



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione su reti

Volume 5 — Gestione dei progetti

La gestione dei progetti con il metodo del cammino critico: reti di progetto, tempi al più presto e al più tardi, margini e cammini critici.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti

Anno accademico 2026–2027

Indice

9	Gestione dei progetti	2
9.1	Progetti e reti di progetto	3
9.2	Percorsi e percorsi critici	7
9.3	Il passaggio in avanti: i primi tempi	8
9.4	Il passaggio all'indietro: ultimi tempi	12
9.5	Margini e attività critiche	15
9.6	Il metodo del percorso critico	19
9.7	Il modello di programmazione lineare	21
9.8	Due percorsi critici e cambi di durata	23
9.9	Errori tipici	26
9.10	In sintesi	26

Gestione dei progetti

Prerequisiti

- Dal [Capitolo 1 «Grafì»](#): grafi orientati, cammini diretti e cicli.
- Dal [Capitolo 3 «Percorsi più brevi»](#): ordinamenti topologici, cammini minimi e massimi in grafi aciclici, potenziali, costi ridotti, modello lineare del cammino minimo e relativo duale.
- Dal modulo Programmazione lineare, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un modello LP e il teorema della dualità debole.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- descrivere un progetto tramite attività, durate e precedenze e rappresentarlo con una rete, usando i nodi INIZIO e FINE;
- calcolare i tempi minimi e massimi di inizio e fine con i passaggi in avanti e all'indietro, e dimostrare che la durata minima del progetto coincide con la lunghezza di un percorso critico;
- calcolare i margini totali e liberi e individuare le attività e i percorsi critici;
- disegnare il diagramma di Gantt di una pianificazione;
- scrivere il modello LP della durata del progetto e il suo modello duale di percorso più lungo;
- prevedere l'effetto di un cambiamento di una durata sulla durata del progetto.

9.1 Progetti e reti di progetto

Definizione 9.1: progetto

Un **progetto** è un insieme di n **attività**, numerate $1, 2, \dots, n$, con i seguenti dati.

- Ogni attività j ha una **durata** $d_j \in \mathbb{Q}_{>0}$.
- Alcune coppie (i, j) di attività sono **precedenze**: l'attività i è un **immediato predecessore** di attività j e j possono iniziare solo al termine di i . Un'attività con diversi predecessori immediati può iniziare solo quando tutti saranno finiti.

- Per descrivere un progetto abbiamo bisogno di tre tipi di informazioni: le **attività**, al livello desiderato di dettaglio; le **precedenze**, ovvero gli immediati predecessori di ciascuna attività; le **durate**, quello è una stima del tempo impiegato da ciascuna attività.
- In tutto il capitolo facciamo due ipotesi:
 - (H1) le durate sono **deterministico**: ogni attività dura esattamente la sua durata stimata d_j , senza interruzioni;
 - (H2) le risorse sono **illimitate**: possono essere svolte attività non legate da precedenze allo stesso tempo.
- Il metodo di questo capitolo è il **metodo del percorso critico** (CPM). È stato sviluppato alla fine degli anni '50 indipendentemente dalla tecnica di valutazione e revisione del programma (PERT), e i due nomi sono spesso combinati PERT/CPM.

Definizione 9.2: rete del progetto

La **rete di progetto** di un progetto con attività n è il grafo diretto $G = (N, A)$ con $N = \{0, 1, \dots, n+1\}$ e i seguenti nodi e archi.

- Il nodo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ è l'attività j . Il nodo 0 è il nodo **START** e il nodo $n+1$ è il nodo **FINISH**, con durate $d_0 = d_{n+1} = 0$.
- A contiene l'arco (i, j) per ogni precedenza, l'arco $(0, j)$ per ogni attività j senza immediato predecessori e l'arco $(j, n+1)$ per ogni attività j che non sia un immediato predecessore di alcuna attività.

