



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione su reti

Esercizi 3 — Flussi

Esercizi svolti sui capitoli del volume 3, flussi: ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti

Anno accademico 2026–2027

Indice

4	Modelli di flusso su reti	2
5	Flusso massimo	12
6	Flusso di costo minimo	25
7	Trasporto e assegnamento	40



Modelli di flusso su reti

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e i risultati del capitolo «[Modelli di flusso di rete](#)», per un rete $G = (N, A)$ con saldi b_i , limiti inferiori l_{ij} , capacità u_{ij} e costi c_{ij} .

- (F1) **Model.** Gli archi sono numerati $a_1, a_2, \dots, a_m$ in ordine lessicografico; B ha $+1$ dentro la coda e -1 nella testa di ogni arco e il modello MCF è

$$\min\{c'x : Bx = b, l \leq x \leq u\},$$

dove la riga i di Bx è il deflusso meno l'afflusso del nodo i .

- (F2) **Fattibilità.** Una rete con un flusso ammissibile ha $\sum_{i \in N} b_i = 0$ e, per ogni $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} b_i \leq u(\delta^+(S)) - l(\delta^-(S))$.

- (F3) **Limiti inferiori.** Con $x = l + x'$: $b' = b - Bl$, $u' = u - l$ e $c'x = c'x' + c'l$.

- (F4) **Nodo fittizio.** Se $e = \sum_{i \in N} b_i > 0$, un nodo fittizio d con $b_d = -e$ e archi (i, d) da i nodi di fornitura, con costo 0 e capacità $+\infty$; il flusso su (i, d) è la fornitura inutilizzata di i .

- (F5) **Unimodularità totale.** Ogni sottomatrice quadrata di B ha determinante 0 o ± 1 : uno zero la colonna restituisce 0, una colonna con una voce diversa da zero viene espansa, le colonne con $+1$ e -1 restituiscono 0. Con numero intero b, l, u ogni vertice di $\{Bx = b, l \leq x \leq u\}$ è intero.

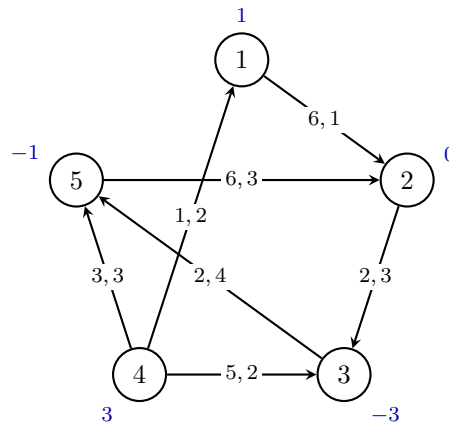
Esercizio 4.1 — Il modello del flusso di costo minimo

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 7

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -3, b_4 = 3, b_5 = -1$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij}, u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi.

arco	(1, 2)	(2, 3)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 2)
c_{ij}	6	2	2	1	5	3	6
u_{ij}	1	3	4	2	2	3	3



Si propongono due flussi:

arco	(1, 2)	(2, 3)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 2)
$\bar{x}_{ij}$	1	3	2	0	2	1	2
$\hat{x}_{ij}$	1	3	3	0	2	1	2

Domande

1. Classificare i nodi in nodi di offerta, domanda e traslato e verificare che la rete sia bilanciata.
2. Numerare gli archi come in (F1), scrivere esplicitamente la matrice di incidenza $\mathbf{B}$ e il modello MCF.
3. Decidere se $\bar{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ sono flussi fattibili e calcolare il costo di quello fattibile.

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. Per il segno dei saldi: i nodi 1, 4 sono nodi di fornitura; i nodi 3, 5 sono nodi di domanda; il nodo 2 è un nodo di traslato. L’offerta totale è 4, pari alla domanda totale, quindi $\sum_{i \in N} b_i = 0$.
2. Gli archi in ordine lessicografo sono $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$, $a_3 = (3, 5)$, $a_4 = (4, 1)$,

$a_5 = (4, 3)$, $a_6 = (4, 5)$, $a_7 = (5, 2)$. La matrice di incidenza è

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	0	0	-1	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	-1
3	0	-1	1	0	-1	0	0
4	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	-1	0	0	-1	1

e il modello MCF ha un'equazione per nodo (una riga di $\mathbf{B}$):

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & 6x_{12} & +2x_{23} & +2x_{35} & +x_{41} & +5x_{43} & +3x_{45} & +6x_{52} \\
 \text{subject to} & x_{12} & & & -x_{41} & & & = 1 \\
 & -x_{12} & +x_{23} & & & & & -x_{52} = 0 \\
 & & -x_{23} & +x_{35} & & -x_{43} & & = -3 \\
 & & & & x_{41} & +x_{43} & +x_{45} & = 3 \\
 & & & -x_{35} & & & -x_{45} & +x_{52} = -1
 \end{array}$$

together with $0 \leq x_{12} \leq 1$, $0 \leq x_{23} \leq 3$, $0 \leq x_{35} \leq 4$, $0 \leq x_{41} \leq 2$, $0 \leq x_{43} \leq 2$, $0 \leq x_{45} \leq 3$, $0 \leq x_{52} \leq 3$.

3. Calcoliamo il deflusso meno l'afflusso di ogni nodo e lo confrontiamo con $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}} = (1, 0, -3, 3, -1)', \quad \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, -2, 3, -2)', \quad \mathbf{b} = (1, 0, -3, 3, -1)'.$$

Entrambi i flussi rispettano i limiti. Il flusso $\bar{\mathbf{x}}$ è ammissibile; $\hat{\mathbf{x}}$ non lo è, perché invia un'unità in più su $(3, 5)$ e la conservazione fallisce sui nodi 3 e 5. Il costo di $\bar{\mathbf{x}}$ è

$$6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 41,$$

e gli archi $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$ sono al completo.

Il modello MCF ha variabili 7 ed equazioni 5 con matrice $\mathbf{B}$; $\bar{\mathbf{x}}$ è fattibile con il costo 41, mentre $\hat{\mathbf{x}}$ viola la conservazione nei nodi 3 e 5.

Esercizio 4.2 — Condizioni di fattibilità

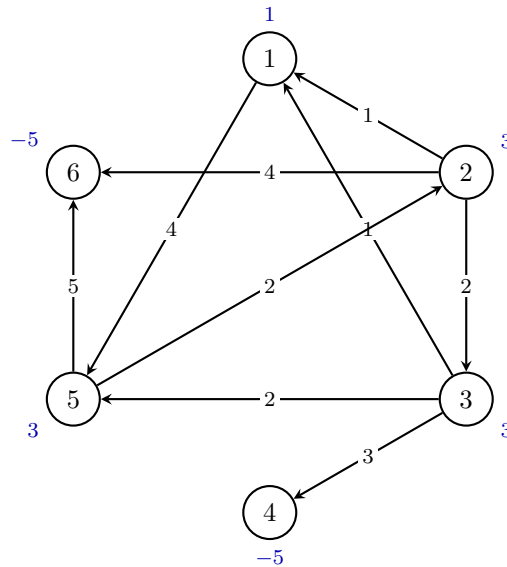
Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 6\}$, gli archi 9

$$A = \{(1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (5, 2), (5, 6)\},$$

limiti inferiori dello zero, le capacità u_{ij} della tabella (accanto agli archi in figura) e i saldi

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 3, \quad b_4 = -5, \quad b_5 = 3, \quad b_6 = -5.$$

arco	(1, 5)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 6)	(3, 1)	(3, 4)	(3, 5)	(5, 2)	(5, 6)
u_{ij}	4	1	2	4	1	3	2	2	5



Domande

1. La rete è bilanciata?
2. Per $S = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ calcolare $\delta^+(S)$, $\delta^-(S)$ e controllare la condizione di taglio di (F2). Cosa puoi concludere?
3. Di quanto deve essere aumentata la capacità dell'arco (3, 4) affinché la condizione di taglio sia mantenuta per S ? Controllare le condizioni di S con la nuova capacità.

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. La somma dei saldi dà $1 + 3 + 3 + (-5) + 3 + (-5) = 0$: la rete è bilanciata.
2. Gli archi che escono da S sono $\delta^+(S) = \{(3, 4)\}$ e gli archi che entrano in S sono $\delta^-(S) = \emptyset$. Quindi

$$\sum_{i \in S} b_i = 1 + 3 + 3 + 3 + (-5) = 5, \quad u(\delta^+(S)) = 3 = 3,$$

e i limiti inferiori di $\delta^-(S)$ sono zero. A partire da $5 > 3$, la condizione di taglio fallisce: i nodi di S hanno unità 5 da inviare e gli archi che escono da S trasportano al massimo 3. La rete è equilibrata ma non ha un flusso praticabile.

3. La capacità mancante è $5 - 3 = 2$, quindi u_{34} deve passare da 3 a 5. Quindi $u(\delta^+(S)) = 5 = 5$ e la condizione vale per S con uguaglianza: ogni arco in uscita da S deve essere

a capacità. Con questa capacità valgono tutte le condizioni di taglio e la rete ha un flusso fattibile.

$\sum_i b_i = 0$ non è sufficiente: il set $S = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ viola la condizione di taglio da parte delle unità 2 e l'innalzamento di u_{34} a 5 ripara la rete.

Esercizio 4.3 — Rimozione dei limiti inferiori

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 7

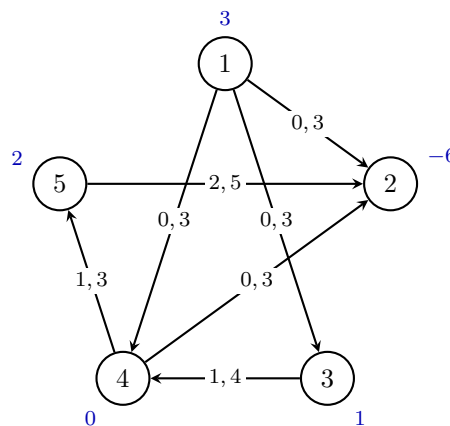
$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 2)\},$$

i saldi

$$b_1 = 3, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = 2,$$

e i limiti inferiori, capacità e costi della tabella (nella figura, l_{ij}, u_{ij} accanto agli archi).

arco	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 5)	(5, 2)
l_{ij}	0	0	0	1	0	1	2
u_{ij}	3	3	3	4	3	3	5
c_{ij}	5	4	6	2	6	4	5



Domande

1. Rimuovere i limiti inferiori con la sostituzione $\mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{x}'$: calcolare $B\mathbf{l}$, i nuovi saldi $\mathbf{b}'$ e le nuove capacità $\mathbf{u}'$.
2. Quale costante va aggiunta al costo di un flusso della rete sostituita?
3. Il flusso $\mathbf{x}'$ riportato di seguito è fattibile per la rete sostituita. Fornire il flusso corrispondente $\mathbf{x}$ della rete originale e il relativo costo.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 5)	(5, 2)
x'_{ij}	1	1	1	1	2	0	1

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

- Ogni arco con $l_{ij} > 0$ prende le unità l_{ij} dalla coda e le dà alla testa: $(3, 4)$ con $l_{34} = 1$, $(4, 5)$ con $l_{45} = 1$, $(5, 2)$ con $l_{52} = 2$. Quindi

$$\mathbf{Bl} = (0, -2, 1, 0, 1)', \quad \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{Bl} = (3, -4, 0, 0, 1)',$$

e le capacità diminuiscono dei limiti inferiori:

arco	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 5)	(5, 2)
u'_{ij}	3	3	3	3	3	2	3

I nuovi equilibri ammontano ancora a 0.

- La costante è $\mathbf{c}'\mathbf{l} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 16$.
- Aggiungiamo nuovamente i limiti inferiori, $x_{ij} = l_{ij} + x'_{ij}$:

arco	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 5)	(5, 2)
x_{ij}	1	1	1	2	2	1	3

Il costo di $\mathbf{x}'$ è 34, quindi il costo di $\mathbf{x}$ è $34 + 16 = 50$; il calcolo $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ fornisce direttamente lo stesso valore.

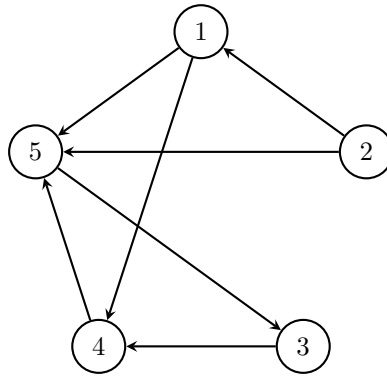
$$\mathbf{b}' = (3, -4, 0, 0, 1)', \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{l} \text{ e i costi delle due reti differiscono di } \mathbf{c}'\mathbf{l} = 16.$$

Esercizio 4.4 — Totale unimodularità

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$ e gli archi 7

$$A = \{(1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\},$$

numerato $a_1, a_2, \dots, a_7$ in ordine lessicografico e il grafo non orientato H con vertici 1, 2, 3, 4 e lati $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{1, 3\}$, $e_3 = \{2, 3\}$, $e_4 = \{3, 4\}$.



Domande

1. Scrivere la matrice di incidenza nodo-arco $\mathbf{B}$ di G .
2. Calcolare il determinante della sottomatrice di $\mathbf{B}$ con righe 1, 2, 5 e colonne a_2, a_4, a_6 , seguendo i casi di (F5).
3. Calcola il determinante della sottomatrice con righe 1, 2, 5 e colonne a_2, a_3, a_4 . Quale struttura del grafo spiega il valore?
4. Scrivi la matrice di incidenza vertici-lati $\mathbf{K}$ di H e mostra che non è totalmente unimodulare.
5. Lascia che $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^5$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^7$. Il poliedro $\{\mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$ può avere un vertice frazionario?

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. Ogni colonna ha +1 in coda e −1 in testa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	1	−1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	−1
4	−1	0	0	0	−1	1	0
5	0	−1	0	−1	0	−1	1

2. La sottomatrice è

	a_2	a_4	a_6
1	1	0	0
2	0	1	0
5	−1	−1	−1

- la colonna di a_6 ha la singola voce diversa da zero −1 nella riga 5: l’espansione fornisce un fattore −1 ed elimina la riga 5 e la colonna;
- la colonna di a_2 ha la singola voce diversa da zero 1 nella riga 1: l’espansione fornisce un fattore 1 ed elimina la riga 1 e la colonna;

La voce 1×1 rimanente è 1; moltiplicandolo per i fattori, il determinante è -1 .

3. La sottomatrice è

	a_2	a_3	a_4
1	1	-1	0
2	0	1	1
5	-1	0	-1

Qui ogni colonna ha uno $+1$ e uno -1 : la somma delle righe dà zero e il determinante è 0. I tre archi $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(2, 5)$ hanno entrambi gli estremi tra i nodi 1, 2, 5: formano un ciclo del grafo non orientato sottostante.

