



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione su reti

Esercizi 5 — Gestione dei progetti

Esercizi svolti sui capitoli del volume 5, gestione dei progetti: ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Gestione dei progetti	2
---	-----------------------	---



Gestione dei progetti

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e il metodo del capitolo «Gestione del progetto», per un progetto con attività $1, 2, \dots, n$, durate $d_j > 0$ e immediati predecessori.

- (P1) **Rete di progetto.** Nodi 0 (INIZIO), $1, 2, \dots, n$ e $n+1$ (FINE), con $d_0 = d_{n+1} = 0$; un arco (i, j) per ogni precedenza, $(0, j)$ per ogni attività senza immediati predecessori, $(j, n+1)$ per ogni attività senza successori. L'arco (i, j) ha lunghezza d_i .
- (P2) **Ordine topologico.** Rimuove ripetutamente il nodo senza inserire archi di indice più piccolo; se tutto i restanti nodi hanno archi entranti, le precedenze contengono un ciclo.
- (P3) **Passo in avanti,** in ordine topologico: $ES_0 = 0$, $ES_j = \max_{(i,j) \in A} EF_i$, $EF_j = ES_j + d_j$; la durata minima del progetto è $T = ES_{n+1}$.
- (P4) **Passaggio all'indietro,** in ordine inverso: $LF_{n+1} = T$, $LF_j = \min_{(j,k) \in A} LS_k$, $LS_j = LF_j - d_j$. Pantaloni $TS_j = LS_j - ES_j$ e $FS_j = \min_{(j,k) \in A} ES_k - EF_j$; l'arco (i, j) è teso se $ES_j = EF_i$, e i percorsi critici sono i percorsi dall'INIZIO alla FINE costituiti da archi stretti.
- (P5) **Modifiche e LP.** Se d_j cresce di δ , $T' = T + \max\{0, \delta - TS_j\}$; se diminuisce di δ , $T - \delta \leq T' \leq T$, con $T' = T$ quando un percorso critico evita j . Il modello PD lo è $\min\{t_{n+1} - t_0 : t_j - t_i \geq d_i, (i, j) \in A\}$ e il suo duale invia un'unità di flusso da INIZIO a FINE, massimizzando $\sum d_i x_{ij}$.

Esercizio 9.1 — Il passaggio in avanti e quello all'indietro

Un progetto ha attività 7, numerate $1, 2, \dots, 7$, con i predecessori immediati e le durate (in giorni) della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j		
1	—	9 giorni
2	1	2 giorni
3	—	2 giorni
4	3	8 giorni
5	2	7 giorni
6	5	5 giorni
7	4, 5	6 giorni

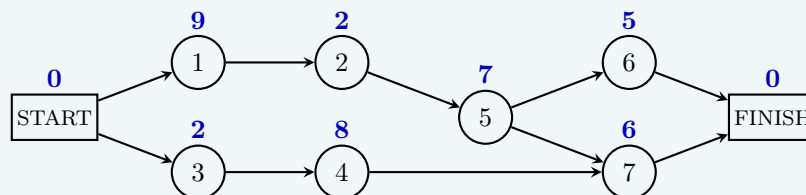
Domande

1. Disegnare la rete di progetto, con il nodo START 0 e il nodo FINISH 8, e darne l'ordine topologico (P2).
2. Esegui il forward pass: fornisci ES_j e EF_j per ogni nodo e la durata minima del progetto T .
3. Esegui il passaggio all'indietro: assegna LF_j e LS_j per ogni nodo.
4. Trova il percorso critico e verifica che la sua lunghezza sia T .

Soluzione

Usiamo le regole (P1)–(P5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Le attività 1 e 3 non hanno predecessori immediati e sono collegate a START; le attività 6 e 7 non hanno successori ed entrano FINISH. Le durate sono scritte sopra i nodi:



Ogni attività ha predecessori immediati di indice più piccolo, quindi l'ordine topologico è 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

2. Ogni riga elabora un nodo: i primi tempi di fine dei suoi immediati predecessori (il massimo in grassetto), quindi ES_j e EF_j :

nodo j	d_j	EF_i dei predecessori (i)	ES_j	EF_j
0	0	—	0	0
1	9	0 (0)	0	9
2	2	9 (1)	9	11
3	2	0 (0)	0	2
4	8	2 (3)	2	10
5	7	11 (2)	11	18
6	5	18 (5)	18	23
7	6	10 (4), 18 (5)	18	24
8	0	23 (6), 24 (7)	24	24