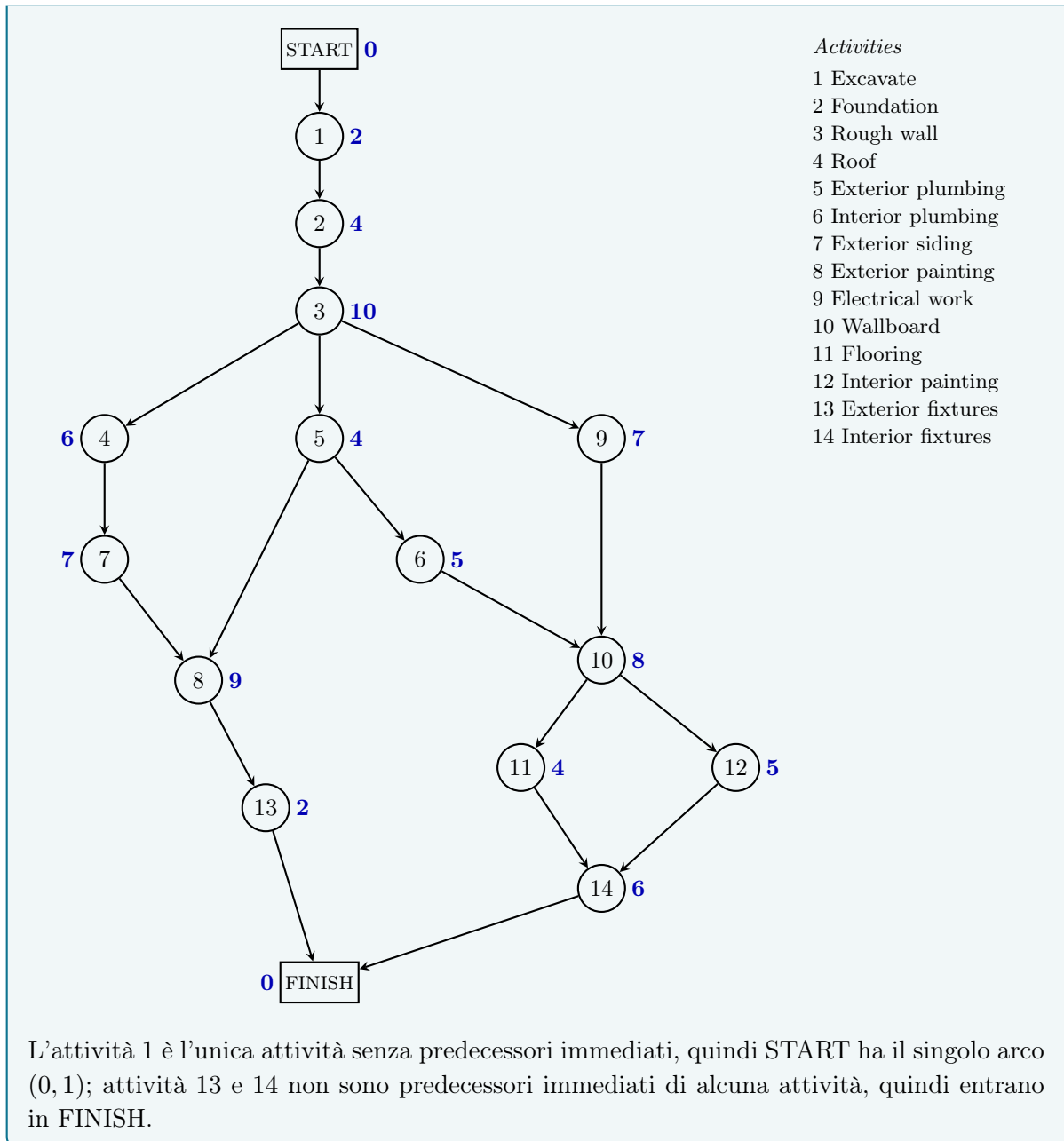
- Questa è la rete **activity-on-node** (AON): le attività sono i nodi e gli archi mostrano solo precedenze. Nella rete **activity-on-arc** (AOA) ogni attività è un arco e un nodo separa un'attività dai suoi immediati predecessori.
- La rete AON è più facile da costruire, più facile da leggere per gli utenti senza esperienza e più facile da rivedere quando il progetto cambia: lo usiamo sempre, e lo chiamiamo semplicemente rete del progetto.
- In pratica la rete di progetto viene costruita dal software di gestione del progetto a partire dall'elenco delle attività.

