



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione su reti

Esercizi 4 — Il simplesso su reti

Esercizi svolti sui capitoli del volume 4, il simplesso su reti: ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti

Anno accademico 2026–2027

Indice

8	Il semplice su reti	2
---	---------------------	---



Il simplesso su reti

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e i risultati del capitolo «La rete simplex», per un rete connessa $G = (N, A)$ con saldi b_i , $\sum_{i \in N} b_i = 0$, limiti inferiori zero, capacità u_{ij} e costi c_{ij} ; gli archi sono in ordine lessicografico e la radice di ogni albero è l'ultimo nodo n .

- (N1) **Soluzione albero.** $x_{ij} = 0$ su L , $x_{ij} = u_{ij}$ su U ; con i saldi residui $\hat{b}_i = b_i - \sum_{(i,j) \in U} u_{ij} + \sum_{(j,i) \in U} u_{ji}$, prendere l'anta $\ell \neq n$ con l'indice più piccolo, con arco albero a e vicino j : $x_a = \hat{b}_\ell$ se $a = (\ell, j)$, $x_a = -\hat{b}_\ell$ se $a = (j, \ell)$, quindi $\hat{b}_j := \hat{b}_j + \hat{b}_\ell$; elimina ℓ e ripeti.
- (N2) **Potenziiali.** $\pi_n = 0$ e $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0$ sugli archi dell'albero: $\pi_j = \pi_i - c_{ij}$ oppure $\pi_i = \pi_j + c_{ij}$. Il costo ridotto di un arco non basico è il costo del suo ciclo fondamentale, percorso nella sua direzione.
- (N3) **Ottimalità.** $\bar{c}_{ij} \geq 0$ su L e $\bar{c}_{ij} \leq 0$ su U : la soluzione ad albero è ottimale e l'ottimo unico se le disuguaglianze sono strette.
- (N4) **Pivot.** Arco di ingresso: tra gli archi di L con $\bar{c}_{ij} < 0$ e di U con $\bar{c}_{ij} > 0$, il più grande $|\bar{c}_{ij}|$ (il primo in ordine lessicografico se più di uno). Il ciclo C avviene come arco di entrata se è in L , contro se è in U ; capacità residua $u_{ij} - x_{ij}$ su arco avanti, x_{ij} su arco indietro; θ è il minimo. L'apice è il primo nodo condiviso dai percorsi ad albero degli estremi dell'arco entrante alla radice; l'arco in uscita è l'ultimo arco di blocco dall'apice lungo C e va a U se in avanti, a L se all'indietro. Il costo diminuisce di $\theta|\bar{c}_{kl}|$; i potenziali del sottoalbero S tagliato dall'arco uscente cambiare con $-\bar{c}_{kl}$ se $l \in S$, con $+\bar{c}_{kl}$ se $k \in S$.
- (N5) **Forte fattibilità.** Ogni arco di albero con $x_{ij} = 0$ punta verso la radice e ogni arco di albero con $x_{ij} = u_{ij}$ punta lontano dalla radice.
- (N6) **Fase 0.** Nodo artificiale $r = n + 1$, arco (i, r) se $b_i \geq 0$ e (r, i) se $b_i < 0$, capacità $+\infty$, costo 1 (costo 0 su A), root r . G è fattibile se e solo se $z_0 = 0$; quindi il simplesso della rete prosegue con i costi c_{ij} (0 sugli archi artificiali), e possono entrare solo gli archi con $\bar{c}_{ij}^0 = 0$.

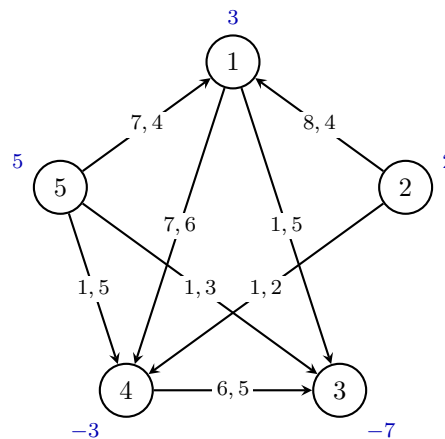
Esercizio 8.1 — Basi e soluzioni per alberi

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 3), (5, 1), (5, 3), (5, 4)\},$$

i saldi $b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = -7, b_4 = -3, b_5 = 5$, i limiti inferiori dello zero e i costi e le capacità della tabella; nella figura ogni arco porta c_{ij}, u_{ij} e ogni nodo il suo equilibrio.

arco	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 4)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 3)	(5, 4)
c_{ij}	1	7	8	1	6	7	1	1
u_{ij}	5	6	4	2	5	4	3	5



Consideriamo l'albero di copertura $T = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (5, 4)\}$, gli insiemi $U = \{(4, 3), (5, 1)\}$ e $L = \{(2, 1), (5, 3)\}$ e l'insieme degli archi $F = \{(1, 4), (2, 1), (2, 4), (5, 3)\}$.

Domande

1. Dimostrare che F non è una base: trovare un ciclo di F e una combinazione lineare delle sue colonne di B pari a zero. Perché T è una base?
2. Calcolare i saldi residui e la soluzione dell'albero di (T, L, U) dalle foglie, come in (N1).
3. La struttura ad albero è fattibile? È degenerato? Calcolarne il costo.
4. La struttura ad albero è fortemente ammissibile, con radice 5?