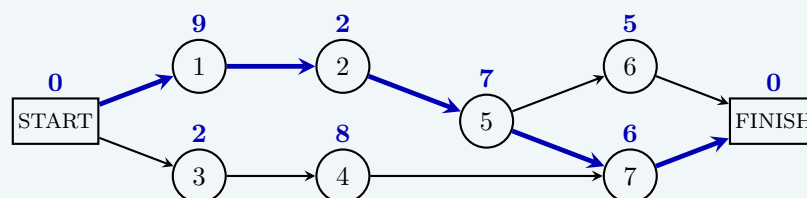
La durata minima del progetto è di $T = ES_8 = 24$ giorni.

3. Nell'ordine inverso ogni riga fornisce gli ultimi orari di inizio degli immediati successori (il minimo in grassetto), quindi LF_j e LS_j :

nodo j	d_j	LS_k dei successori (k)	LF_j	LS_j
8	0	—	24	24
7	6	24 (8)	24	18
6	5	24 (8)	24	19
5	7	19 (6), 18 (7)	18	11
4	8	18 (7)	18	10
3	2	10 (4)	10	8
2	2	11 (5)	11	9
1	9	9 (2)	9	0
0	0	0 (1), 8 (3)	0	0

Il pass termina con $LS_0 = 0$.

4. Gli archi stretti che partono da INIZIO raggiungono FINE lungo un unico percorso, in blu:



Il percorso critico è START, 1, 2, 5, 7, FINISH, di lunghezza $9 + 2 + 7 + 6 = 24 = T$.

Il passaggio in avanti dà $T = 24$, il passaggio all'indietro termina con $LS_0 = 0$ e il percorso critico è START, 1, 2, 5, 7, FINISH.

Esercizio 9.2 — Pantaloni e il diagramma di Gantt

Un progetto ha attività 8, numerate $1, 2, \dots, 8$, con i predecessori immediati e le durate (in giorni) della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j	
1	— 5 giorni
2	1 6 giorni
3	1 9 giorni
4	2, 3 4 giorni
5	3 9 giorni
6	4 4 giorni
7	4, 5 5 giorni
8	6, 7 3 giorni

Domande

1. Calcola il primo e l'ultimo orario di inizio e fine di tutte le attività e la durata minima del progetto T .
2. Calcola il margine di flessibilità totale e libero di ogni attività. Quali attività sono critiche? Indica il percorso critico.
3. Di quanti giorni è possibile ritardare l'attività 2 senza ritardare il progetto? E senza spostare la prima ora di inizio di qualsiasi altra attività? Quali attività si spostano se subiscono un ritardo di TS_2 giorni?
4. Disegna il diagramma di Gantt della prima pianificazione, con i margini di flessibilità totali.

Soluzione

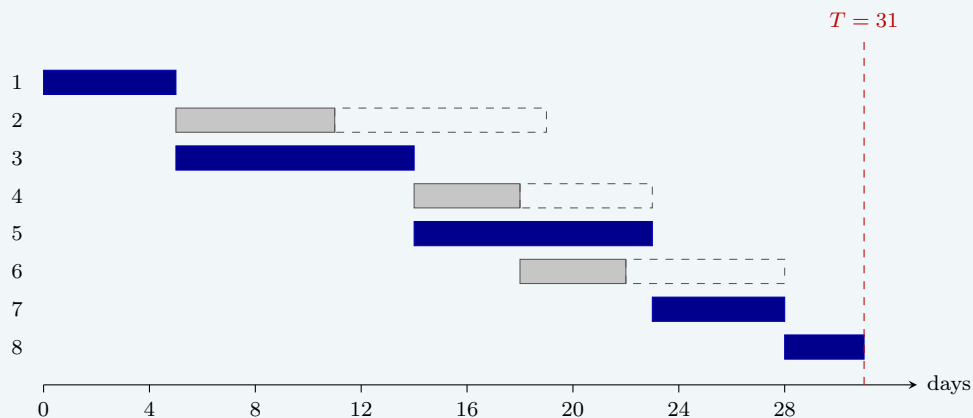
Usiamo le regole (P1)–(P5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Il passaggio in avanti nell'ordine topologico $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e il passaggio all'indietro nell'ordine inverso danno:

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critico
1	5	0	5	0	5	0	0	sì
2	6	5	11	13	19	8	3	
3	9	5	14	5	14	0	0	sì
4	4	14	18	19	23	5	0	
5	9	14	23	14	23	0	0	sì
6	4	18	22	24	28	6	6	
7	5	23	28	23	28	0	0	sì
8	3	28	31	28	31	0	0	sì

e $T = ES_9 = 31$ giorni.