Esempio 9.1: il caso di studio

Un'impresa edile deve programmare le squadre che svolgono le attività 14 di un progetto di costruzione. Il la tabella riporta, per ogni attività, quelle immediatamente precedenti e la sua durata stimata.

attività j	descrizione	immediati predecessori	d_j
1	Scava	—	2 settimane
2	Gettare le fondamenta	1	4 settimane
3	Costruisci il muro grezzo	2	10 settimane
4	Montare il tetto	3	6 settimane
5	Installazione dell'impianto idraulico esterno	3	4 settimane
6	Installa l'impianto idraulico interno	5	5 settimane
7	Montare il rivestimento esterno	4	7 settimane
8	Fai la verniciatura esterna	5, 7	9 settimane
9	Esegui i lavori elettrici	3	7 settimane
10	Monta il wallboard	6, 9	8 settimane
11	Installa il pavimento	10	4 settimane
12	Tinteggiatura degli interni	10	5 settimane
13	Installazione degli infissi esterni	8	2 settimane
14	Installazione degli infissi interni	11, 12	6 settimane

Sommando le durate si ottiene un totale di 79 settimane. È possibile svolgere più attività contemporaneamente, il che possono ridurre sostanzialmente la durata del progetto. La rete di progetto ha i nodi 16 archi 0, 1, ..., 15 e 19; accanto ad ogni nodo, in blu, la sua durata.



9.1.1 Pianificazioni e reti acicliche

Definizione 9.3: pianificazione

Una **pianificazione** di un progetto è un vettore $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$ dei tempi di inizio, con $t_0 = 0$, che soddisfa

$$t_j \geq t_i + d_i, \quad \forall (i, j) \in A.$$

Il nodo j inizia a t_j e termina a $t_j + d_j$. La **durata** della pianificazione è t_{n+1} e la **durata minima del progetto** T è la durata minima di una pianificazione.

- Il vincolo dell'arco (i, j) dice che j inizia dopo che i è finito. Per (H1) e (H2), le precedenze costituiscono gli unici vincoli della pianificazione.
- Gli archi $(j, n+1)$ fanno iniziare FINISH al termine di ogni attività: t_{n+1} è il tempo di completamento del progetto.

Proposizione 9.4: una pianificazione necessita di una rete aciclica

Un progetto ha una pianificazione se e solo se la sua rete di progetti è aciclica.

Dimostrazione. Nessun arco entra nel nodo 0 e nessun arco esce dal nodo $n+1$, quindi ogni ciclo diretto di G è costituito da attività.

1. Sia $i_0, i_1, \dots, i_k = i_0$ un ciclo diretto e $\mathbf{t}$ una pianificazione. Sommando i vincoli del suo archi, il telescopio dei tempi di inizio:

$$0 = t_{i_k} - t_{i_0} \geq \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} > 0,$$

una contraddizione, poiché le durate delle attività sono positive.

2. Sia G aciclico e sia $v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$ un ordine topologico ([Capitolo 3, Proposizione «ordini topologici»](#)) con $v_0 = 0$: il nodo 0 non ha arco entrante e può essere rimosso per primo. Lascia che D sia il più grande durata e $t_{v_a} = aD$ per ogni a .
3. Quindi $t_0 = 0$, e ogni arco (v_a, v_b) va avanti, $a < b$, quindi $t_{v_b} - t_{v_a} = (b-a)D \geq D \geq d_{v_a}$: $\mathbf{t}$ è una pianificazione. $\square$

- Da ora in poi la rete del progetto è aciclica. Allora ogni attività giace su un percorso dall'INIZIO alla FINE: andare a ritroso lungo gli archi si raggiunge un nodo senza immediati predecessori, che è legato a START, e andando avanti raggiungiamo un nodo senza successori, che è legato a FINISH.
- Un ciclo nelle precedenti è un errore di progettazione: un'attività dovrebbe terminare prima di iniziare.

Un progetto è un insieme di attività con durate e precedenze. La sua rete di progetti ha un nodo per ogni attività, più INIZIO e FINE, e un arco per ogni precedenza; un programma esiste se e solo se la rete è aciclica.

9.2 Percorsi e percorsi critici

- In (H1) e (H2), il metodo del percorso critico risponde alle seguenti domande.
 1. Qual è il tempo minimo richiesto per completare il progetto?
 2. Quando può iniziare e terminare al più presto ciascuna attività?
 3. Quando deve iniziare e terminare al più tardi ciascuna attività, per non ritardare il completamento del progetto?
 4. Quali attività sono critiche, per cui qualsiasi ritardo su di esse ritarda il progetto?
 5. Per le altre attività, quanto ritardo può essere tollerato?

