a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(5,6)$

Esempio: il grafo di riferimento (3/3)



I gradi uscenti e quelli entranti sono:

nodo i	1	2	3	4	5	6
$\deg^+(i)$	2	1	2	2	2	0
$\deg^-(i)$	0	2	2	2	1	2

- Il grafo non orientato sottostante è il grafo dell'esempio precedente
- Chiamiamo questo grafo il **grafo di riferimento**: tutti gli esempi del capitolo lo utilizzano

Gradi uscenti e gradi entranti

- Ogni arco ha una coda e una testa, quindi

$$\sum_{i \in N} \deg^+(i) = \sum_{i \in N} \deg^-(i) = m.$$

- Nel grafo di riferimento entrambe le somme valgono 9:

$$2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 0 \;=\; 0 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 \;=\; 9.$$

Ora che abbiamo i grafi, vediamo come **muoversi** lungo di essi:

passeggiate, cammini e cicli, prima non orientati e poi orientati.

Definizione 3: passeggiata, cammino e ciclo

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato.

- *Una **passeggiata** da v_0 a v_k è una sequenza $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ di vertici e spigoli con $e_t = \{v_{t-1}, v_t\} \in E$ per ogni $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$; la sua **lunghezza** è k.*
- *La passeggiata è **chiusa** se $v_0 = v_k$. È un **cammino** se i vertici $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sono distinti.*
- *Un **ciclo** è una passeggiata chiusa con $k \geq 3$ i cui vertici $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ sono distinti.*

*Un grafo senza cicli è **aciclico**. In un grafo semplice una passeggiata è identificata dai suoi vertici $v_0, v_1, \ldots, v_k$.*

Definizione 4: passeggiata, cammino e ciclo orientati

Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato.

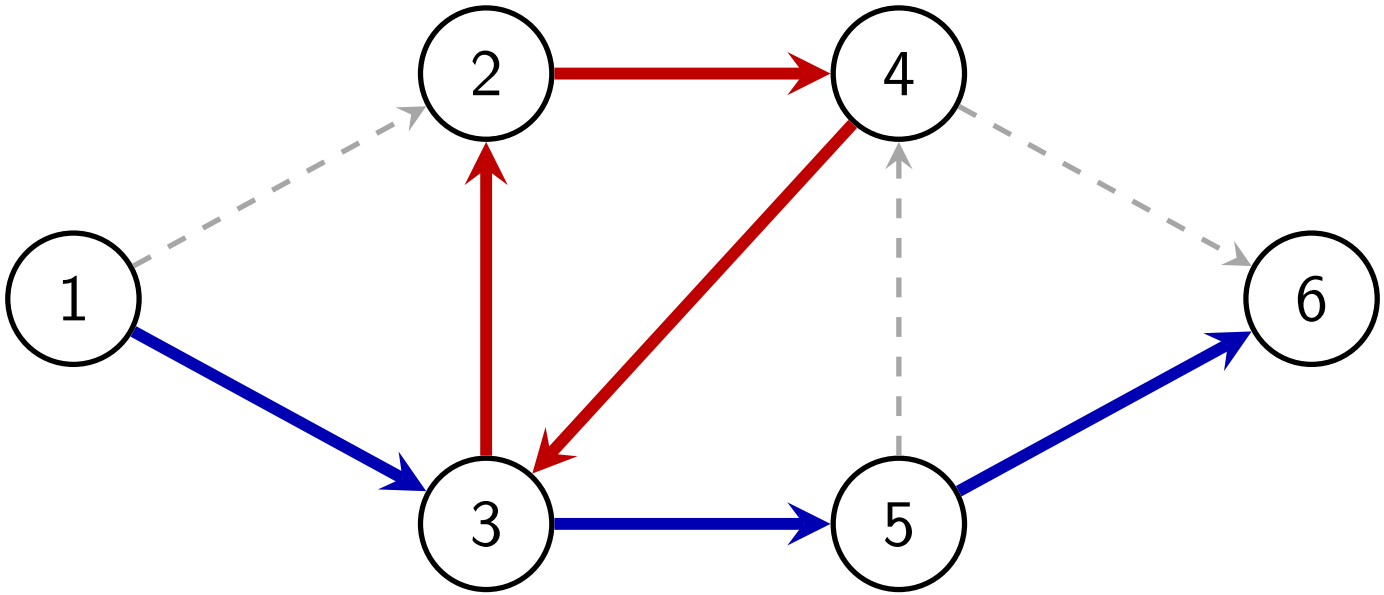
- *Una **passeggiata orientata** da i_0 a i_k è una sequenza di nodi $i_0, i_1, \ldots, i_k$ con $(i_{t-1}, i_t) \in A$ per ogni $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$: ogni arco è percorso dalla coda alla testa.*
- *È un **cammino orientato** se i suoi nodi sono distinti, e un **ciclo orientato** se $k \geq 2$, $i_0 = i_k$ e i nodi $i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}$ sono distinti.*
- *Una passeggiata, un cammino o un ciclo del grafo non orientato sottostante è una passeggiata, un cammino o un ciclo di G: i suoi archi possono essere percorsi nei due versi, e un arco è percorso **in avanti** se va dalla coda alla testa, **all'indietro** altrimenti.*

Esempio: passeggiate, cammini e cicli (1/2)

Nel grafo di riferimento:

- $1, 3, 2, 4, 3, 5$ è una passeggiata orientata di lunghezza 5; non è un cammino, perché il nodo 3 compare due volte
- $1, 3, 5, 6$ è un cammino orientato di lunghezza 3 (in blu nella figura della slide successiva)
- $2, 4, 3, 2$ è un ciclo orientato di lunghezza 3 (in rosso nella figura)
- $1, 2, 3$ è un cammino di G ma non un cammino orientato: l'arco $(1, 2)$ è percorso in avanti e l'arco $(3, 2)$ all'indietro

Esempio: passeggiate, cammini e cicli (2/2)



- Blu: il cammino orientato $1, 3, 5, 6$
- Rosso: il ciclo orientato $2, 4, 3, 2$

- La passeggiata $1, 3, 2, 4, 3, 5$ ripete il nodo 3, ma si può accorciare in un cammino
- Questo è sempre possibile

Lemma 1: ogni passeggiata contiene un cammino

Se un grafo ha una passeggiata (orientata) da u a v, allora ha anche un cammino (orientato) da u a v, i cui vertici appartengono alla passeggiata.

Dimostrazione

- Tra le passeggiate da u a v che usano solo vertici della passeggiata data, sia $v_0, v_1, \ldots, v_k$ una di lunghezza minima
- Se due indici $s < t$ avessero $v_s = v_t$, eliminando $v_{s+1}, \ldots, v_t$ si otterrebbe la passeggiata

$$v_0, \ldots, v_s, v_{t+1}, \ldots, v_k$$

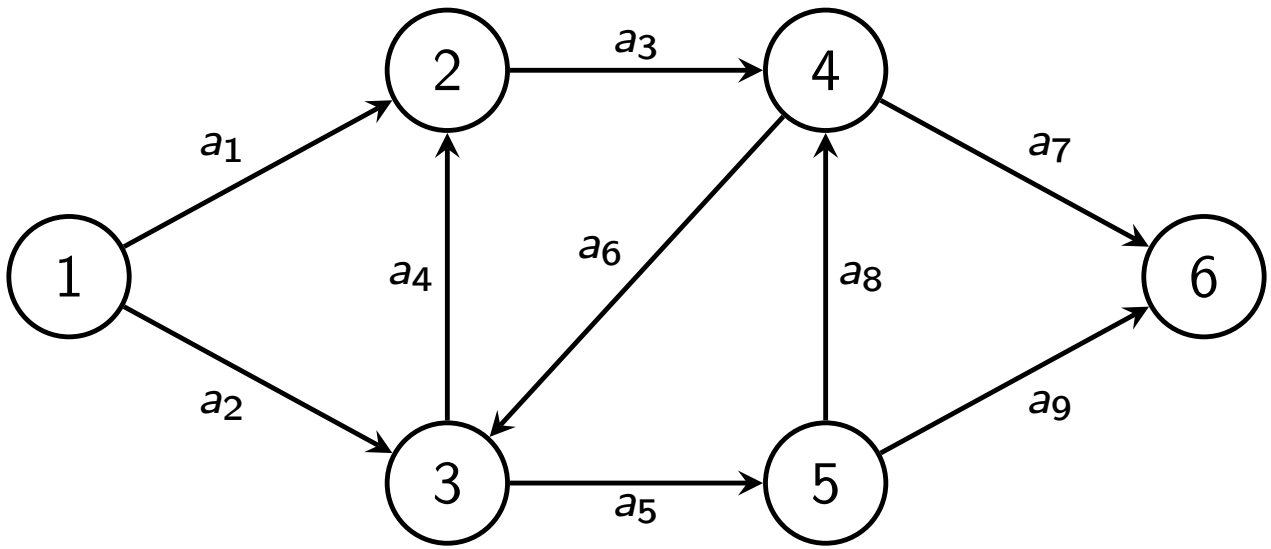
da u a v, più corta di $t - s \geq 1$

- Quindi i vertici sono distinti e la passeggiata è un cammino
- Lo stesso argomento vale per le passeggiate orientate, perché l'eliminazione mantiene ogni arco percorso dalla coda alla testa

□

Esempio: da una passeggiata a un cammino

- Nell'esempio precedente, $1, 3, 2, 4, 3, 5$ è una passeggiata orientata che visita due volte il nodo 3
- Eliminando il pezzo chiuso $3, 2, 4, 3$ resta il cammino orientato $1, 3, 5$



Grafi semplici e multigrafi

- Un grafo è **semplice** se non ha **cappi** (spigoli $\{v, v\}$ o archi (i, i)) né spigoli o archi **paralleli** (due copie della stessa coppia)
- I grafi delle due definizioni precedenti sono semplici, perché E e A sono insiemi di coppie di elementi distinti
- Un **multigrafo** ammette cappi e spigoli o archi paralleli
- In questo modulo tutti i grafi sono semplici e ogni arco è identificato dalla coppia (i, j) formata dalla sua coda e dalla sua testa

Riepilogo

Grafi:

- Un grafo non orientato $G = (V, E)$ ha spigoli $\{u, v\}$; un grafo orientato $G = (N, A)$ ha archi (i, j) dalla coda i alla testa j
- La somma dei gradi è $2m$, quella dei gradi uscenti e quella dei gradi entranti è m

Passeggiate, cammini e cicli:

- Un cammino ha vertici distinti, e ogni passeggiata contiene un cammino con gli stessi estremi
- In un grafo orientato un arco può essere percorso in avanti o all'indietro

Rappresentazioni di un grafo

Introduzione: Rappresentazioni di un grafo

- Un algoritmo ha bisogno del grafo in memoria: vediamo quattro modi per memorizzarlo
- Due matrici (di adiacenza e di incidenza nodo–arco) e due liste (liste di adiacenza e lista degli archi)
- Confrontiamo lo spazio richiesto e il tempo per rispondere a due domande di base
- La matrice di incidenza tornerà in tutti i modelli di flusso del corso: la riga i di $\boldsymbol{Bx}$ è ciò che esce dal nodo i meno ciò che vi entra

Definizione 5: matrice di adiacenza

*La **matrice di adiacenza** di un grafo orientato $G = (N, A)$ è la matrice $\boldsymbol{M}$ di dimensione $n \times n$ con elementi*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in A, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

La matrice di adiacenza di un grafo non orientato ha $m_{uv} = m_{vu} = 1$ per ogni spigolo $\{u, v\}$: è simmetrica.

Definizione 6: matrice di incidenza nodo–arco

Sia $G = (N, A)$ *un grafo orientato con archi* $a_1, a_2, \ldots, a_m$. *La* ***matrice di incidenza nodo–arco*** *è la matrice* $\boldsymbol{B}$ *di dimensione* $n \times m$, *con una riga per ogni nodo e una colonna per ogni arco, i cui elementi sono*

$$b_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{se } i \text{ è la coda di } a_k, \\ -1 & \text{se } i \text{ è la testa di } a_k, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Proprietà della matrice di incidenza

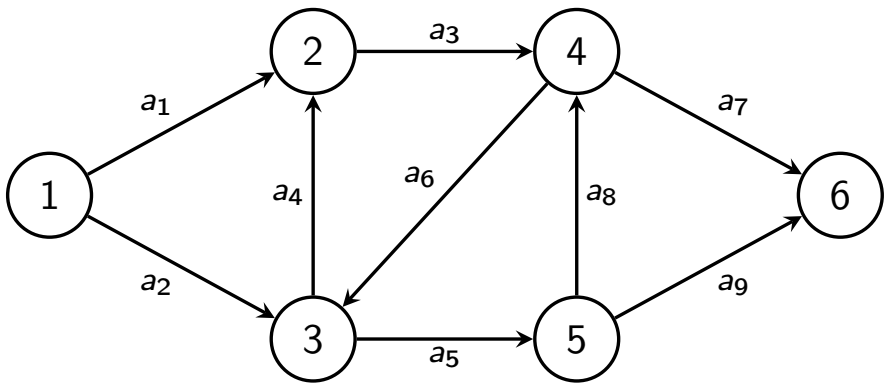
- Ogni colonna di $\boldsymbol{B}$ ha esattamente un $+1$ (la coda) e un -1 (la testa), quindi la somma delle righe di $\boldsymbol{B}$ è il vettore nullo
- La riga i ha un $+1$ per ogni arco di $\delta^+(i)$ e un -1 per ogni arco di $\delta^-(i)$: ha $\deg^+(i) + \deg^-(i)$ elementi diversi da zero
- La **matrice di incidenza vertice–spigolo** di un grafo non orientato ha un 1 in entrambi gli estremi di ogni spigolo

Esempio: le matrici del grafo di riferimento (1/2)

La matrice di adiacenza $\boldsymbol{M}$ del grafo di riferimento, con l'indice di ogni riga e di ogni colonna (un nodo):

$\boldsymbol{M}$:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0



- La riga 6 di $\boldsymbol{M}$ è nulla, perché il nodo 6 non ha successori

Esempio: le matrici del grafo di riferimento (2/2)

La matrice di incidenza nodo–arco $\boldsymbol{B}$, con l'indice di ogni riga (un nodo) e di ogni colonna (un arco):

$\boldsymbol{B}$:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	−1	0	1	−1	0	0	0	0	0
3	0	−1	0	1	1	−1	0	0	0
4	0	0	−1	0	0	1	1	−1	0
5	0	0	0	0	−1	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	−1	0	−1

- Per esempio, la colonna di $a_6 = (4, 3)$ ha $+1$ nella riga 4 (la coda) e -1 nella riga 3 (la testa)

Le matrici memorizzano n^2 o $n\,m$ elementi, per lo più zeri.

Le **liste** memorizzano solo gli archi che ci sono.

Definizione 7: liste di adiacenza e lista degli archi

Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato.

- *Le **liste di adiacenza** memorizzano, per ogni nodo i, la lista $L(i)$ dei suoi successori, cioè le teste degli archi di $\delta^+(i)$. In questo modulo ogni lista è ordinata per indice crescente.*
- *La **lista degli archi** memorizza due vettori di lunghezza m, con la coda e la testa di ogni arco.*

Per un grafo non orientato la lista $L(v)$ contiene l'intorno $N(v)$, e ogni spigolo compare in due liste.