Soluzione

Usiamo le regole (N1)–(N6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Gli archi di F contengono il ciclo 1, 4, 2, 1, che utilizza (1, 4) avanti, (2, 4) indietro, (2, 1) avanti. Con +1 per gli archi avanti e -1 per quelli indietro,

$$B_{(1,4)} - B_{(2,4)} + B_{(2,1)} = \mathbf{0},$$

quindi le colonne di F sono linearmente dipendenti, in B e nella matrice senza la riga del nodo 5: F non è una base. Il set T ha archi 4 e collega tutti i nodi, quindi è uno albero ricoprente e gli albero ricoprente sono le basi.

2. I saldi residui spostano i flussi di U sul lato destro:

$$\hat{b} = (7, 2, -2, -8, 1).$$

Le foglie vengono elaborate nell'ordine 2, 3, 1, 4:

foglia ℓ e arco dell'albero e flusso e saldo residuo del vicino				
2	(2, 4)	$x_{24} = \hat{b}_2 = 2$	$\hat{b}_4 = -8 + 2 = -6$	
3	(1, 3)	$x_{13} = -\hat{b}_3 = 2$	$\hat{b}_1 = 7 - 2 = 5$	
1	(1, 4)	$x_{14} = \hat{b}_1 = 5$	$\hat{b}_4 = -6 + 5 = -1$	
4	(5, 4)	$x_{54} = -\hat{b}_4 = 1$	$\hat{b}_5 = 1 - 1 = 0$	

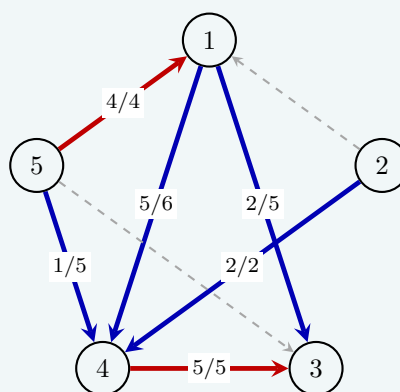
Con $x_{ij} = 0$ su L e $x_{ij} = u_{ij}$ su U , la soluzione ad albero è

arco	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 4)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 3)	(5, 4)
x_{ij}	2	5	0	2	5	4	0	1
u_{ij}	5	6	4	2	5	4	3	5

3. Ogni arco di albero ha $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$, quindi la struttura ad albero è fattibile. L'arco dell'albero (2, 4) ha $x_{24} = 2$, al limite: la struttura dell'albero è degenerare. Il suo costo è

$$1 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 98.$$

4. No. L'arco dell'albero (2, 4) è al massimo delle sue capacità e punta verso la radice: sul percorso dell'albero da 2 alla radice non può più essere inviato alcun flusso. Per (N5) la struttura ad albero non è fortemente ammissibile.



F contiene un ciclo e non è una base; (T, L, U) è fattibile e degenerato, con costo 98 e non è fortemente fattibile a causa dell'arco (2, 4).

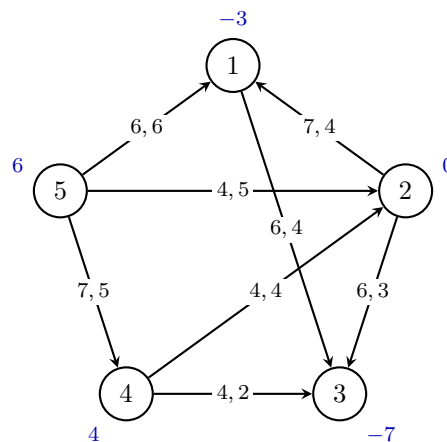
Esercizio 8.2 — Potenziali e certificato di ottimalità

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\},$$

i saldi $b_1 = -3$, $b_2 = 0$, $b_3 = -7$, $b_4 = 4$, $b_5 = 6$, i limiti inferiori dello zero e i costi e le capacità della tabella; nella figura ogni arco porta c_{ij} , u_{ij} e ogni nodo il suo equilibrio.

arco	(1, 3)	(2, 1)	(2, 3)	(4, 2)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 4)
c_{ij}	6	7	6	4	4	6	4	7
u_{ij}	4	4	3	4	2	6	5	5



Consideriamo la struttura ad albero con $T = \{(1, 3), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$, $U = \{(2, 3), (4, 3)\}$ e $L = \{(2, 1), (5, 4)\}$, la cui soluzione ad albero è

arco	(1, 3)	(2, 1)	(2, 3)	(4, 2)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 4)
x_{ij}	2	0	3	2	2	5	1	0

Domande

1. Calcola i potenziali di T con radice 5 ($\pi_5 = 0$), come in (N2).
2. Calcolare i costi ridotti degli archi non basici. La soluzione dell'albero è ottimale? È l'ottimo unico?
3. Scrivete il ciclo fondamentale di $(4, 3)$, percorso nella sua direzione, e verificate che il suo costo sia uguale a $\bar{c}_{43}$.
4. Fornire una soluzione ottimale (π, α) del modello duale di [Capitolo 4 «Modelli di flusso di rete»](#), con $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$, e verificare che il valore duale sia uguale al costo del flusso.