Definizione 9.5: lunghezza di un percorso e percorso critico

Ogni arco $(i, j) \in A$ ha **lunghezza** d_i , la durata della sua coda. Il **lunghezza** di un diretto il percorso $P = i_0, i_1, \dots, i_k$ è

$$L(P) = \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s},$$

la durata totale dei suoi nodi tranne l'ultimo. Un **percorso critico** è un percorso dall'INIZIO alla FINE di lunghezza massima. Un'attività è **critica** se si trova su un percorso critico.

- Su un percorso da INIZIO a FINE le durate del primo e dell'ultimo nodo sono zero: $L(P)$ è il totale durata delle attività del percorso.
- Un progetto può avere più percorsi critici: quando più percorsi si congiungono per la lunghezza massima, sono tutti critico.

Lemma 9.6: ogni percorso delimita la durata

Per ogni programma t e ogni percorso P dall'INIZIO alla FINE, $t_{n+1} \geq L(P)$.

Dimostrazione. Lascia che $P = i_0, i_1, \dots, i_k$ con $i_0 = 0$ e $i_k = n + 1$. Sommando i vincoli $t_{i_{s+1}} \geq t_{i_s} + d_{i_s}$ degli archi di P , il telescopio dei tempi di inizio:

$$t_{n+1} - t_0 \geq \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} = L(P),$$

e $t_0 = 0$. □

- Le attività di un percorso devono essere svolte una dopo l'altra, senza sovrapposizioni: il progetto non può essere più breve di qualsiasi percorso.

Esempio 9.2: i percorsi del caso studio

La rete di [Esempio 9.1](#) ha sei percorsi da INIZIO a FINE; la loro durata, in settimane, è:

percorso dall'INIZIO alla FINE e durata (settimane)	
START, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 13, FINISH	$2 + 4 + 10 + 6 + 7 + 9 + 2 = 40$
START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 14, FINISH	$2 + 4 + 10 + 4 + 5 + 8 + 4 + 6 = 43$
START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH	$2 + 4 + 10 + 4 + 5 + 8 + 5 + 6 = 44$
START, 1, 2, 3, 5, 8, 13, FINISH	$2 + 4 + 10 + 4 + 9 + 2 = 31$
START, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 14, FINISH	$2 + 4 + 10 + 7 + 8 + 4 + 6 = 41$
START, 1, 2, 3, 9, 10, 12, 14, FINISH	$2 + 4 + 10 + 7 + 8 + 5 + 6 = 42$

- Il percorso più lungo è START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH, di lunghezza 44: da [Lemma 9.6](#), ogni programmazione dura almeno 44 settimane.
- Il progetto può durare più di un determinato percorso. Sul percorso START, 1, 2, 3, 5, 8, 13, FINISH, di lunghezza 31, l'attività 8 attende l'attività 5, che può terminare nella settimana $2 + 4 + 10 + 4 = 20$, ma anche l'attività 7, che non è sul percorso e non è possibile terminarlo prima della settimana $2 + 4 + 10 + 6 + 7 = 29$.

Il numero di percorsi

Elencare i percorsi non funziona su progetti di grandi dimensioni: il loro numero può crescere esponenzialmente con n . Una sequenza di k coppie di attività parallele, ciascuna coppia dopo la precedente, ha percorsi 2^k da INIZIO a FINE. Il critico path trova la lunghezza di un percorso più lungo senza elencare i percorsi.

La lunghezza di un percorso dall'INIZIO alla FINE è la durata totale delle sue attività. Ogni programma dura almeno quanto lungo quanto ogni percorso del genere; i percorsi critici sono quelli più lunghi.

9.3 Il passaggio in avanti: i primi tempi

- Assumiamo innanzitutto che non si verifichi alcun ritardo: ogni attività assume la sua durata stimata e inizia non appena i suoi immediati predecessori sono finiti.

Definizione 9.7: primi orari di inizio e fine

Sia $v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$ un ordine topologico della rete del progetto. **prima ora di inizio** ES_j e **prima ora di fine** EF_j dei nodi vengono calcolati in questo ordine dal **passaggio in avanti**:

$$ES_0 = 0, \quad ES_j = \max_{(i,j) \in \delta^-(j)} EF_i, \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, \quad EF_j = ES_j + d_j, \quad \forall j \in N.$$

- Questa è la **regola dell'ora di inizio più remota**: la prima ora di inizio di un'attività è la prima tempo di fine dei suoi immediati predecessori. Quando il nodo j viene elaborato,

i suoi predecessori lo precedono nel file ordine topologico, quindi sono noti i primi tempi di fine.