Esempio: le liste del grafo di riferimento (1/2)

Le liste di adiacenza e la lista degli archi del grafo di riferimento sono:

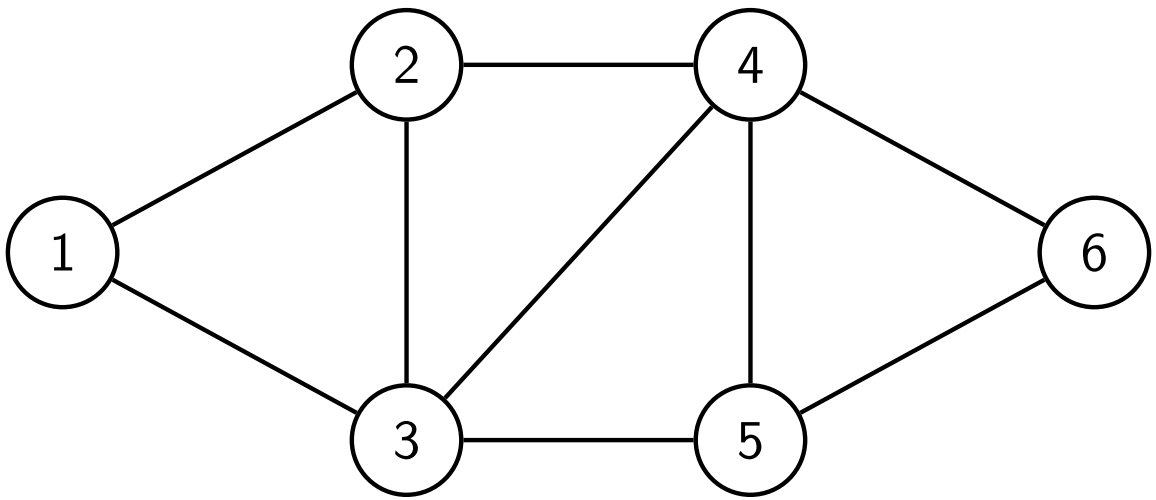
i	$L(i)$
1	2, 3
2	4
3	2, 5
4	3, 6
5	4, 6
6	(vuota)

arco	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
coda	1	1	2	3	3	4	4	5	5
testa	2	3	4	2	5	3	6	4	6

Esempio: le liste del grafo di riferimento (2/2)

Le liste del grafo non orientato sottostante sono:

$$L(1) = \{2, 3\}, \quad L(2) = \{1, 3, 4\}, \quad L(3) = \{1, 2, 4, 5\},$$
$$L(4) = \{2, 3, 5, 6\}, \quad L(5) = \{3, 4, 6\}, \quad L(6) = \{4, 5\}.$$



- Ogni spigolo compare in due liste: per esempio $\{3, 5\}$ sta in $L(3)$ e in $L(5)$

Spazio e tempo di accesso

- La tabella confronta le quattro rappresentazioni di un grafo orientato
- Lo spazio è il numero di elementi memorizzati; le due operazioni sono il test di un arco e la scansione dei successori di un nodo

rappresentazione	spazio	$(i,j) \in A$?	successori di i
matrice di adiacenza	n^2	$O(1)$	$O(n)$
matrice di incidenza nodo–arco	$n\,m$	$O(m)$	$O(m)$
lista degli archi	$2\,m$	$O(m)$	$O(m)$
liste di adiacenza	$n+m$	$O(\deg^+(i))$	$O(\deg^+(i))$

Quale rappresentazione?

- Per il grafo di riferimento ($n = 6$, $m = 9$) le quattro rappresentazioni memorizzano 36, 54, 18 e 15 elementi
- Un grafo orientato semplice ha $m \leq n(n-1)$
- Nelle reti delle applicazioni m è molto più piccolo di n^2 (il grafo è **sparso**), e le liste di adiacenza sono la rappresentazione scelta per gli algoritmi

La matrice di incidenza e la conservazione del flusso

- Dato un valore x_{ij} per ogni arco, la riga i di $\boldsymbol{Bx}$ è ciò che esce dal nodo i meno ciò che vi entra:

$$(\boldsymbol{Bx})_i = \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji}, \qquad \forall i \in N.$$

- Con $x_{ij} = 1$ per ogni arco del grafo di riferimento, $\boldsymbol{Bx}$ è il vettore delle differenze $\deg^+(i) - \deg^-(i)$:

$$\boldsymbol{Bx} = (2, -1, 0, 0, 1, -2)'.$$

Riepilogo

Quattro rappresentazioni:

- Matrice di adiacenza (n^2), matrice di incidenza nodo–arco ($n\,m$), lista degli archi ($2m$), liste di adiacenza ($n + m$)
- Le liste di adiacenza danno i successori di un nodo in tempo $O(\deg^+(i))$: la scelta per gli algoritmi

La matrice di incidenza nodo–arco:

- $+1$ nella coda e -1 nella testa di ogni arco; la somma delle righe è nulla
- La riga i di $\boldsymbol{Bx}$ è il flusso uscente meno il flusso entrante nel nodo i

Connettività

Introduzione: Connettività

- Si può andare da un nodo a un altro? In una rete stradale, in una rete di condotte, in un progetto?
- Per i grafi non orientati la risposta dà le **componenti connesse**
- Nei grafi orientati il verso conta: definiamo la raggiungibilità e le **componenti fortemente connesse**
- Entrambe sono classi di una relazione di equivalenza, e formano una partizione dei nodi

Definizione 8: grafo connesso e componenti connesse

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato.

- *Due vertici u e v sono **connessi** se G ha un cammino da u a v; il grafo G è **connesso** se ogni coppia di vertici è connessa.*
- *Una **componente connessa** di G è un sottoinsieme massimale $U \subseteq V$ di vertici a due a due connessi.*

*Un grafo orientato è **debolmente connesso** se il suo grafo non orientato sottostante è connesso, e le sue componenti connesse sono quelle del grafo non orientato sottostante.*

Definizione 9: raggiungibilità e componenti fortemente connesse

Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato.

- *Un nodo j è **raggiungibile** da i se G ha un cammino orientato da i a j; l'insieme dei nodi raggiungibili da i, i compreso, si indica con $R(i)$.*
- *I nodi i e j sono **fortemente connessi** se $j \in R(i)$ e $i \in R(j)$; il grafo è **fortemente connesso** se ogni coppia di nodi è fortemente connessa.*
- *Una **componente fortemente connessa** di G è un sottoinsieme massimale $S \subseteq N$ di nodi a due a due fortemente connessi.*

- Perché le componenti dividono i nodi in gruppi disgiunti?
- Perché "essere connessi" si comporta come un'uguaglianza

Proposizione 2: le componenti sono classi di equivalenza

Essere connessi è una relazione di equivalenza su V, ed essere fortemente connessi è una relazione di equivalenza su N. Quindi le componenti connesse formano una partizione di V e le componenti fortemente connesse una partizione di N.

Dimostrazione

Dimostriamo le tre proprietà per la connessione forte; il caso non orientato è uguale, con i cammini al posto dei cammini orientati.

1. *Riflessiva*: il cammino i di lunghezza 0 mostra che $i \in R(i)$
2. *Simmetrica*: la definizione è simmetrica in i e j
3. *Transitiva*: un cammino orientato da i a j seguito da uno da j a h è una passeggiata orientata da i a h, che contiene un cammino orientato per il lemma "ogni passeggiata contiene un cammino". Lo stesso vale da h a i

Le classi di equivalenza sono i sottoinsiemi massimali di elementi a due a due in relazione, cioè le componenti. □

Il grafo invertito

- Il **grafo invertito** $G' = (N, A')$ ha l'arco (j, i) per ogni arco $(i, j) \in A$
- Il nodo i è raggiungibile da j in G se e solo se j è raggiungibile da i in G'; indichiamo con $R'(i)$ l'insieme dei nodi raggiungibili da i in G'
- Per la definizione di connessione forte, la componente fortemente connessa che contiene i è

$$S(i) = R(i) \cap R'(i).$$

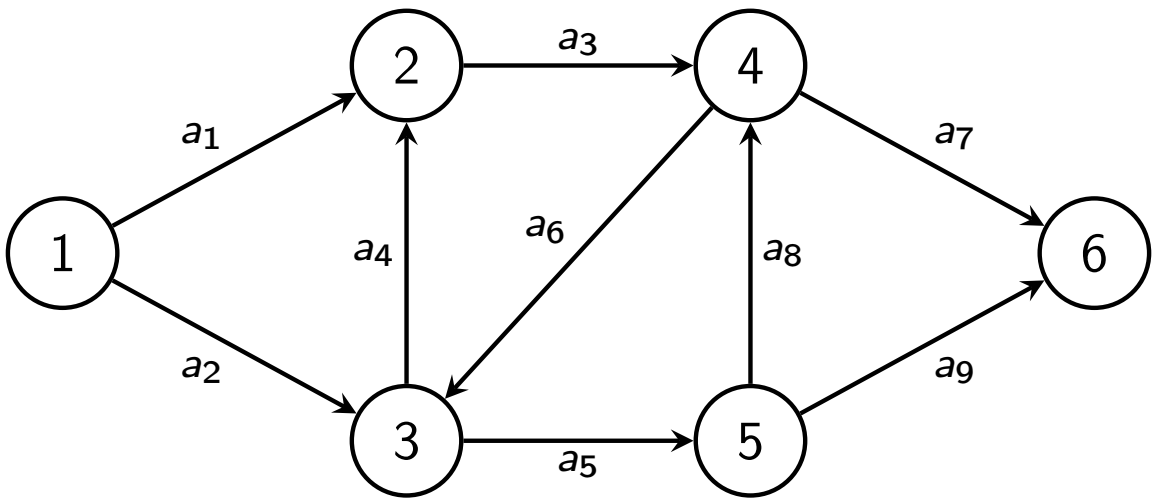
Esempio: componenti del grafo di riferimento (1/2)

Nel grafo di riferimento:

$$R(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad R(2) = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \quad R(6) = \{6\}.$$

Nel grafo invertito $R'(3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e $R(3) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, quindi

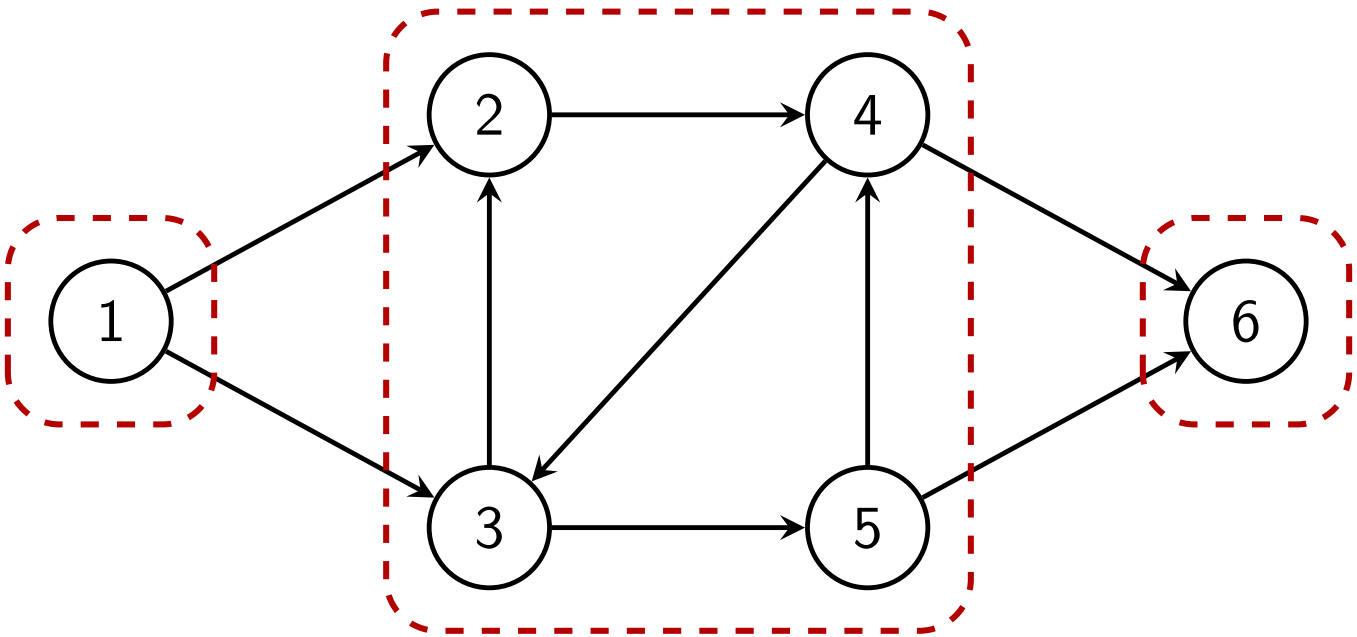
$$S(3) = R(3) \cap R'(3) = \{2, 3, 4, 5\}.$$



Esempio: componenti del grafo di riferimento (2/2)

Le componenti fortemente connesse sono

$$\{1\}, \qquad \{2,3,4,5\}, \qquad \{6\}.$$



- Il grafo è debolmente connesso, con una sola componente connessa, ma non è fortemente connesso: nessun nodo è raggiungibile dal nodo 6

Riepilogo

Componenti connesse:

- Insiemi massimali di vertici a due a due connessi; un grafo orientato è debolmente connesso se il suo grafo sottostante è connesso

Componenti fortemente connesse:

- Insiemi massimali di nodi che si raggiungono a vicenda lungo cammini orientati
- La componente fortemente connessa di i è $S(i) = R(i) \cap R'(i)$: i nodi raggiungibili da i che possono anche raggiungere i

Entrambe sono le classi di una relazione di equivalenza, quindi formano una partizione dei nodi

Alberi e foreste

Introduzione: Alberi e foreste

- Un albero collega tutti i vertici con il minor numero di spigoli e senza cicli
- Gli alberi sono ovunque nel corso: alberi ricoprenti di costo minimo, alberi dei cammini minimi, le basi del simplesso su reti
- Dimostriamo le caratterizzazioni equivalenti di un albero, partendo da come uno spigolo cambia le componenti
- Chiudiamo con i **cicli fondamentali**: uno spigolo esterno a un albero ricoprente chiude esattamente un ciclo

Definizione 10: albero, foresta e albero ricoprente

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato.

- *G è una **foresta** se è aciclico, e un **albero** se è connesso e aciclico. Un vertice di grado 1 è una **foglia**.*
- *Un **albero ricoprente** di un grafo connesso G è un albero $T = (V, F)$ con $F \subseteq E$; una **foresta ricoprente** di G è una foresta (V, F), $F \subseteq E$, con le stesse componenti connesse di G.*

Per un grafo orientato $G = (N, A)$ le nozioni si applicano al grafo non orientato sottostante: un sottoinsieme di archi $F \subseteq A$ è un albero (una foresta) se gli spigoli corrispondenti formano un albero (una foresta).

- Una prima proprietà degli alberi: hanno sempre vertici di grado 1
- La useremo per il rango della matrice di incidenza

Lemma 2: foglie

Ogni albero con $n \geq 2$ vertici ha almeno due foglie.

Dimostrazione

- L'albero è connesso con $n \geq 2$ vertici, quindi ha uno spigolo. Sia $v_0, v_1, \ldots, v_k$ un cammino di lunghezza massima, con $k \geq 1$
- Un vicino $u \neq v_1$ di v_0 starebbe sul cammino, chiudendo un ciclo, oppure estenderebbe il cammino, contro la sua massimalità
- Quindi $\deg(v_0) = 1$, e allo stesso modo $\deg(v_k) = 1$ □

Che cosa succede alle componenti quando aggiungiamo uno spigolo?

La risposta è la chiave di tutte le proprietà degli alberi.

Lemma 3: aggiunta di uno spigolo

Sia $G = (V, E)$ un grafo con k componenti connesse, e sia $e = \{u, v\} \notin E$ con $u, v \in V$.

1. *Se u e v stanno in componenti diverse di G, il grafo $(V, E \cup \{e\})$ ha $k - 1$ componenti e nessun ciclo che passa per e.*
2. *Se u e v stanno nella stessa componente di G, il grafo $(V, E \cup \{e\})$ ha k componenti e un ciclo che passa per e.*

Dimostrazione

1. Lo spigolo e unisce in una sola le componenti di u e di v, e lascia invariate le altre componenti
   - Un ciclo che passa per e darebbe, senza e, un cammino da u a v in G: impossibile

2. Le componenti non cambiano
   - Un cammino $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ di G ha $k \geq 2$, perché $\{u, v\} \notin E$
   - Con e chiude il ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0$ □

Corollario 1: spigoli e componenti

Un grafo con n vertici, m spigoli e k componenti connesse soddisfa $k \geq n - m$, con l'uguaglianza se e solo se il grafo è aciclico.

- Idea della dimostrazione: costruire il grafo uno spigolo alla volta, partendo da nessuno spigolo, e contare le componenti con il lemma precedente

Dimostrazione (1/2)

- Partiamo da $(V, \emptyset)$, che ha n componenti, e inseriamo gli m spigoli uno alla volta
- Per il lemma "aggiunta di uno spigolo", ogni inserimento
  - diminuisce di uno il numero di componenti, oppure
  - lo lascia invariato e chiude un ciclo
- Dopo m inserimenti ci sono state al più m diminuzioni. Quindi $k \geq n - m$

Dimostrazione (2/2)

- Se il grafo ha un ciclo C, l'ultimo spigolo di C inserito unisce due vertici già connessi dal resto di C: lascia invariato il numero, e $k > n - m$
- Se il grafo è aciclico, nessun inserimento chiude un ciclo, perché un ciclo di un grafo intermedio è un ciclo del grafo finale: $k = n - m$ □

Teorema 1: caratterizzazioni di un albero

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato con n vertici e m spigoli. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) *G è un albero (connesso e aciclico);*

(b) *G è connesso e $m = n - 1$;*

(c) *G è aciclico e $m = n - 1$;*

(d) *per ogni coppia di vertici u e v esiste esattamente un cammino da u a v;*

(e) *G è connesso, e la rimozione di un qualsiasi spigolo lo rende non connesso.*

Dimostrazione (1/3)

Sia k il numero di componenti connesse; G è connesso se e solo se $k = 1$.