Soluzione

Usiamo le regole (N1)–(N6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

- Scendendo lungo l'albero dalla radice 5:

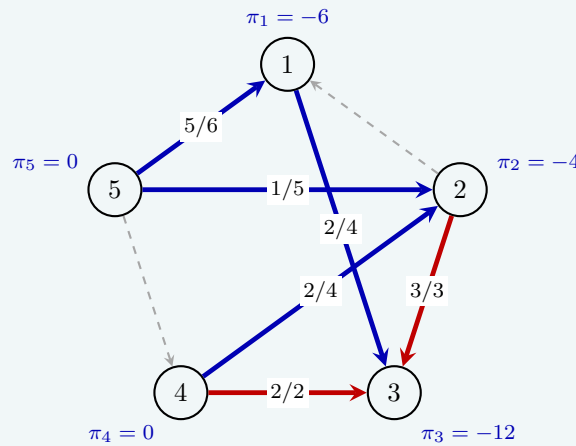
$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_5 - c_{51} = -6, & \pi_2 &= \pi_5 - c_{52} = -4, & \pi_3 &= \pi_1 - c_{13} = -12 \\ \pi_4 &= \pi_2 + c_{42} = 0.\end{aligned}$$

Quindi $\pi = (-6, -4, -12, 0, 0)$.

- I costi ridotti $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ sono

arco	(1, 3)	(2, 1)	(2, 3)	(4, 2)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 4)
stato	T	L	U	T	U	T	T	L
x_{ij}	2	0	3	2	2	5	1	0
$\bar{c}_{ij}$	0	5	-2	0	-8	0	0	7

Gli archi di L hanno $\bar{c}_{21} = 5, \bar{c}_{54} = 7$, tutti positivi, e gli archi di U hanno $\bar{c}_{23} = -2, \bar{c}_{43} = -8$, tutti negativi. Per (N3) la soluzione dell'albero è ottima, con costo 80, ed è l'unico ottimo perché le disuguaglianze sono strette (Gurobi conferma il valore).



- Il ciclo è 4, 3, 1, 5, 2, 4: (4, 3) avanti, (1, 3) indietro, (5, 1) indietro, (5, 2) avanti, (4, 2) indietro. Il suo costo è

$$c_{43} - c_{13} - c_{51} + c_{52} - c_{42} = 4 - 6 - 6 + 4 - 4 = -8 = \bar{c}_{43}.$$

- Con $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$ valgono i vincoli duali $\pi_i - \pi_j - \alpha_{ij} \leq c_{ij}$, e $\alpha_{ij} > 0$ solo sugli archi di U : $\alpha_{23} = 2, \alpha_{43} = 8$. Il valore duale è

$$\sum_{i \in N} b_i \pi_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \alpha_{ij} = 102 - 22 = 80,$$

pari al costo: entrambe le soluzioni sono ottimali.

I potenziali $\pi = (-6, -4, -12, 0, 0)$ danno $\bar{c} > 0$ su L e $\bar{c} < 0$ su U : la soluzione ad albero è l'unico ottimo, con costo 80 pari al valore duale.

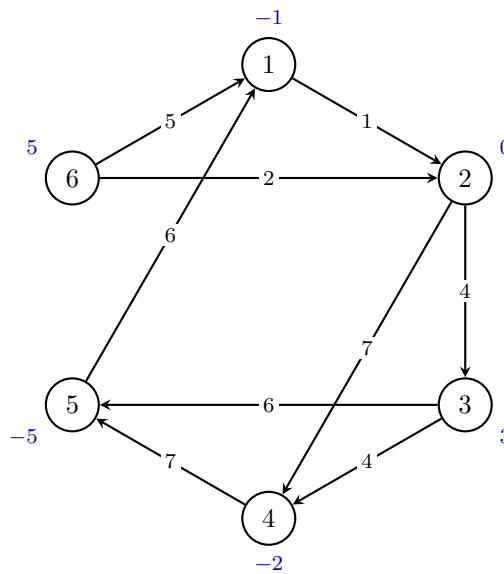
Esercizio 8.3 — La rete simplex senza capacità

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 6\}$, gli archi 9

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (6, 1), (6, 2)\},$$

i saldi $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 3$, $b_4 = -2$, $b_5 = -5$, $b_6 = 5$, limiti inferiori zero e i costi della tabella (nessuna capacità: $u_{ij} = +\infty$); nella figura ogni arco porta c_{ij} e ogni nodo il suo equilibrio.

arco	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)
c_{ij}	1	4	7	4	6	7	6	5	2



La struttura ad albero iniziale ha $T = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (6, 1)\}$, $L = \{(2, 4), (4, 5), (5, 1), (6, 2)\}$ e $U = \emptyset$.

Domande

1. Calcola la soluzione ad albero della struttura ad albero iniziale, il suo costo e le sue potenziali. Non è degenerato?
2. Risolvere il problema con l'algoritmo del semplice di rete, con le regole (N1)–(N4): per ogni iterazione fornire i flussi, i potenziali, i costi ridotti, l'arco entrante, il ciclo con il suo apice, il passo e l'arco uscente.
3. Fornisci il flusso ottimale e il relativo costo e spiega perché è l'unico ottimale.

Soluzione

Usiamo le regole (N1)–(N6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Dalle foglie, come in (N1):

arco	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)
x_{ij}	4	4	0	2	5	0	0	5	0

Ogni arco dell'albero ha un flusso positivo, quindi la soluzione dell'albero non è degenera; il suo costo è 83. Dalla radice 6, $\pi = (-5, -6, -10, -14, -16, 0)$.