- Come in [Capitolo 3](#), l'ordine topologico rimuove, ad ogni passo, il nodo senza inserire archi di **indice più piccolo**. Il nodo 0 viene rimosso per primo.

Teorema 9.8: primi tempi

Per ogni nodo $j \in N$, ES_j è la lunghezza del percorso più lungo da START a j . Inoltre, ES è un programma, e ogni programma t soddisfa $t_j \geq ES_j$ per ogni $j \in N$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima e l'ultima affermazione per induzione lungo l'ordine topologico.

1. *Nodo 0.* Nessun arco entra in START: l'unico percorso da START a 0 non ha archi e ha lunghezza $0 = ES_0$ e ogni pianificazione ha $t_0 = 0 = ES_0$.
2. *Percorsi più lunghi.* Lascia $j \neq 0$. Ogni percorso da START a j è un percorso da START ad alcuni i seguito da un arco $(i, j) \in \delta^-(j)$ di lunghezza d_i e i viene prima di j . Per induzione la sua lunghezza massima è

$$\max_{(i,j) \in \delta^-(j)} (ES_i + d_i) = \max_{(i,j) \in \delta^-(j)} EF_i = ES_j.$$

3. *Limite inferiore.* Per ogni arco $(i, j) \in \delta^-(j)$, per induzione $t_j \geq t_i + d_i \geq ES_i + d_i = EF_i$; quindi $t_j \geq ES_j$.
4. *ES è una pianificazione.* $ES_0 = 0$ e $ES_j \geq EF_i = ES_i + d_i$ per ogni arco $(i, j) \in A$, dal massimo nella definizione. $\square$

Teorema 9.9: durata minima del progetto

In (H1) e (H2), la durata minima del progetto è $T = ES_{n+1}$, la lunghezza di un percorso critico e la pianificazione ES ci riesce.

Dimostrazione. Per [Teorema 9.8](#), ES è un programma di durata ES_{n+1} , e ogni programma ha $t_{n+1} \geq ES_{n+1}$: quindi $T = ES_{n+1}$. Per lo stesso teorema, ES_{n+1} è la lunghezza del percorso più lungo dall'INIZIO alla FINE, cioè di un percorso critico. $\square$

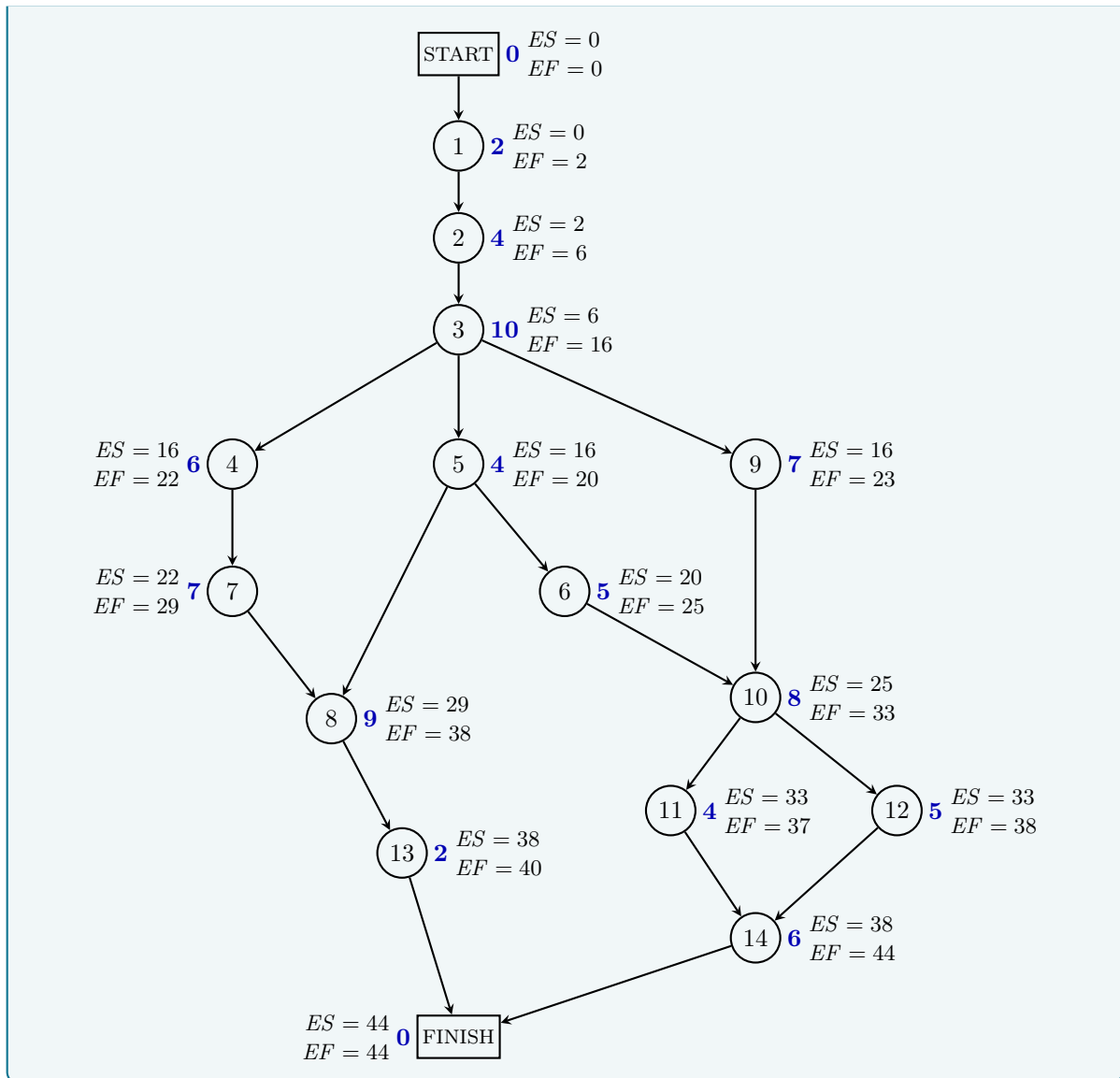
- Vengono utilizzate entrambe le ipotesi: (H1) rende fisse le lunghezze dei percorsi e (H2) rende le precedenze gli unici vincoli di un programma.
- Il passaggio in avanti è l'algoritmo per i grafi aciclici di [Capitolo 3](#) «Il più breve percorsi», con il massimo al posto del minimo: con le lunghezze dell'arco $-d_i$, quell'algoritmo calcola le etichette $d(j) = -ES_j$. Un percorso più lungo è facile da trovare perché la rete è aciclica.