- Le ultime due colonne della tabella sono $TS_j = LS_j - ES_j$ e $FS_j = \min ES_k - EF_j$. Le attività critiche, con $TS_j = 0$, sono 1, 3, 5, 7 e 8, e gli archi stretti da START raggiungono FINISH solo lungo START, 1, 3, 5, 7, 8, FINISH, il percorso critico.
- Attività 2 ha $TS_2 = 8$ e $FS_2 = 3$. Può iniziare 8 con giorni di ritardo senza ritardare il progetto, ma solo 3 con giorni di ritardo senza spostare altre attività. Con un ritardo di 8 giorni i primi orari di inizio delle attività 4 e 6 si spostano di 5 giorni e la FINE rimane a $T = 31$.
- Barre da ES_j a EF_j (attività critiche in blu), caselle tratteggiate da EF_j a LF_j :



Le barre blu si susseguono senza interruzioni dal giorno 0 al giorno 31.

$T = 31$; il percorso critico è START, 1, 3, 5, 7, 8, FINISH. L'attività 2 può assorbire 8 giorni di ritardo, ma solo 3 senza spostare altre attività.

Esercizio 9.3 — Ordine topologico e precedenze incoerenti

Un progetto ha attività 7, numerate 1, 2, ..., 7, con i predecessori immediati e le durate (in giorni) della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j		
1	6, 7	2 giorni
2	1, 4	6 giorni
3	—	4 giorni
4	6	8 giorni
5	—	7 giorni
6	5	8 giorni
7	3, 5	5 giorni

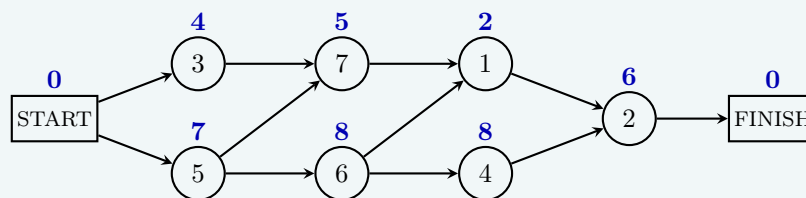
Domande

1. Trovare l'ordine topologico della rete di progetto con (P2), dando ad ogni passo i nodi senza inserire archi.
2. Eseguire il passaggio in avanti e fornire la durata minima del progetto T e il percorso critico.
3. Il pianificatore aggiunge la precedenza «l'attività 2 deve essere terminata prima dell'inizio dell'attività 3». Esegui (P2) sulla nuova rete, trova un ciclo diretto e dimostra che il nuovo progetto non ha una pianificazione.

Soluzione

Usiamo le regole (P1)–(P5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. La rete del progetto, con le durate sopra i nodi:



Ad ogni passo viene eliminato il nodo di indice più piccolo tra i nodi senza inserire archi:

passo e nodi senza inserire archi e rimossi		
1	0	0
2 e 3, 5 e 3		
3	5	5
4 e 6, 7 e 6		
5	4, 7	4
6	7	7
7	1	1
8	2	2
9	8	8

L'ordine topologico è 0, 3, 5, 6, 4, 7, 1, 2, 8: le attività non sono numerate in questo ordine.

2. Ogni riga elabora un nodo, in ordine topologico:

nodo j	d_j	EF_i dei predecessori (i)	ES_j	EF_j
0	0	—	0	0
3	4	0 (0)	0	4
5	7	0 (0)	0	7
6	8	7 (5)	7	15
4	8	15 (6)	15	23
7	5	4 (3), 7 (5)	7	12
1	2	15 (6), 12 (7)	15	17
2	6	17 (1), 23 (4)	23	29
8	0	29 (2)	29	29

Quindi i giorni $T = ES_8 = 29$ e gli archi stretti danno il percorso critico START, 5, 6, 4, 2, FINISH.