2. Iterazione 1

I potenziali sono $\pi = (-5, -6, -10, -14, -16, 0)$ e il costo è 83.

arco	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)
stato	T	T	L	T	T	L	L	T	L
x_{ij}	4	4	0	2	5	0	0	5	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	-1	0	0	5	17	0	-4

- Gli archi idonei sono (2, 4) e (6, 2); l'arco entrante è $e = (6, 2)$, con $\bar{c}_{62} = -4$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 6 e 2, 1, 6: l'apice è $w = 6$ e C è 6, 2, 1, 6.

arco di C	(6, 2)	(1, 2)	(6, 1)
direzione	+	-	-
residuo	$+\infty$	4	5

- $\theta = 4$: l'unico arco bloccante è (1, 2); lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $83 - 4 \cdot 4 = 67$.
- La rimozione di (1, 2) elimina $S = \{2, 3, 4, 5\}$, che contiene $l = 2$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{62} = 4$.

Iterazione 2

I potenziali sono $\pi = (-5, -2, -6, -10, -12, 0)$ e il costo è 67.

arco	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)
stato	L	T	L	T	T	L	L	T	T
x_{ij}	0	4	0	2	5	0	0	1	4
$\bar{c}_{ij}$	4	0	-1	0	0	5	13	0	0

- L'unico arco idoneo è $e = (2, 4)$, con $\bar{c}_{24} = -1$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 2, 6 e 4, 3, 2, 6: l'apice è $w = 2$ e C è 2, 4, 3, 2.

arco di C	(2, 4)	(3, 4)	(2, 3)
direzione	+	-	-
residuo	$+\infty$	2	4

- $\theta = 2$: l'unico arco bloccante è $(3, 4)$; lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $67 - 2 \cdot 1 = 65$.
- La rimozione di $(3, 4)$ elimina $S = \{4\}$, che contiene $l = 4$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{24} = 1$.

Iterazione 3

I potenziali sono $\pi = (-5, -2, -6, -9, -12, 0)$ e il costo è 65.

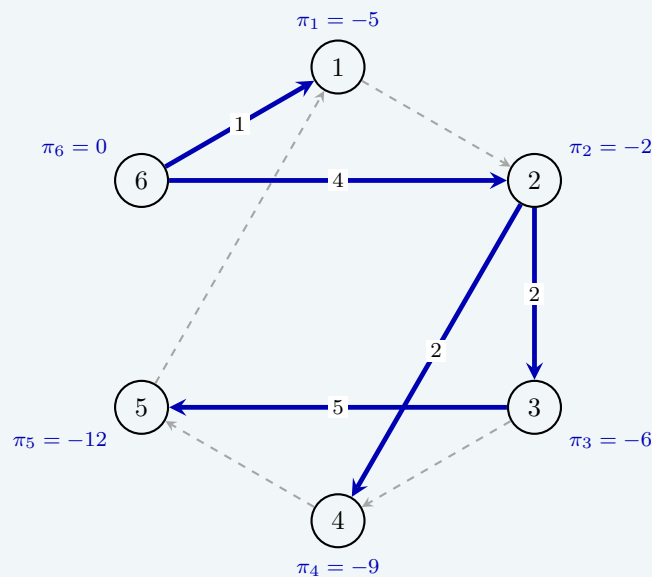
arco	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)
stato	L	T	T	L	T	L	L	T	T
x_{ij}	0	2	2	0	5	0	0	1	4
$\bar{c}_{ij}$	4	0	0	1	0	4	13	0	0

Tutti gli archi di L hanno $\bar{c}_{ij} \geq 0$: **STOP**.

3. Il flusso ottimale è

arco	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)
$\tilde{x}_{ij}$	0	2	2	0	5	0	0	1	4

con costo 65. Tutti gli archi non di base sono in L con $\bar{c}_{ij} > 0$, quindi per (N3) è l'unico ottimo; Gurobi dà lo stesso valore.



Il semplice della rete realizza pivot non degeneri 2, con costi 83, 67, 65; l'ultimo albero certifica l'unico ottimale, di costo 65.

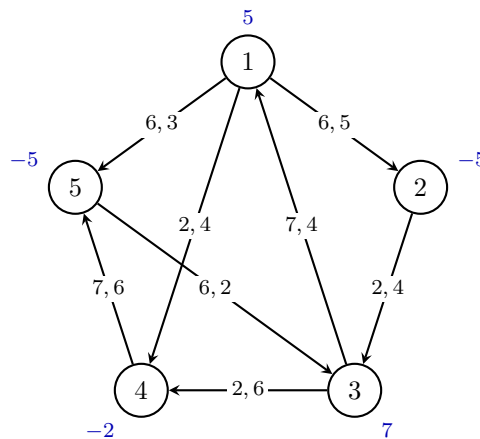
Esercizio 8.4 — La rete simplex con capacità

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\},$$

i saldi $b_1 = 5$, $b_2 = -5$, $b_3 = 7$, $b_4 = -2$, $b_5 = -5$, i limiti inferiori dello zero e i costi e le capacità della tabella; nella figura ogni arco porta c_{ij} , u_{ij} e ogni nodo il suo equilibrio.

arco	(1, 2)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 3)
c_{ij}	6	2	6	2	7	2	7	6
u_{ij}	5	4	3	4	4	6	6	2



La struttura ad albero iniziale ha $T = \{(1, 2), (1, 4), (3, 1), (4, 5)\}$, $U = \{(1, 5), (3, 4), (5, 3)\}$ e $L = \{(2, 3)\}$.