Esempio 9.3: il passaggio in avanti del caso di studio

Nel caso di studio ogni attività ha predecessori immediati di indice più piccolo, così è l'ordine topologico $0, 1, 2, \dots, 15$. Ogni riga elabora un nodo: i primi tempi di fine dei suoi immediati predecessori (il massimo in grassetto), quindi ES_j e EF_j .

nodo j	d_j	EF_i dei predecessori (i)	ES_j	EF_j
0	0	—	0	0
1	2	0 (0)	0	2
2	4	2 (1)	2	6
3	10	6 (2)	6	16
4	6	16 (3)	16	22
5	4	16 (3)	16	20
6	5	20 (5)	20	25
7	7	22 (4)	22	29
8	9	20 (5), 29 (7)	29	38
9	7	16 (3)	16	23
10	8	25 (6), 23 (9)	25	33
11	4	33 (10)	33	37
12	5	33 (10)	33	38
13	2	38 (8)	38	40
14	6	37 (11), 38 (12)	38	44
15	0	40 (13), 44 (14)	44	44

Il nodo FINITURA dà $T = ES_{15} = 44$: se tutto rispetta i tempi previsti, il progetto viene completato in 44 settimane. Dentro la figura, accanto a ciascun nodo, la sua durata (blu) e i suoi primi tempi.



Il passaggio in avanti calcola, in ordine topologico, $ES_j = \max EF_i$ rispetto ai predecessori immediati e $EF_j = ES_j + d_j$. ES_j è la lunghezza del percorso più lungo da START a j e $T = ES_{n+1}$ è la lunghezza di un percorso critico.

9.4 Il passaggio all'indietro: ultimi tempi

- Quanto tempo dopo ES_j può iniziare un'attività senza ritardare il progetto? Gli ultimi tempi rispondono, presupponendo che non si verifichi nessun altro ritardo.