3. Con il nuovo arco (2, 3) la regola (P2) procede come segue:

passo e nodi senza inserire archi e rimossi		
1	0, 8	0
2	5, 8	5
3	6, 8	6
4	4, 8	4
5	8	8
6	nessuno	—

Si ferma con i nodi 1, 2, 3 e 7 a sinistra, tutti con archi entranti. Andando a ritroso dal nodo 1 lungo archi entranti troviamo il ciclo 1, 2, 3, 7, 1. Sommando i vincoli $t_j \geq t_i + d_i$ dei suoi archi si annullano gli orari di inizio:

$$0 \geq d_1 + d_2 + d_3 + d_7 = 2 + 6 + 4 + 5 = 17,$$

una contraddizione: le nuove precedenze non ammettono alcun calendario e il piano deve essere corretto.

L'ordine topologico 0, 3, 5, 6, 4, 7, 1, 2, 8 dà $T = 29$. La precedenza (2, 3) chiude il ciclo 1, 2, 3, 7, 1 e non esiste alcuna pianificazione.

Esercizio 9.4 — Due percorsi critici e cambiamenti di durate

Un progetto ha attività 8, numerate 1, 2, ..., 8, con i predecessori immediati e le durate (in giorni) della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j		
1	—	4 giorni
2	1	7 giorni
3	—	6 giorni
4	2, 3	5 giorni
5	2	5 giorni
6	4	6 giorni
7	5	6 giorni
8	5	3 giorni

Domande

1. Calcola il primo e l'ultimo tempo, T e tutti i percorsi critici.
2. Senza eseguire nuovamente il metodo, cosa puoi dire sulla durata minima del progetto se (i) d_4 diminuisce di 1; (ii) d_1 diminuisce di 1; (iii) d_3 aumenta di 7?
3. Controlla le tre risposte eseguendo nuovamente il passaggio in avanti e fornisci i nuovi percorsi critici.

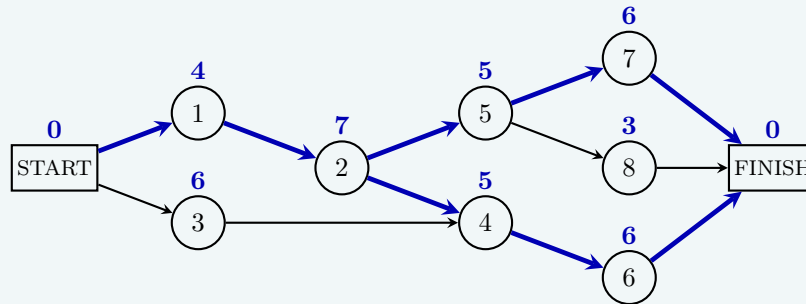
Soluzione

Usiamo le regole (P1)–(P5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Il passaggio in avanti e quello all'indietro danno:

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critico
1	4	0	4	0	4	0	0	sì
2	7	4	11	4	11	0	0	sì
3	6	0	6	5	11	5	5	
4	5	11	16	11	16	0	0	sì
5	5	11	16	11	16	0	0	sì
6	6	16	22	16	22	0	0	sì
7	6	16	22	16	22	0	0	sì
8	3	16	19	19	22	3	3	

quindi $T = 22$. Gli archi stretti che partono dallo START raggiungono il FINE lungo due percorsi, in blu: START, 1, 2, 4, 6, FINISH e START, 1, 2, 5, 7, FINISH.



2. (i) L'attività 4 si trova solo su START, 1, 2, 4, 6, FINISH; l'altro percorso critico lo evita, quindi con (P5) $T' = T = 22$. (ii) L'attività 1 si trova su entrambi i percorsi critici: da (P5), $21 \leq T' \leq 22$, ed entrambi i percorsi critici diventano 1 più brevi di un giorno. (iii) L'attività 3 ha $TS_3 = 5$, quindi $T' = T + \max\{0, 7 - 5\} = 24$.
3. Esecuzione del metodo del percorso critico su ogni progetto modificato:

modifica	TS_j e nuovo T e percorsi critici dopo la modifica		
$d_4 = 5 \rightarrow 4$	0	22	START, 1, 2, 5, 7, FINISH
$d_1 = 4 \rightarrow 3$ e 0 e 21 e START, 1, 2, 4, 6, FINISH; START, 1, 2, 5, 7, FINISH			
$d_3 = 6 \rightarrow 13$	5	24	START, 3, 4, 6, FINISH

In (ii) ogni percorso che evita l'attività 1 dura al massimo 21 giorni, quindi viene raggiunto il limite inferiore.

Con due percorsi critici, abbreviare un'attività su uno solo di essi non abbrevia il progetto; abbreviando l'attività comune eseguita da 1 e un ritardo di $TS_3 + 2$ sull'attività 3 ritarda il progetto di 2 giorni.