4. Le righe sono i vertici e le colonne i lati e_1, e_2, e_3, e_4 :

	e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

La sottomatrice di righe 1, 2, 3 e colonne e_1, e_2, e_3 (il triangolo) ha determinante $-2 \notin \{0, \pm 1\}$, quindi $\mathbf{K}$ non è totalmente unimodulare. Con questa sottomatrice $\mathbf{T}$, il sistema $\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{1}$ dispone della soluzione unica $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5. No: $\mathbf{B}$ è totalmente unimodulare e con l'intero $\mathbf{b}$ e $\mathbf{u}$ ogni vertice è intero di (F5). Il calcolo di tutte le sottomatrici quadrate 791 di $\mathbf{B}$ conferma che i loro determinanti sono -1 , 0 o 1 .

Le due sottomatrici di $\mathbf{B}$ hanno determinanti -1 e 0 ; la matrice di incidenza del grafo non orientato $\mathbf{H}$ ha una sottomatrice con determinante -2 e non è totalmente unimodulare.

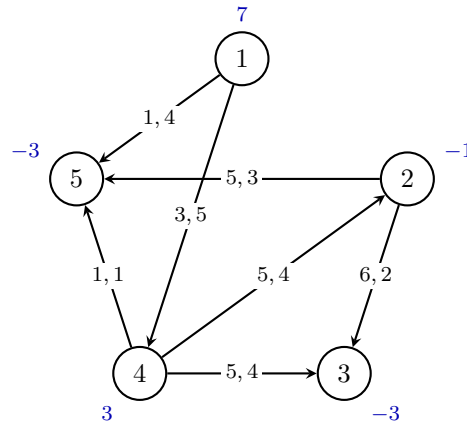
Esercizio 4.5 — Istanze sbilanciate e nodo fittizio

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 7

$$A = \{(1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\},$$

limiti inferiori dello zero, i costi e le capacità della tabella (c_{ij}, u_{ij}) in figura) e i saldi $b_1 = 7$, $b_2 = -1$, $b_3 = -3$, $b_4 = 3$, $b_5 = -3$. Ogni domanda deve essere soddisfatta e ogni nodo di approvvigionamento invia al massimo la propria offerta.

arco	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(2, 5)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)
c_{ij}	3	1	6	5	5	5	1
u_{ij}	5	4	2	3	4	4	1



Domande

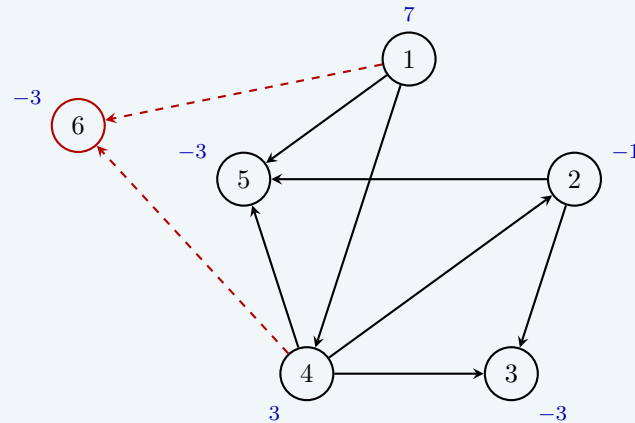
1. Calcolare l'offerta totale, la domanda totale e l'eccesso e . Esiste un flusso fattibile con vincoli di uguaglianza?
2. Costruisci la rete bilanciata con un nodo fittizio come in (F4): nuovo nodo, equilibrio, archi, costi e capacità.
3. Scrivere i vincoli di conservazione del nodo dummy e dei nodi di fornitura nella rete bilanciata.
4. Di seguito è riportato un flusso ottimale della rete bilanciata, calcolato con un solutore LP. Quanta offerta lascia inutilizzata ogni nodo di fornitura e qual è il costo ottimale?

arco	(1, 4)	(1, 5)	(2, 3)	(2, 5)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)	(1, 6)	(4, 6)
$\tilde{x}_{ij}$	1	3	0	0	1	3	0	3	0

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. L'offerta totale è $7 + 3 = 10$ e la domanda totale è 7, quindi $e = 10 - 7 = 3 > 0$. La somma dei bilanci non arriva a zero e per (F2) nessun flusso soddisfa tutte le equazioni di conservazione.
2. Aggiungiamo il nodo 6 con $b_6 = -3$ e gli archi $(1, 6)$, $(4, 6)$ con costo 0 e capacità $+\infty$ (tratteggiata):



Ora i saldi ammontano a zero.

3. Il nodo fittizio riceve solo il flusso e ciascun nodo di alimentazione ha un arco in più in uscita:

$$-x_{16} - x_{46} = -3,$$

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} = 7,$$

$$x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} - x_{14} = 3.$$

Il flusso sull'arco fittizio è l'alimentazione che il nodo i non invia.

4. I flussi sugli archi fittizi sono $\tilde{x}_{16} = 3$, $\tilde{x}_{46} = 0$: il nodo 1 invia 4 delle sue unità 7 e lascia 3 inutilizzato; il nodo 4 invia 3 delle sue unità 3 e lascia 0 inutilizzato. Gli archi fittizi costano zero, quindi il costo ottimale è quello degli archi originali, 26.

L'eccedenza $e = 3$ va al nodo fittizio 6 attraverso archi a costo zero; il flusso ottimale lascia le unità 3 al nodo 1 e le unità 0 al nodo 4, con costo 26.

Flusso massimo

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e gli algoritmi del capitolo «Flusso massimo», per una grafo $G = (N, A)$ senza archi opposti, con capacità u_{ij} , una sorgente s e un pozzo t .

- (M1) **Flussi e tagli.** Un flusso ammissibile ha $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ e conservazione in ogni nodo diversi da s e t ; il suo valore v è il deflusso netto di s . Per ogni s - t tagliato $(S, N \setminus S)$,

$$v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) \leq u(S, N \setminus S) = \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} u_{ij},$$

con uguaglianza se e solo se gli archi anteriori del taglio sono saturi e i suoi archi posteriori vuoti.

- (M2) **Rete residua.** Per $(i, j) \in A$: l'arco in avanti (i, j) con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$, l'arco all'indietro (j, i) con $r_{ji} = x_{ij}$ se $x_{ij} > 0$. Lungo un percorso aumentante P il collo di bottiglia è $\delta = \min_{(i,j) \in P} r_{ij}$: x_{ij} cresce di δ sugli archi anteriori di P e diminuisce di δ sugli archi di G il cui arco indietro è in P .

- (M3) **Ricerca.** La ricerca di $G(\mathbf{x})$ da s scansiona gli archi residui che escono da ciascun nodo per indice crescente della testa, e si ferma non appena viene etichettato t ; il percorso aumentante è il percorso dei predecessori. Ford–Fulkerson utilizza la ricerca in profondità (*LIST* è uno stack), Edmonds–Karp la ricerca in ampiezza ricerca (*LIST* è una coda).

- (M4) **Stop.** Se la ricerca non etichetta t , il flusso è massimo e l'insieme S degli elementi etichettati i nodi danno un taglio minimo, con $v = u(S, N \setminus S)$.

- (M5) **Edmonds–Karp.** Le distanze $d_{\mathbf{x}}(i)$ (il minor numero di archi da s in $G(\mathbf{x})$) mai diminuire; un arco di P con $r_{ij} = \delta$ è critico; al massimo potenziamenti nm .

- (M6) **Applicazioni.** Abbinamento: archi (s, i) , (i, j) , (j, t) con portata 1, lati con flusso 1 formano una corrispondenza massima. Con tutte le capacità 1, il valore massimo è il numero massimo di percorsi arcodisgiunti da s a t e il numero minimo di archi la cui rimozione non lascia tale percorso.

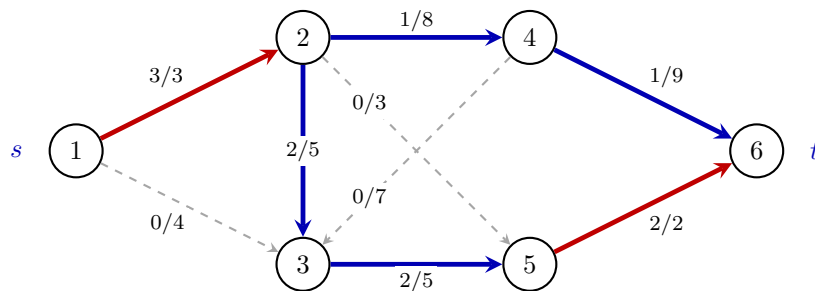
Esercizio 5.1 — La rete residua

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 6\}$, sorgente $s = 1$, sink $t = 6$, gli archi

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 3), (4, 6), (5, 6)\},$$

e le capacità u_{ij} della tabella. Un metodo che aumenta solo i flussi si è fermato al flusso $\bar{x}$ della tabella, disegnata con $\bar{x}_{ij}/u_{ij}$ sugli archi.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 6)
u_{ij}	3	4	5	8	3	5	7	9	2
$\bar{x}_{ij}$	3	0	2	1	0	2	0	1	2


Domande

1. Verificare che $\bar{x}$ sia un flusso ammissibile e calcolarne il valore.
2. Disegna la rete residua $G(\bar{x})$, con le capacità residue.
3. Trovare il percorso di aumento dato dalla ricerca in profondità di (M3), il suo collo di bottiglia e il flusso dopo l'aumento.
4. Dimostrare che il nuovo flusso è massimo.

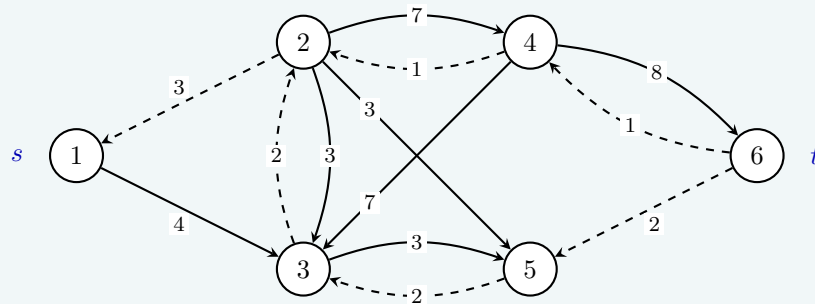
Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Tutti i flussi sono compresi tra 0 e la capacità. Ai nodi $2, \dots, 5$ l'afflusso è uguale al deflusso: nodo 2: $3 = 2 + 1 + 0$, nodo 3: $0 + 2 + 0 = 2$, nodo 4: $1 = 0 + 1$, nodo 5: $0 + 2 = 2$. Il valore è il deflusso netto di $s = 1$:

$$v = \bar{x}_{12} + \bar{x}_{13} = 3 + 0 = 3.$$

2. Ogni arco con $\bar{x}_{ij} < u_{ij}$ dà un arco in avanti con $r_{ij} = u_{ij} - \bar{x}_{ij}$, ogni arco con $\bar{x}_{ij} > 0$ un arco all'indietro (j, i) con $r_{ji} = \bar{x}_{ij}$. La rete residua ha archi 13; quelli indietro, tratteggiati, sono $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$.



3. La ricerca approfondita etichetta 1, 3, 2, 4, 6, in questo ordine, e trova

$$P = 1, 3, 2, 4, 6, \quad \delta = \min\{4, 2, 7, 8\} = 2,$$

attraverso l'arco rovescio (3, 2): il flusso su (2, 3) diminuisce. Il nuovo flusso è

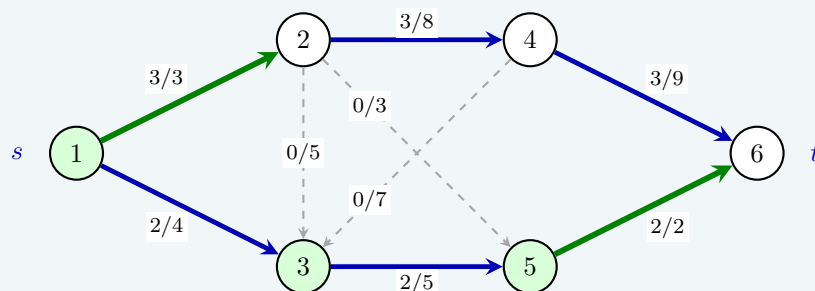
arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 6)
$\tilde{x}_{ij}$	3	2	0	3	0	2	0	3	2

con valore $3 + 2 = 5$.

4. In $G(\tilde{x})$ la ricerca da 1 etichetta solo i nodi di $S = \{1, 3, 5\}$, quindi non esiste alcun percorso aumentante. Per $S = \{1, 3, 5\}$ gli archi in avanti (1, 2), (5, 6) sono saturati e gli archi all'indietro (2, 3), (2, 5), (4, 3) sono vuoti. Quindi

$$u(S, N \setminus S) = 3 + 2 = 5 = v,$$

e per (M1) nessun flusso ha un valore maggiore: $\tilde{x}$ è massimo (gli archi anteriori del taglio sono verdi, i nodi di S ombreggiati).



Il flusso $\tilde{x}$ di valore 3 non può essere migliorato solo con archi in avanti; un aumento attraverso l'arco rovescio (3, 2) raggiunge il valore massimo 5, certificato dal taglio $S = \{1, 3, 5\}$.

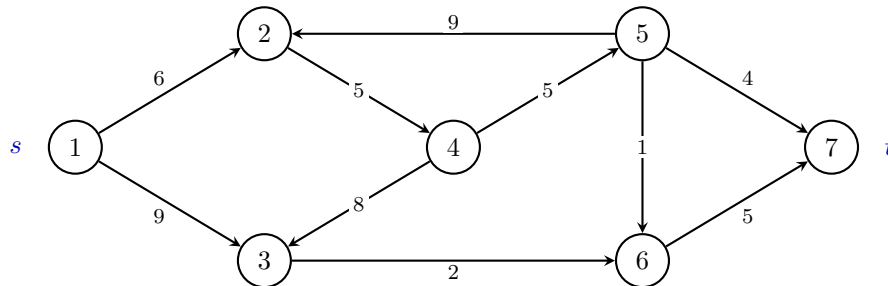
Esercizio 5.2 — L'algoritmo Ford-Fulkerson

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 7\}$, sorgente $s = 1$, sink $t = 7$, gli archi 10

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 6), (5, 7), (6, 7)\},$$

e le portate della tabella, sempre accanto agli archi in figura.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 6)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 2)	(5, 6)	(5, 7)	(6, 7)
u_{ij}	6	9	5	2	8	5	9	1	4	5



Domande

1. Eseguire l'algoritmo Ford-Fulkerson dal flusso zero, con la ricerca in profondità di (M3): per ogni iterazione fornire il percorso aumentante, le sue capacità residue, δ e il nuovo valore.
2. Fornire la portata massima e un taglio minimo e verificare che il valore sia uguale alla capacità del taglio.
3. Quale iterazione utilizza un arco all'indietro e quale flusso di G diminuisce?