- **(a)⇒(b),(c).** G è aciclico con $k = 1$, quindi $m = n - k = n - 1$ per il corollario "spigoli e componenti"
- **(b)⇒(a).** Qui $k = 1 = n - m$: vale l'uguaglianza, e G è aciclico per lo stesso corollario
- **(c)⇒(a).** G è aciclico, quindi $k = n - m = 1$ per lo stesso corollario: G è connesso

Dimostrazione (2/3)

Per (a)⇔(d), connesso significa almeno un cammino fra ogni coppia di vertici; mostriamo che aciclico significa al più uno.

- Se G ha un ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0$, i vertici v_0 e v_1 sono uniti da due cammini: lo spigolo $\{v_0, v_1\}$ e $v_0, v_{k-1}, \ldots, v_2, v_1$
- Siano $P \neq Q$ due cammini da u a v. Sia w l'ultimo vertice della loro parte iniziale comune, e x il primo vertice dopo w su P che sta anche su Q (v è un candidato)
- I pezzi di P e di Q da w a x hanno in comune solo w e x, e non sono formati entrambi dal solo spigolo $\{w, x\}$, perché P e Q lasciano w lungo spigoli diversi. Insieme formano un ciclo

Dimostrazione (3/3)

Per (a)$\Leftrightarrow$(e), sia G connesso e $e = \{u, v\} \in E$.

- Applichiamo il lemma "aggiunta di uno spigolo" a $(V, E \setminus \{e\})$ e a e
- Lo spigolo e sta su un ciclo di G se e solo se u e v sono connessi in $(V, E \setminus \{e\})$, cioè se e solo se la rimozione di e lascia il grafo connesso
- Quindi ogni rimozione rende G non connesso se e solo se nessuno spigolo sta su un ciclo $\square$

- Ogni grafo contiene un albero ricoprente, o una foresta ricoprente?

Corollario 2: foreste ricoprenti

Ogni grafo con n vertici e k componenti connesse ha una foresta ricoprente, con $n-k$ spigoli. In particolare, ogni grafo connesso ha un albero ricoprente, con $n-1$ spigoli.

Dimostrazione

- Finché il grafo ha un ciclo, rimuoviamo uno spigolo $e = \{u, v\}$ di un ciclo
- Il resto del ciclo connette ancora u e v, quindi rimettere e non cambia le componenti (lemma "aggiunta di uno spigolo", parte 2): neanche rimuoverlo le cambia
- Il grafo finale è aciclico con le stesse k componenti, quindi è una foresta ricoprente, e ha $n - k$ spigoli per il corollario "spigoli e componenti" □

Un albero ricoprente non ha cicli.

Che cosa succede se gli aggiungiamo un altro spigolo del grafo?

Proposizione 3: ciclo fondamentale

Sia $T = (V, F)$ un albero ricoprente di un grafo connesso $G = (V, E)$, e sia $e = \{u, v\} \in E \setminus F$. Il grafo $(V, F \cup \{e\})$ contiene esattamente un ciclo, il ***ciclo fondamentale*** *$C(T, e)$, formato da e e dall'unico cammino da u a v in T.*

Dimostrazione

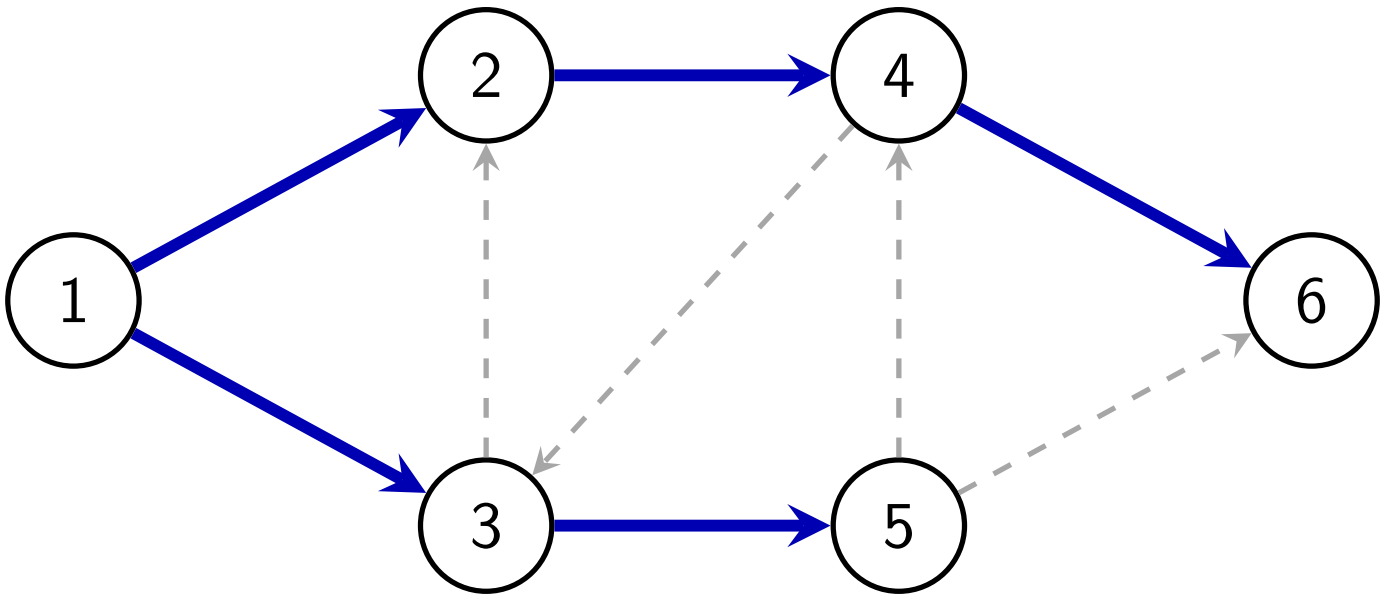
- I vertici u e v sono connessi in T, quindi lo spigolo e e il cammino da u a v in T formano un ciclo (lemma "aggiunta di uno spigolo", parte 2)
- Ogni ciclo di $(V, F \cup \{e\})$ contiene e, perché T è aciclico; togliendo e resta un cammino da u a v in T, che è unico per la caratterizzazione (d) di un albero $\square$

Cicli fondamentali

- Un grafo connesso con un albero ricoprente T ha $m - n + 1$ cicli fondamentali, uno per ogni spigolo esterno a T
- In un grafo orientato il ciclo fondamentale di un arco $(i, j) \notin F$ è percorso nel verso di (i, j): gli archi di T percorsi dalla coda alla testa sono in avanti, gli altri all'indietro

Esempio: un albero ricoprente del grafo di riferimento (1/2)

Gli archi $F = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ formano un albero ricoprente T del grafo di riferimento (in blu nella figura): sono $5 = n - 1$ archi, e i loro spigoli formano un grafo connesso.



Esempio: un albero ricoprente del grafo di riferimento (2/2)

Gli $m - n + 1 = 4$ archi esterni a T (tratteggiati) danno i cicli fondamentali, scritti a partire dalla coda dell'arco:

arco	ciclo fondamentale	archi all'indietro
$(3,2)$	$3,2,1,3$	$(1,2)$
$(4,3)$	$4,3,1,2,4$	$(1,3)$
$(5,4)$	$5,4,2,1,3,5$	$(2,4),\ (1,2)$
$(5,6)$	$5,6,4,2,1,3,5$	$(4,6),\ (2,4),\ (1,2)$

- Per esempio, il ciclo di $(3,2)$ usa $(3,2)$ in avanti, $(1,2)$ all'indietro (da 2 a 1) e $(1,3)$ in avanti

Riepilogo

Alberi:

- Un albero è connesso e aciclico; due qualsiasi delle proprietà "connesso", "aciclico", "$n-1$ spigoli" implicano la terza
- In un albero c'è esattamente un cammino fra ogni coppia di vertici, e la rimozione di un qualsiasi spigolo lo rende non connesso
- Ogni grafo connesso ha un albero ricoprente, ogni grafo una foresta ricoprente con $n-k$ spigoli

Cicli fondamentali:

- Aggiungendo a un albero ricoprente uno spigolo esterno si crea esattamente un ciclo, il ciclo fondamentale

Il rango della matrice di incidenza

Introduzione: Il rango della matrice di incidenza

- La matrice di incidenza nodo–arco è la matrice dei vincoli dei modelli di flusso del corso
- Il suo rango dice quanti vincoli di conservazione del flusso sono davvero indipendenti
- Colleghiamo algebra lineare e grafi: le colonne di una foresta sono indipendenti, quelle di un ciclo dipendenti
- Il risultato: le basi della matrice di incidenza sono esattamente gli alberi ricoprenti, la chiave del simplesso su reti

Notazione

- Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato con matrice di incidenza nodo–arco $\boldsymbol{B}$
- Indichiamo con $\boldsymbol{B}_a$ la colonna dell'arco a, e con $\boldsymbol{e}_i$ l'i-esimo vettore unitario di $\mathbb{R}^n$, in modo che

$$\boldsymbol{B}_{(i,j)} = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j.$$

Lemma 4: colonne di una foresta

Se gli archi $F \subseteq A$ formano una foresta, le colonne $\boldsymbol{B}_a$, $a \in F$, sono linearmente indipendenti.

- Idea della dimostrazione: una foglia della foresta ha un solo arco, quindi la sua riga isola un coefficiente

Dimostrazione

Per induzione su $|F|$; per $F = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare. Siano $|F| \geq 1$ e $\sum_{a \in F} \lambda_a \boldsymbol{B}_a = 0$.

1. Una componente della foresta con almeno un arco è un albero con almeno 2 nodi, quindi ha una foglia ℓ (lemma "foglie"); sia $a' \in F$ l'unico arco di F incidente a ℓ

2. La riga ℓ della combinazione contiene solo il termine di a', che è $\pm\lambda_{a'}$; quindi $\lambda_{a'} = 0$

3. Gli archi $F \setminus \{a'\}$ formano ancora una foresta, e $\sum_{a \in F \setminus \{a'\}} \lambda_a \boldsymbol{B}_a = 0$: per induzione tutti i λ_a sono nulli $\square$

- Le foreste danno colonne indipendenti; e i cicli?

Lemma 5: colonne di un ciclo

Se gli archi $C \subseteq A$ formano un ciclo, le colonne $\boldsymbol{B}_a$, $a \in C$, sono linearmente dipendenti.

- Idea della dimostrazione: percorrendo il ciclo, le colonne prese con segno ± 1 si annullano

Dimostrazione

- Il ciclo visiti $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$ lungo gli archi $c_1, c_2, \ldots, c_k$, e sia $\varepsilon_t = +1$ se c_t è in avanti e $\varepsilon_t = -1$ se è all'indietro
- In entrambi i casi $\varepsilon_t \boldsymbol{B}_{c_t} = \boldsymbol{e}_{v_{t-1}} - \boldsymbol{e}_{v_t}$, e la somma è telescopica:

$$\sum_{t=1}^{k} \varepsilon_t \boldsymbol{B}_{c_t} = \boldsymbol{e}_{v_0} - \boldsymbol{e}_{v_k} = 0.$$

- I coefficienti ε_t non sono nulli, quindi le colonne sono linearmente dipendenti □

- Le foreste danno colonne indipendenti, i cicli colonne dipendenti
- Insieme alle foreste ricoprenti, questo dà il rango di $\boldsymbol{B}$

Teorema 2: rango della matrice di incidenza

Sia $G = (N, A)$ un grafo orientato il cui grafo non orientato sottostante ha k componenti connesse. Allora

$$\text{rank}(\boldsymbol{B}) = |N| - k.$$

Dimostrazione (1/2)

Siano $N_1, N_2, \ldots, N_k$ gli insiemi di nodi delle componenti, e $n = |N|$.

$\text{rank}(\boldsymbol{B}) \geq n - k$.

- Per il corollario "foreste ricoprenti" il grafo ha una foresta ricoprente con $n - k$ archi
- Le loro colonne sono linearmente indipendenti per il lemma "colonne di una foresta"

Dimostrazione (2/2)

$\text{rank}(\boldsymbol{B}) \leq n - k$.

- Ogni arco ha entrambi gli estremi nella stessa componente, quindi per ogni $h \in \{1, 2, \ldots, k\}$ la somma delle righe dei nodi di N_h è il vettore nullo
- I k vettori $\boldsymbol{y}^h$ con $y_i^h = 1$ per $i \in N_h$ e 0 altrimenti soddisfano

$$(\boldsymbol{y}^h)' \boldsymbol{B} = 0'.$$

- Questi k vettori hanno supporti disgiunti, quindi sono linearmente indipendenti: lo spazio nullo sinistro di $\boldsymbol{B}$ ha dimensione almeno k, e $\text{rank}(\boldsymbol{B}) \leq n - k$ □

- In un grafo connesso il teorema ha una conseguenza che il simplesso su reti userà

Corollario 3: basi della matrice di incidenza

Sia connesso il grafo non orientato sottostante a $G = (N, A)$. *Allora* $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = |N| - 1$, *la matrice ottenuta eliminando una qualsiasi riga di* $\boldsymbol{B}$ *ha rango pieno per righe, e un insieme di* $|N| - 1$ *colonne di* $\boldsymbol{B}$ *è linearmente indipendente se e solo se i suoi archi formano un albero ricoprente.*

Dimostrazione

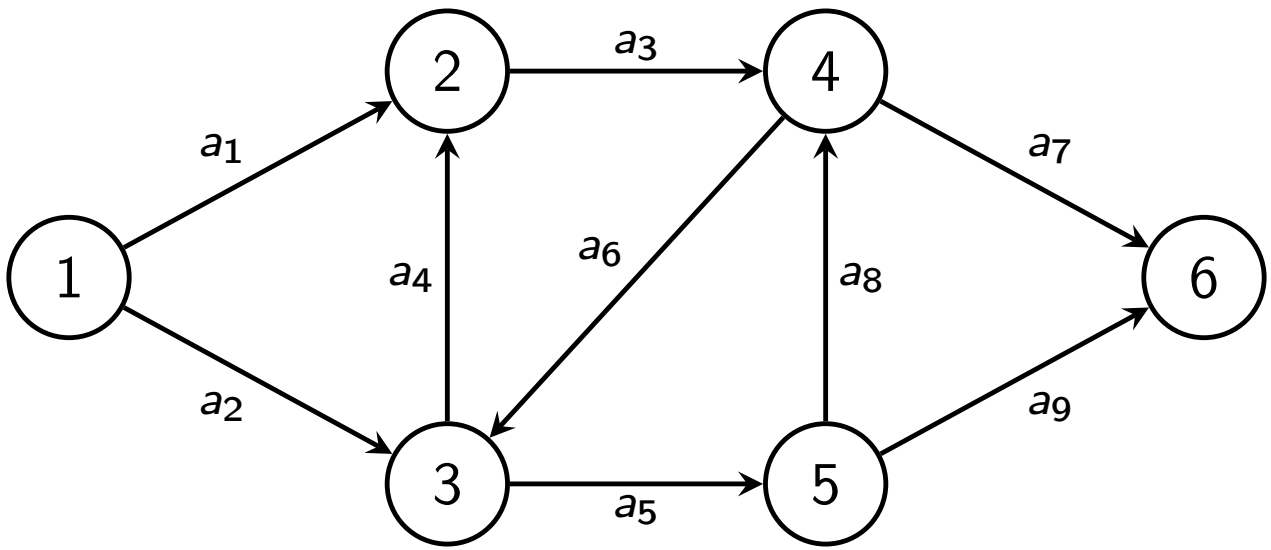
Il rango è $n-1$ per il teorema sul rango con $k=1$.