Domande

1. Calcola la soluzione ad albero della struttura ad albero iniziale e il suo costo. Verifica che sia fortemente fattibile, con root 5.
2. Risolvi il problema con l'algoritmo del simplesso di rete, con le regole (N1)–(N4), fornendo tutti i dettagli di ogni iterazione.
3. Quale pivot è degenerato? Cosa cambia in quel perno e cosa no?
4. Fornisci il flusso ottimale, il suo costo e gli archi alla loro capacità.

Soluzione

Usiamo le regole (N1)–(N6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Dalle foglie, come in (N1):

arco	(1, 2)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 3)
x_{ij}	5	0	3	0	3	6	4	2
u_{ij}	5	4	3	4	4	6	6	2

Il suo costo è 121. Gli archi dell'albero a limite sono: (1, 4), con $x_{14} = 0$, punta verso la radice; (1, 2), con $x_{12} = 5 = u_{12}$, punta lontano dalla radice. Per (N5) la struttura ad albero è fortemente ammissibile.

2. Iterazione 1

I potenziali sono $\pi = (9, 3, 16, 7, 0)$ e il costo è 121.

arco	(1, 2)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 3)
stato	T	T	U	L	T	U	T	U
x_{ij}	5	0	3	0	3	6	4	2
$\bar{c}_{ij}$	0	0	-3	15	0	-7	0	22

- L'unico arco idoneo è $e = (5, 3)$, con $\bar{c}_{53} = 22$, in U : C viene attraversato rispetto ad esso.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 5 e 3, 1, 4, 5: l'apice è $w = 5$ e C è 5, 4, 1, 3, 5.

arco di C	(4, 5)	(1, 4)	(3, 1)	(5, 3)
direzione	—	—	—	—
residuo	4	0	3	2

- $\theta = 0$: l'unico arco bloccante è (1, 4); lascia l'albero, verso L . Il pivot è degenerato e il costo rimane 121.
- La rimozione di (1, 4) elimina $S = \{1, 2, 3\}$, che contiene $l = 3$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{53} = -22$.

Iterazione 2

I potenziali sono $\pi = (-13, -19, -6, 7, 0)$ e il costo è 121.

arco	(1, 2)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 3)
stato	T	L	U	L	T	U	T	T
x_{ij}	5	0	3	0	3	6	4	2
$\bar{c}_{ij}$	0	22	19	15	0	15	0	0

- Gli archi idonei sono (1, 5) e (3, 4); l'arco entrante è $e = (1, 5)$, con $\bar{c}_{15} = 19$, in U : C viene attraversato contro di esso.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 1, 3, 5 e 5: l'apice è $w = 5$ e C è 5, 1, 3, 5.

arco di C	(1, 5)	(3, 1)	(5, 3)
direzione	—	—	—
residuo	3	3	2

- $\theta = 2$: l'unico arco bloccante è (5, 3); lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $121 - 2 \cdot 19 = 83$.
- La rimozione di (5, 3) elimina $S = \{1, 2, 3\}$, che contiene $k = 1$: questi potenziali cambiano con $\bar{c}_{15} = 19$.

Iterazione 3

I potenziali sono $\pi = (6, 0, 13, 7, 0)$ e il costo è 83.

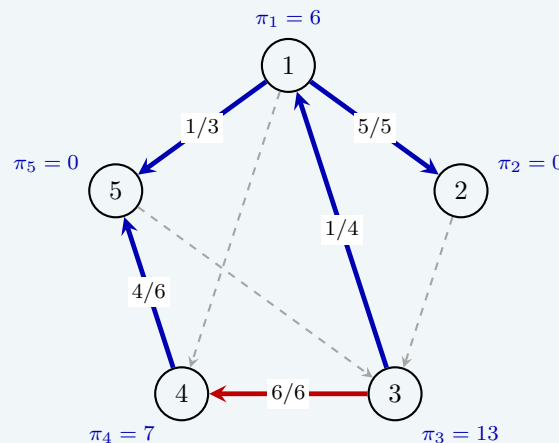
arco	(1, 2)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 3)
stato	T	L	T	L	T	U	T	L
x_{ij}	5	0	1	0	1	6	4	0
$\bar{c}_{ij}$	0	3	0	15	0	-4	0	19

Tutti gli archi di L hanno $\bar{c}_{ij} \geq 0$ e tutti gli archi di U hanno $\bar{c}_{ij} \leq 0$: STOP.

3. L'iterazione 1 è degenera: $\theta = 0$ perché l'arco (1, 4) ha capacità residua 0 lungo C . Il flusso e il costo (121) non cambiano, ma l'albero sì: (5, 3) entra, (1, 4) esce e i potenziali di $S = \{1, 2, 3\}$ cambiano di -22.
4. Il flusso ottimale è

arco	(1, 2)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 3)
$\tilde{x}_{ij}$	5	0	1	0	1	6	4	0
u_{ij}	5	4	3	4	4	6	6	2

con costo 83; gli archi di U alla loro capacità sono (3, 4). I costi ridotti sono strettamente positivi su L e strettamente negativi su U , quindi l'ottimo è unico (Gurobi dà lo stesso valore).



Dal costo 121 l'algoritmo raggiunge l'unico ottimo, di costo 83, in pivot 2, uno dei quali degenerare.

