



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione su reti

Esercizi 1 — Grafi

Esercizi svolti sui capitoli del volume 1, grafi: ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti

Anno accademico 2026–2027

Indice

1 Grafi

2



Grafi

Regole utilizzate in questi esercizi

Le definizioni e gli algoritmi del capitolo «[Grafi](#)», per un grafo orientato $G = (N, A)$ con $n = |N|$ e $m = |A|$.

(G1) **Matrice di incidenza.** Gli archi sono numerati $a_1, a_2, \dots, a_m$ in ordine lessicografico e

$$b_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{se } i \text{ è la coda di } a_k, \\ -1 & \text{se } i \text{ è la testa di } a_k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(G2) **Liste.** La lista di adiacenze $L(i)$ contiene i successori di i , per indice crescente.

(G3) **Componenti.** $R(i)$ è l'insieme dei nodi raggiungibili da i , $R'(i)$ lo stesso insieme nel grafo invertito e il componente fortemente connesso di i è $S(i) = R(i) \cap R'(i)$.

(G4) **Alberi e rango.** $n - 1$ archi formano uno albero ricoprente se e solo se sono aciclici (o connessi tutti i nodi); con componenti collegati k , $\text{rank}(\mathbf{B}) = n - k$.

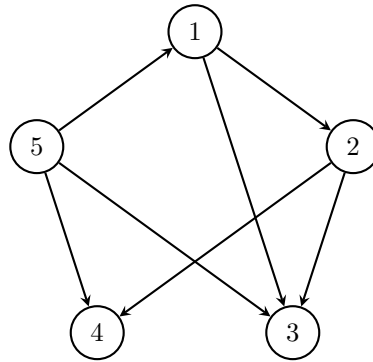
(G5) **Cerca.** Un nodo viene etichettato quando entra in $LIST$. Il BFS seleziona il primo nodo di $LIST$, il DFS l'ultimo; il nodo selezionato i etichetta il primo nodo senza etichetta j di $L(i)$, con $\text{pred}(j) = i$, oppure lascia $LIST$ se non ce n'è.

Esercizio 1.1 — Rappresentazioni di un grafo

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 5\}$ e gli archi 7

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 4)\},$$

disegnato qui sotto.



Domande

1. Numerare gli archi come in (G1) e scrivere la matrice di incidenza nodo-arco $\mathbf{B}$.
2. Scrivi le liste di adiacenza e la lista degli archi di G .
3. Calcola il grado esterno e quello interno di ogni nodo e il vettore $\mathbf{Bx}$ per $x_{ij} = 1$ su ogni arco.
4. Quante voci memorizzano la matrice di adiacenza, la matrice di incidenza, la lista di archi e le liste di adiacenza?

Soluzione

Usiamo le regole (G1)–(G5) del riquadro all’inizio di questi esercizi.

1. Gli archi in ordine lessicografo sono $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (1, 3)$, $a_3 = (2, 3)$, $a_4 = (2, 4)$, $a_5 = (5, 1)$, $a_6 = (5, 3)$, $a_7 = (5, 4)$. Ogni colonna ha +1 nella riga della coda e -1 nella riga della testa:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	1	1	0	0	-1	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0
3	0	-1	-1	0	0	-1	0
4	0	0	0	-1	0	0	-1
5	0	0	0	0	1	1	1

2. Le liste di adiacenza e la lista di archi sono:

i	$L(i)$
1	2, 3
2	3, 4
3	(vuoto)
4	(vuoto)
5	1, 3, 4

arco	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
coda	1	1	2	2	5	5	5
testa	2	3	3	4	1	3	4

3. I gradi sono i numeri di +1 e di -1 in ciascuna riga di $\mathbf{B}$:

nodo i	1	2	3	4	5
$\deg^+(i)$	2	2	0	0	3
$\deg^-(i)$	1	1	3	2	0

Entrambe le righe si sommano a $m = 7$. La riga i di $\mathbf{B}\mathbf{x}$ è $\deg^+(i) - \deg^-(i)$:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = (1, 1, -3, -2, 3)'$$

Il nodo 5 non ha un arco in entrata e i nodi 3, 4 non hanno un arco in uscita.