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Iterazione 1

La ricerca etichetta i nodi 1, 2, 4, 3, 6, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 2, 4, 3, 6, 7$; le sue capacità residue sono 6, 5, 8, 2, 5, quindi $\delta = 2$. Nuovi flussi: $x_{12} = 0 + 2 = 2$, $x_{24} = 0 + 2 = 2$, $x_{43} = 0 + 2 = 2$, $x_{36} = 0 + 2 = 2$, $x_{67} = 0 + 2 = 2$; il valore diventa $v = 2$.

Iterazione 2

La ricerca etichetta i nodi 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 2, 4, 5, 6, 7$; le sue capacità residue sono 4, 3, 5, 1, 3, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{12} = 2 + 1 = 3$, $x_{24} = 2 + 1 = 3$, $x_{45} = 0 + 1 = 1$, $x_{56} = 0 + 1 = 1$, $x_{67} = 2 + 1 = 3$; il valore diventa $v = 3$.

Iterazione 3

La ricerca etichetta i nodi 1, 2, 4, 3, 5, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 2, 4, 5, 7$; le sue capacità residue sono 3, 2, 4, 4, quindi $\delta = 2$. Nuovi flussi: $x_{12} = 3 + 2 = 5$, $x_{24} = 3 + 2 = 5$, $x_{45} = 1 + 2 = 3$, $x_{57} = 0 + 2 = 2$; il valore diventa $v = 5$.

Iterazione 4

La ricerca etichetta i nodi 1, 2, 3, 4, 5, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 3, 4, 5, 7$; le sue capacità residue sono 9, 2, 2, 2, quindi $\delta = 2$. Utilizza l'arco all'indietro (3, 4). Nuovi flussi: $x_{13} = 0 + 2 = 2$, $x_{43} = 2 - 2 = 0$, $x_{45} = 3 + 2 = 5$, $x_{57} = 2 + 2 = 4$; il valore diventa $v = 7$.

Iterazione 5

La ricerca etichetta solo i nodi di $S = \{1, 2, 3\}$: t non è etichettato e l'algoritmo si ferma con $v = 7$.

In breve:

iterazione e percorso aumentante	r_{ij} su P	archi all'indietro	δ	v
1	1, 2, 4, 3, 6, 7	6, 5, 8, 2, 5	—	2 2
2	1, 2, 4, 5, 6, 7	4, 3, 5, 1, 3	—	1 3
3	1, 2, 4, 5, 7	3, 2, 4, 4	—	2 5
4	1, 3, 4, 5, 7	9, 2, 2, 2	(3, 4)	2 7

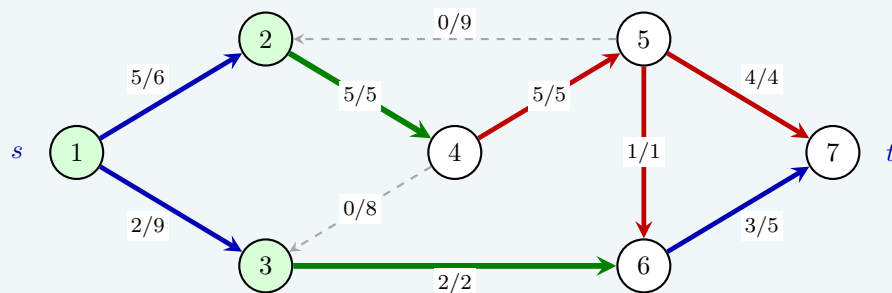
2. Il flusso massimo è

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 6)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 2)	(5, 6)	(5, 7)	(6, 7)
$\tilde{x}_{ij}$	5	2	5	2	0	5	0	1	4	3
u_{ij}	6	9	5	2	8	5	9	1	4	5

con valore $\tilde{v} = 7$. L'ultima ricerca etichetta $S = \{1, 2, 3\}$. Per $S = \{1, 2, 3\}$ gli archi in avanti (2, 4), (3, 6) sono saturati e gli archi all'indietro (4, 3), (5, 2) sono vuoti. Quindi

$$u(S, N \setminus S) = 5 + 2 = 7 = v,$$

quindi il flusso è massimo e il taglio è minimo. Nella figura gli archi anteriori del taglio sono verdi e i nodi di S ombreggiati.



Unicità. I tagli minimi, di capacità 7, sono $S = \{1, 2, 3\}$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Per (M1) ogni flusso massimo satura i loro archi in avanti e svuota i loro archi all'indietro: $x_{24} = 5$, $x_{36} = 2$, $x_{43} = 0$, $x_{45} = 5$, $x_{52} = 0$, $x_{56} = 1$, $x_{57} = 4$. La conservazione fissa poi gli altri archi: al nodo 2, $x_{12} = 5$; al nodo 3, $x_{13} = 2$; al nodo 6, $x_{67} = 3$. Pertanto $\tilde{x}$ è l'unico flusso massimo.

3. L'iterazione 4 utilizza l'arco all'indietro (3, 4): il flusso su (4, 3) diminuisce di $\delta = 2$, annullando parte di una scelta precedente della ricerca in profondità.

Ford–Fulkerson realizza potenziamenti 4 e raggiunge $\tilde{v} = 7$; l'ultima ricerca restituisce il taglio minimo $S = \{1, 2, 3\}$ di portata 7.

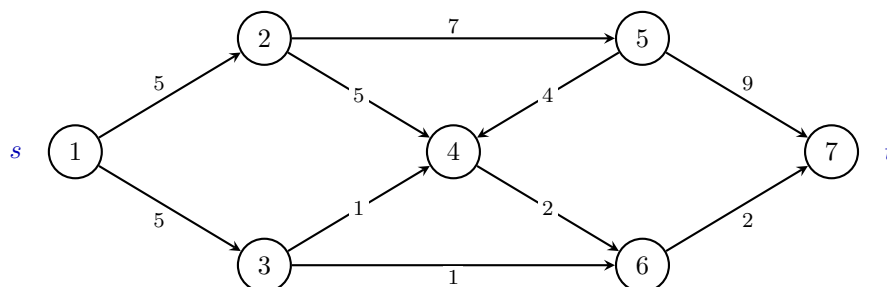
Esercizio 5.3 — L'algoritmo di Edmonds-Karp

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 7\}$, sorgente $s = 1$, sink $t = 7$, gli archi 10

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 6), (5, 4), (5, 7), (6, 7)\},$$

e le portate della tabella, sempre accanto agli archi in figura.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 7)	(6, 7)
u_{ij}	5	5	5	7	1	1	2	4	9	2



Domande

1. Eseguire l'algoritmo Edmonds–Karp dal flusso zero: per ogni iterazione fornire il percorso aumentante, il suo numero di archi, le sue capacità residue, δ e il nuovo valore.
2. Fornire le distanze $d_x(i)$ di tutti i nodi della rete residua prima di ogni ricerca, verificare che non diminuiscano mai, ed elencare gli archi critici di ogni aumento.
3. Fornisce il flusso massimo e un taglio minimo. Su questa rete l'algoritmo Ford–Fulkerson con la ricerca in profondità effettua aumenti 4: confronta.

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. Iterazione 1

La ricerca etichetta i nodi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 2, 5, 7$, con archi 3; le sue capacità residue sono 5, 7, 9, quindi $\delta = 5$. Nuovi flussi: $x_{12} = 0 + 5 = 5$, $x_{25} = 0 + 5 = 5$, $x_{57} = 0 + 5 = 5$; il valore diventa $v = 5$.

Iterazione 2

La ricerca etichetta i nodi 1, 3, 4, 6, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 3, 6, 7$, con archi 3; le sue capacità residue sono 5, 1, 2, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{13} = 0 + 1 = 1$, $x_{36} = 0 + 1 = 1$, $x_{67} = 0 + 1 = 1$; il valore diventa $v = 6$.

Iterazione 3

La ricerca etichetta i nodi 1, 3, 4, 6, 7, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 3, 4, 6, 7$, con archi 4; le sue capacità residue sono 4, 1, 2, 1, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{13} = 1 + 1 = 2$, $x_{34} = 0 + 1 = 1$, $x_{46} = 0 + 1 = 1$, $x_{67} = 1 + 1 = 2$; il valore diventa $v = 7$.

Iterazione 4

La ricerca etichetta solo i nodi di $S = \{1, 3\}$: t non è etichettato e l’algoritmo si ferma con $v = 7$.

2. Le distanze vengono calcolate mediante una ricerca in ampiezza completa della rete residua:

prima della ricerca	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5)$	$d(6)$	$d(7)$
iterazione 1	0	1	1	2	2	2	3
iterazione 2	0	5	1	2	4	2	3
iterazione 3	0	6	1	2	5	3	4
ferma	0	∞	1	∞	∞	∞	∞

Ogni colonna non è decrescente, come afferma (M5). Gli archi critici, con $r_{ij} = \delta$, sono: iterazione 1: (1, 2); iterazione 2: (3, 6); iterazione 3: (3, 4), (6, 7).

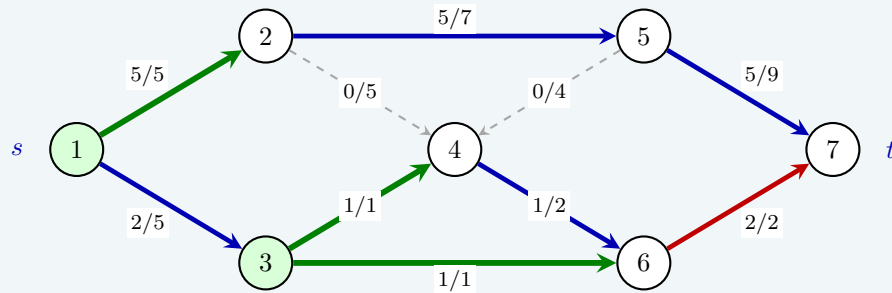
3. Il flusso massimo è

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 7)	(6, 7)
$\tilde{x}_{ij}$	5	2	0	5	1	1	1	0	5	2
u_{ij}	5	5	5	7	1	1	2	4	9	2

con valore $\tilde{v} = 7$. L’ultima ricerca etichetta $S = \{1, 3\}$. Per $S = \{1, 3\}$ gli archi in avanti (1, 2), (3, 4), (3, 6) sono saturati e non sono presenti archi all’indietro. Quindi

$$u(S, N \setminus S) = 5 + 1 + 1 = 7 = v,$$

quindi il taglio è minimo (archi anteriori in verde, nodi di S ombreggiati).



Edmonds–Karp necessita di potenziamenti 3, rispetto allo 4 di Ford–Fulkerson; entrambi sono molto al di sotto del limite $nm = 70$ di (M5).

Unicità. I tagli minimi, di capacità 7, sono $S = \{1, 3\}$, $S = \{1, 3, 4, 6\}$. Per (M1) ogni flusso massimo satura i loro archi in avanti e svuota i loro archi all'indietro: $x_{12} = 5$, $x_{24} = 0$, $x_{34} = 1$, $x_{36} = 1$, $x_{54} = 0$, $x_{67} = 2$. La conservazione fissa poi gli altri archi: al nodo 1, $x_{13} = 2$; al nodo 2, $x_{25} = 5$; al nodo 4, $x_{46} = 1$; al nodo 5, $x_{57} = 5$. Pertanto $\tilde{x}$ è l'unico flusso massimo.

Edmonds–Karp raggiunge $\tilde{v} = 7$ negli aumenti 3 lungo percorsi con archi 3, 3, 4; le distanze non diminuiscono mai, ed il taglio $S = \{1, 3\}$ è minimo.

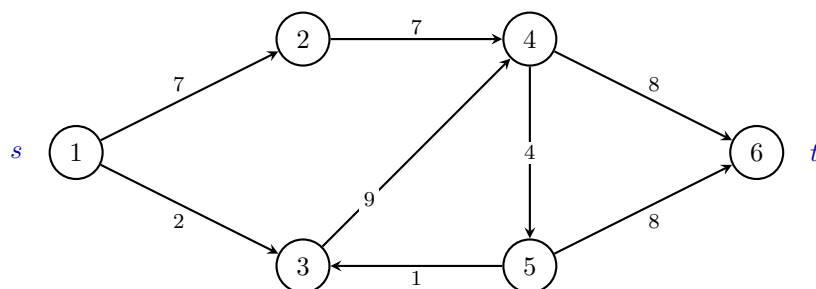
Esercizio 5.4 — Tagli minimi

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 6\}$, sorgente $s = 1$, sink $t = 6$, gli archi

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 6)\},$$

e le capacità intere della tabella, sempre accanto agli archi in figura.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 3)	(5, 6)
u_{ij}	7	2	7	9	4	8	1	8



Domande

1. Elenca i tagli s – t con le relative capacità e trova tutti i tagli minimi.
2. Controllare che il flusso x indicato sotto sia massimo.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 3)	(5, 6)
x_{ij}	7	2	7	2	1	8	0	1

3. Dimostrare che, con capacità intere, innalzando u_{ij} di un'unità si aumenta il valore massimo se e solo se (i, j) è un arco anteriore di ogni taglio minimo.
4. Per quali archi di questa rete l'aumento della capacità di un'unità aumenta il valore massimo?

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Sono presenti tagli $2^4 = 16$; accanto a ciascun set S , la sua capacità:

S	u	S	u	S	u	S	u
$\{1\}$	9	$\{1, 2\}$	9	$\{1, 3\}$	16	$\{1, 4\}$	21
$\{1, 5\}$	18	$\{1, 2, 3\}$	16	$\{1, 2, 4\}$	14	$\{1, 2, 5\}$	18
$\{1, 3, 4\}$	19	$\{1, 3, 5\}$	24	$\{1, 4, 5\}$	26	$\{1, 2, 3, 4\}$	12
$\{1, 2, 3, 5\}$	24	$\{1, 2, 4, 5\}$	19	$\{1, 3, 4, 5\}$	23	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	16

La capacità minima è 9, raggiunta dai tagli $2 S = \{1\}$, $S = \{1, 2\}$.