Definizione 9.10: ultimi orari di inizio e fine

Lascia che $T = ES_{n+1}$. **ultima ora di fine** LF_j e **ultima ora di inizio** LS_j dei nodi vengono calcolati nell'ordine topologico inverso da **passaggio all'indietro**:

$$LF_{n+1} = T, \quad LF_j = \min_{(j,k) \in \delta^+(j)} LS_k, \quad \forall j \in N \setminus \{n+1\}, \quad LS_j = LF_j - d_j, \quad \forall j \in N.$$

- Questa è la **regola dell'ultima ora di fine**: l'ultima ora di fine di un'attività è la più piccola ora di inizio dei suoi immediati successori. Gli immediati successori non potranno iniziare prima che l'attività sia terminata, quindi l'attività deve terminare in tempo affinché tutte possano iniziare entro l'ultimo orario di inizio.

Teorema 9.11: ultimi orari

Per ogni nodo $j \in N$, $T - LS_j$ è la lunghezza del percorso più lungo da j a FINISH. Inoltre, LS è un programma di durata T , e ogni programma t con $t_{n+1} \leq T$ soddisfa $t_j \leq LS_j$ per ogni $j \in N$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima e l'ultima affermazione per induzione lungo l'ordine topologico inverso.

1. *Nodo $n+1$.* L'unico percorso da $n+1$ a FINISH ha lunghezza $0 = T - LS_{n+1}$ e $t_{n+1} \leq T = LS_{n+1}$.
2. *Percorsi più lunghi.* Lascia $j \neq n+1$. Ogni percorso da j a FINISH è un arco $(j,k) \in \delta^+(j)$, di lunghezza d_j , seguito da un percorso da k a FINISH. Per induzione la sua lunghezza massima è

$$d_j + \max_{(j,k) \in \delta^+(j)} (T - LS_k) = d_j + T - LF_j = T - LS_j.$$

3. *Limite superiore.* Per ogni arco $(j,k) \in \delta^+(j)$, per induzione $t_j \leq t_k - d_j \leq LS_k - d_j$; quindi $t_j \leq LF_j - d_j = LS_j$.
4. *LS è una pianificazione.* $LS_k \geq LF_j = LS_j + d_j$ per ogni arco $(j,k) \in A$, dal minimo nella definizione. Inoltre $LS_{n+1} = T$ e $LS_0 = T - T = 0$, poiché il percorso più lungo da INIZIO a FINE ha lunghezza T . $\square$

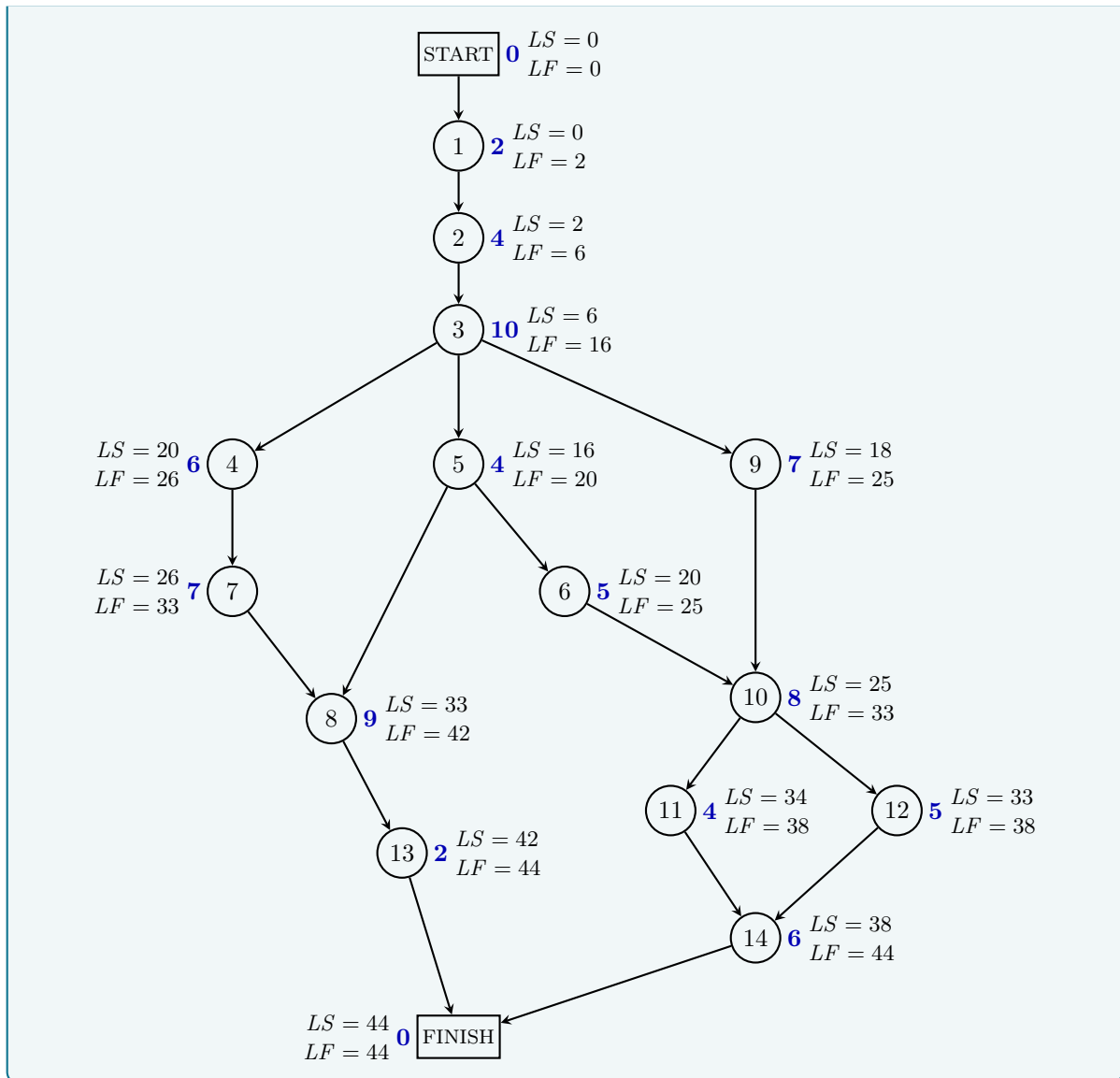
- In ogni programma di durata T , il nodo j inizia tra ES_j e LS_j ed entrambi gli estremi sono raggiunto, secondo gli orari ES e LS .