4. La matrice di adiacenza memorizza le voci $n^2 = 25$, la matrice di incidenza $nm = 35$, l'elenco di archi $2m = 14$ e gli elenchi di adiacenza $n + m = 12$.

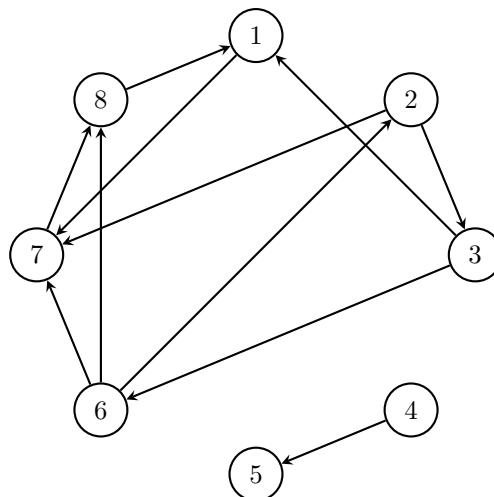
Ogni colonna di $\mathbf{B}$ ha uno $+1$ e uno -1 , quindi la somma delle sue righe dà zero; gli elenchi di adiacenza sono la rappresentazione più piccola, con voci 12.

Esercizio 1.2 — Componenti connessi e fortemente connessi

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 8\}$ e gli archi 11

$$A = \{(1, 7), (2, 3), (2, 7), (3, 1), (3, 6), (4, 5), (6, 2), (6, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 1)\},$$

disegnato qui sotto.



Domande

1. Trova le componenti connesse di G (del suo grafo non orientato sottostante). G è debolmente connesso?
2. Calcola $R(1)$ e $R'(1)$ e il componente fortemente connesso $S(1)$.
3. Trova tutti i componenti fortemente connessi di G . G è fortemente connesso?

Soluzione

Usiamo le regole (G1)–(G5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Trascurando l'orientamento, i vertici si dividono nelle componenti $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $\{4, 5\}$: nessun lato ne unisce due. G ha componenti $k = 2$, quindi non è debolmente connesso.
2. Seguendo gli archi da 1 si ottiene $R(1) = \{1, 7, 8\}$; seguendoli a ritroso (nel grafo invertito) otteniamo $R'(1) = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. Quindi

$$S(1) = R(1) \cap R'(1) = \{1, 7, 8\}.$$

3. Per un nodo h di ciascun componente (il più piccolo non ancora assegnato), da (G3):

h	$R(h)$	$R'(h)$	$S(h)$
1	$\{1, 7, 8\}$	$\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$	$\{1, 7, 8\}$
2	$\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$	$\{2, 3, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$
4	$\{4, 5\}$	$\{4\}$	$\{4\}$
5	$\{5\}$	$\{4, 5\}$	$\{5\}$

I componenti 4 fortemente connessi sono $\{1, 7, 8\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$. Ce n'è più di uno, quindi G non è fortemente connesso.

G dispone di componenti 2 collegati e componenti 4 fortemente connessi; ogni componente fortemente connessa si trova all'interno di una componente connessa.

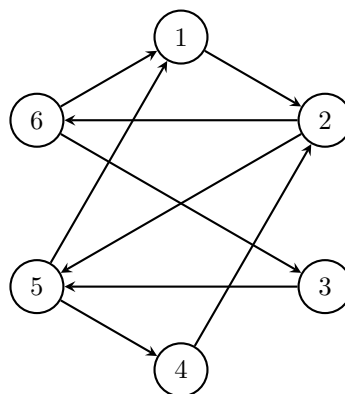
Esercizio 1.3 — Alberi e rango della matrice di incidenza

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 6\}$ e gli archi 9

$$A = \{(1, 2), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (4, 2), (5, 1), (5, 4), (6, 1), (6, 3)\},$$

disegnato di seguito e i due set di archi 5

$$F_1 = \{(1, 2), (3, 5), (5, 4), (6, 1), (6, 3)\}, \quad F_2 = \{(2, 5), (2, 6), (3, 5), (4, 2), (6, 3)\}.$$