Esercizio 9.5 — Il modello LP e il suo duale

Un progetto ha attività 4, numerate 1, 2, ..., 4, con i predecessori immediati e le durate (in giorni) della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j	
1	— 8 giorni
2	1 5 giorni
3	1 9 giorni
4	1 2 giorni

Domande

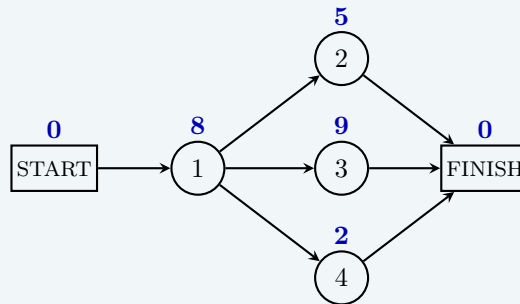
1. Scrivi il modello PD del progetto, con una variabile t_j per nodo.
2. Scrivi il suo modello duale $D(PD)$, con una variabile x_{ij} per arco.
3. Calcola ES e LS , mostra che entrambi sono ottimali per il modello PD e fornisce una soluzione ottimale di $D(PD)$. Dimostrare l'ottimalità con dualità debole.

4. Quali vincoli del modello PD valgono con l'uguaglianza in ogni soluzione ottimale?

Soluzione

Usiamo le regole (P1)–(P5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

- La rete di progetto, con le durate sopra i nodi, ha gli archi $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$:



Esiste un vincolo $t_j - t_i \geq d_i$ per arco e le variabili sono libere:

$$\begin{array}{llllll}
 \min & -t_0 & & & & +t_5 \\
 \text{subject to} & -t_0 & +t_1 & & & \geq 0 \\
 & & -t_1 & +t_2 & & \geq 8 \\
 & & -t_1 & & +t_3 & \geq 8 \\
 & & -t_1 & & & +t_4 \geq 8 \\
 & & & -t_2 & & +t_5 \geq 5 \\
 & & & & -t_3 & +t_5 \geq 9 \\
 & & & & & -t_4 +t_5 \geq 2 \\
 & t_0, & t_1, & t_2, & t_3, & t_4, & t_5 \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

- Esiste una variabile $x_{ij} \geq 0$ per arco e un vincolo di conservazione del flusso per nodo, con $b_0 = 1$ e $b_5 = -1$; gli archi che partono da START hanno lunghezza $d_0 = 0$:

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & & 8x_{12} & +8x_{13} & +8x_{14} & +5x_{25} & +9x_{35} & +2x_{45} \\
 \text{subject to} & x_{01} & & & & & & = 1 \\
 & -x_{01} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & = 0 \\
 & & -x_{12} & & & +x_{25} & & = 0 \\
 & & & -x_{13} & & & +x_{35} & = 0 \\
 & & & & -x_{14} & & & +x_{45} = 0 \\
 & & & & & -x_{25} & -x_{35} & -x_{45} = -1 \\
 & x_{01}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{25}, & x_{35}, & x_{45} \geq 0
 \end{array}$$

- Il passaggio in avanti e quello all'indietro danno $ES = (0, 0, 8, 8, 8, 17)$ e $LS = (0, 0, 12, 8, 15, 17)$, entrambi con $t_5 - t_0 = 17$. Entrambi soddisfano ogni vincolo del modello PD, e differiscono sui nodi 2, 4: la soluzione ottimale del modello PD non è unica. Il percorso critico è START, 1, 3, FINISH; il suo vettore di incidenza, con $x_{ij} = 1$ sugli archi $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 5)$ e 0 altrove, è ammissibile per $D(\text{PD})$ con valore $8 + 9 = 17$. Per dualità debole una soluzione ammissibile del modello PD e una soluzione ammissibile del suo duale con lo stesso valore sono entrambe ottimali: $z(\text{PD}) = z(D(\text{PD})) = 17$ (Gurobi conferma entrambi i valori).

4. I vincoli degli archi del cammino critico: sommandoli, $t_5 - t_0 \geq 17$, e una soluzione ottima ha $t_5 - t_0 = 17$, quindi ciascuno di essi vale con uguaglianza. Il vincolo di ogni altro arco è rigoroso per ES o per LS , due soluzioni ottimali:

arco (i, j)	d_i	$ES_j - ES_i$	$LS_j - LS_i$
(1, 2)	8	8	12
(1, 4)	8	8	15
(2, 5)	5	9	5
(4, 5)	2	9	2

In ogni riga almeno una delle due differenze è maggiore di d_i .