2. Il flusso è fattibile: ogni arco trasporta un flusso tra 0 e la sua capacità, e in ogni nodo diverso da 1 e 6 l'afflusso è uguale al deflusso. Il suo valore è 9, pari alla capacità di taglio minima: di (M1) nessun flusso è migliore. Ad esempio, per $S = \{1\}$ gli archi diretti $(1, 2)$, $(1, 3)$ sono saturati e gli archi posteriori non esistono.
3. Sia $\tilde{v}$ il valore massimo e $\mathbf{u}'$ le capacità con $u'_{ij} = u_{ij} + 1$. La capacità di un taglio aumenta di 1 se (i, j) è uno dei suoi archi in avanti e non cambia altrimenti.
 - Se (i, j) è un arco in avanti di ogni taglio minimo, ogni taglio minimo ottiene la capacità $\tilde{v} + 1$. Ogni altro taglio aveva una capacità intera maggiore di $\tilde{v}$, quindi almeno $\tilde{v} + 1$, e non diminuisce. La nuova capacità di taglio minima è $\tilde{v} + 1$ e, secondo il teorema di taglio minimo del flusso massimo, lo è anche il nuovo valore massimo.
 - Se un taglio minimo $(S, N \setminus S)$ non ha (i, j) come arco in avanti, la sua capacità rimane $\tilde{v}$ e ogni flusso per $\mathbf{u}'$ ha un valore massimo di $\tilde{v}$ di (M1). Il vecchio flusso massimo è ancora fattibile, quindi il valore massimo rimane $\tilde{v}$.

Con capacità frazionarie la prima parte fallisce: un taglio non minimo può essere inferiore a un'unità sopra $\tilde{v}$.

4. Con la domanda 3, cerchiamo gli archi che sono archi in avanti di tutti i tagli minimi:

arco	arco in avanti di	valore massimo con $u_{ij} + 1$
(1, 2)	$S = \{1\}$	9
(1, 3)	ogni taglio minimo	10
(2, 4)	$S = \{1, 2\}$	9
(3, 4)	nessun taglio minimo	9
(4, 5)	nessun taglio minimo	9
(4, 6)	nessun taglio minimo	9
(5, 3)	nessun taglio minimo	9
(5, 6)	nessun taglio minimo	9

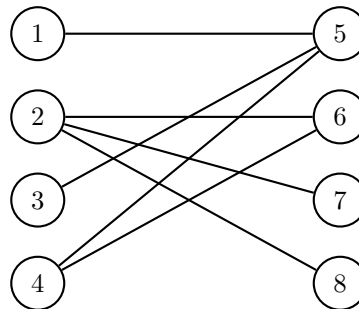
Il valore massimo cresce solo per l'arco (1,3), da 9 a 10. Gli archi (1,2), (2,4) appartengono ad alcuni tagli minimi ma non a tutti, e sollevarli non cambia nulla.

Il valore massimo è 9, con tagli minimi 2; a tutti appartiene solo l'arco (1,3) e solo aumentandone la portata si aumenta il valore massimo.

Esercizio 5.5 — Corrispondenza massima

Quattro lavoratori $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e quattro lavori $V_2 = \{5, 6, 7, 8\}$ formano il grafo bipartito $H = (V_1 \cup V_2, E)$, con un lato $\{i, j\}$ quando il lavoratore i può eseguire il lavoro j :

$$E = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}.$$



Domande

1. Costruisci la rete di H (M6), con i nodi nell'ordine $s, 1, 2, \dots, 8, t$.
2. Esegui l'algoritmo Edmonds–Karp dal flusso zero.
3. Dare un abbinamento massimo ed il taglio minimo riscontrato in battuta.
4. Sia S l'insieme etichettato dall'ultima ricerca e $C = (V_1 \setminus S) \cup (V_2 \cap S)$. Controlla che ogni lato abbia un punto finale in C e deduci ancora che nessuna corrispondenza ha più lati di quello trovato.

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. La rete ha gli archi (s, i) per $i \in V_1$, gli archi (i, j) per i lati 7 e gli archi (j, t) per $j \in V_2$, tutti con capacità 1: archi 15 in tutto.

2. Iterazione 1

La ricerca etichetta i nodi $s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, t$, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = s, 1, 5, t$, con archi 3; le sue capacità residue sono 1, 1, 1, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{s1} = 0 + 1 = 1$, $x_{15} = 0 + 1 = 1$, $x_{5t} = 0 + 1 = 1$; il valore diventa $v = 1$.

Iterazione 2

La ricerca etichetta i nodi $s, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 5, t$, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = s, 2, 6, t$, con archi 3; le sue capacità residue sono 1, 1, 1, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{s2} = 0 + 1 = 1$, $x_{26} = 0 + 1 = 1$, $x_{6t} = 0 + 1 = 1$; il valore diventa $v = 2$.

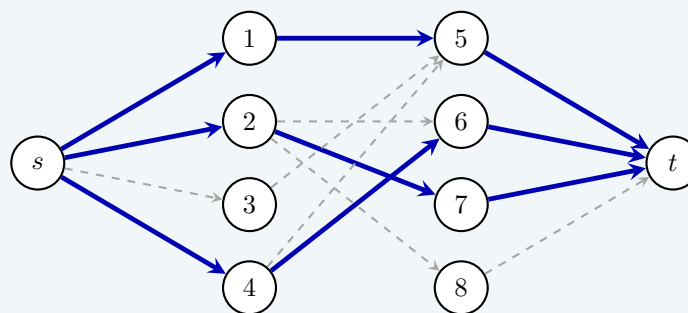
Iterazione 3

La ricerca etichetta i nodi $s, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 7, 8, t$, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = s, 4, 6, 2, 7, t$, con archi 5; le sue capacità residue sono 1, 1, 1, 1, 1, quindi $\delta = 1$. Utilizza l'arco all'indietro $(6, 2)$. Nuovi flussi: $x_{s4} = 0 + 1 = 1$, $x_{46} = 0 + 1 = 1$, $x_{26} = 1 - 1 = 0$, $x_{27} = 0 + 1 = 1$, $x_{7t} = 0 + 1 = 1$; il valore diventa $v = 3$.

Iterazione 4

La ricerca etichetta solo i nodi di $S = \{s, 1, 3, 5\}$: t non è etichettato e l'algoritmo si ferma con $v = 3$.

3. I lati con flusso 1 danno il corrispondente $M = \{\{1, 5\}, \{2, 7\}, \{4, 6\}\}$, con lati 3; non è l'unico abbinamento massimo (ci sono 4). L'iterazione 3 riassegna i lavori attraverso l'arco all'indietro $(6, 2)$. L'ultima ricerca etichetta $S = \{s, 1, 3, 5\}$; gli archi anteriori del taglio sono $(s, 2)$, $(s, 4)$, $(5, t)$, con portata $3 = |M|$, quindi l'adattamento è massimo.



4. Qui $C = \{2, 4, 5\}$, con nodi 3. Ogni lato $\{i, j\}$ ha $i \in C$ o $j \in C$: $\{1, 5\}$ di 5, $\{2, 6\}$ di 2, $\{2, 7\}$ di 2, $\{2, 8\}$ di 2, $\{3, 5\}$ di 5, $\{4, 5\}$ di 4, $\{4, 6\}$ di 4. I lati di una corrispondenza non hanno un punto finale comune, quindi ognuno di essi utilizza un nodo diverso di C : nessuna corrispondenza ha più di $|C| = 3$ lati.

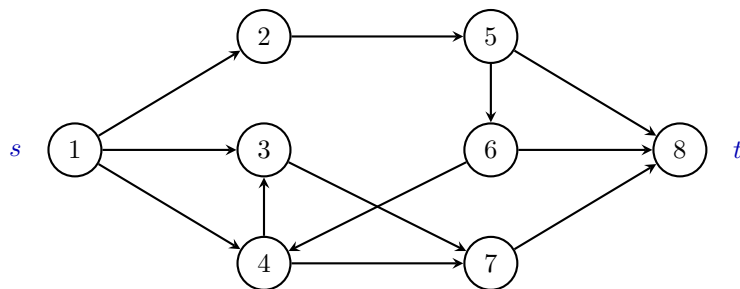
La corrispondenza massima ha lati 3, un lavoro rimane libero; il taglio dell'ultima ricerca e i nodi 3 di C certificano che non esiste corrispondenza maggiore.

Esercizio 5.6 — Cammini arcodisgiunti

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 8\}$ e gli archi 12

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 7), (5, 6), (5, 8), (6, 4), (6, 8), (7, 8)\}.$$

Cerchiamo percorsi da $s = 1$ a $t = 8$ senza arco comune.



Domande

1. Assegna ad ogni arco la capacità 1 ed esegui l'algoritmo Edmonds–Karp dal flusso zero.
2. Decomponi il flusso massimo in percorsi archidisgiunti da 1 a 8.
3. Trova un insieme minimo di archi la cui rimozione non lascia alcun percorso da 1 a 8. L'insieme degli archi che escono dal nodo 1 è un tale insieme minimo?

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Iterazione 1

La ricerca etichetta i nodi 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 2, 5, 8$, con archi 3; le sue capacità residue sono 1, 1, 1, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{12} = 0 + 1 = 1$, $x_{25} = 0 + 1 = 1$, $x_{58} = 0 + 1 = 1$; il valore diventa $v = 1$.

Iterazione 2

La ricerca etichetta i nodi 1, 3, 4, 7, 8, in questo ordine. Il percorso aumentante è $P = 1, 3, 7, 8$, con archi 3; le sue capacità residue sono 1, 1, 1, quindi $\delta = 1$. Nuovi flussi: $x_{13} = 0 + 1 = 1$, $x_{37} = 0 + 1 = 1$, $x_{78} = 0 + 1 = 1$; il valore diventa $v = 2$.

Iterazione 3

La ricerca etichetta solo i nodi di $S = \{1, 3, 4, 7\}$: t non è etichettato e l'algoritmo si ferma con $v = 2$.

2. Gli archi con flusso 1 sono $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(5, 8)$, $(7, 8)$. Seguendoli da 1, ogni arco una volta, fornisce i percorsi

$$1, 2, 5, 8, \quad 1, 3, 7, 8,$$

senza arco comune. Per (M6) nessuna famiglia di percorsi arcodisgiunti ha più di percorsi 2.

3. Le ultime etichette di ricerca $S = \{1, 3, 4, 7\}$ e gli archi anteriori del taglio sono $(1, 2)$, $(7, 8)$: la rimozione di questi archi 2 non lascia alcun percorso da 1 a 8, poiché ogni percorso di questo tipo lascia S attraverso uno di essi. Meno archi non sono sufficienti, perché ciascuno dei percorsi 2 disgiunti da archi necessita del proprio arco rimosso. Gli archi 3 che escono dal nodo 1 disconnettono anche 1 da 8, ma non sono un insieme minimo: il taglio $S = \{1\}$ ha capacità $3 > 2$. I tagli minimi sono $S = \{1, 3, 4, 7\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

Al massimo i percorsi archi-disgiunti 2 vanno da 1 a 8 e gli archi 2 del taglio $S = \{1, 3, 4, 7\}$ li disconnettono.

Flusso di costo minimo

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e gli algoritmi del capitolo «Flusso di costo minimo», per un equilibrato rete $G = (N, A)$ con limiti inferiori pari a zero, capacità u_{ij} e costi c_{ij} ; gli archi sono in ordine lessicografico.

(M1) **Rete residua.** Per $(i, j) \in A$: l'arco in avanti (i, j) con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ e costo c_{ij} se $x_{ij} < u_{ij}$; l'arco all'indietro (j, i) con $r_{ji} = x_{ij}$ e costo $-c_{ij}$ se $x_{ij} > 0$. Un ciclo W di $G(\mathbf{x})$ ha un costo $c(W)$, la somma dei costi, e capacità residua $r(W)$, il minimo di r ; aumentando di $\theta \leq r(W)$ cambia il costo di $\theta c(W)$.

(M2) **Ottimalità.** Un flusso ammissibile è ottimale se e solo se $G(\mathbf{x})$ non ha ciclo negativo, se e solo se qualche π dà $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j \geq 0$ su ogni arco di $G(\mathbf{x})$, cioè $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$ e $\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$.

(M3) **Bellman–Ford su $G(\mathbf{x})$.** $d^0(j) = 0$ per ogni j e

$$d^k(j) = \min \left\{ d^{k-1}(j), \min_{(i,j) \in A(\mathbf{x})} (d^{k-1}(i) + c_{ij}^x) \right\};$$

i pareggi vanno alla coda più piccola e il predecessore cambia solo in stretta diminuzione. Se $d^k = d^{k-1}$, arresto: no ciclo negativo e $\pi_i = -d^k(i)$, spostato in modo che $\pi_n = 0$. Se $d^n \neq d^{n-1}$: j è il nodo più piccolo con $d^n(j) < d^{n-1}(j)$, il cammino viene letto all'indietro dalla riga n alla riga 1 e il ciclo è il pezzo tra i due le occorrenze del primo nodo si sono incontrate due volte, leggendo il cammino dal suo primo nodo.

(M4) **Annullamento del ciclo.** Aumentare lungo il ciclo di (M3) di $\theta = r(W)$, finché (M3) non trova alcun negativo ciclo.

(M5) **Primo flusso e scomposizione fattibile.** Archi (s, i) con capacità b_i per $b_i > 0$, archi (i, t) con capacità $-b_i$ per $b_i < 0$; l'algoritmo Edmonds–Karp: ricerca in ampiezza da s , gli archi che lasciano un nodo scansionato aumentando la testa (s per primo, t per ultimo). Una circolazione viene scomposta a partire dal suo primo arco con $y > 0$ in ordine lessicografico e lasciando ogni nodo lungo il suo arco con $y > 0$ di testa più piccola.

(M6) **Percorsi più brevi successivi.** Inizia con $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\pi = \mathbf{0}$, $\mathbf{e} = \mathbf{b}$; s è il nodo dell'indice più piccolo con $e_s > 0$; Dijkstra da s con lunghezze $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j$ (indice

più piccolo sui pareggi); t è il nodo con $e_t < 0$ di distanza minore (indice più piccolo sui pari merito); $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$ e $\delta = \min\{e_s, -e_t, r(P)\}$.

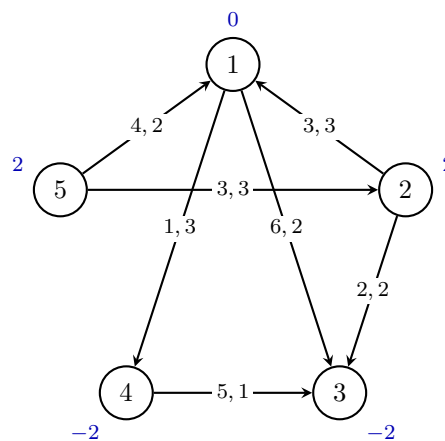
Esercizio 6.1 — La rete residua

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 7

$$A = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (4, 3), (5, 1), (5, 2)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = 0, b_2 = 2, b_3 = -2, b_4 = -2, b_5 = 2$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij}, u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi. La tabella riporta anche un flusso ammissibile $\bar{x}$.

arco (i, j)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 3)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)
c_{ij}	6	1	3	2	5	4	3
u_{ij}	2	3	3	2	1	2	3
$\bar{x}_{ij}$	0	3	2	1	1	1	1



Le sequenze $W_1 = 1, 2, 3, 4, 1$ e $W_2 = 1, 3, 2, 1$ sono cicli della rete residua $G(\bar{x})$.