- La somma delle righe è nulla, quindi ogni riga è l'opposto della somma delle altre: le $n-1$ righe restanti generano lo spazio delle righe, che ha dimensione $n-1$, e sono linearmente indipendenti
- Se $n-1$ archi formano un albero ricoprente, le loro colonne sono indipendenti per il lemma "colonne di una foresta"
- Se le loro colonne sono indipendenti, gli archi non contengono cicli per il lemma "colonne di un ciclo": sono aciclici con $n-1$ archi, quindi un albero ricoprente per la caratterizzazione (c) di un albero □

Esempio: il rango sul grafo di riferimento (1/2)

- Il grafo di riferimento è debolmente connesso, quindi $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = 6 - 1 = 5$; l'eliminazione di Gauss sulla sua matrice di incidenza lo conferma

- Le cinque colonne dell'albero ricoprente dell'esempio precedente, a_1, a_2, a_3, a_5, a_7, sono linearmente indipendenti

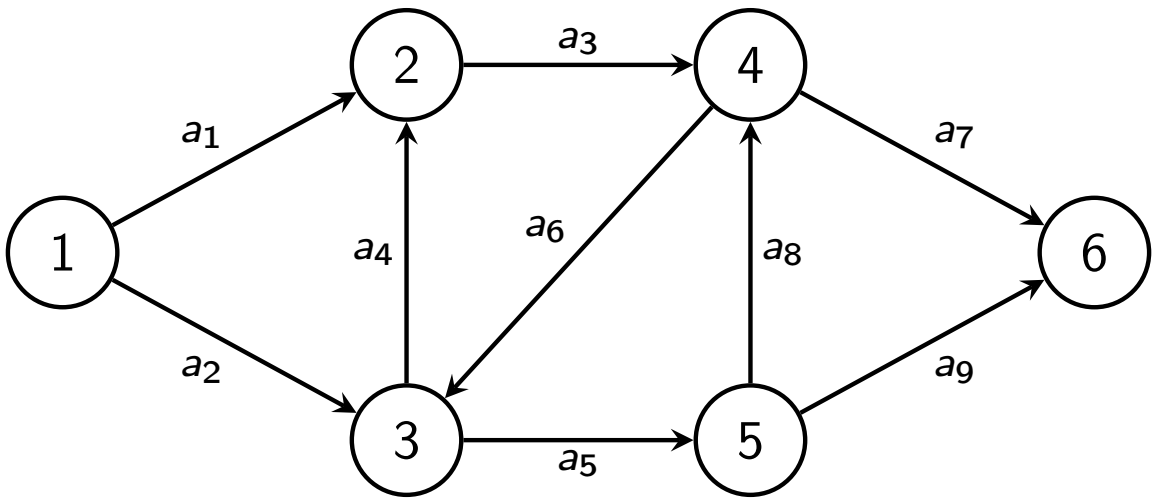


Esempio: il rango sul grafo di riferimento (2/2)

- Il ciclo orientato $2, 4, 3, 2$ usa $a_3 = (2, 4)$, $a_6 = (4, 3)$, $a_4 = (3, 2)$, tutti in avanti, e

$$\boldsymbol{B}_{a_3} + \boldsymbol{B}_{a_6} + \boldsymbol{B}_{a_4} = 0.$$

- Senza gli archi $(4, 6)$ e $(5, 6)$ il grafo ha le due componenti $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{6\}$, e il rango della sua matrice di incidenza è $6 - 2 = 4$



Riepilogo

Colonne e sottografi:

- Le colonne di una foresta sono linearmente indipendenti, quelle di un ciclo linearmente dipendenti

Il rango:

- Il rango della matrice di incidenza nodo–arco è il numero di nodi meno il numero di componenti connesse: $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = |N| - k$
- In un grafo connesso una riga è ridondante, e le basi di $\boldsymbol{B}$ sono esattamente gli alberi ricoprenti

Visita di un grafo

Introduzione: Visita di un grafo

- Quali nodi si raggiungono da un nodo dato? Una **visita di un grafo** risponde, in tempo lineare nella dimensione del grafo
- Un algoritmo generico, due varianti: la visita in ampiezza (BFS) e la visita in profondità (DFS)
- Dimostriamo che la visita è corretta e veloce, e che la BFS trova i cammini con il minor numero di archi
- Eseguiamo entrambe le visite sul grafo di riferimento, un'iterazione per slide

Definizione 11: visita di un grafo

Dati un grafo orientato $G = (N, A)$ e un nodo $s \in N$, la ***sorgente****, una* ***visita di un grafo*** *trova l'insieme $R(s)$ dei nodi raggiungibili da s. Durante la visita:*

- *un nodo è* ***etichettato*** *quando la visita lo raggiunge, e resta etichettato;*
- *ogni nodo etichettato $j \neq s$ registra il suo* ***predecessore*** *$pred(j)$, il nodo da cui è stato raggiunto;*
- *i nodi etichettati ancora da elaborare sono tenuti in una lista, $LIST$;*
- *un arco (i, j) è* ***ammissibile*** *se i è etichettato e j no.*

Algorithm: Visita generica di un grafo

Input : un grafo orientato $G = (N, A)$ dato dalle sue liste di adiacenza, una sorgente $s \in N$

Output : i nodi etichettati, uguali a $R(s)$, e i predecessori $pred(j)$

1 **Passo 0 (inizializzazione).** Etichetta s e poni $LIST := \{s\}$; tutti gli altri nodi non sono etichettati.

2 **Passo 1 (selezione).** Se $LIST = \emptyset$, `STOP`. Altrimenti seleziona un nodo $i \in LIST$:

3 il *primo* nodo di $LIST$ nella visita in ampiezza (BFS),

4 l'*ultimo* nodo di $LIST$ nella visita in profondità (DFS).

5 **Passo 2 (etichettatura).** Se i ha un arco ammissibile (i, j), prendi il primo in $L(i)$:

6 etichetta j, poni $pred(j) := i$ e aggiungi j in fondo a $LIST$.

7 Altrimenti rimuovi i da $LIST$. Torna al Passo 1.

BFS e DFS

- Nella BFS la lista *LIST* è una **coda** (first in, first out): i nodi sono elaborati nell'ordine in cui sono etichettati
- Nella DFS la lista *LIST* è una **pila** (last in, first out): la visita riparte sempre dal nodo etichettato più di recente ancora in *LIST*, e torna indietro solo quando quel nodo non ha archi ammissibili
- L'ordine delle liste di adiacenza decide quale arco ammissibile si prende per primo; con le liste ordinate per indice crescente, come in questo modulo, il risultato è unico

Prima di eseguire la visita, dimostriamo le sue tre proprietà chiave:

i predecessori formano un **albero**, la visita è **corretta** ed è **veloce**.

Proposizione 4: albero dei predecessori

A ogni iterazione, gli archi $(pred(j), j)$*, per i nodi etichettati* $j \neq s$*, formano un albero sui nodi etichettati, l'**albero dei predecessori**. Per ogni nodo etichettato* j *esso contiene un cammino orientato da* s *a* j*.*

Dimostrazione

Sia r il numero di nodi etichettati.

1. Ogni nodo etichettato $j \neq s$ ha un predecessore, etichettato prima di j. Partendo da j e passando al predecessore, i nodi sono etichettati sempre prima, quindi la sequenza termina in s
2. Letta all'indietro, è un cammino orientato da s a j lungo gli archi $(pred(h), h)$
3. Quindi gli $r - 1$ archi connettono gli r nodi etichettati, e formano un albero per la caratterizzazione (b) di un albero

□

- La visita etichetta solo nodi raggiungibili; li etichetta **tutti**?

Teorema 3: correttezza della visita

Al termine della visita generica, BFS e DFS comprese, i nodi etichettati sono esattamente i nodi di $R(s)$.

Dimostrazione

Ogni nodo etichettato è raggiungibile da s, per la proposizione sull'albero dei predecessori. Viceversa, sia $j \in R(s)$ e sia $s = i_0, i_1, \ldots, i_k = j$ un cammino orientato; supponiamo per assurdo che j non sia etichettato.

1. Sia i_t il primo nodo non etichettato del cammino; $t \geq 1$, perché s è etichettato
2. Il nodo i_{t-1} è etichettato, quindi è entrato in $LIST$, e alla fine ne è uscito
3. Un nodo esce da $LIST$ solo quando non ha archi ammissibili. Ma (i_{t-1}, i_t) resta ammissibile fino alla fine, perché le etichette non si tolgono mai: una contraddizione □

- La visita è corretta; quanto tempo richiede?

Teorema 4: tempo di esecuzione della visita

Con le liste di adiacenza, la visita generica richiede tempo $O(|N| + |A|)$.

Dimostrazione

Ogni nodo mantiene un puntatore alla posizione corrente nella sua lista $L(i)$; il puntatore avanza oltre i successori etichettati e non torna mai indietro, perché le etichette non si tolgono mai.

- Ogni iterazione etichetta un nodo o rimuove un nodo da $LIST$. Ogni nodo è etichettato al più una volta e rimosso al più una volta, quindi ci sono al più $2n$ iterazioni, ciascuna con lavoro $O(1)$ oltre al puntatore
- Il puntatore del nodo i avanza in tutto al più $\deg^+(i)$ volte, e $\sum_{i \in N} \deg^+(i) = m$

Il tempo totale è $O(n + m) = O(|N| + |A|)$. □

Con la matrice di adiacenza

- Con la matrice di adiacenza i successori di un nodo si trovano scorrendo una riga di lunghezza n
- La visita richiede allora tempo $O(n^2)$
- Su un grafo sparso, con m molto più piccolo di n^2, le liste di adiacenza sono molto più veloci

La BFS sul grafo di riferimento: come leggere le slide

- Eseguiamo la BFS sul grafo di riferimento da $s = 1$, con le liste di adiacenza

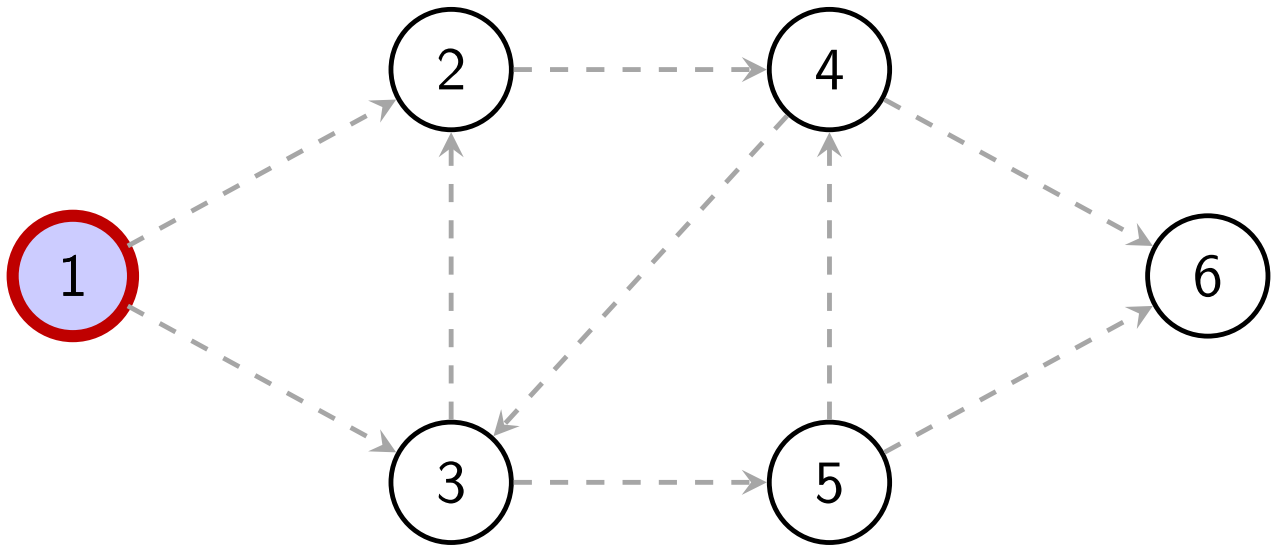
$$L(1) = 2, 3 \quad L(2) = 4 \quad L(3) = 2, 5$$
$$L(4) = 3, 6 \quad L(5) = 4, 6 \quad L(6) = (\text{vuota})$$

- Una slide per iterazione, con la riga dell'iterazione e *LIST* dopo di essa

Nelle figure:

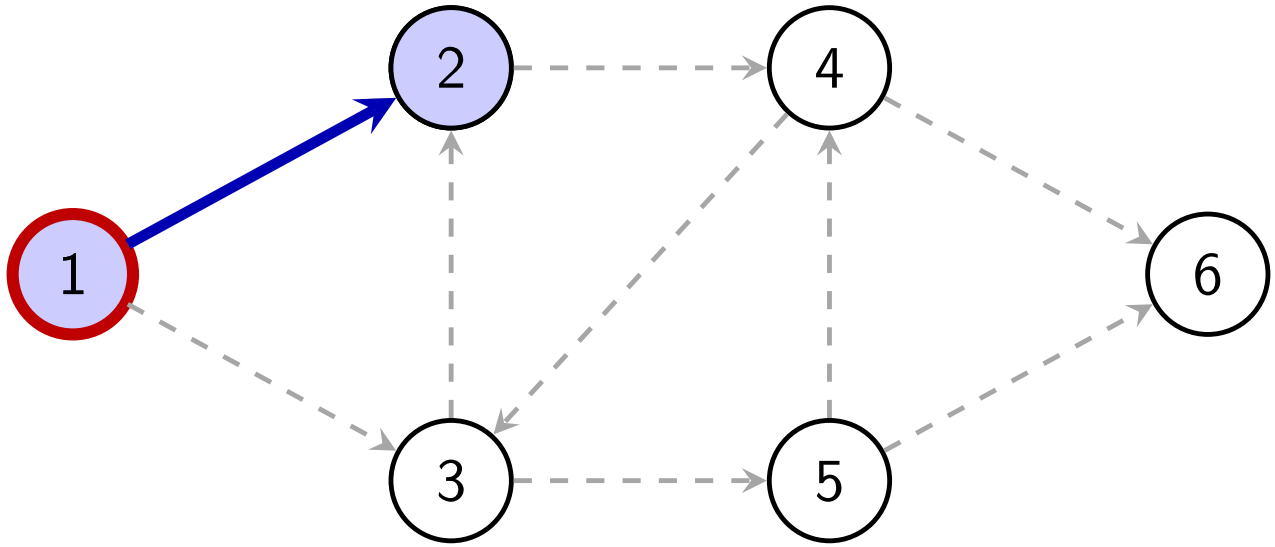
- **bordo rosso**: il nodo selezionato i
- **riempimento blu**: nodo etichettato in *LIST*; **riempimento grigio**: nodo etichettato già rimosso da *LIST*
- **archi blu spessi**: l'albero dei predecessori; archi tratteggiati: gli altri archi

Esempio: BFS dal nodo 1 — Passo 0



- Etichettiamo la sorgente $s = 1$ e poniamo $LIST := \{1\}$; tutti gli altri nodi non sono etichettati
- Nella BFS il nodo selezionato è sempre il **primo** di $LIST$

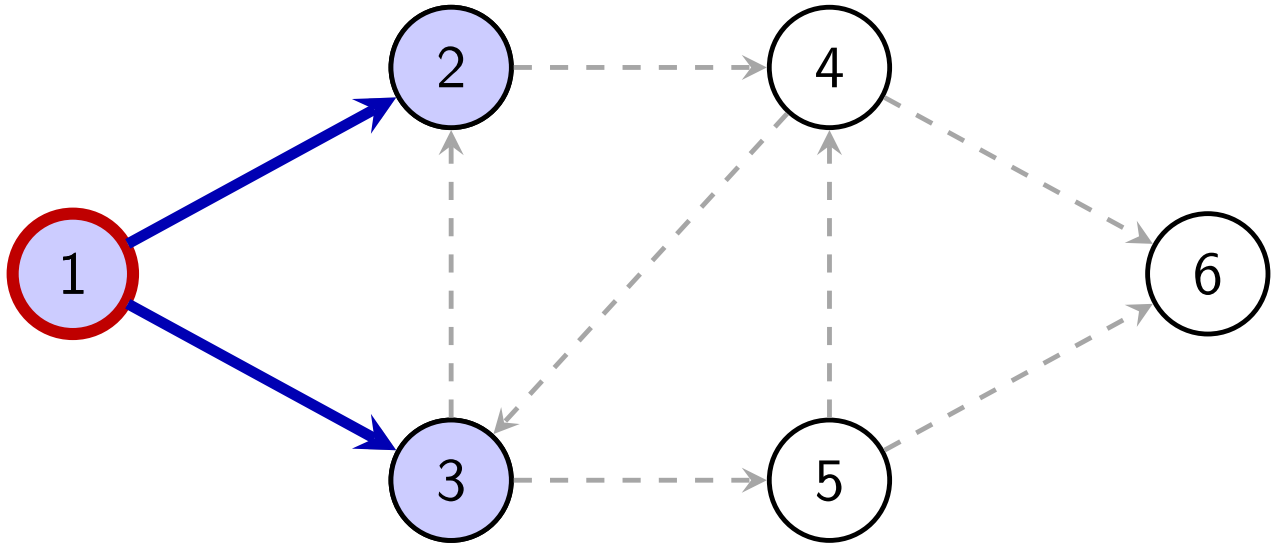
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 1



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
1	1	etichetta 2, $pred(2) = 1$	$1, 2$