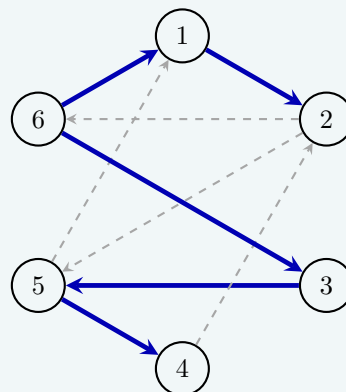
Domande

1. Calcola il rango della matrice di incidenza nodo-arco $\mathbf{B}$ di G , senza scrivere la matrice.
2. Decidere se F_1 e F_2 sono albero ricoprente di G .
3. Per l'insieme che non è uno albero ricoprente, trovare un ciclo e una combinazione lineare delle sue colonne di $\mathbf{B}$ uguali a $\mathbf{0}$.
4. Trovare il ciclo fondamentale dell'arco $(2, 5)$ rispetto allo albero ricoprente F_1 e ai suoi archi all'indietro.
5. Togliere da G tutti gli archi incidenti al nodo 6. Qual è il rango della nuova matrice di incidenza?

Soluzione

Usiamo le regole (G1)–(G5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Il grafo non orientato sottostante è connesso ($k = 1$): da (G4), $\text{rank}(\mathbf{B}) = 6 - 1 = 5$.
2. F_1 ha archi 5 e nessun ciclo, quindi è uno albero ricoprente di (G4); i suoi lati collegano tutti i nodi.



F_2 ha archi 5, ma i suoi lati hanno le componenti $\{1\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$: non collega tutti i nodi, quindi contiene un ciclo e non è uno albero ricoprente.

3. Gli archi di F_2 contengono il ciclo 2, 5, 3, 6, 2. Percorrendolo gli archi $(2, 5)$ avanti, $(3, 5)$ indietro, $(6, 3)$ indietro, $(2, 6)$ indietro danno, con $+1$ per gli archi avanti e -1 per quelli indietro,

$$B_{a_2} - B_{a_4} - B_{a_6} - B_{a_3} = \mathbf{0},$$

con gli archi numerati come in (G1). Le colonne di F_2 sono linearmente dipendenti.

4. Nell'albero F_1 il percorso da 5 a 2 è 5, 3, 6, 1, 2. Il ciclo fondamentale, scritto dalla coda di $(2, 5)$, è 2, 5, 3, 6, 1, 2; i suoi archi all'indietro sono $(3, 5)$, $(6, 3)$.
5. Senza gli archi incidenti su 6, il nodo 6 è isolato e il grafo ha i componenti $k = 2$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{6\}$; quindi il rango è $6 - 2 = 4$.

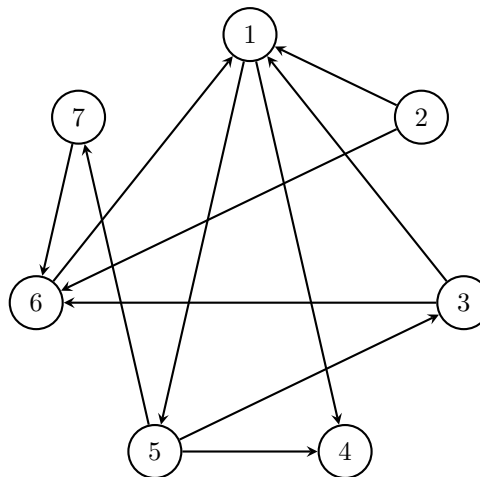
$\text{rank}(\mathbf{B}) = 5$; F_1 è uno albero ricoprente, F_2 no, e le sue colonne soddisfano una relazione lineare data dal suo ciclo.

Esercizio 1.4 — Ricerca in ampiezza

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 7\}$ e gli archi 11

$$A = \{(1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 6), (3, 1), (3, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 7), (6, 1), (7, 6)\},$$

disegnato qui sotto.