Domande

1. Costruisci $G(\bar{x})$: per ogni arco di A fornisci i suoi archi avanti e indietro, con capacità residua e costo.
2. Calcolare il costo $c(W)$ e la capacità residua $r(W)$ di W_1 e di W_2 . Quale dei due cicli può abbassare il costo di $\bar{x}$?
3. Aumenta $\bar{x}$ lungo quel ciclo di $\theta = r(W)$. Fornire il nuovo flusso, verificare che sia fattibile e calcolarne il costo in due modi.

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. Da (M1) l'arco (i, j) dà l'arco avanti se $\bar{x}_{ij} < u_{ij}$ e l'arco indietro (j, i) se $\bar{x}_{ij} > 0$; ogni voce è r, c :

arco (i, j)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 3)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)
$\bar{x}_{ij}$	0	3	2	1	1	1	1
avanti $(i, j): r, c$	2, 6	—	1, 3	1, 2	—	1, 4	2, 3
indietro $(j, i): r, c$	—	3, -1	2, -3	1, -2	1, -5	1, -4	1, -3

$G(\bar{x})$ ha archi 11.

2. Il ciclo $W_1 = 1, 2, 3, 4, 1$ utilizza gli archi (1, 2) indietro di (2, 1), (2, 3) avanti, (3, 4) indietro di (4, 3), (4, 1) indietro di (1, 4):

$$c(W) = -3 + 2 - 5 - 1 = -7, \quad r(W) = \min\{2, 1, 1, 3\} = 1.$$

Il ciclo $W_2 = 1, 3, 2, 1$ utilizza gli archi (1, 3) avanti, (3, 2) indietro di (2, 3), (2, 1) avanti:

$$c(W) = 6 - 2 + 3 = 7, \quad r(W) = \min\{2, 1, 1\} = 1.$$

Solo il ciclo negativo W_1 abbassa il costo: aumentandolo di θ cambia il costo di $\theta c(W) < 0$, mentre W_2 lo aumenterebbe.

3. Con $\theta = 1$, x_{ij} cresce di 1 sugli archi di andata del ciclo e diminuisce di 1 sugli archi il cui arco di ritorno è nel ciclo:

arco (i, j)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 3)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)
$\bar{x}_{ij}$	0	3	2	1	1	1	1
x'_{ij}	0	2	1	2	0	1	1

I limiti valgono e ogni nodo mantiene il suo deflusso meno l'afflusso, pari a b_i : $\mathbf{x}'$ è fattibile. Direttamente, $\mathbf{c}'\mathbf{x}' = 6 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 16$; con (M1), $\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \theta c(W) = 23 + 1 \cdot (-7) = 16$. Gli archi che cambiano sono (1, 4), (2, 1), (2, 3), (4, 3).

$G(\bar{x})$ ha archi 11; il ciclo 1, 2, 3, 4, 1 costa -7 con capacità residua 1 e aumentandolo si riduce il costo da 23 a 16: $\bar{x}$ non è ottimale.

Esercizio 6.2 — Condizioni di ottimalità

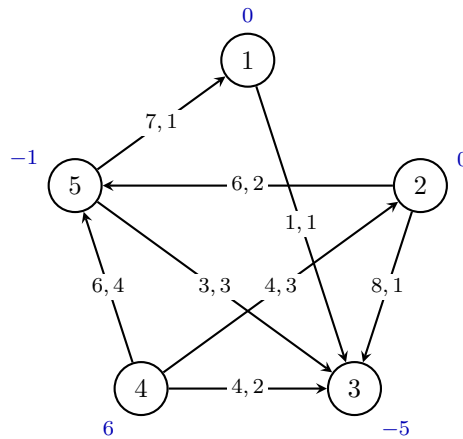
Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 3)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = -5, b_4 = 6, b_5 = -1$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij}, u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi. La tabella

riporta anche un flusso ammissibile $\tilde{x}$, ritenuto ottimale.

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 5)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 1)	(5, 3)
c_{ij}	1	8	6	4	4	6	7	3
u_{ij}	1	1	2	3	2	4	1	3
$\tilde{x}_{ij}$	0	0	0	0	2	4	0	3



Domande

1. Costruisci la rete residua $G(\tilde{x})$.
2. Eseguire Bellman-Ford su $G(\tilde{x})$ da $d^0 = \mathbf{0}$, come in (M3). Cosa concludi?
3. Fornire i potenziali π di (M3), calcolare i costi ridotti $\bar{c}_{ij}$ degli archi di A e verificare le condizioni di (M2) arco per arco.

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. Ciascuna voce è r, c dell’arco residuo:

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 5)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 1)	(5, 3)
$\tilde{x}_{ij}$	0	0	0	0	2	4	0	3
avanti $(i, j): r, c$	1, 1	1, 8	2, 6	3, 4	–	–	1, 7	–
indietro $(j, i): r, c$	–	–	–	–	2, –4	4, –6	–	3, –3

$G(\tilde{x})$ ha archi 8.

2. Ogni riga è un passaggio; accanto ad un’etichetta diminuita, il suo nuovo predecessore:

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	-6 (5)	-3 (3)
2	0	-2 (4)	0	-9 (5)	-3
3	0	-5 (4)	0	-9	-3
4	0	-5	0	-9	-3

Il passaggio 4 ripete le etichette del passaggio 3: $G(\tilde{x})$ non ha ciclo negativo, e per (M2) $\tilde{x}$ è ottimale, di costo 41 (Gurobi lo conferma).

3. Con $\pi_i = -d^4(i)$, spostato in modo che $\pi_5 = 0$: $\pi = (-3, 2, -3, 6, 0)$. I costi ridotti sono

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 5)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 5)	(5, 1)	(5, 3)
$\tilde{x}_{ij}$	0	0	0	0	2	4	0	3
u_{ij}	1	1	2	3	2	4	1	3
$\bar{c}_{ij}$	1	3	4	0	-5	0	4	0

- gli archi con $\bar{c}_{ij} > 0$, (1, 3), (2, 3), (2, 5), (5, 1), sono vuoti;
- gli archi con $\bar{c}_{ij} < 0$, (4, 3), sono saturati;
- nessun arco è strettamente compreso tra i suoi limiti.

Su ogni arco valgono le condizioni di (M2): π certifica l'ottimalità di $\tilde{x}$.

Bellman-Ford su $G(\tilde{x})$ si ferma dopo il passaggio di 4 senza cicli negativi; $\pi = (-3, 2, -3, 6, 0)$ offre costi ridotti che soddisfano (M2) e $\tilde{x}$ è ottimale con il costo 41.

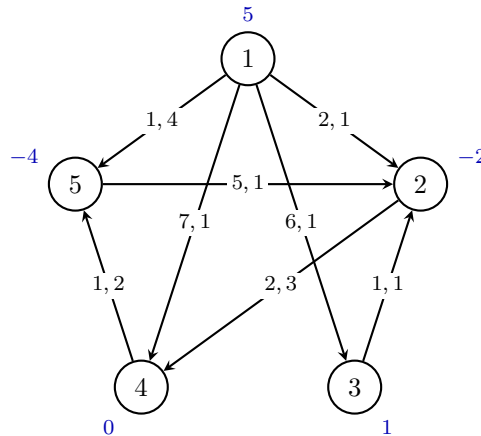
Esercizio 6.3 — L'algoritmo di annullamento del ciclo

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 5), (5, 2)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = 5$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -4$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij}, u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi. La tabella riporta anche un flusso ammissibile x^0 .

arco (i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 5)	(5, 2)
c_{ij}	2	6	7	1	2	1	1	5
u_{ij}	1	1	1	4	3	1	2	1
x_{ij}^0	1	0	1	3	1	1	2	1



Domande

1. Eseguire l'algoritmo di annullamento del ciclo da $\mathbf{x}^0$ con le regole (M3) e (M4). Per ogni iterazione fornire la rete residua, la tabella di Bellman–Ford, il ciclo e il nuovo flusso.
2. Riporta il flusso ottimale, il suo costo e i potenziali che lo certificano.
3. Quante iterazioni consente il $\mathbf{c}'\mathbf{x}^0 - z(\text{MCF})$ associato?

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Iterazione 1

Il flusso costa 22 e $G(\mathbf{x}^0)$ è

arco (i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 5)	(5, 2)
x_{ij}^0	1	0	1	3	1	1	2	1
avanti $(i, j): r, c$	–	1, 6	–	1, 1	2, 2	–	–	–
indietro $(j, i): r, c$	1, –2	–	1, –7	3, –1	1, –2	1, –1	2, –1	1, –5

Bellman–Ford fornisce (in grassetto le voci lette al contrario):

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$
0	0	0	0	0	0
1 e –7 (4) e –2 (4) e –1 (2) e –1 (5) e –5 (2)					
2 e –8 (4) e – 3 (4) e –3 (2) e –6 (5) e –7 (2)					
3 e –13 (4) e –8 (4) e –4 (2) e –8 (5) e – 8 (2)					
4 e –15 (4) e –10 (4) e –9 (2) e – 9 (5)	–13 (2)				
5 e – 16 (4) e –11 (4) e –11 (2) e –14 (5)	–15 (2)				

Nel passaggio 5 il nodo più piccolo la cui etichetta decresce è $j = 1$; il cammino è 5, 4, 2, 5, 4, 1 e il ciclo è $W = 5, 4, 2, 5$, con gli archi (5, 4) indietro di (4, 5), (4, 2) indietro di (2, 4), (2, 5) indietro di (5, 2):

$$c(W) = -1 - 2 - 5 = -8, \quad r(W) = \min\{2, 1, 1\} = 1.$$

L'aumento di $\theta = 1$ fornisce il flusso $\mathbf{x}^1$ di costo $22 + 1 \cdot (-8) = 14$.

Iterazione 2

Il flusso costa 14 e $G(\mathbf{x}^1)$ è

arco (i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 5)	(5, 2)
x_{ij}^1	1	0	1	3	0	1	1	0
avanti $(i, j): r, c$	–	1, 6	–	1, 1	3, 2	–	1, 1	1, 5
indietro $(j, i): r, c$	1, -2	–	1, -7	3, -1	–	1, -1	1, -1	–

Bellman–Ford fornisce (in grassetto le voci lette al contrario):

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$
0	0	0	0	0	0
1	-7 (4)	0	-1 (2)	-1 (5)	0
2	-8 (4)	0	-1	-1	-6 (1)
3 e -8 e -1 (5) e -2 (1) e -7 (5) e -7 (1)	-14 (4)	-2 (5)	-2	-8 (5)	-7
4	5 e -15 (4) e -2 e -8 (1) e -8 e -13 (1)				

Nel passaggio 5 il nodo più piccolo la cui etichetta diminuisce è $j = 1$; il cammino è 5, 4, 1, 5, 4, 1 e il ciclo è $W = 5, 4, 1, 5$, con gli archi (5, 4) indietro di (4, 5), (4, 1) indietro di (1, 4), (1, 5) avanti:

$$c(W) = -1 - 7 + 1 = -7, \quad r(W) = \min\{1, 1, 1\} = 1.$$

L'aumento di $\theta = 1$ fornisce il flusso $\mathbf{x}^2$ di costo $14 + 1 \cdot (-7) = 7$.

Iterazione 3

$G(\mathbf{x}^2)$ è

arco (i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 5)	(5, 2)
x_{ij}^2	1	0	0	4	0	1	0	0
avanti $(i, j): r, c$	–	1, 6	1, 7	–	3, 2	–	2, 1	1, 5
indietro $(j, i): r, c$	1, -2	–	–	4, -1	–	1, -1	–	–

e Bellman: Ford dà

k	$d^k(1)$	$d^k(2)$	$d^k(3)$	$d^k(4)$	$d^k(5)$
0	0	0	0	0	0
1	-2 (2)	0	-1 (2)	0	0
2	-2	0	-1	0	0

Passa 2 ripete le etichette: nessun ciclo negativo, **STOP**.

2. L'ultimo flusso è ottimale:

arco (i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 5)	(5, 2)
$\tilde{x}_{ij}$	1	0	0	4	0	1	0	0

con costo $z(\text{MCF}) = 7$ (lo conferma Gurobi). Le etichette dell'ultima tabella riportano, spostate in modo che $\pi_5 = 0$, i potenziali $\pi = (2, 0, 1, 0, 0)$; i costi ridotti degli archi dell'ultima rete residua sono tutti non negativi, come richiede (M2).

3. Il costo va da 22 a 7 e ogni iterazione lo abbassa di almeno 1: al massimo $22 - 7 = 15$ iterazioni. L'algoritmo necessita di 2, riducendo il costo di 8 e 7.

Vengono annullati due cicli, 5, 4, 2, 5 e 5, 4, 1, 5; il costo va da 22 a 14 e 7, il valore ottimale, certificato da $\pi = (2, 0, 1, 0, 0)$.

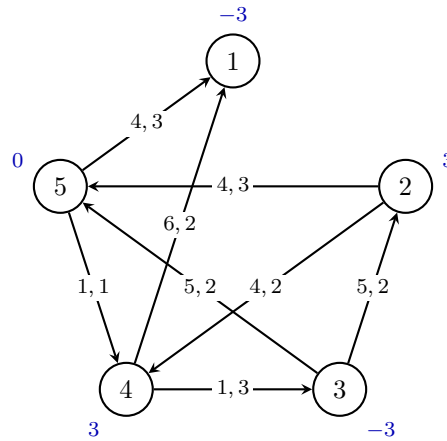
Esercizio 6.4 — L'algoritmo del cammino minimo successivo

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (5, 1), (5, 4)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = -3, b_2 = 3, b_3 = -3, b_4 = 3, b_5 = 0$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij}, u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi.

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
c_{ij}	4	4	5	5	6	1	4	1
u_{ij}	2	3	2	2	2	3	3	1



Domande

1. Eseguire l'algoritmo del percorso più breve successivo con le regole (M6). Per ogni iterazione fornire s , i costi ridotti, le distanze dell'algoritmo di Dijkstra, t , il percorso P , δ e i nuovi potenziali.
2. Fornire il flusso ottimale e il relativo costo e verificarne l'ottimalità con i potenziali finali.
3. Confronta il numero di iterazioni con il $D = \sum_{i:b_i > 0} b_i$ associato.