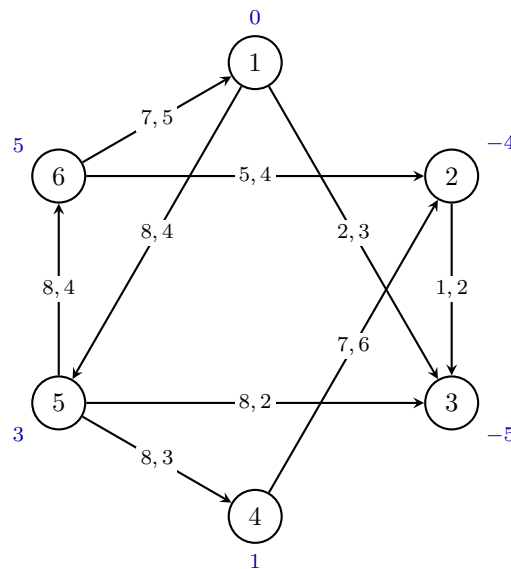
Esercizio 8.5 — Alberi fortemente ammissibili e regola dell'arco uscente

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 6\}$, gli archi 9

$$A = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (4, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2)\},$$

i saldi $b_1 = 0, b_2 = -4, b_3 = -5, b_4 = 1, b_5 = 3, b_6 = 5$, limiti inferiori dello zero e i costi e le capacità della tabella; nella figura ogni arco porta c_{ij}, u_{ij} e ogni nodo il suo equilibrio.

arco	(1, 3)	(1, 5)	(2, 3)	(4, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 6)	(6, 1)	(6, 2)
c_{ij}	2	8	1	7	8	8	8	7	5
u_{ij}	3	4	2	6	2	3	4	5	4



Consideriamo la struttura ad albero con $T = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$, $U = \{(5, 3), (5, 4)\}$ e $L = \{(5, 6), (6, 2)\}$.

Domande

1. Calcolare la soluzione ad albero e verificare che la struttura ad albero sia fortemente ammissibile, con root 6.
2. Calcolare i potenziali ed i costi ridotti, e scegliere l'arco entrante con (N4).
3. Trova l'apice, il ciclo, il gradino e gli archi di blocco. Quale arco esce dall'albero con la regola di (N4)? Verificare che la nuova struttura ad albero sia fortemente ammissibile.
4. Mostrare che scegliendo l'altro arco di blocco, (1, 3), si ottiene una struttura ad albero che non è fortemente ammissibile.

5. Dimostrare che in un pivot degenerare da un albero fortemente ammissibile, eseguito con la regola di (N4), la somma dei potenziali diminuisce rigorosamente, e verificarlo su questo pivot.

Soluzione

Usiamo le regole (N1)–(N6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Dalle foglie, come in (N1):

arco	(1, 3)	(1, 5)	(2, 3)	(4, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 6)	(6, 1)	(6, 2)
x_{ij}	3	2	0	4	2	3	0	5	0
u_{ij}	3	4	2	6	2	3	4	5	4

Gli archi dell'albero in corrispondenza di un limite sono: (6, 1), con $x_{61} = 5 = u_{61}$, punta lontano dalla radice; (2, 3), con $x_{23} = 0$, punta verso la radice; (1, 3), con $x_{13} = 3 = u_{13}$, punta lontano dalla radice. Per (N5) la struttura ad albero è fortemente ammissibile.

2. I potenziali sono $\pi = (-7, -8, -9, -1, -15, 0)$ e il costo è 125.

arco	(1, 3)	(1, 5)	(2, 3)	(4, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 6)	(6, 1)	(6, 2)
stato	T	T	T	T	U	U	L	T	L
x_{ij}	3	2	0	4	2	3	0	5	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	0	14	22	23	0	-3

Gli archi idonei sono (5, 3), (5, 4) e (6, 2); l'arco entrante è $e = (5, 4)$, con $\bar{c}_{54} = 22$.

3. I percorsi dell'albero fino alla radice sono 5, 1, 6 e 4, 2, 3, 1, 6: l'apice è $w = 1$ e C è 1, 3, 2, 4, 5, 1.

arco di C	(1, 3)	(2, 3)	(4, 2)	(5, 4)	(1, 5)
direzione	+	-	-	-	-
residuo	0	0	4	3	2

Quindi $\theta = 0$ e gli archi di blocco sono (1, 3) e (2, 3), in questo ordine dall'apice: l'arco in uscita è (2, 3) e va a L . Il flusso non cambia e il nuovo albero è $T' = \{(1, 3), (1, 5), (4, 2), (5, 4), (6, 1)\}$. Gli archi dell'albero in corrispondenza di un limite sono: (6, 1), con $x_{61} = 5 = u_{61}$, punta lontano dalla radice; (1, 3), con $x_{13} = 3 = u_{13}$, punta lontano dalla radice; (5, 4), con $x_{54} = 3 = u_{54}$, punta lontano dalla radice. Per (N5) la struttura ad albero è fortemente ammissibile.

4. Con (1, 3) in uscita, l'albero sarebbe $\{(1, 5), (2, 3), (4, 2), (5, 4), (6, 1)\}$ e l'arco (2, 3) ha flusso zero e punta lontano dalla radice: per (N5) questa struttura ad albero non è fortemente ammissibile.

5. In un pivot degenerare tutti gli archi bloccanti giacciono sul percorso dell'albero P dall'apice a p , il punto finale dove C entra in e : gli archi del percorso da q all'apice e e stesso hanno capacità residua positiva, per forte fattibilità. Quindi l'arco uscente separa p dalla radice, $p \in S$, e da (N4) i potenziali di S cambiano da $\bar{c}_{kl} < 0$ se $p = k$ (arco di L) o da $-\bar{c}_{kl} < 0$ se $p = l$ (arco di U). Qui $p = 4$, $S = \{2, 4\}$ e i potenziali di S cambiano di -22 : la somma dei potenziali passa da -40 a -84 .