Domande

1. Scrivi le liste di adiacenza di G .
2. Esegui la ricerca in ampiezza da $s = 1$: fornisci *LIST* dopo ogni iterazione e l'ordine di etichettatura.
3. Disegna l'albero precedente e assegna, per ogni nodo etichettato j , il numero $d(j)$ di archi del percorso dell'albero da 1 a j .
4. Quali nodi non sono raggiungibili da 1? Fornire un percorso diretto con il numero minimo di archi da 1 a 6.

Soluzione

Usiamo le regole (G1)–(G5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. I successori di ciascun nodo, per indice crescente:

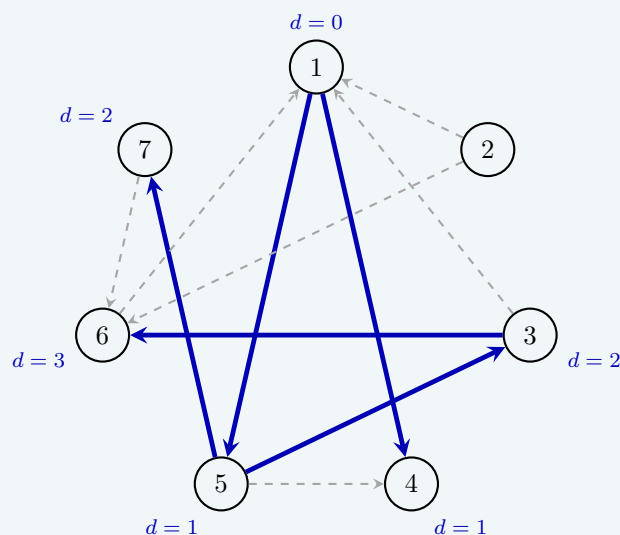
i	$L(i)$
1	4, 5
2	1, 6
3	1, 6
4	(vuoto)
5	3, 4, 7
6	1
7	6

2. La ricerca seleziona il primo nodo di *LIST*:

iterazione e i selezionato e azione	<i>LIST</i>		
1	1	etichetta 4, $pred(4) = 1$	1, 4
2	1	etichetta 5, $pred(5) = 1$ (4 è etichettato)	1, 4, 5
3	1	rimuovi 1 (4, 5 sono etichettati)	4, 5
4	4	rimuovi 4	5
5	5	etichetta 3, $pred(3) = 5$	5, 3
6	5	etichetta 7, $pred(7) = 5$ (3, 4 sono etichettati)	5, 3, 7
7	5	rimuovi 5 (3, 4, 7 sono etichettati)	3, 7
8	3	etichetta 6, $pred(6) = 3$ (1 è etichettato)	3, 7, 6
9	3	rimuovi 3 (1, 6 sono etichettati)	7, 6
10	7	rimuovi 7 (6 è etichettato)	6
11	6	rimuovi 6 (1 è etichettato)	(vuoto)

L'ordine di etichettatura è 1, 4, 5, 3, 7, 6.

3. Gli archi $(pred(j), j)$ sono (1, 4), (1, 5), (5, 3), (5, 7), (3, 6) (blu); accanto a ciascun nodo il valore $d(j)$:



4. Il nodo 2 non è etichettato, quindi non è raggiungibile da 1 per la correttezza della ricerca. Il BFS fornisce il numero minimo di archi: il percorso dell'albero 1, 5, 3, 6 ha archi $d(6) = 3$ e nessun percorso diretto da 1 a 6 è più breve.