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Partiamo da $x = 0$ e $\pi = 0$.

Iterazione 1

$s = 2$, con $\pi = (0, 0, 0, 0, 0)$ e $e = (-3, 3, -3, 3, 0)$. I costi ridotti degli archi di A (arco avanti: $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$; arco indietro: $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$) sono

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
x_{ij}	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{c}_{ij}$	4	4	5	5	6	1	4	1

Dijkstra di s rende permanenti i nodi nell'ordine 2,4,5,3,1, con distanze $d = (8, 0, 5, 4, 4)$. I nodi deficitari sono 1, 3: $t = 3$, con percorso $P = 2, 4, 3$ di costo ridotto 5 e costo $c(P) = 5$. Quindi $\delta = \min\{3, 3, 2, 3\} = 2$, i nuovi potenziali sono $\pi = (-5, 0, -5, -4, -4)$ e il costo diventa 10.

Iterazione 2

$s = 2$, con $\pi = (-5, 0, -5, -4, -4)$ e $e = (-3, 1, -1, 3, 0)$. I costi ridotti degli archi di A (arco avanti: $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$; arco indietro: $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$) sono

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
x_{ij}	2	0	0	0	0	2	0	0
$\bar{c}_{ij}$	0	0	10	6	5	0	3	1

Dijkstra di s rende permanenti i nodi nell'ordine 2,5,4,3,1, con distanze $d = (3, 0, 1, 1, 0)$. I nodi deficitari sono 1, 3: $t = 3$, con percorso $P = 2, 5, 4, 3$ di costo ridotto 1 e costo $c(P) = 6$. Quindi $\delta = \min\{1, 1, 3, 1, 1\} = 1$, i nuovi potenziali sono $\pi = (-6, 0, -6, -5, -4)$ e il costo diventa 16.

Iterazione 3

$s = 4$, con $\pi = (-6, 0, -6, -5, -4)$ e $e = (-3, 0, 0, 3, 0)$. I costi ridotti degli archi di A (arco avanti: $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$; arco indietro: $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$) sono

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
x_{ij}	2	1	0	0	0	3	0	1
$\bar{c}_{ij}$	-1	0	11	7	5	0	2	0

Dijkstra di s rende permanenti i nodi nell'ordine 4,5,2,1, con distanze $d = (2, 0, +\infty, 0, 0)$. Il nodo deficitario è 1: $t = 1$, con percorso $P = 4, 5, 1$ di costo ridotto 2 e costo $c(P) = 3$. Quindi $\delta = \min\{3, 3, 1, 3\} = 1$, i nuovi potenziali sono $\pi = (-8, 0, -8, -5, -4)$ e il costo diventa 19.

Iterazione 4

$s = 4$, con $\pi = (-8, 0, -8, -5, -4)$ e $e = (-2, 0, 0, 2, 0)$. I costi ridotti degli archi di A (arco avanti: $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$; arco indietro: $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$) sono

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
x_{ij}	2	1	0	0	0	3	1	0
$\bar{c}_{ij}$	-1	0	13	9	3	-2	0	0

Dijkstra di s rende permanenti i nodi nell'ordine 4,2,5,1, con distanze $d = (1, 1, +\infty, 0, 1)$. Il nodo deficitario è 1: $t = 1$, con percorso $P = 4, 2, 5, 1$ di costo ridotto 1 e costo $c(P) = 4$. Quindi $\delta = \min\{2, 2, 2, 2, 2\} = 2$, i nuovi potenziali sono $\pi = (-9, -1, -9, -5, -5)$ e il costo diventa 27.

Ora $e = \mathbf{0}$: STOP.

2. Il flusso finale è

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
$\tilde{x}_{ij}$	0	3	0	0	0	3	3	0

con costo 27 (lo conferma Gurobi). Spostato in modo che $\pi_5 = 0$, i potenziali finali siano $\pi = (-4, 4, -4, 0, 0)$, con costi ridotti

arco (i, j)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 4)
$\bar{c}_{ij}$	0	0	13	9	2	-3	0	1

Ogni arco con $\bar{c}_{ij} > 0$ è vuoto e ogni arco con $\bar{c}_{ij} < 0$ è saturo: (M2) vale.

3. La fornitura totale è $D = 6$ e l'algoritmo necessita di iterazioni 4, poiché gli importi δ sono 2, 1, 1, 2, che si sommano a 6.

L'algoritmo del percorso più breve successivo invia le unità 6 lungo i percorsi 4, di costo 5, 6, 3, 4; il costo ottimale è 27.

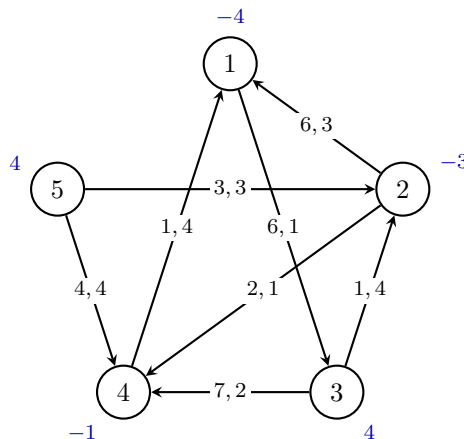
Esercizio 6.5 — Un primo flusso ammissibile e la scomposizione

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 8

$$A = \{(1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (5, 2), (5, 4)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = -4$, $b_2 = -3$, $b_3 = 4$, $b_4 = -1$, $b_5 = 4$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij} , u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi. La tabella fornisce anche il flusso ottimale $\tilde{x}$, calcolato con un solutore LP.

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 4)	(4, 1)	(5, 2)	(5, 4)
c_{ij}	6	6	2	1	7	1	3	4
u_{ij}	1	3	1	4	2	4	3	4
$\tilde{x}_{ij}$	0	0	1	4	0	4	0	4



Domande

1. Costruisci la rete ausiliaria di (M5) e calcola un flusso massimo con l'algoritmo Edmonds–Karp. La rete ha un flusso fattibile? Indicare il flusso x^0 sugli archi di A e il relativo costo.

2. Scrivi la circolazione $\mathbf{y}$ su $G(\mathbf{x}^0)$ tale che $\tilde{\mathbf{x}}$ sia $\mathbf{x}^0$ aumentata da $\mathbf{y}$, e scomponila in cicli con la regola di (M5).
3. Controllare che $\sum_h \theta_h c(W_h) = \mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\mathbf{x}^0$. Perché una scomposizione di $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ contiene un ciclo negativo ogni volta che un flusso fattibile $\mathbf{x}$ non è ottimale?

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. I nuovi archi sono $(s, 3)$ con capacità 4, $(s, 5)$ con capacità 4, $(1, t)$ con capacità 4, $(2, t)$ con capacità 3, $(4, t)$ con capacità 1 e $D = 8$. I cammini aumentanti dell'algoritmo Edmonds–Karp sono

percorso	nodi	unità
1	$s, 3, 2, t$	3
2	$s, 3, 4, t$	1
3	$s, 5, 2, 1, t$	3
4	$s, 5, 4, 1, t$	1

Il valore è $8 = D$: la rete ha un flusso fattibile, la restrizione a A

arco (i, j)	$(1, 3)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 2)$	$(3, 4)$	$(4, 1)$	$(5, 2)$	$(5, 4)$
x_{ij}^0	0	3	0	3	1	1	3	1

con costo 42.

2. Per il lemma sulla differenza di due flussi ammissibili, $\mathbf{y}$ è positivo sull'arco avanti (i, j) con $y_{ij} = \tilde{x}_{ij} - x_{ij}^0$ quando $\tilde{x}_{ij} > x_{ij}^0$, e sull'arco indietro (j, i) con $y_{ji} = x_{ij}^0 - \tilde{x}_{ij}$ quando $\tilde{x}_{ij} < x_{ij}^0$:

$$y_{12} = 3, \quad y_{24} = 1, \quad y_{25} = 3, \quad y_{32} = 1, \quad y_{41} = 3, \quad y_{43} = 1, \quad y_{54} = 3.$$

Partendo dal primo arco con $y > 0$ e lasciando ogni nodo lungo il suo arco con $y > 0$ della testa più piccola:

h	ciclo W_h	θ_h	$c(W_h)$
1	$1, 2, 4, 1$	1	$-6 + 2 + 1 = -3$
2	$1, 2, 5, 4, 1$	2	$-6 - 3 + 4 + 1 = -4$
3	$2, 5, 4, 3, 2$	1	$-3 + 4 - 7 + 1 = -5$

3. Infatti

$$\sum_h \theta_h c(W_h) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-5) = -16 = 26 - 42.$$

Se $\mathbf{x}$ non è ottimale, $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\mathbf{x} < 0$: una somma dei termini $\theta_h c(W_h)$ con $\theta_h > 0$ è negativa solo se alcuni $c(W_h)$ sono negativi. Questo è l'argomento alla base delle condizioni di ottimalità del ciclo negativo.

La portata massima ha valore 8 e fornisce una portata ammissibile di costo 42; la differenza con il flusso ottimale, di costo 26, si divide in 3 cicli di $G(\mathbf{x}^0)$ i cui costi sommati danno -16 .

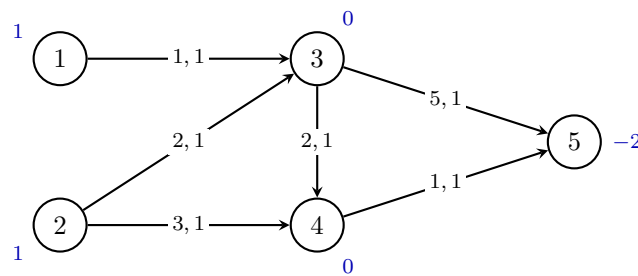
Esercizio 6.6 — Un controesempio e una dimostrazione

Consideriamo la rete $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$, gli archi 6

$$A = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\},$$

limiti inferiori dello zero e i saldi $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = 0, b_5 = -2$. Costi e capacità sono riportati in tabella e, come c_{ij}, u_{ij} , in figura; i saldi sono accanto ai nodi.

arco (i, j)	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(2, 4)$	$(3, 4)$	$(3, 5)$	$(4, 5)$
c_{ij}	1	2	3	2	5	1
u_{ij}	1	1	1	1	1	1



Nell'algoritmo del percorso più breve successivo, uno studente esegue l'algoritmo di Dijkstra con i costi c_{ij}^x della rete residua come lunghezze, invece dei costi ridotti.

Domande

1. Esegue la prima iterazione dell'algoritmo del percorso più breve successivo con le regole (M6).
2. Nella seconda iterazione, esegui l'algoritmo di Dijkstra da s con le lunghezze c_{ij}^x , come fa lo studente. Confronta le sue etichette con i costi minimi reali dei percorsi di s e fornisci il flusso che lo studente ottiene e il suo costo.
3. Completa la seconda iterazione con costi ridotti e fornisci il flusso ottimale.
4. Dimostrare: se $\tilde{\mathbf{x}}$ è un flusso ottimale e ogni ciclo di $G(\tilde{\mathbf{x}})$ ha un costo positivo, allora $\tilde{\mathbf{x}}$ è l'unico flusso ottimale.

Soluzione

Usiamo le regole (M1)–(M6) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Partiamo da $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$.

Iterazione 1

$s = 1$, con $\pi = (0, 0, 0, 0, 0)$ e $e = (1, 1, 0, 0, -2)$. I costi ridotti degli archi di A (arco avanti: $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$; arco indietro: $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$) sono

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)
x_{ij}	0	0	0	0	0	0
$\bar{c}_{ij}$	1	2	3	2	5	1

Dijkstra di s rende permanenti i nodi nell'ordine 1,3,4,5, con distanze $d = (0, +\infty, 1, 3, 4)$. Il nodo deficitario è 5: $t = 5$, con percorso $P = 1, 3, 4, 5$ di costo ridotto 4 e costo $c(P) = 4$. Quindi $\delta = \min\{1, 2, 1, 1, 1\} = 1$, i nuovi potenziali sono $\pi = (0, -4, -1, -3, -4)$ e il costo diventa 4.

Il nodo 1 ha inviato la sua unità; ora $e_2 > 0$, quindi la seconda iterazione inizia da $s = 2$.

2. Dopo la prima iterazione la rete residua è

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)
x_{ij}^1	1	0	0	1	0	1
avanti $(i, j): r, c$	–	1, 2	1, 3	–	1, 5	–
indietro $(j, i): r, c$	1, -1	–	–	1, -2	–	1, -1

e i relativi archi (3,1), (4,3), (5,4) hanno un costo negativo. Dijkstra con queste lunghezze rende permanenti i nodi nell'ordine 2,3,1,4,5 e assegna le etichette (1, 0, 2, 3, 7). I costi minimi reali di 2, calcolati con Bellman–Ford ($G(\mathbf{x}^1)$ non ha ciclo negativo), sono (0, 0, 1, 3, 6).

- Il nodo 3 diventa permanente con etichetta 2; successivamente il nodo 4, con etichetta 3, offre $3 - 2 = 1$ lungo l'arco negativo (4,3), ma il nodo 3 è già permanente e non viene aggiornato.
- Quindi l'etichetta di $t = 5$ è 7, attraverso il percorso 2,3,5, invece di 6, il costo di 2,4,3,5.

Aumentando lungo 2,3,5 con $\delta = 1$ lo studente ottiene il flusso fattibile

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)
x_{ij}	1	1	0	1	1	1

di costo 11, che non è ottimale.

3. Con i costi ridotti tutte le lunghezze sono non negative:

Iterazione 2

$s = 2$, con $\pi = (0, -4, -1, -3, -4)$ e $e = (0, 1, 0, 0, -1)$. I costi ridotti degli archi di A (arco avanti: $\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} < u_{ij}$; arco indietro: $-\bar{c}_{ij}$ se $x_{ij} > 0$) sono

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)
x_{ij}	1	0	0	1	0	1
$\bar{c}_{ij}$	0	5	4	0	2	0

Dijkstra di s rende permanenti i nodi nell'ordine 2,4,3,1,5, con distanze $d = (4, 0, 4, 4, 6)$. Il nodo deficitario è 5: $t = 5$, con percorso $P = 2, 4, 3, 5$ di costo ridotto 6 e costo $c(P) = 6$. Quindi $\delta = \min\{1, 1, 1, 1, 1\} = 1$, i nuovi potenziali sono $\pi = (-4, -4, -5, -7, -10)$ e il costo diventa 10.