Il perno di $(5, 4)$ è degenerare con due archi di bloccaggio; la regola sceglie $(2, 3)$ e mantiene l'albero fortemente ammissibile, mentre $(1, 3)$ no; la somma dei potenziali scende da -40 a -84 .

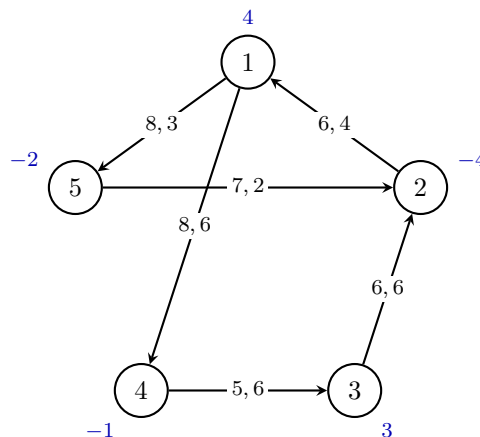
Esercizio 8.6 — Phase 0

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 6

$$A = \{(1, 4), (1, 5), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)\},$$

i saldi $b_1 = 4$, $b_2 = -4$, $b_3 = 3$, $b_4 = -1$, $b_5 = -2$, i limiti inferiori dello zero e i costi e le capacità della tabella; nella figura ogni arco porta c_{ij}, u_{ij} e ogni nodo il suo equilibrio.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 2)
c_{ij}	8	8	6	6	5	7
u_{ij}	6	3	4	6	6	2



Nessun flusso fattibile è noto in anticipo.

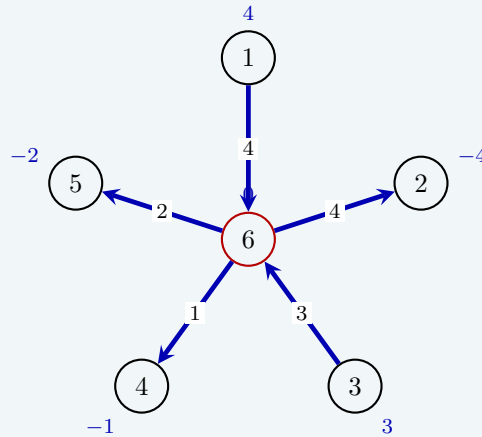
Domande

1. Costruire la rete ausiliaria della Fase 0 come in (N6): nodo artificiale, archi artificiali, costi, albero iniziale, i suoi flussi, il suo costo z_0 e le sue potenziali.
2. Esegui la Fase 0 con le regole (N1)–(N4). La rete è fattibile?
3. Quali archi vengono congelati alla fine della Fase 0? Continuare con l'algoritmo del simplesso di rete e trovare un flusso ottimale di G .

Soluzione

Usiamo le regole (N1)–(N6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Il nodo artificiale è 6, con $b_6 = 0$, e gli archi artificiali sono $(1, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 4)$ e $(6, 5)$, con capacità $+\infty$ e costo 1 (gli archi di A costano 0). L'albero iniziale è formato dagli archi artificiali, con flussi $x_{16} = 4$, $x_{62} = 4$, $x_{36} = 3$, $x_{64} = 1$, $x_{65} = 2$ e $z_0 = 14$. La radice è 6 e i potenziali sono $\pi = (1, -1, 1, -1, -1, 0)$: 1 per gli archi $(i, 6)$, -1 per gli archi $(6, i)$.



Gli archi di A , tutti vuoti, non vengono disegnati.

2. Iterazione 1

I potenziali sono $\pi = (1, -1, 1, -1, -1, 0)$ e il costo z_0 è 14.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 6)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 5)
stato	L	L	T	L	L	T	L	L	T	T	T
x_{ij}	0	0	4	0	0	3	0	0	4	1	2
$\bar{c}_{ij}$	-2	-2	0	2	-2	0	2	0	0	0	0

- Gli archi idonei sono $(1, 4)$, $(1, 5)$ e $(3, 2)$; l'arco entrante è $e = (1, 4)$, con $\bar{c}_{14} = -2$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono $1, 6$ e $4, 6$: l'apice è $w = 6$ e C è $6, 1, 4, 6$.

arco di C	(1, 6)	(1, 4)	(6, 4)
direzione	–	+	–
residuo	4	6	1

- $\theta = 1$: l'unico arco bloccante è $(6, 4)$; lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $14 - 1 \cdot 2 = 12$.
- La rimozione di $(6, 4)$ esclude $S = \{4\}$, che contiene $l = 4$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{14} = 2$.

Iterazione 2

I potenziali sono $\pi = (1, -1, 1, 1, -1, 0)$ e il costo z_0 è 12.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 6)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 5)
stato	T	L	T	L	L	T	L	L	T	L	T
x_{ij}	1	0	3	0	0	3	0	0	4	0	2
$\bar{c}_{ij}$	0	-2	0	2	-2	0	0	0	0	2	0

- Gli archi idonei sono (1, 5) e (3, 2); l'arco entrante è $e = (1, 5)$, con $\bar{c}_{15} = -2$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 1, 6 e 5, 6: l'apice è $w = 6$ e C è 6, 1, 5, 6.

arco di C	(1, 6)	(1, 5)	(6, 5)
direzione	—	+	—
residuo	3	3	2

- $\theta = 2$: l'unico arco bloccante è (6, 5); lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $12 - 2 \cdot 2 = 8$.
- La rimozione di (6, 5) esclude $S = \{5\}$, che contiene $l = 5$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{15} = 2$.