- $L(1) = 2, 3$: il primo arco ammissibile è $(1, 2)$

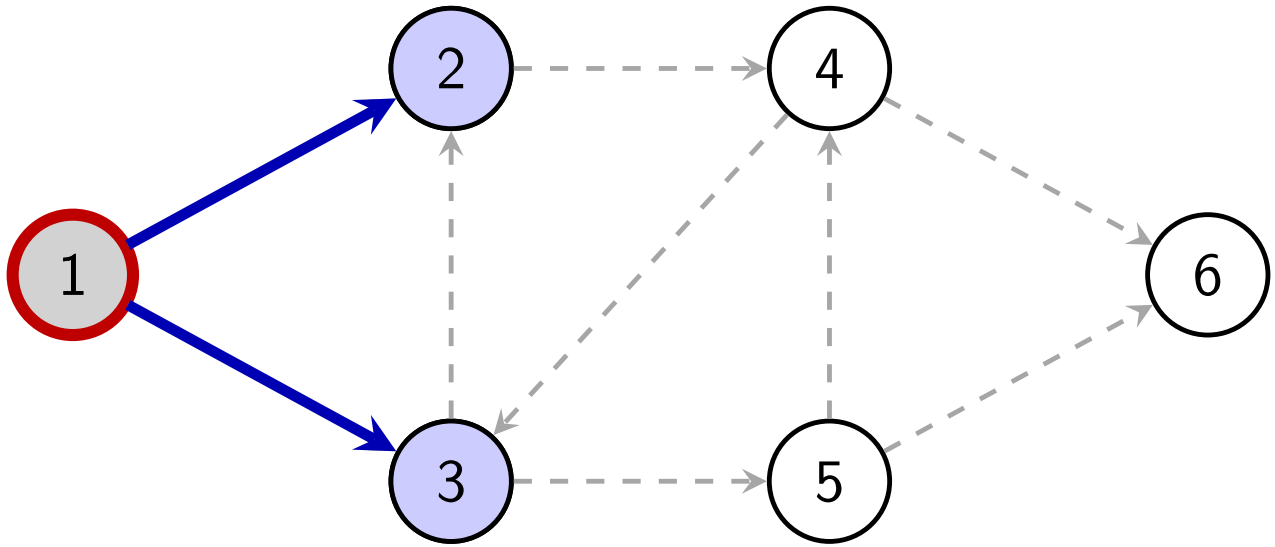
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 2



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
2	1	etichetta 3, $pred(3) = 1$	$1, 2, 3$

- Il nodo 1 è ancora il primo di $LIST$: il successivo arco ammissibile di $L(1)$ è $(1, 3)$

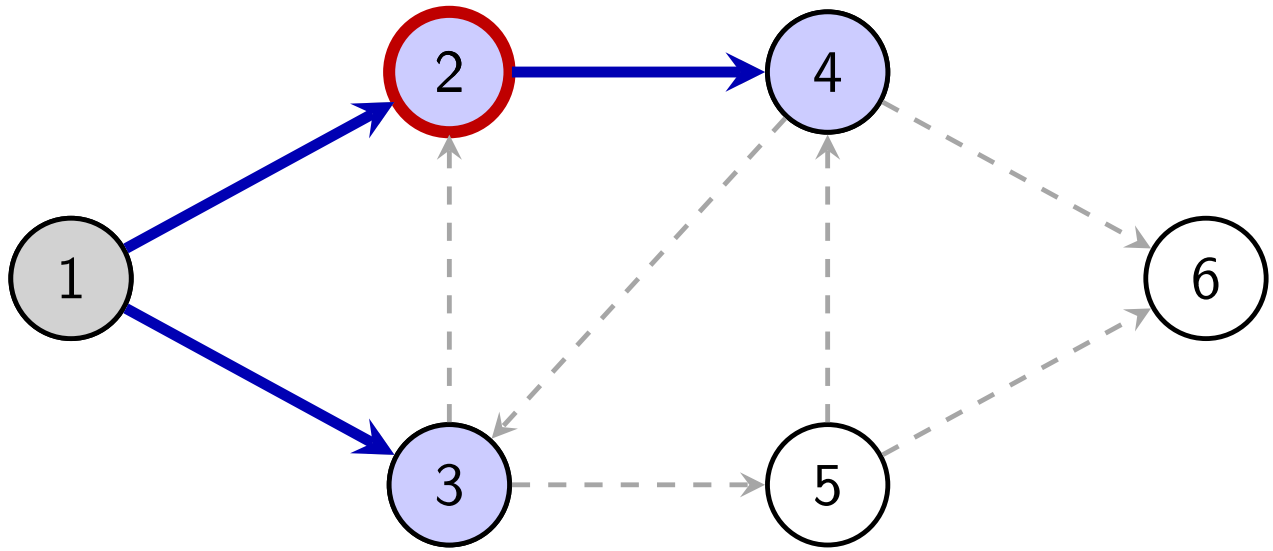
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 3



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
3	1	rimuovi 1	2, 3

- Entrambi i successori del nodo 1 sono etichettati: il nodo 1 non ha archi ammissibili ed esce da $LIST$

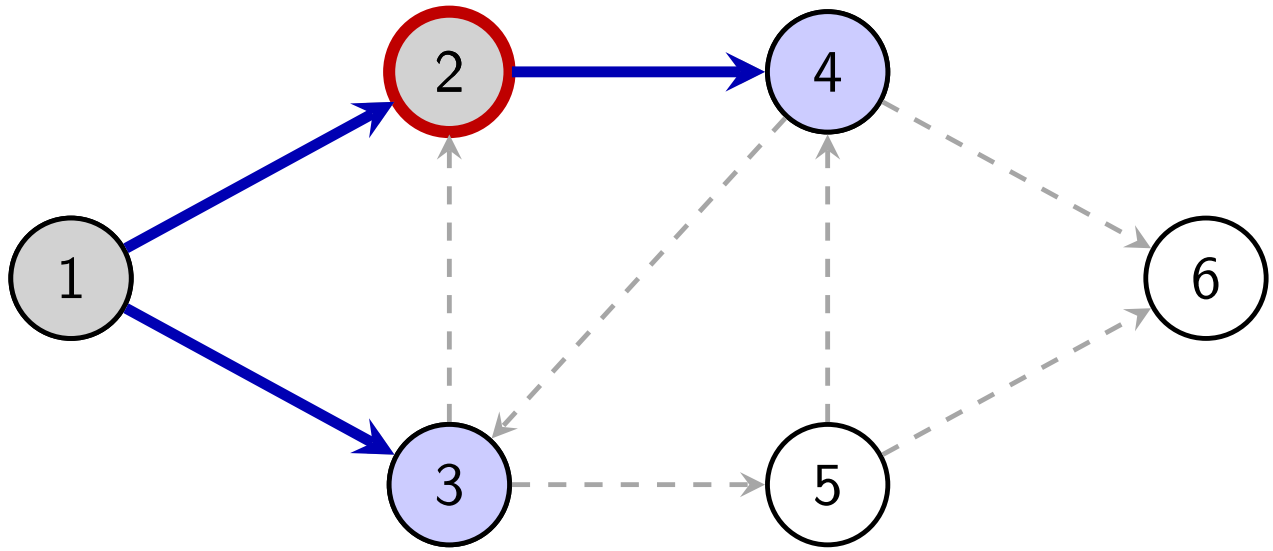
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 4



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
4	2	etichetta 4, $pred(4) = 2$	$2, 3, 4$

- $L(2) = 4$: l'arco $(2, 4)$ è ammissibile

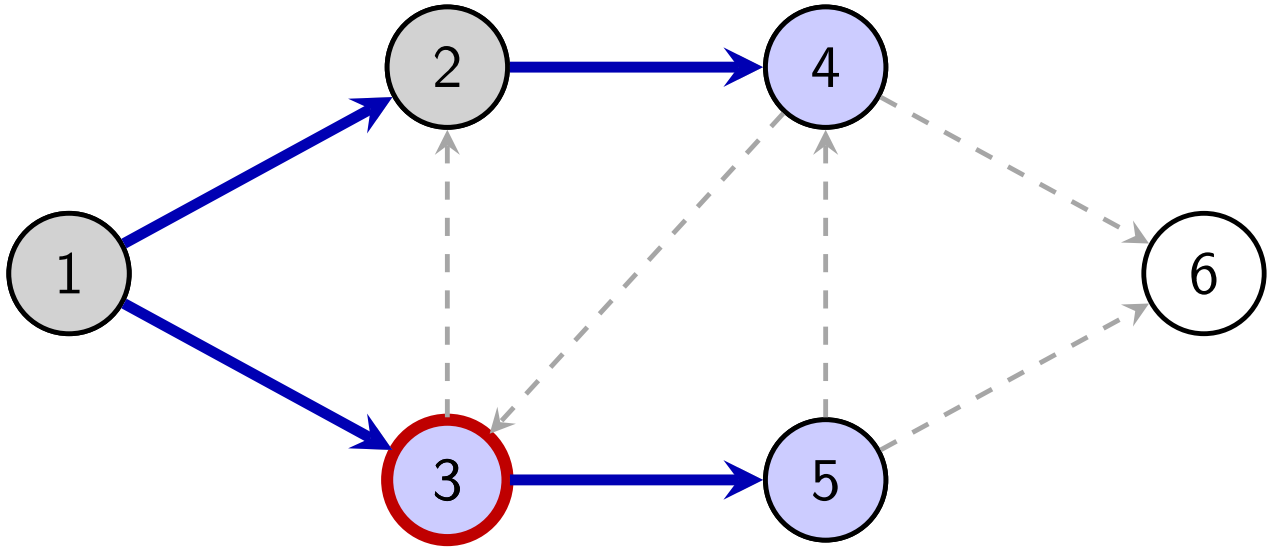
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 5



iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
5	2	rimuovi 2	3, 4

- Il nodo 2 non ha più archi ammissibili ed esce da *LIST*

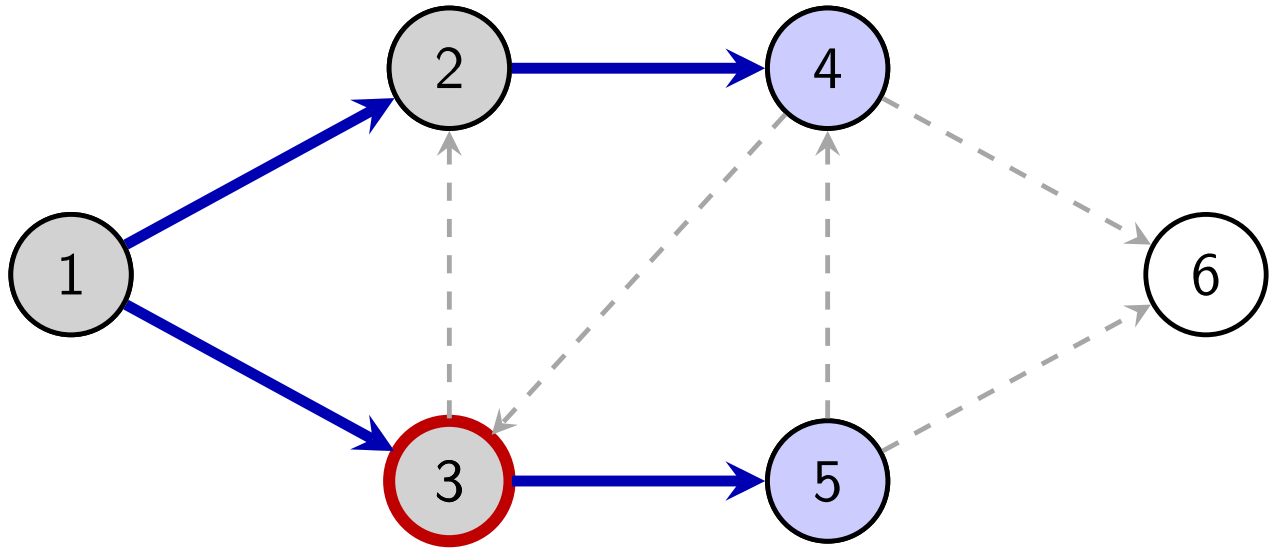
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 6



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
6	3	etichetta 5, $pred(5) = 3$ (2 è etichettato)	$3, 4, 5$

- $L(3) = 2, 5$: il nodo 2 è etichettato, quindi il primo arco ammissibile è $(3, 5)$

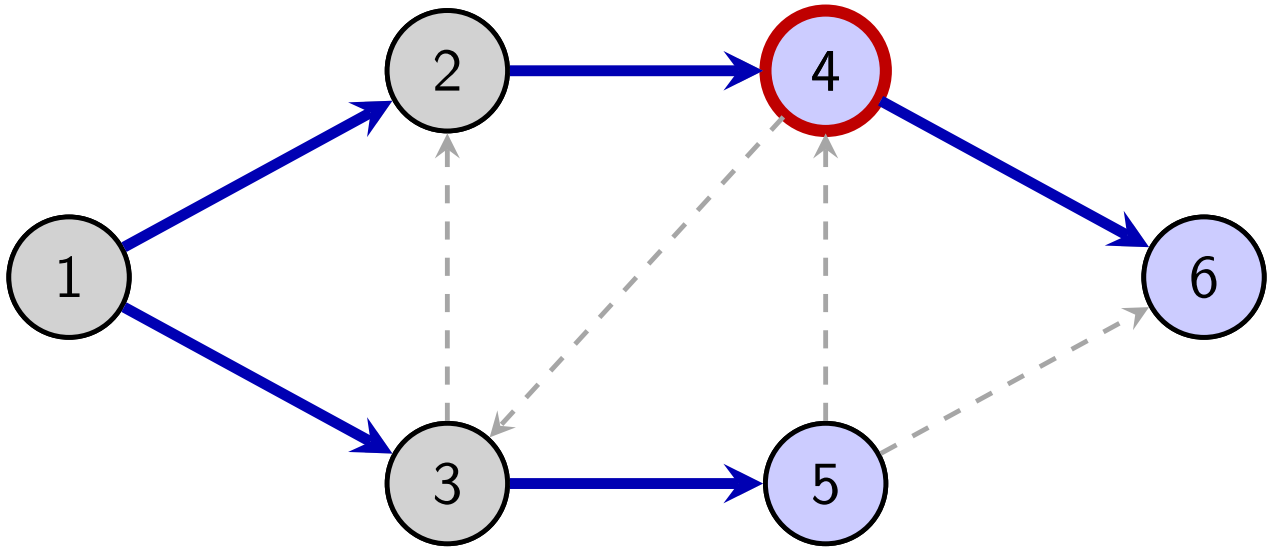
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 7



iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
7	3	rimuovi 3	4, 5

- Il nodo 3 non ha più archi ammissibili ed esce da *LIST*

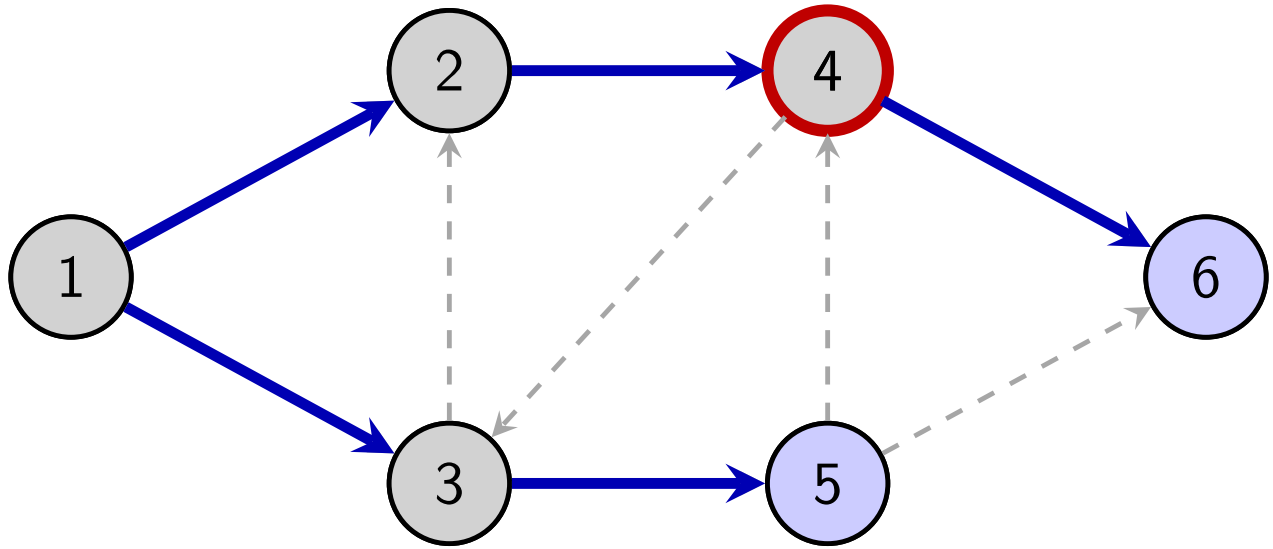
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 8



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
8	4	etichetta 6, $pred(6) = 4$ (3 è etichettato)	$4, 5, 6$

- $L(4) = 3, 6$: il nodo 3 è etichettato, quindi il primo arco ammissibile è $(4, 6)$