Ora $e = \mathbf{0}$ e il flusso ottimale è

arco (i, j)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)
$\tilde{x}_{ij}$	1	0	1	0	1	1

di costo 10 (lo conferma Gurobi). Il percorso della seconda iterazione costa $c(P) = 6$, il vero costo minimo.

- Sia $\mathbf{x}'$ un flusso ottimale. Per il lemma sulla differenza di due flussi ammissibili, $\mathbf{c}'\mathbf{x}' - \mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{h=1}^k \theta_h c(W_h)$ per una scomposizione della circolazione $\mathbf{y}$ in cicli W_h di $G(\tilde{\mathbf{x}})$ con $\theta_h > 0$. Il lato sinistro è 0, poiché entrambi i flussi sono ottimali e ogni termine a destra è positivo per ipotesi. Quindi la somma non ha termini: $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}$.

Con i costi c_{ij}^x , l'algoritmo di Dijkstra assegna al nodo 5 l'etichetta 7 invece di 6 e lo studente termina con il costo 11; i costi ridotti rendono le lunghezze non negative e l'algoritmo termina con il costo ottimale 10.

Trasporto e assegnamento

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e i risultati del capitolo «Trasporto e assegnazione». Il le origini sono $1, 2, \dots, m$ con rifornimenti a_i , le destinazioni $m + 1, m + 2, \dots, m + n$ con richieste d_j e le celle (i, j) vengono presi in ordine riga-colonna.

- (F1) **Model.** $\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ con somme di riga a_i , somme di colonna d_j e $x \geq 0$; feasible if and only if $\sum_i a_i = \sum_j d_j$. Un eccesso di offerta va verso una destinazione fittizia costa 0.
- (F2) **Basi.** Una base è un insieme di celle $m + n - 1$ che formano uno albero ricoprente della rete bipartita (non percorso chiuso alternando righe e colonne). La sua soluzione fondamentale si trova foglia per foglia; è degenerato se basilare la cella ha valore 0.
- (F3) **Soluzioni iniziali.** Angolo nord-ovest: la cella attiva con la riga e la colonna più piccole. Minimo costo: la cella attiva più economica, la più piccola i e poi j in parità. L'importo è $\min\{\bar{a}_i, \bar{d}_j\}$; se $\bar{a}_i = 0$ ed è attiva un'altra riga, la riga viene barrata, altrimenti la colonna.
- (F4) **Metodo potenziale.** $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$ sulle celle base, $\pi_{m+n} = 0$; $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$. Ottimale se $\bar{c} \geq 0$, unico se $\bar{c}_{ij} > 0$ fuori base. Altrimenti entra il $\bar{c}_e$ più negativo (a pari merito: il più piccolo i , poi j); il ciclo inizia da e lungo la sua fila con segnaletica $+, -, +, \dots$; θ è il minimo sulle celle $-$ e il primo di essi con $\bar{x} = \theta$ in righe-colonne in ordine di foglie; il costo varia in base a $\theta \bar{c}_e$.
- (F5) **Algoritmo ungherese.** Sottrai i minimi di riga (π_i) e poi i minimi di colonna ($-\pi_j$). Trova un insieme massimo di zeri indipendenti (riga per riga, percorsi alternati, colonne in ordine crescente); se ha n zeri, fermati. Altrimenti, partendo dalle righe senza assegnazione, si tracciano i cammini alternati. Le righe non raggiunte e le colonne raggiunte definiscono le linee di copertura; δ è lo scoperto minimo, sottratto agli scoperti e sommato a quelli coperti due volte ($\pi_i += \delta$ sulle righe scoperte, $\pi_j += \delta$ su colonne coperte). Il valore duale $\sum_i \pi_i - \sum_j \pi_j$ cresce di $\delta(n - k)$ con le linee k .

Esercizio 7.1 — Prime soluzioni ammissibili di base

Tre stabilimenti 1, 2, 3 forniscono unità $a_1 = 30$, $a_2 = 40$, $a_3 = 20$ di un prodotto e tre clienti 4, 5, 6 richiedono unità $d_4 = 15$, $d_5 = 25$, $d_6 = 40$. Ogni domanda deve essere soddisfatta e ogni stabilimento spedisce al massimo la sua offerta. Le spese di spedizione unitarie sono:

c_{ij}	4	5	6	a_i
1	7	4	7	30
2	1	6	8	40
3	9	9	6	20
d_j	15	25	40	

Domande

1. L'istanza è bilanciata? Aggiungi una destinazione fittizia come in (F1) e scrivi la tabella dei trasporti.
2. Costruisci una prima soluzione ammissibile di base con la regola dell'angolo nord-ovest: elenca i passaggi, scrivi la soluzione nel tableau e calcolane il costo.
3. Costruisci una soluzione fattibile di base iniziale con la regola del costo minimo e confronta i due costi.
4. Verificare che entrambe le soluzioni abbiano celle base $m+n-1$ che formano uno albero ricoprente. Quanta scorta lascia inutilizzata ciascuna pianta nelle due soluzioni?

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. L'offerta totale è $30 + 40 + 20 = 90$ e la domanda totale è $15 + 25 + 40 = 80$: l'istanza non è bilanciata, con un eccesso di unità 10. Aggiungiamo la destinazione fittizia 7 con domanda $d_7 = 10$ e costi $c_{17} = c_{27} = c_{37} = 0$:

c_{ij}	4	5	6	7	a_i
1	7	4	7	0	30
2	1	6	8	0	40
3	9	9	6	0	20
d_j	15	25	40	10	90

2. I passaggi della regola dell'angolo nord-ovest sono

passo	cella	importo	barrato
1	(1, 4)	15	colonna 4
2	(1, 5)	15	riga 1
3	(2, 5)	10	colonna 5
4	(2, 6)	30	riga 2
5	(3, 6)	10	colonna 6
6	(3, 7)	10	riga 3, colonna 7

e la soluzione è

$\bar{x}_{ij}$	4	5	6	7	a_i
1	15	15			30
2		10	30		40
3			10	10	20
d_j	15	25	40	10	

Il suo costo è $7 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 30 + 6 \cdot 10 + 0 \cdot 10 = 525$.

3. I passaggi della regola del costo minimo sono

passo	cella	importo	barrato
1	(1, 7)	10	colonna 7
2	(2, 4)	15	colonna 4
3	(1, 5)	20	riga 1
4	(2, 5)	5	colonna 5
5	(3, 6)	20	riga 3
6	(2, 6)	20	riga 2, colonna 6

Nel passaggio 1 le tre celle fittizie costano 0 e la regola accetta (1, 7), la riga più piccola. La soluzione è

$\bar{x}_{ij}$	4	5	6	7	a_i
1		20		10	30
2	15	5	20		40
3			20		20
d_j	15	25	40	10	

Il suo costo è $4 \cdot 20 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 20 + 6 \cdot 20 = 405$, inferiore allo 525 della regola dell'angolo nord-ovest.

4. Ogni regola esegue passi $m+n-1 = 3+4-1 = 6$, una cella per passo; le celle formano un albero di copertura perché la linea incrociata di ogni passaggio non contiene celle successive. Il flusso sulla colonna fittizia è la fornitura non utilizzata: con la regola dell'angolo nord-ovest l'impianto 1 mantiene 0, l'impianto 2 mantiene 0 e l'impianto 3 mantiene 10; con la regola del costo minimo l'impianto 1 mantiene 10, l'impianto 2 mantiene 0 e l'impianto 3 mantiene 0.

Con la destinazione fittizia 7 ($d_7 = 10$, costi zero) la regola dell'angolo nord-ovest costa 525 e la regola del costo minimo 405.

Esercizio 7.2 — Il metodo potenziale

Consideriamo l'istanza di trasporto con origini 1, 2, 3, destinazioni 4, 5, 6, 7 e i costi, le forniture e le domande del tableau:

c_{ij}	4	5	6	7	a_i
1	4	6	8	8	30
2	2	2	7	7	15
3	8	7	3	2	25
d_j	15	5	45	5	70

Domande

1. Costruisci la soluzione ammissibile di base iniziale con la regola dell'angolo nord-ovest e calcolane il costo.
2. Calcola i potenziali della sua base ($\pi_7 = 0$) e i costi ridotti. La soluzione è ottimale?
3. Eseguire il metodo potenziale fino alla soluzione ottima, con le regole di (F4).
4. Scrivi i potenziali ottimali e verifica che il valore del modello duale sia uguale al costo ottimale. La soluzione ottimale è unica?

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. La regola dell'angolo nord-ovest dà

passo	cella	importo	barrato
1	(1, 4)	15	colonna 4
2	(1, 5)	5	colonna 5
3	(1, 6)	10	riga 1
4	(2, 6)	15	riga 2
5	(3, 6)	20	colonna 6
6	(3, 7)	5	riga 3, colonna 7

$\bar{x}_{ij}$	4	5	6	7	a_i
1	15	5	10		30
2			15		15
3			20	5	25
d_j	15	5	45	5	

con costo $4 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 345$.

- Da $\pi_7 = 0$ lungo le celle base: $\pi_1 = 7$, $\pi_2 = 6$, $\pi_3 = 2$, $\pi_4 = 3$, $\pi_5 = 1$, $\pi_6 = -1$, $\pi_7 = 0$. I costi ridotti delle celle non basiche si trovano nel primo tableau della risposta successiva; $\bar{c}_{25} = -3$ e $\bar{c}_{24} = -1$ sono negativi, quindi la soluzione non è ottimale.
- I tableaux contengono gli importi delle celle base (blu, grassetto) ed i costi ridotti delle altre celle; i potenziali sono ai margini.

Iterazione 1

Potenziali: $\pi_1 = 7$, $\pi_2 = 6$, $\pi_3 = 2$, $\pi_4 = 3$, $\pi_5 = 1$, $\pi_6 = -1$, $\pi_7 = 0$.

	4	5	6	7	π_i
1	15	5 $\ominus$	10 $\oplus$	1	7
2	-1	-3 $\oplus$	15 $\ominus$	1	6
3	9	6	20	5	2
π_j	3	1	-1	0	

- I costi ridotti negativi sono $\bar{c}_{25} = -3$, $\bar{c}_{24} = -1$; la cella (2, 5) entra nella base.
- Il ciclo è $(2, 5)^+$, $(2, 6)^-$, $(1, 6)^+$, $(1, 5)^-$.
- Le celle con segno $-$ hanno $\bar{x}_{26} = 15$ e $\bar{x}_{15} = 5$: $\theta = 5$ e la cella (1, 5) lascia la base.
- Il costo va da 345 a $345 + 5 \cdot (-3) = 330$.

Iterazione 2

Potenziali: $\pi_1 = 7, \pi_2 = 6, \pi_3 = 2, \pi_4 = 3, \pi_5 = 4, \pi_6 = -1, \pi_7 = 0$.

	4	5	6	7	π_i
1	15 $\ominus$	3	15 $\oplus$	1	7
2	-1 $\oplus$	5	10 $\ominus$	1	6
3	9	9	20	5	2
π_j	3	4	-1	0	

- L'unico costo ridotto negativo è $\bar{c}_{24} = -1$: la cella $(2, 4)$ entra nella base.
- Il ciclo è $(2, 4)^+, (2, 6)^-, (1, 6)^+, (1, 4)^-$.
- Le celle con segno $-$ hanno $\bar{x}_{26} = 10$ e $\bar{x}_{14} = 15$: $\theta = 10$ e la cella $(2, 6)$ lascia la base.
- Il costo va da 330 a $330 + 10 \cdot (-1) = 320$.

Iterazione 3

Potenziali: $\pi_1 = 7, \pi_2 = 5, \pi_3 = 2, \pi_4 = 3, \pi_5 = 3, \pi_6 = -1, \pi_7 = 0$.

	4	5	6	7	π_i
1	5	2	25	1	7
2	10	5	1	2	5
3	9	8	20	5	2
π_j	3	3	-1	0	

- Tutti i costi ridotti sono non negativi: la soluzione di base ammissibile è ottimale, con costo $z = 320$.
4. I potenziali ottimali sono $\pi_1 = 7, \pi_2 = 5, \pi_3 = 2, \pi_4 = 3, \pi_5 = 3, \pi_6 = -1, \pi_7 = 0$ e il valore duale è

$$\sum_i a_i \pi_i - \sum_j d_j \pi_j = 335 - 15 = 320,$$

pari al costo ottimale. Ogni cella non di base dispone di $\bar{c}_{ij} > 0$, quindi la soluzione ottimale è unica.

Dall'angolo nord-ovest (costo 345) il metodo potenziale fa ruotare 2 e raggiunge l'ottimo unico $\tilde{x}_{14} = 5, \tilde{x}_{16} = 25, \tilde{x}_{24} = 10, \tilde{x}_{25} = 5, \tilde{x}_{36} = 20, \tilde{x}_{37} = 5$, con costo 320.

Esercizio 7.3 — Degenerazione

Consideriamo l'istanza di trasporto con origini 1, 2, 3 e destinazioni 4, 5, 6:

c_{ij}	4	5	6	a_i
1	7	3	7	20
2	5	3	1	10
3	6	7	8	25
d_j	10	10	35	55

Domande

1. Costruisci la soluzione all'angolo nord-ovest. In quale passaggio una riga e una colonna vengono esaurite contemporaneamente? Quale cella base ha valore 0 e perché deve rimanere nella base?
2. Eseguire il metodo potenziale da questa soluzione, con le regole di (F4).
3. Quale perno è degenerato e cosa cambia in esso? Fornire la soluzione ottimale e il suo costo.

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. La regola dell'angolo nord-ovest dà

passo	cella	importo	barrato
1	(1, 4)	10	colonna 4
2	(1, 5)	10	riga 1
3	(2, 5)	0	colonna 5
4	(2, 6)	10	riga 2
5	(3, 6)	25	riga 3, colonna 6

Al passo 2 la cella (1, 5) scarica sia la riga 1 che la colonna 5. Viene barrata solo la riga e la cella successiva (2, 5) della colonna 5 ottiene l'importo 0:

$\bar{x}_{ij}$	4	5	6	a_i
1	10	10		20
2		0	10	10
3			25	25
d_j	10	10	35	

La soluzione, del costo 310, è degenerata. La base necessita di celle $m + n - 1 = 5$: senza (2, 5) le altre celle non si estendono sui nodi 6 e i potenziali non possono essere calcolati.

2. Iterazione 1

Potenziali: $\pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 8, \pi_4 = -6, \pi_5 = -2, \pi_6 = 0$.