Iterazione 3

I potenziali sono $\pi = (1, -1, 1, 1, 1, 0)$ e il costo z_0 è 8.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 6)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 5)
stato	T	T	T	L	L	T	L	L	T	L	L
x_{ij}	1	2	1	0	0	3	0	0	4	0	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	2	-2	0	0	-2	0	2	2

- Gli archi idonei sono (3, 2) e (5, 2); l'arco entrante è $e = (3, 2)$, con $\bar{c}_{32} = -2$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 3, 6 e 2, 6: l'apice è $w = 6$ e C è 6, 3, 2, 6.

arco di C	(3, 6)	(3, 2)	(6, 2)
direzione	—	+	—
residuo	3	6	4

- $\theta = 3$: l'unico arco bloccante è (3, 6); lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $8 - 3 \cdot 2 = 2$.
- La rimozione di (3, 6) esclude $S = \{3\}$, che contiene $k = 3$: questi potenziali cambiano con $\bar{c}_{32} = -2$.

Iterazione 4

I potenziali sono $\pi = (1, -1, -1, 1, 1, 0)$ e il costo z_0 è 2.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 6)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 5)
stato	T	T	T	L	T	L	L	L	T	L	L
x_{ij}	1	2	1	0	3	0	0	0	1	0	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	2	0	2	-2	-2	0	2	2

- Gli archi idonei sono (4, 3) e (5, 2); l'arco entrante è $e = (4, 3)$, con $\bar{c}_{43} = -2$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 4, 1, 6 e 3, 2, 6: l'apice è $w = 6$ e C è 6, 1, 4, 3, 2, 6.

arco di C	(1, 6)	(1, 4)	(4, 3)	(3, 2)	(6, 2)
direzione	-	+	+	+	-
residuo	1	5	6	3	1

- $\theta = 1$: gli archi di bloccaggio sono (1, 6) e (6, 2), e l'ultimo dall'apice è (6, 2); lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $2 - 1 \cdot 2 = 0$.
- La rimozione di (6, 2) elimina $S = \{2, 3\}$, che contiene $l = 3$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{43} = 2$.

Iterazione 5

I potenziali sono $\pi = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$ e il costo z_0 è 0.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 6)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 5)
stato	T	T	T	L	T	L	T	L	L	L	L
x_{ij}	2	2	0	0	4	0	1	0	0	0	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2

Tutti gli archi di L hanno $\bar{c}_{ij} \geq 0$: **STOP**.

La fase 0 termina con $z_0 = 0$: per (N6) la rete è percorribile.

3. Gli archi congelati, con $\bar{c}_{ij}^0 \neq 0$, sono (6, 2) ($\bar{c}^0 = 2$), (6, 4) ($\bar{c}^0 = 2$), (6, 5) ($\bar{c}^0 = 2$). Con i costi c_{ij} su A e 0 sugli archi artificiali:

Iterazione 1

I potenziali sono $\pi = (0, -19, -13, -8, -8, 0)$ e il costo è 61.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 1)	(3, 2)	(3, 6)	(4, 3)	(5, 2)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 5)
stato	T	T	T	L	T	L	T	L	L	L	L
x_{ij}	2	2	0	0	4	0	1	0	0	0	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	25	0	13	0	-4	-19	-8	-8

Gli archi $(6, 2)$, $(6, 4)$ e $(6, 5)$ violano (N3) ma sono congelati e non possono entrare.

- L'unico arco idoneo è $e = (5, 2)$, con $\bar{c}_{52} = -4$, in L : C lo segue.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono $5, 1, 6$ e $2, 3, 4, 1, 6$: l'apice è $w = 1$ e C è $1, 5, 2, 3, 4, 1$.

arco di C	$(1, 5)$	$(5, 2)$	$(3, 2)$	$(4, 3)$	$(1, 4)$
direzione	+	+	−	−	−
residuo	1	2	4	1	2

- $\theta = 1$: gli archi di bloccaggio sono $(1, 5)$ e $(4, 3)$, e l'ultimo dall'apice è $(4, 3)$; lascia l'albero, verso L . Il costo diventa $61 - 1 \cdot 4 = 57$.
- La rimozione di $(4, 3)$ elimina $S = \{2, 3\}$, che contiene $l = 2$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{52} = 4$.

Iterazione 2

I potenziali sono $\pi = (0, -15, -9, -8, -8, 0)$ e il costo è 57.

arco	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(1, 6)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 6)$	$(4, 3)$	$(5, 2)$	$(6, 2)$	$(6, 4)$	$(6, 5)$
stato	T	T	T	L	T	L	L	T	L	L	L
x_{ij}	1	3	0	0	3	0	0	1	0	0	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	21	0	9	4	0	-15	-8	-8

Gli archi $(6, 2)$, $(6, 4)$ e $(6, 5)$ violano (N3) ma sono congelati e non possono entrare. Tutti gli altri archi di L hanno $\bar{c}_{ij} \geq 0$: **STOP**.

Limitato a A , il flusso ottimale è

arco	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 3)$	$(5, 2)$
$\tilde{x}_{ij}$	1	3	0	3	0	1

con costo 57 (Gurobi dà lo stesso valore).

La fase 0 porta z_0 da 14 a 0 nei perni 4; il simplesso della rete raggiunge quindi il flusso ottimo di G , di costo 57, nel pivot 1.