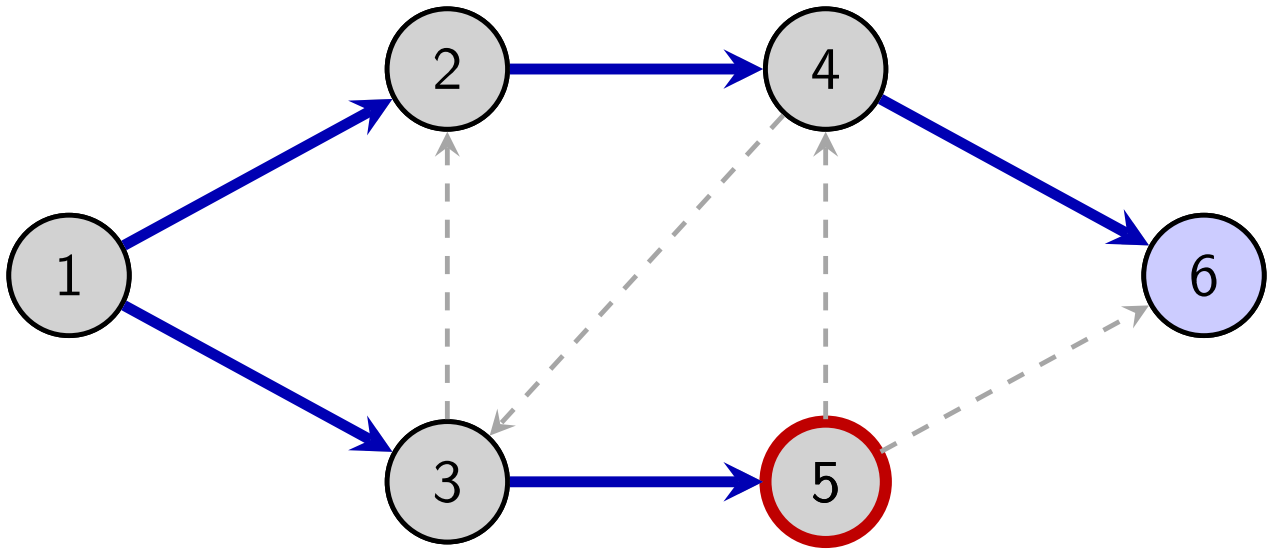
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 9



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
9	4	rimuovi 4	5, 6

- Tutti i nodi sono etichettati: d'ora in poi i nodi escono soltanto da $LIST$

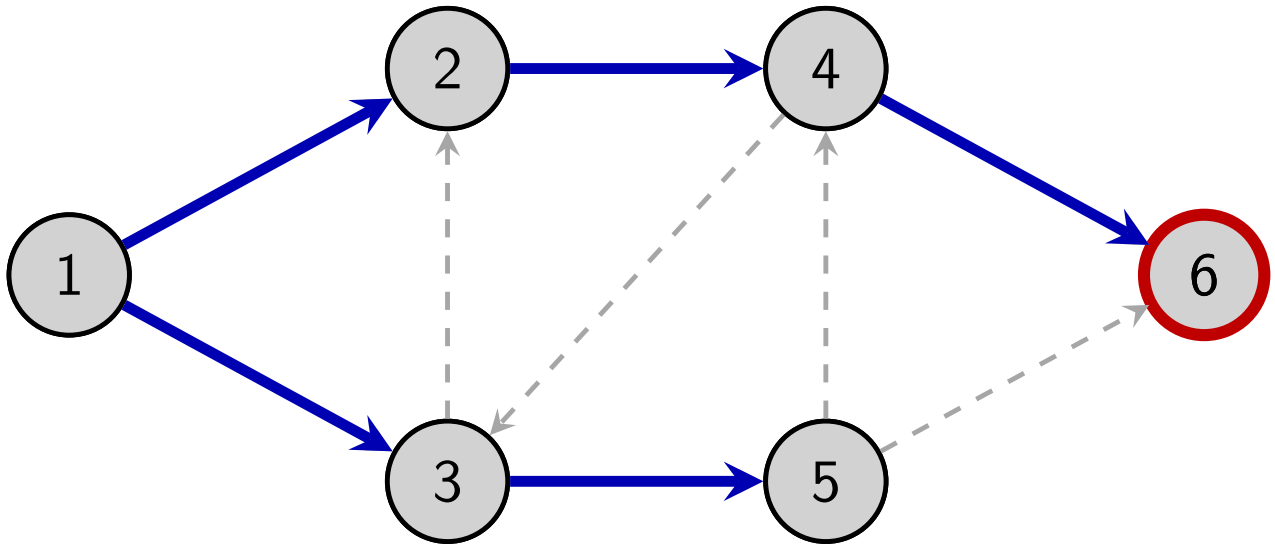
Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 10



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
10	5	rimuovi 5 (4 e 6 sono etichettati)	6

- $L(5) = 4, 6$: entrambi i successori sono etichettati

Esempio: BFS dal nodo 1 — iterazione 11



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
11	6	rimuovi 6	(vuota)

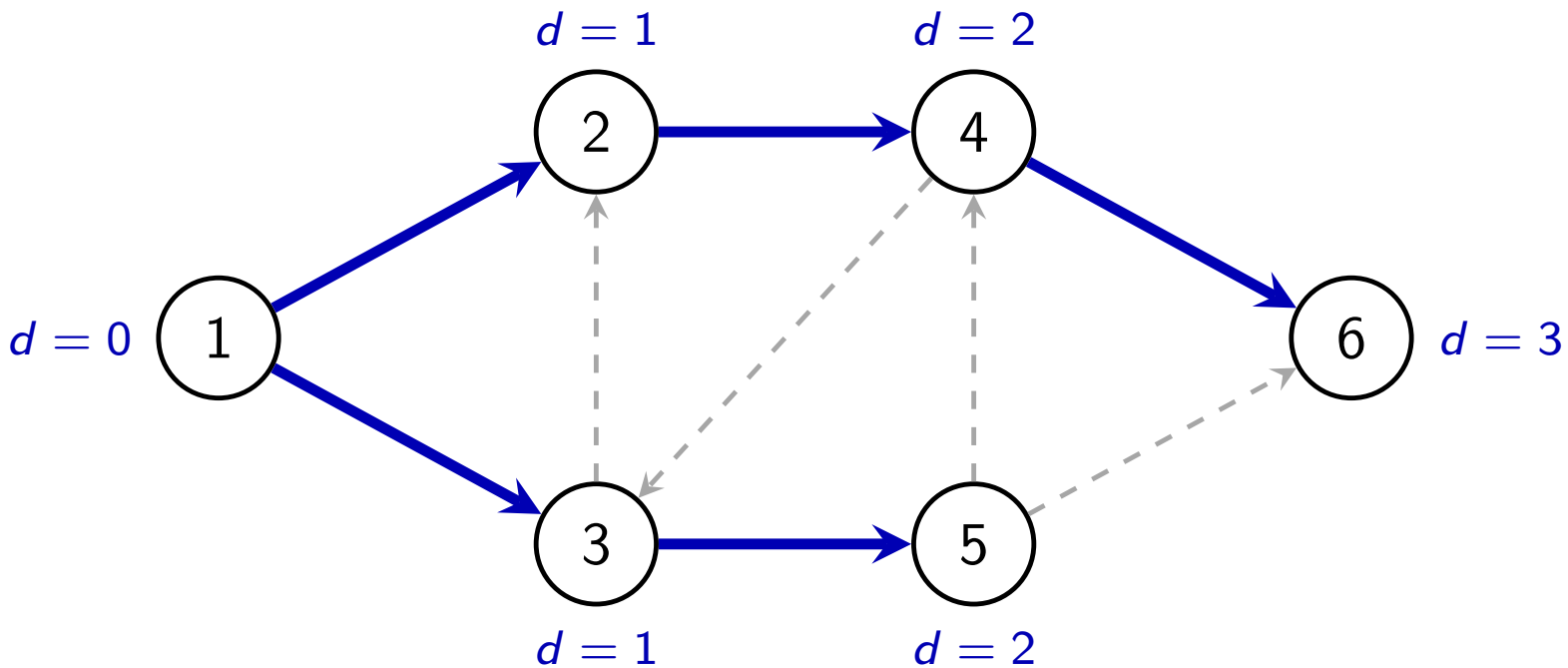
- $LIST = \emptyset$: la visita si ferma

Esempio: BFS dal nodo 1 — tutte le iterazioni

iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
1	1	etichetta 2, $pred(2) = 1$	$1, 2$
2	1	etichetta 3, $pred(3) = 1$	$1, 2, 3$
3	1	rimuovi 1	$2, 3$
4	2	etichetta 4, $pred(4) = 2$	$2, 3, 4$
5	2	rimuovi 2	$3, 4$
6	3	etichetta 5, $pred(5) = 3$ (2 è etichettato)	$3, 4, 5$
7	3	rimuovi 3	$4, 5$
8	4	etichetta 6, $pred(6) = 4$ (3 è etichettato)	$4, 5, 6$
9	4	rimuovi 4	$5, 6$
10	5	rimuovi 5 (4 e 6 sono etichettati)	6
11	6	rimuovi 6	(vuota)

Esempio: BFS dal nodo 1 — l'albero dei predecessori

- L'ordine di etichettatura è $1, 2, 3, 4, 5, 6$: ogni nodo è raggiungibile da 1
- L'albero dei predecessori ha gli archi $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$; è l'albero ricoprente dell'esempio sui cicli fondamentali
- Accanto a ogni nodo, la figura riporta il numero $d(j)$ di archi del cammino dell'albero da 1 a j



- Nell'albero della BFS ogni nodo è il più vicino possibile alla sorgente
- Questo vale in generale: la BFS trova i cammini con il minor numero di archi

Proposizione 5: la BFS trova i cammini più corti in numero di archi

Nell'albero dei predecessori della BFS, siano $d(s) = 0$ *e* $d(j) = d(pred(j)) + 1$ *per ogni nodo etichettato* $j \neq s$*. Allora, per ogni* $j \in R(s)$*,* $d(j)$ *è il numero minimo di archi di un cammino orientato da* s *a* j*.*

Dimostrazione (1/3)

Dimostriamo tre fatti.

Fatto 1. *Se* $LIST = u_1, u_2, \ldots, u_r$, *allora*

$$d(u_1) \leq d(u_2) \leq \cdots \leq d(u_r) \leq d(u_1) + 1.$$

- Vale al Passo 0
- Un nuovo nodo j è etichettato da u_1 e aggiunto con $d(j) = d(u_1) + 1$
- Rimuovere u_1 mantiene la proprietà, perché $d(u_r) \leq d(u_1) + 1 \leq d(u_2) + 1$

Dimostrazione (2/3)

Fatto 2. *I nodi sono etichettati in ordine non decrescente di d.*

- Ogni nuovo nodo ha $d(j) = d(u_1) + 1 \geq d(u_r)$, e u_r è l'ultimo nodo etichettato prima di j

Fatto 3. *Per ogni arco (i, j) con i etichettato, $d(j) \leq d(i) + 1$.*

- Se j è etichettato dopo i, allora j è etichettato prima che i esca da $LIST$, da un nodo u in testa a $LIST$, etichettato non dopo i: $d(j) = d(u) + 1 \leq d(i) + 1$
- Se j è etichettato prima di i, allora $d(j) \leq d(i)$ per il fatto 2

Dimostrazione (3/3)

- Sia $s = i_0, i_1, \ldots, i_k = j$ un cammino orientato con il numero minimo k di archi
- I suoi nodi sono etichettati (teorema sulla correttezza della visita), e per il fatto 3

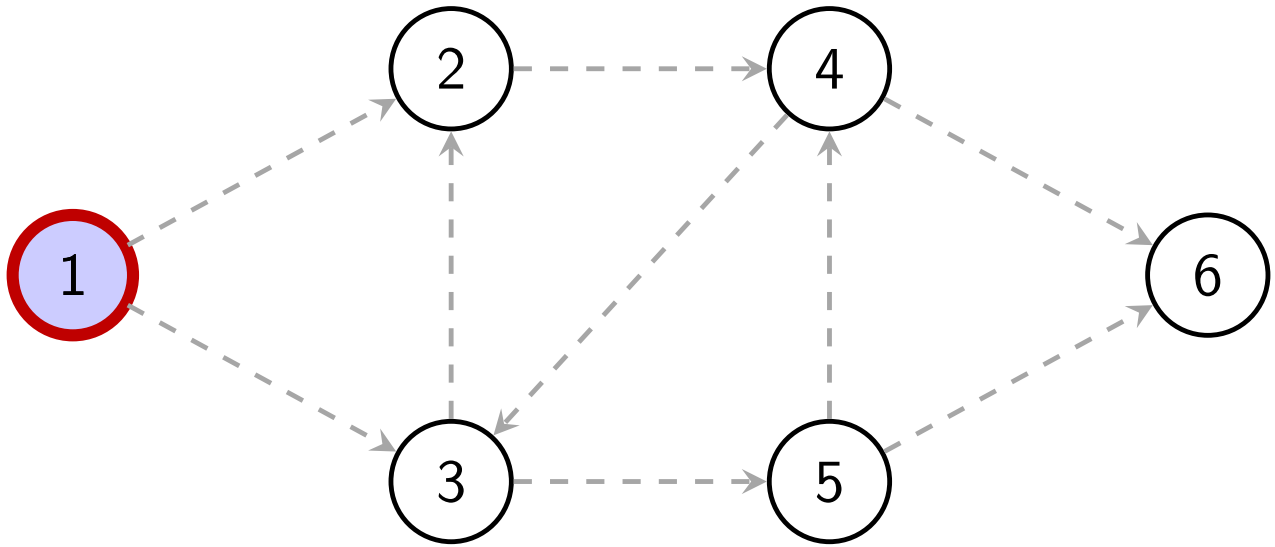
$$d(j) \leq d(i_{k-1}) + 1 \leq \cdots \leq d(s) + k = k.$$

- Il cammino dell'albero da s a j è un cammino orientato con $d(j)$ archi, quindi $d(j) \geq k$ □

Sull'esempio. I valori $d = (0, 1, 1, 2, 2, 3)$ sono i numeri minimi di archi dal nodo 1: per esempio, i cammini orientati più corti verso il nodo 6 hanno 3 archi, come $1, 2, 4, 6$.

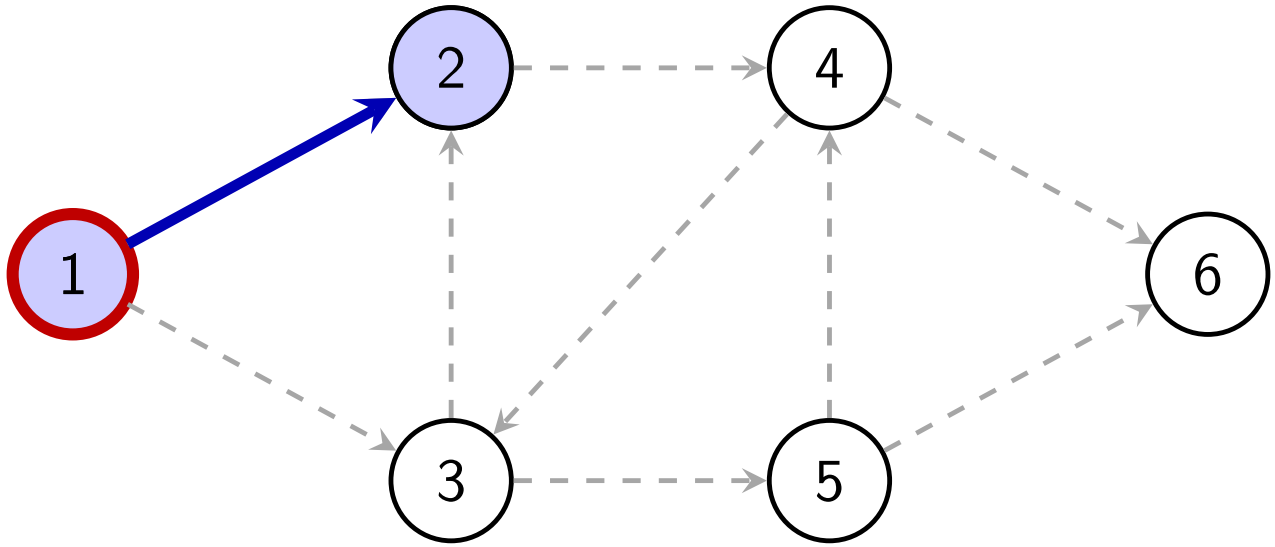
Ora lo stesso grafo, la stessa sorgente, le stesse liste, ma *LIST* è una **pila**: la visita in profondità.