$z(\text{PD}) = z(D(\text{PD})) = 17$: ES e LS sono pianificazioni ottimali e il percorso critico è la soluzione duale ottimale.

Esercizio 9.6 — Proofs e counterexamples

Un progetto ha attività 7, numerate $1, 2, \dots, 7$, con i predecessori immediati e le durate (in giorni) della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j	
1	— 9 giorni
2	1 7 giorni
3	1 5 giorni
4	2, 3 6 giorni
5	3 9 giorni
6	4 4 giorni
7	4, 5 9 giorni

Domande

1. In un progetto, due attività i e j non sono collegate da alcun percorso, i ha già un immediato successore e j un immediato predecessore. Viene aggiunta la precedenza « i prima di j ». Dimostrare che la nuova durata minima del progetto è

$$T' = T + \max\{0, EF_i - LS_j\},$$

dove EF_i , LS_j e T vengono calcolati prima della modifica.

2. Nel progetto della tabella, calcolare i tempi e utilizzare la formula per le precedenze «5 prima di 6» e «2 prima di 3».
3. Uno studente sostiene: «un percorso dall'INIZIO alla FINE fatto di attività critiche è un percorso critico». Confutare l'affermazione con un progetto di quattro attività.

Soluzione

Usiamo le regole (P1)–(P5) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

- Viene aggiunto solo un arco, (i, j) , poiché i ha già un successore e j un predecessore, e non viene visualizzato alcun ciclo, poiché nessun percorso va da j a i . Ogni percorso che non utilizza (i, j) mantiene la sua lunghezza e quello più lungo ha lunghezza T .
 - Un nuovo percorso è un percorso da START a i , l’arco (i, j) di lunghezza d_i e un percorso da j a FINISH. I due pezzi non utilizzano (i, j) , altrimenti il percorso visiterebbe i o j due volte.
 - I pezzi più lunghi hanno lunghezze ES_i e $T - LS_j$ (passaggio avanti e indietro della vecchia rete), quindi il nuovo percorso più lungo ha lunghezza $ES_i + d_i + T - LS_j = T + EF_i - LS_j$.
 - La durata minima del progetto è la lunghezza massima di un percorso dall’INIZIO alla FINE: $T' = \max\{T, T + EF_i - LS_j\}$.
- I tempi del progetto sono:

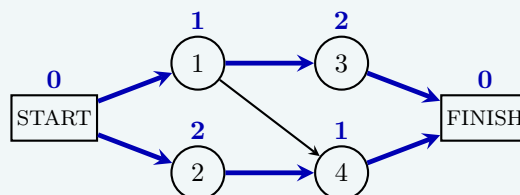
j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critico
1	9	0	9	0	9	0	0	sì
2	7	9	16	10	17	1	0	
3	5	9	14	9	14	0	0	sì
4	6	16	22	17	23	1	0	
5	9	14	23	14	23	0	0	sì
6	4	22	26	28	32	6	6	
7	9	23	32	23	32	0	0	sì

con $T = 32$.

- «5 prima di 6»: $EF_5 = 23 \leq 28 = LS_6$, quindi $T' = T = 32$: l’attività 6 potrebbe dover iniziare più tardi di $ES_6 = 22$, ma entro il suo tempo libero.
- «2 prima di 3»: $EF_2 = 16 > 9 = LS_3$, quindi $T' = 32 + 16 - 9 = 39$.

L’esecuzione del metodo del percorso critico sulle due nuove reti fornisce gli stessi valori.

- Partecipa alle attività 1, 2, 3, 4 con durate $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1$, dove 1 precede 3 e 4 e 2 precede 4:



Il passaggio in avanti fornisce $ES = (0, 0, 0, 1, 2, 3)$ per i nodi $0, 1, \dots, 5$ e $T = 3$. I due percorsi critici $START, 1, 3, FINISH$ e $START, 2, 4, FINISH$ (blu) contengono tutte le attività, quindi ogni attività è critica. Il percorso $START, 1, 4, FINISH$ utilizza solo attività critiche, ma la sua lunghezza è $1 + 1 = 2 < 3$: il suo arco $(1, 4)$ non è stretto, $EF_1 = 1 < 2 = ES_4$.

Aggiungendo la precedenza « i prima di j » ritarda il progetto di $\max\{0, EF_i - LS_j\}$; un percorso di attività critiche è critico solo se i suoi archi sono stretti.