	4	5	6	π_i
1	$10 \ominus$	$10 \oplus$	6	1
2	-2	$0 \ominus$	$10 \oplus$	1
3	$-8 \oplus$	-3	$25 \ominus$	8
π_j	-6	-2	0	

- I costi ridotti negativi sono $\bar{c}_{34} = -8, \bar{c}_{35} = -3, \bar{c}_{24} = -2$; la cella (3, 4) entra nella base.
- Il ciclo è $(3, 4)^+, (3, 6)^-, (2, 6)^+, (2, 5)^-, (1, 5)^+, (1, 4)^-$.
- Le celle con segno $-$ hanno $\bar{x}_{36} = 25, \bar{x}_{25} = 0$ e $\bar{x}_{14} = 10$: $\theta = 0$ e la cella (2, 5) lascia la base.
- Il perno è degenerato: la soluzione ed il suo costo $z = 310$ non cambiano, cambia solo la base.

Iterazione 2

Potenziali: $\pi_1 = 9, \pi_2 = 1, \pi_3 = 8, \pi_4 = 2, \pi_5 = 6, \pi_6 = 0$.

	4	5	6	π_i
1	$10 \ominus$	10	$-2 \oplus$	9
2	6	8	10	1
3	$0 \oplus$	5	$25 \ominus$	8
π_j	2	6	0	

- L'unico costo ridotto negativo è $\bar{c}_{16} = -2$: la cella (1, 6) entra nella base.
- Il ciclo è $(1, 6)^+, (1, 4)^-, (3, 4)^+, (3, 6)^-$.
- Le celle con segno $-$ hanno $\bar{x}_{14} = 10$ e $\bar{x}_{36} = 25$: $\theta = 10$ e la cella (1, 4) esce dalla base.
- Il costo va da 310 a $310 + 10 \cdot (-2) = 290$.

Iterazione 3

Potenziali: $\pi_1 = 7, \pi_2 = 1, \pi_3 = 8, \pi_4 = 2, \pi_5 = 4, \pi_6 = 0$.

	4	5	6	π_i
1	2	10	10	7
2	6	6	10	1
3	10	3	15	8
π_j	2	4	0	

- Tutti i costi ridotti sono non negativi: la soluzione di base ammissibile è ottimale, con costo $z = 290$.
3. Il primo pivot ha $\theta = 0$: la cella (3, 4) entra con valore 0 ed esce (2, 5); la soluzione ed il suo costo non cambiano, ma i nuovi potenziali mostrano un costo ridotto negativo. La soluzione ottimale è $\tilde{x}_{15} = 10$, $\tilde{x}_{16} = 10$, $\tilde{x}_{26} = 10$, $\tilde{x}_{34} = 10$, $\tilde{x}_{36} = 15$, con costo 290, ed è unica, poiché ogni cella non di base ha $\bar{c}_{ij} > 0$.

La soluzione dell'angolo nord-ovest è degenera (la cella base (2, 5) ha valore 0); il primo perno ha $\theta = 0$, il secondo perno raggiunge l'ottimale, di costo 290.

Esercizio 7.4 — L'algoritmo ungherese

Cinque lavoratori 1, 2, 3, 4, 5 devono essere assegnati a cinque lavori 6, 7, 8, 9, 10, un lavoro ciascuno, al costo totale minimo. I costi sono:

c_{ij}	6	7	8	9	10
1	6	10	10	5	3
2	11	12	9	7	7
3	8	1	12	6	11
4	12	7	10	8	2
5	3	4	11	6	1

Domande

1. Ridurre le righe e poi le colonne della matrice. Quali potenziali offrono le riduzioni e quale limite inferiore al costo ottimale?
2. Eseguire l'algoritmo ungherese: ad ogni iterazione fornire un insieme massimo di zeri indipendenti, le linee di (F5) e la regolazione δ .
3. Fornire l'assegnazione ottimale e il relativo costo, e verificare che i potenziali finali siano una soluzione duale ottimale.

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. I minimi di riga sono 3, 7, 1, 2, 1, quindi $\pi_1 = 3$, $\pi_2 = 7$, $\pi_3 = 1$, $\pi_4 = 2$, $\pi_5 = 1$:

$c_{ij} - \pi_i$	6	7	8	9	10
1	3	7	7	2	0
2	4	5	2	0	0
3	7	0	11	5	10
4	10	5	8	6	0
5	2	3	10	5	0

I minimi di colonna sono quindi 2, 0, 2, 0, 0, quindi $\pi_6 = -2$ e $\pi_8 = -2$, e gli altri π_j sono 0. Il valore duale $\sum_i \pi_i - \sum_j \pi_j = 18$ rappresenta un limite inferiore al costo di ogni incarico.

2. In ciascuna matrice gli zeri indipendenti sono riquadrati, le linee blu e la cella di δ rossa; i potenziali sono ai margini.

Iterazione 1

$\bar{c}_{ij}$	6	7	8	9	10	π_i
1	1	7	5	2	0	3
2	2	5	0	0	0	7
3	5	0	9	5	10	1
4	8	5	6	6	0	2
5	0	3	8	5	0	1
π_j	-2	0	-2	0	0	

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 4: (1, 10), (2, 8), (3, 7), (5, 6).
- Le righe $4 < 5$ (blu) sono le righe 2, 3 e 5 e la colonna 10.
- La voce minima scoperta è $\delta = 1$, nella cella (1, 6) (rossa). Lo sottraiamo dalle voci scoperte e lo aggiungiamo alle voci coperte due volte: π_i cresce di 1 per le righe scoperte 1 e 4 e π_j cresce di 1 per la colonna coperta 10. Il valore duale cresce di $1 \cdot (5 - 4) = 1$.

Iterazione 2

$\bar{c}_{ij}$	6	7	8	9	10	π_i
1	0	6	4	1	0	4
2	2	5	0	0	1	7
3	5	0	9	5	11	1
4	7	4	5	5	0	3
5	0	3	8	5	1	1
π_j	-2	0	-2	0	1	

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 4: (1, 6), (2, 8), (3, 7), (4, 10).
- Le righe 4 < 5 (blu) sono le righe 2 e 3 e le colonne 6 e 10.
- La voce minima scoperta è $\delta = 1$, nella cella (1, 9) (rossa). Lo sottraiamo dalle voci scoperte e lo aggiungiamo alle voci coperte due volte: π_i cresce di 1 per le righe scoperte 1, 4 e 5 e π_j cresce di 1 per le colonne coperte 6 e 10. Il valore duale cresce di $1 \cdot (5 - 4) = 1$.

Iterazione 3

$\bar{c}_{ij}$	6	7	8	9	10	π_i
1	0	5	3	0	0	5
2	3	5	0	0	2	7
3	6	0	9	5	12	1
4	7	3	4	4	0	4
5	0	2	7	4	1	2
π_j	-1	0	-2	0	2	

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 5: (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 10), (5, 6).
 - Formano un'assegnazione a costo ridotto pari a zero: l'algoritmo si ferma e l'assegnazione è ottimale.
3. L'assegnazione ottimale è $1 \rightarrow 9, 2 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 7, 4 \rightarrow 10, 5 \rightarrow 6$, con costo $5+9+1+2+3 = 20$. I potenziali finali danno $\sum_i \pi_i - \sum_j \pi_j = 19 - (-1) = 20$, pari al costo; tutti i costi ridotti sono non negativi, quindi i potenziali sono duali ed entrambe le soluzioni sono ottimali. L'ottimale è unico, come conferma l'enumerazione delle assegnazioni 120.

Le riduzioni danno il limite 18; due aggiustamenti, con $\delta = 1$ e $\delta = 1$, portano all'assegnazione ottimale $1 \rightarrow 9, 2 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 7, 4 \rightarrow 10, 5 \rightarrow 6$, di costo 20.

Esercizio 7.5 — Basi, cicli e regola del costo minimo

Consideriamo l'istanza di trasporto con origini 1, 2, 3 e destinazioni 4, 5, 6:

c_{ij}	4	5	6	a_i
1	2	4	1	30
2	4	8	5	20
3	9	1	1	15
d_j	35	10	20	65

e i tre gruppi di celle

$$T_1 = \{(1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}, \quad T_2 = \{(1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\},$$

$$T_3 = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)\}.$$

Domande

- Quali tra T_1 , T_2 , T_3 sono basi? Per ciascuna base calcola la sua soluzione di base e indica se è ammissibile.
- Dimostrare che aggiungendo una costante k a tutti i costi della riga i si aggiunge $k a_i$ al costo di ogni soluzione fattibile, in modo che le soluzioni ottime non cambino. Cosa succede aggiungendo k ad una colonna j ?
- Costruisci la soluzione a costo minimo e decidi con i potenziali se è ottimale. La regola del costo minimo è sempre ottimale?

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

- Ogni insieme ha celle $m + n - 1 = 5$, quindi è una base esattamente quando non contiene cicli (F2).
 - T_1 non ha ciclo: è uno albero ricoprente. Anta per anta, anta 1 dà $x_{14} = 30$, anta 4 dà $x_{24} = 5$, anta 2 dà $x_{26} = 15$, anta 5 dà $x_{35} = 10$, anta 3 dà $x_{36} = 5$: la soluzione base è fattibile.
 - T_2 non ha ciclo: è uno albero ricoprente. Anta per anta, anta 1 dà $x_{16} = 30$, anta 4 dà $x_{24} = 35$, anta 2 dà $x_{26} = -15$, anta 5 dà $x_{35} = 10$, anta 3 dà $x_{36} = 5$: il valore -15 è negativo e la soluzione di base non è fattibile.
 - T_3 contiene le celle $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(2, 6)$, che formano il ciclo 2, 5, 3, 6, 2 alternando righe e colonne: le loro colonne sono linearmente dipendenti e T_3 non è un base.
- Lascia che $c'_{ij} = c_{ij} + k$ per ogni j e $c'_{hj} = c_{hj}$ per $h \neq i$. Per ogni x ammissibile

$$\sum_h \sum_j c'_{hj} x_{hj} = \sum_h \sum_j c_{hj} x_{hj} + k \sum_j x_{ij} = \sum_h \sum_j c_{hj} x_{hj} + k a_i,$$

perché la riga i di una soluzione fattibile sommata dà a_i . Tutti i costi cambiano della stessa costante, quindi l'ordine delle soluzioni ammissibili e di quelle ottimali non cambia. Allo stesso modo, aggiungendo k alla colonna j si aggiunge $k d_j$ a ogni costo. Nel metodo potenziale si tratta di una modifica di π_i con k (o di π_j con $-k$), fino alla normalizzazione, e i costi ridotti non cambiano.

3. La regola del costo minimo dà

passo	cella	importo	barrato
1	(1, 6)	20	colonna 6
2	(3, 5)	10	colonna 5
3	(1, 4)	10	riga 1
4	(2, 4)	20	riga 2
5	(3, 4)	5	riga 3, colonna 4

$\bar{x}_{ij}$	4	5	6	a_i
1	10		20	30
2	20			20
3	5	10		15
d_j	35	10	20	

con costo 175. Le sue potenziali e i costi ridotti lo sono

	4	5	6	π_i
1	$10 \oplus$	10	$20 \ominus$	1
2	20	12	2	3
3	$5 \ominus$	10	$-7 \oplus$	8
π_j	-1	7	0	

- L'unico costo ridotto negativo è $\bar{c}_{36} = -7$: la cella (3, 6) entra nella base.
- Il ciclo è $(3, 6)^+$, $(3, 4)^-$, $(1, 4)^+$, $(1, 6)^-$.
- Le celle con segno $-$ hanno $\bar{x}_{34} = 5$ e $\bar{x}_{16} = 20$: $\theta = 5$ e la cella (3, 4) lascia la base.
- Il costo va da 175 a $175 + 5 \cdot (-7) = 140$.

La soluzione non è ottimale: un perno dà l'ottimo, di costo 140. La regola del costo minimo considera una cella alla volta e non è sempre ottimale; questo caso è un controesempio.

T_1 è una base con una soluzione base ammissibile, T_2 una base con valore negativo, T_3 contiene un ciclo. La soluzione di costo minimo (costo 175) non è ottimale: l'ottimale è 140.

Esercizio 7.6 — Un incarico di massimo profitto

Quattro venditori 1, 2, 3, 4 devono essere assegnati a quattro regioni 5, 6, 7, 8, una regione ciascuna. I profitti attesi p_{ij} sono:

p_{ij}	5	6	7	8
1	9	4	5	1
2	8	5	3	3
3	2	1	1	1
4	2	2	6	8

Cerchiamo un incarico di massimo profitto totale.

Domande

1. Trasformare il problema in un problema di assegnazione di costo minimo con costi non negativi.
2. Risolverlo con l'algoritmo ungherese.
3. Dare l'assegnazione del massimo profitto e del relativo profitto.

Soluzione

Usiamo le regole (F1)–(F5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Il profitto più grande è $p_{\max} = 9$. Con $c_{ij} = 9 - p_{ij}$ ogni incarico costa $4 \cdot 9$ meno il profitto, quindi minimizzare il costo massimizza il profitto:

c_{ij}	5	6	7	8
1	0	5	4	8
2	1	4	6	6
3	7	8	8	8
4	7	7	3	1

2. I minimi di riga sono 0, 1, 7, 1 e poi i minimi di colonna 0, 1, 1, 0:

Iterazione 1

$\bar{c}_{ij}$	5	6	7	8	π_i
1	0	4	3	8	0
2	0	2	4	5	1
3	0	0	0	1	7
4	6	5	1	0	1
π_j	0	-1	-1	0	

- Un insieme massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 3: (1, 5), (3, 6), (4, 8).
- Le linee 3 < 4 (blu) sono le righe 3 e 4 e la colonna 5.
- La voce minima scoperta è $\delta = 2$, nella cella (2, 6) (rossa). Lo sottraiamo dalle voci scoperte e lo aggiungiamo alle voci coperte due volte: π_i cresce di 2 per le righe scoperte 1 e 2 e π_j cresce di 2 per la colonna coperta 5. Il valore duale cresce di $2 \cdot (4 - 3) = 2$.

Iterazione 2

$\bar{c}_{ij}$	5	6	7	8	π_i
1	0	2	1	6	2
2	0	0	2	3	3
3	2	0	0	1	7
4	8	5	1	0	1
π_j	2	-1	-1	0	

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 4: (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8).
- Formano un'assegnazione a costo ridotto zero: l'algoritmo si ferma e l'assegnazione è ottimale.

3. L'assegnazione ottimale è $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 7, 4 \rightarrow 8$, con costo 13 e profitto

$$9 + 5 + 1 + 8 = 23 = 4 \cdot 9 - 13.$$

L'enumerazione delle assegnazioni 24 conferma che si tratta dell'unico ottimale.

Con $c_{ij} = 9 - p_{ij}$ l'algoritmo ungherese dà $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 7, 4 \rightarrow 8$, con profitto 23.