Esempio: DFS dal nodo 1 — Passo 0



- Etichettiamo la sorgente $s = 1$ e poniamo $LIST := \{1\}$; tutti gli altri nodi non sono etichettati
- Nella DFS il nodo selezionato è sempre l'**ultimo** di $LIST$
- Stessi colori della BFS

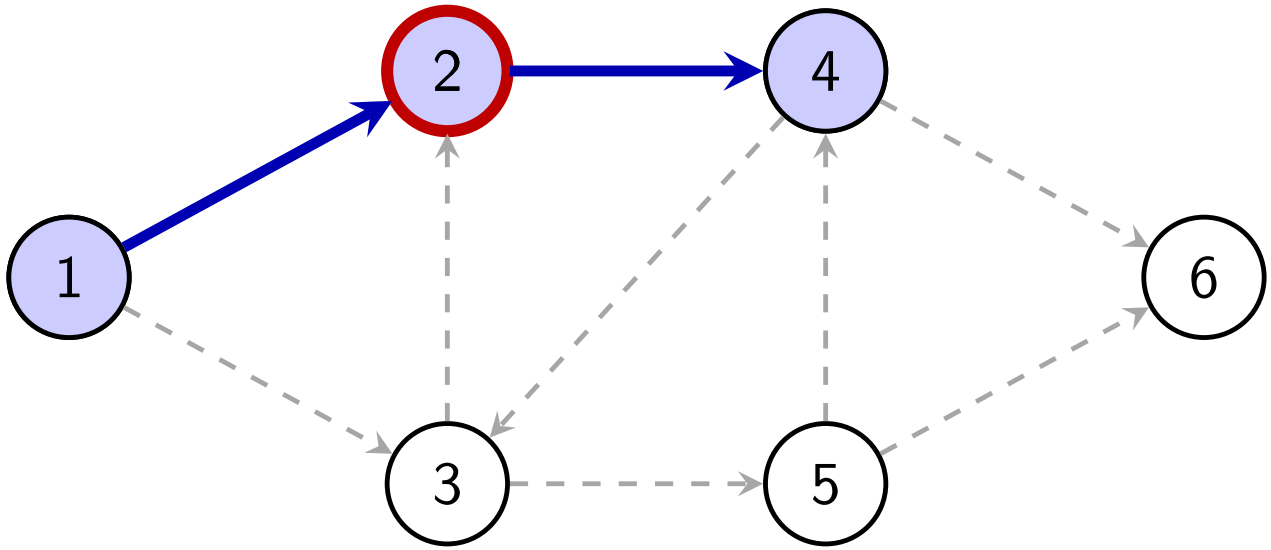
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 1



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
1	1	etichetta 2, $pred(2) = 1$	$1, 2$

- $L(1) = 2, 3$: il primo arco ammissibile è $(1, 2)$

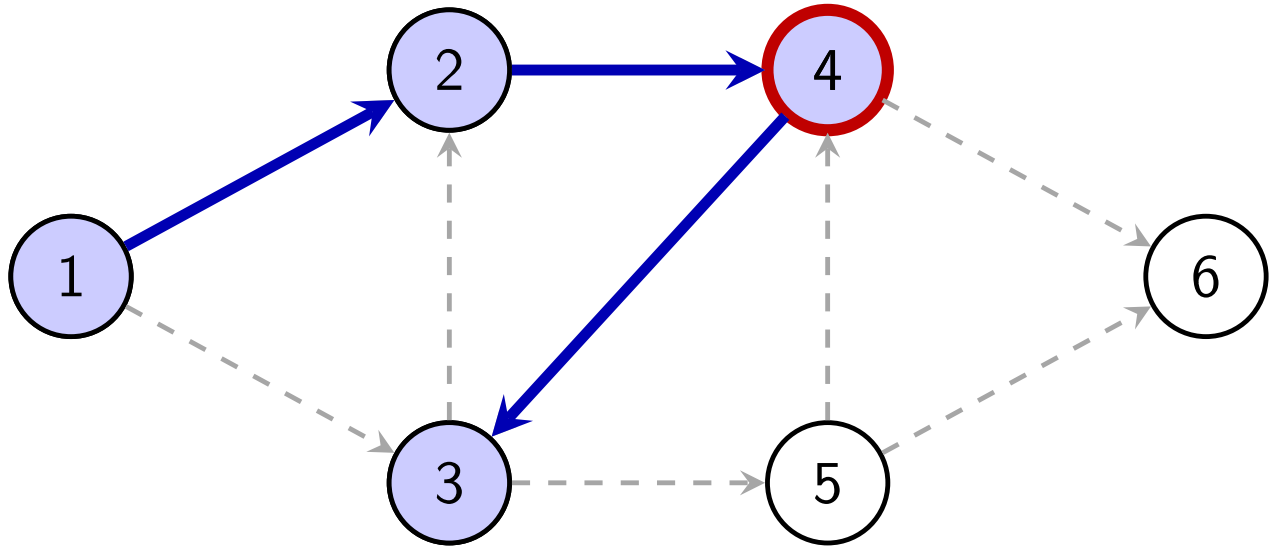
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 2



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
2	2	etichetta 4, $pred(4) = 2$	$1, 2, 4$

- L'ultimo nodo di $LIST$ è 2: la visita scende in profondità dal nodo appena etichettato

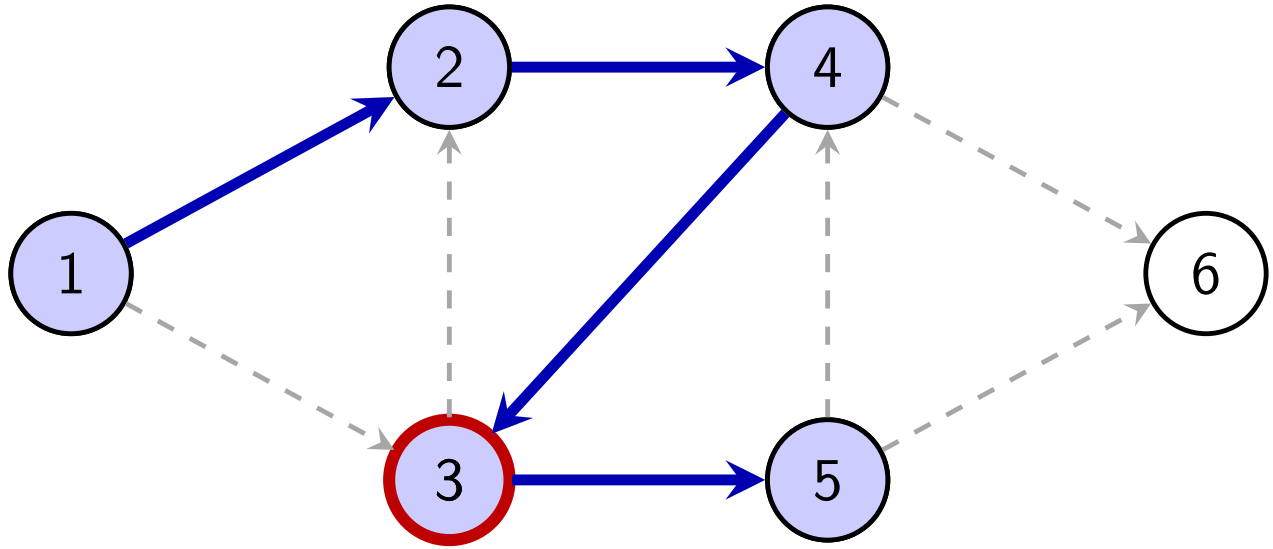
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 3



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
3	4	etichetta 3, $pred(3) = 4$	$1, 2, 4, 3$

- $L(4) = 3, 6$: il primo arco ammissibile è $(4, 3)$

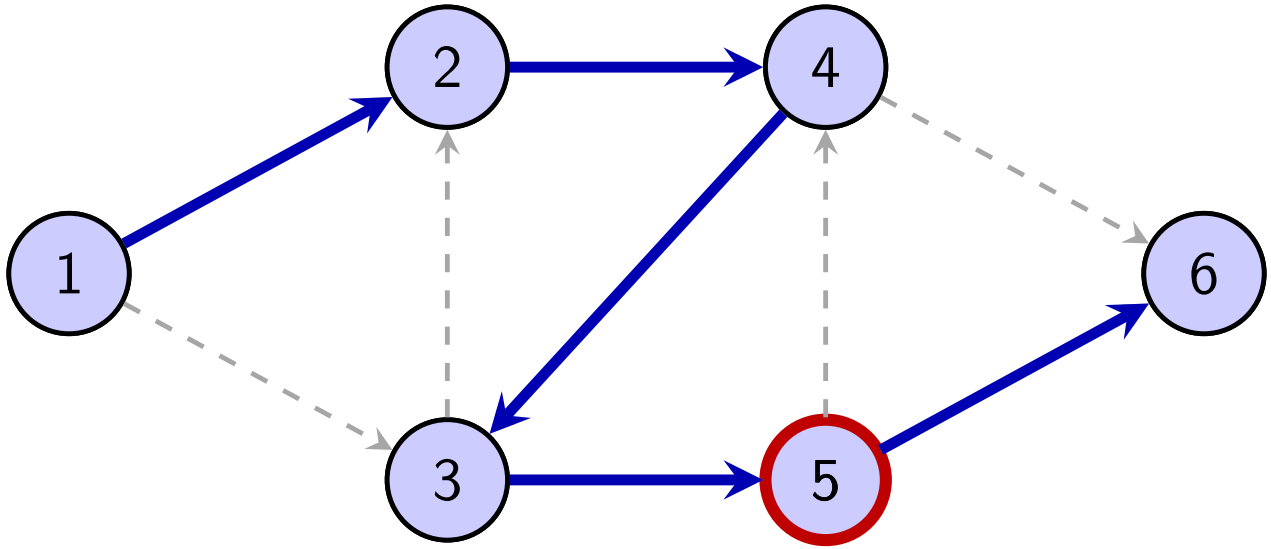
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 4



iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
4	3	etichetta 5, $pred(5) = 3$ (2 è etichettato)	$1, 2, 4, 3, 5$

- $L(3) = 2, 5$: il nodo 2 è etichettato, quindi il primo arco ammissibile è $(3, 5)$

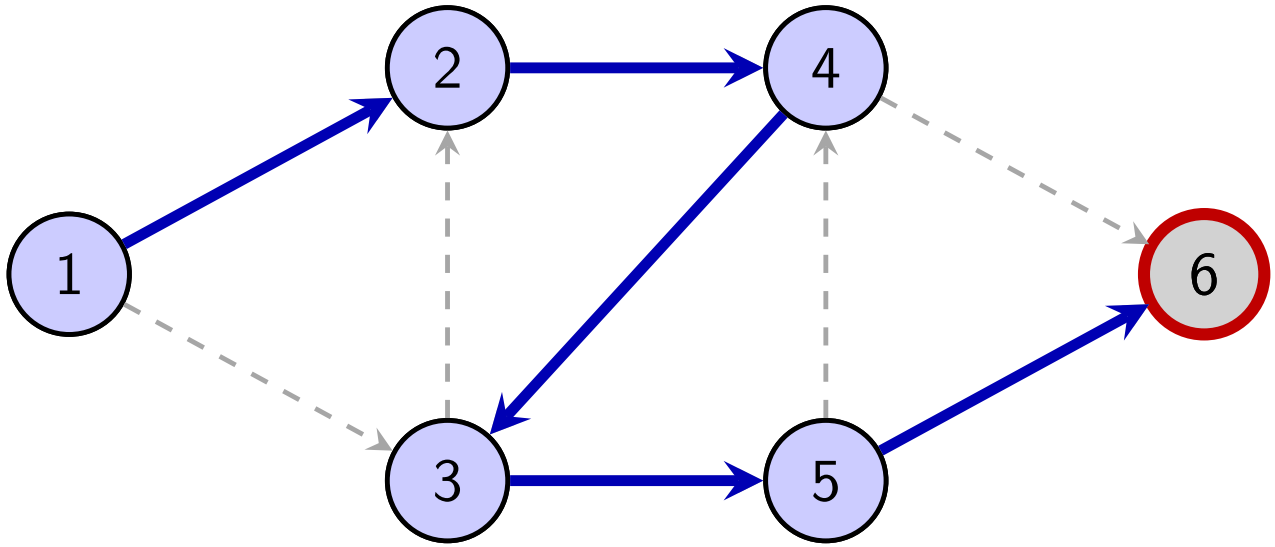
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 5



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
5	5	etichetta 6, $pred(6) = 5$ (4 è etichettato)	$1, 2, 4, 3, 5, 6$

- $L(5) = 4, 6$: il nodo 4 è etichettato, quindi il primo arco ammissibile è $(5, 6)$

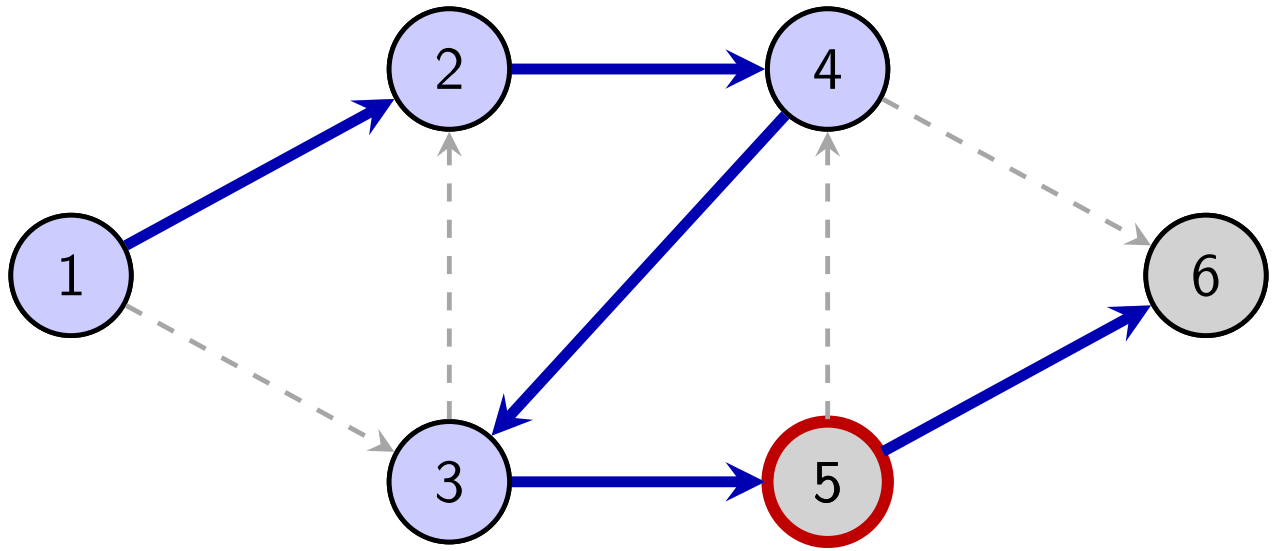
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 6



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
6	6	rimuovi 6	$1, 2, 4, 3, 5$

- $L(6)$ è vuota: la visita torna indietro

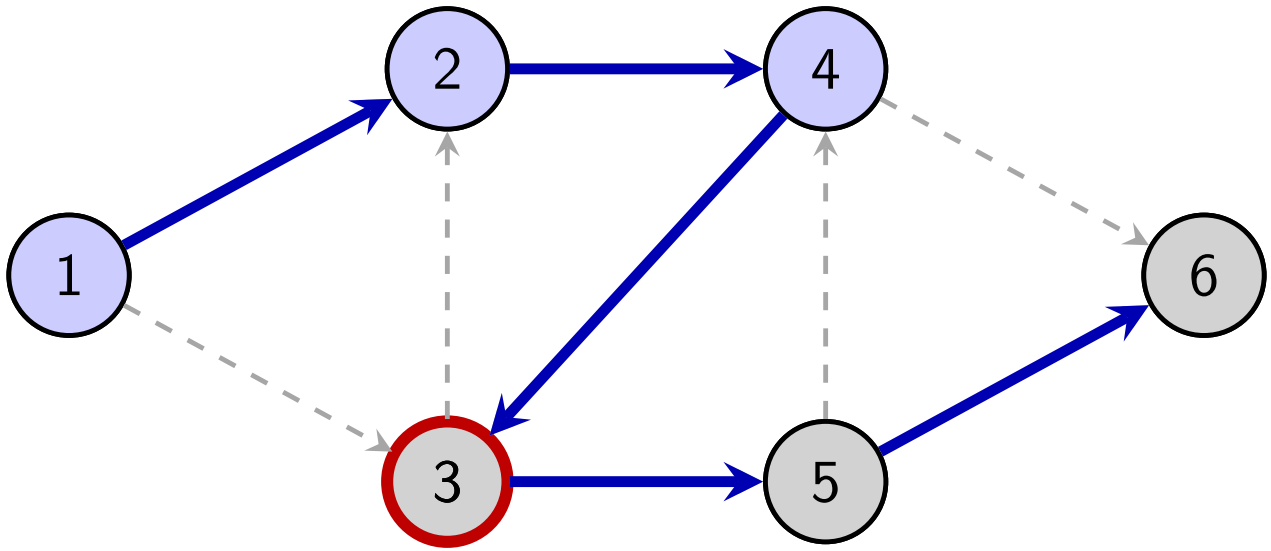
Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 7



iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
7	5	rimuovi 5	1, 2, 4, 3

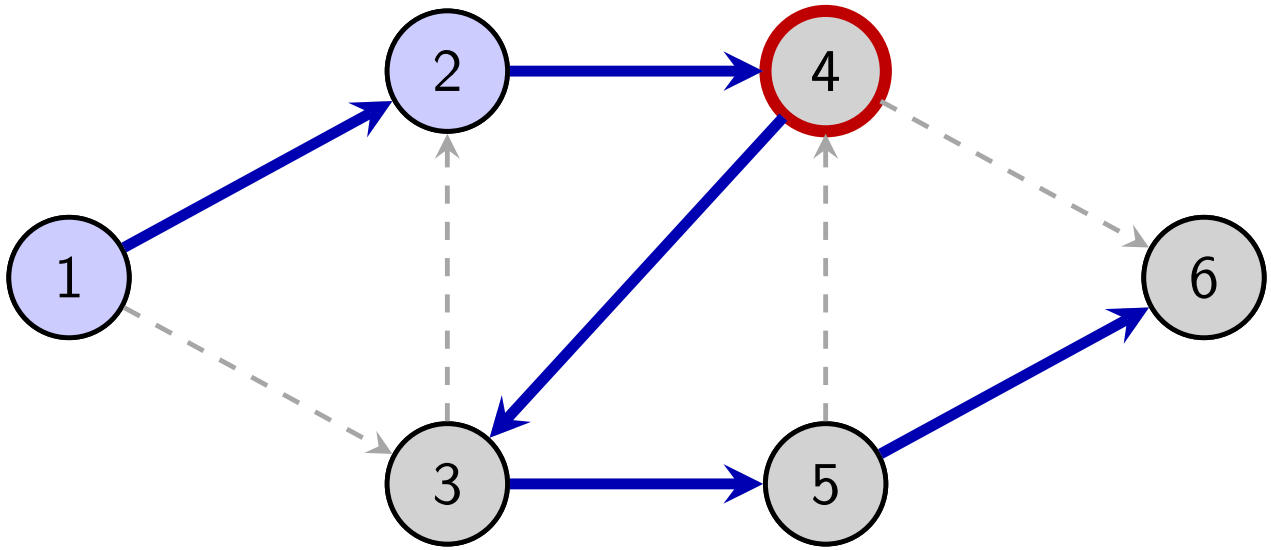
- Tutti i nodi sono etichettati: d'ora in poi i nodi escono soltanto da *LIST*

Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 8



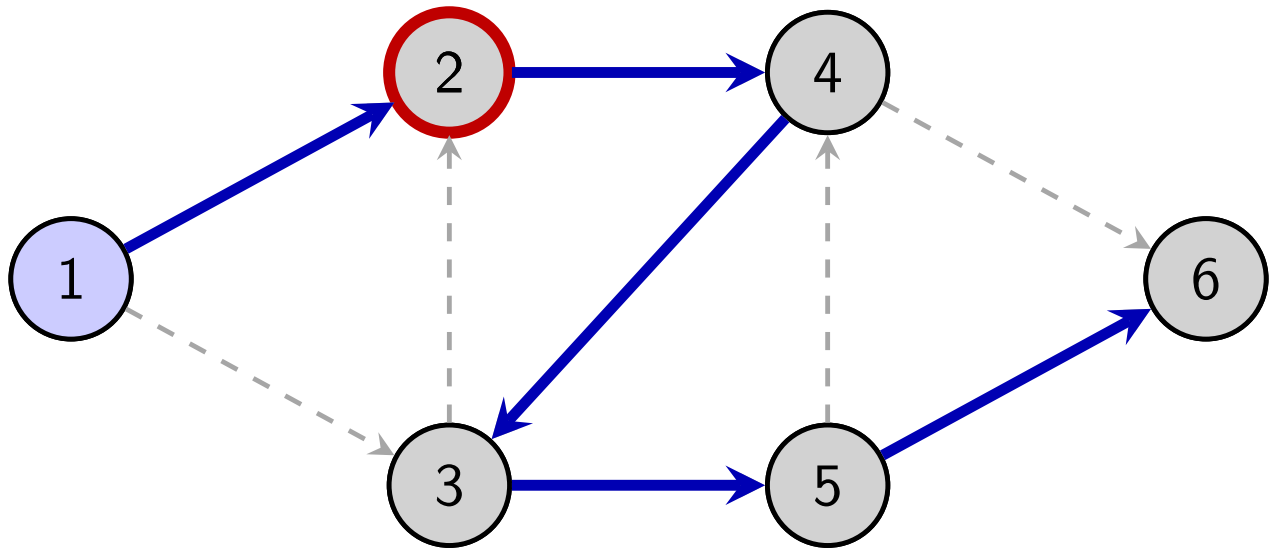
iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
8	3	rimuovi 3	$1, 2, 4$

Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 9



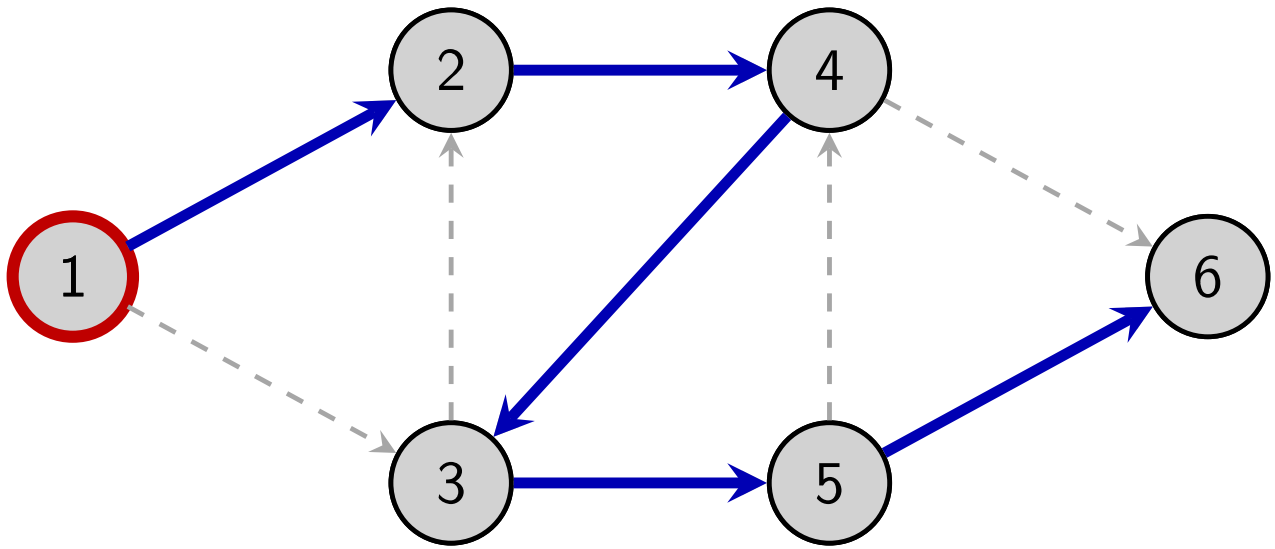
iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
9	4	rimuovi 4 (3 e 6 sono etichettati)	1, 2

Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 10



iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
10	2	rimuovi 2	1

Esempio: DFS dal nodo 1 — iterazione 11



iterazione	i selezionato	azione	$LIST$
11	1	rimuovi 1 (2 e 3 sono etichettati)	(vuota)

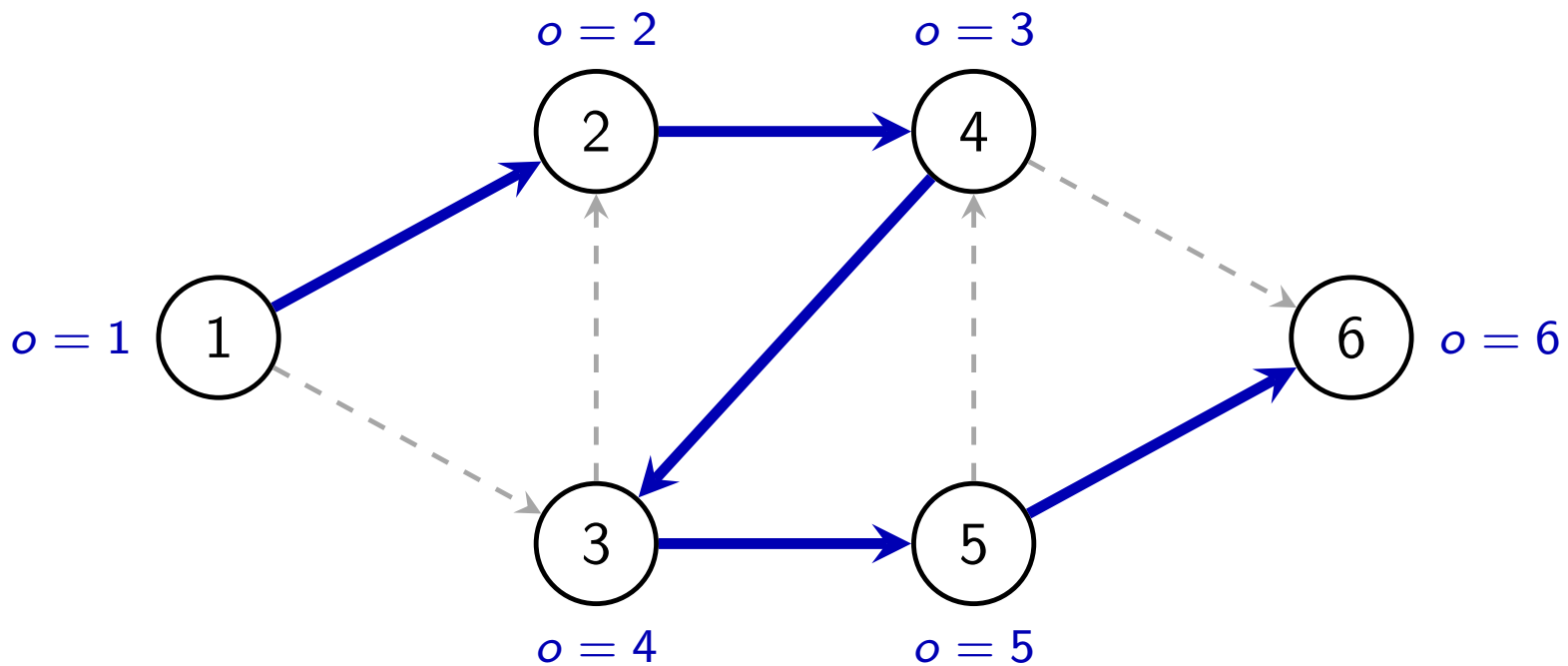
- $LIST = \emptyset$: la visita si ferma

Esempio: DFS dal nodo 1 — tutte le iterazioni

iterazione	i selezionato	azione	*LIST*
1	1	etichetta 2, $pred(2) = 1$	$1, 2$
2	2	etichetta 4, $pred(4) = 2$	$1, 2, 4$
3	4	etichetta 3, $pred(3) = 4$	$1, 2, 4, 3$
4	3	etichetta 5, $pred(5) = 3$ (2 è etichettato)	$1, 2, 4, 3, 5$
5	5	etichetta 6, $pred(6) = 5$ (4 è etichettato)	$1, 2, 4, 3, 5, 6$
6	6	rimuovi 6	$1, 2, 4, 3, 5$
7	5	rimuovi 5	$1, 2, 4, 3$
8	3	rimuovi 3	$1, 2, 4$
9	4	rimuovi 4 (3 e 6 sono etichettati)	$1, 2$
10	2	rimuovi 2	1
11	1	rimuovi 1 (2 e 3 sono etichettati)	(vuota)

Esempio: DFS dal nodo 1 — l'albero dei predecessori

- L'ordine di etichettatura è $1, 2, 4, 3, 5, 6$, e l'albero dei predecessori ha gli archi $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 6)$: un unico cammino orientato
- Accanto a ogni nodo, la figura riporta la sua posizione $o(j)$ nell'ordine di etichettatura



Albero della BFS e albero della DFS

- Entrambe le visite etichettano tutti i nodi, come garantisce il teorema di correttezza, ma i loro alberi sono diversi
- L'albero della BFS ha gli archi $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$ e raggiunge il nodo 6 con 3 archi
- L'albero della DFS è l'unico cammino orientato $1,2,4,3,5,6$ e raggiunge il nodo 6 con 5 archi

Usi della visita

- **Componenti connesse.** In un grafo non orientato, una visita da un vertice non etichettato etichetta tutta la sua componente; ripeterla da ogni vertice ancora non etichettato trova tutte le componenti in tempo $O(n+m)$

- **Componenti fortemente connesse.** Una visita in G e una nel grafo invertito G' danno $R(i)$ e $R'(i)$, quindi $S(i) = R(i) \cap R'(i)$; ripeterle per un nodo di ogni componente ancora sconosciuta richiede tempo $O(n(n+m))$

- **Alberi ricoprenti.** Su un grafo non orientato connesso, l'albero dei predecessori di una visita da un vertice qualsiasi è un albero ricoprente

Riepilogo

La visita generica:

- Etichetta esattamente i nodi raggiungibili dalla sorgente, in tempo $O(|N| + |A|)$ con le liste di adiacenza
- I suoi predecessori formano un albero, con un cammino orientato da s a ogni nodo etichettato

BFS e DFS:

- La BFS (*LIST* è una coda) dà cammini con il numero minimo di archi
- La DFS (*LIST* è una pila) va prima in profondità
- La visita trova anche componenti connesse, componenti fortemente connesse e alberi ricoprenti

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- Raccogliamo gli errori più frequenti con le nozioni di questo capitolo
- Ognuno è accompagnato dall'affermazione corretta, spesso verificata sul grafo di riferimento
- Riconoscerli ora fa risparmiare tempo negli esercizi e nei capitoli successivi

Osservazione 1: errori tipici (1/2)

- ***Scambiare i segni della matrice di incidenza.*** *L'elemento è $+1$ nella coda e -1 nella testa: la colonna di $(4, 3)$ ha $+1$ nella riga 4.*
- ***Chiamare cammino una passeggiata.*** *Un cammino ha vertici distinti; una passeggiata può ripeterli, e contiene sempre un cammino con gli stessi estremi.*
- ***Confondere connessione debole e forte.*** *Il grafo di riferimento è debolmente connesso, ma ha tre componenti fortemente connesse.*

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ***Contare solo gli spigoli.*** *Un grafo con $n-1$ spigoli non è necessariamente un albero: deve anche essere connesso, oppure aciclico.*
- ***Credere che la matrice di incidenza abbia rango pieno per righe.*** *Il suo rango è $|N|-k$: in un grafo connesso una riga è sempre ridondante.*
- ***Aspettarsi cammini più corti dalla DFS.*** *Solo l'albero della BFS dà il numero minimo di archi, e solo quando ogni arco conta uno.*
- ***Dimenticare l'ordine delle liste.*** *L'ordine di etichettatura e l'albero dei predecessori dipendono dall'ordine in cui si scorrono i successori.*

Riepilogo

Prima di fidarsi di un calcolo:

- Controllare i segni di $\boldsymbol{B}$ ($+1$ coda, -1 testa) e che i cammini abbiano vertici distinti
- Distinguere la connessione debole da quella forte

Prima di fidarsi di una conclusione:

- $n-1$ spigoli danno un albero solo insieme alla connessione o all'aciclicità
- $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = |N| - k$, mai $|N|$
- Solo la BFS dà il minor numero di archi, e il risultato di una visita dipende dall'ordine delle liste

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- Raccogliamo in pochi punti le idee chiave del capitolo
- Chiudiamo con il grafo di riferimento in sintesi: i numeri che abbiamo calcolato su di esso

Riepilogo (1/3)

- Un grafo non orientato $G = (V, E)$ ha spigoli $\{u, v\}$, un grafo orientato $G = (N, A)$ ha archi (i, j); la somma dei gradi è $2m$, quella dei gradi uscenti e quella dei gradi entranti è m
- Le liste di adiacenza richiedono spazio $n + m$; la matrice di incidenza nodo–arco ha $+1$ nella coda e -1 nella testa, e la riga i di $\boldsymbol{Bx}$ è il flusso uscente meno il flusso entrante nel nodo i
- Le componenti connesse e le componenti fortemente connesse sono classi di equivalenza; $S(i) = R(i) \cap R'(i)$

Riepilogo (2/3)

- Un albero è connesso e aciclico, con $n-1$ spigoli e un unico cammino fra ogni coppia di vertici; uno spigolo esterno a un albero ricoprente chiude un ciclo fondamentale
- $\text{rank}(\boldsymbol{B}) = |N| - k$, e in un grafo connesso le basi di $\boldsymbol{B}$ sono gli alberi ricoprenti
- La visita generica trova $R(s)$ in tempo $O(|N| + |A|)$; la BFS dà il numero minimo di archi

Riepilogo (3/3)

Il grafo di riferimento in sintesi.

nodi e archi	$n = 6$, $m = 9$
componenti connesse	1
componenti fortemente connesse	$\{1\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{6\}$
rank($\boldsymbol{B}$)	5
BFS da 1	ordine $1, 2, 3, 4, 5, 6$; $d = (0, 1, 1, 2, 2, 3)$
DFS da 1	ordine $1, 2, 4, 3, 5, 6$