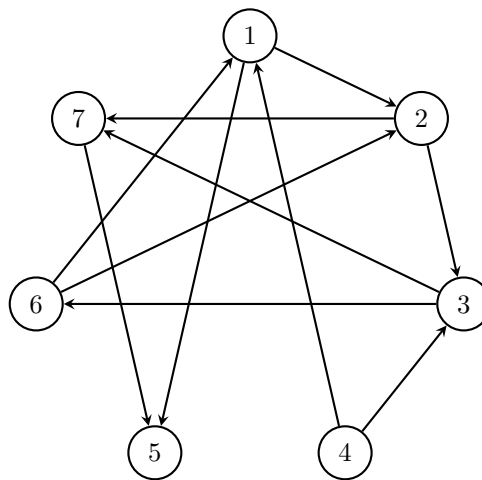
Il BFS etichetta i nodi nell'ordine 1, 4, 5, 3, 7, 6, in ordine non decrescente di d ; $R(1) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Esercizio 1.5 — Ricerca in profondità

Consideriamo il grafo orientato $G = (N, A)$ con $N = \{1, 2, \dots, 7\}$ e gli archi 11

$$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (7, 5)\},$$

disegnato qui sotto.



Domande

1. Esegui la ricerca approfondita da $s = 1$: fornisci *LIST* dopo ogni iterazione e l'ordine di etichettatura.
2. Disegna l'albero precedente del DFS.
3. Confrontare il percorso da 1 a 5 nell'albero DFS con il numero minimo di archi da 1 a 5.

Soluzione

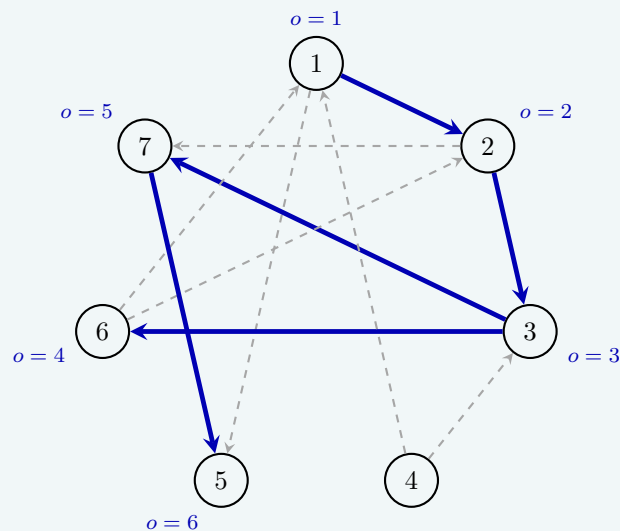
Usiamo le regole (G1)–(G5) del riquadro all'inizio di questi esercizi.

1. Gli elenchi di adiacenza sono $L(1) = \{2, 5\}$, $L(2) = \{3, 7\}$, $L(3) = \{6, 7\}$, $L(4) = \{1, 3\}$, $L(5) = \emptyset$, $L(6) = \{1, 2\}$, $L(7) = \{5\}$. La ricerca seleziona l'ultimo nodo di *LIST*:

iterazione e i	selezionato e azione	LIST
1	1	etichetta 2, $pred(2) = 1$
2	2	etichetta 3, $pred(3) = 2$
3	3	etichetta 6, $pred(6) = 3$
4	6	rimuovi 6 (1, 2 sono etichettati)
5	3	etichetta 7, $pred(7) = 3$ (6 è etichettato)
6	7	etichetta 5, $pred(5) = 7$
7	5	rimuovi 5
8	7	rimuovi 7 (5 è etichettato)
9	3	rimuovi 3 (6, 7 sono etichettati)
10	2	rimuovi 2 (3, 7 sono etichettati)
11	1	rimuovi 1 (2, 5 sono etichettati)

L'ordine di etichettatura è 1, 2, 3, 6, 7, 5.

2. Gli archi $(pred(j), j)$ sono (1, 2), (2, 3), (3, 6), (3, 7), (7, 5) (blu); accanto a ciascun nodo la sua posizione $o(j)$ nell'ordine di etichettatura:



3. L'albero DFS raggiunge 5 lungo 1, 2, 3, 7, 5, con archi 4, mentre il BFS da 1 dà $d(5) = 1$: l'albero DFS non fornisce percorsi con il numero minimo di archi.

Il DFS etichetta gli stessi nodi del BFS, $R(1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, ma nell'ordine 1, 2, 3, 6, 7, 5 e con un albero predecessore diverso.