Esempio 9.4: il passaggio all'indietro sul caso di studio

Il passaggio all'indietro elabora i nodi nell'ordine $15, 14, \dots, 0$. Ogni riga fornisce gli ultimi orari di inizio dei successori immediati (il minimo in grassetto), quindi LF_j e LS_j .

nodo j	d_j	LS_k dei successori (k)	LF_j	LS_j
15	0	—	44	44
14	6	44 (15)	44	38
13	2	44 (15)	44	42
12	5	38 (14)	38	33
11	4	38 (14)	38	34
10	8	34 (11), 33 (12)	33	25
9	7	25 (10)	25	18
8	9	42 (13)	42	33
7	7	33 (8)	33	26
6	5	25 (10)	25	20
5	4	20 (6), 33 (8)	20	16
4	6	26 (7)	26	20
3	10	20 (4), 16 (5), 18 (9)	16	6
2	4	6 (3)	6	2
1	2	2 (2)	2	0
0	0	0 (1)	0	0

Il passaggio termina con $LS_0 = 0$, come previsto da [Teorema 9.11](#). Ad esempio, l'attività 9 deve terminare entro $LF_9 = LS_{10} = 25$, quindi deve iniziare entro $LS_9 = 18$, due settimane dopo la prima ora di inizio $ES_9 = 16$. Nella figura, accanto ad ogni nodo, la sua durata (blu) e i suoi ultimi tempi.



Il passaggio all'indietro calcola, in ordine topologico inverso, $LF_j = \min LS_k$ sugli immediati successori e $LS_j = LF_j - d_j$, a partire da $LF_{n+1} = T$. $T - LS_j$ è la lunghezza del percorso più lungo da j a FINISH e in ogni programma di durata T il nodo j inizia tra ES_j e LS_j .

9.5 Margini e attività critiche

Definizione 9.12: allentamenti e archi stretti

Per ogni attività $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

- **marginale totale** è $TS_j = LS_j - ES_j = LF_j - EF_j$;
- **marginale libero** è $FS_j = \min_{(j,k) \in \delta^+(j)} ES_k - EF_j$.

Un arco $(i, j) \in A$ è **stretto** se $ES_j = EF_i$.

- Le due differenze in TS_j coincidono, poiché entrambe le coppie di orari differiscono per d_j .
- Il margine di flessibilità totale è il ritardo dell'attività j che non ritarda il progetto; il margine libero è il ritardo che non sposta la prima ora di inizio di qualsiasi altra attività. I due risultati seguenti precisano queste definizioni.

Teorema 9.13: attività critiche e flessibilità totali

Per ogni attività j , sia L_j la lunghezza massima di un percorso dall'INIZIO alla FINE attraverso j . Quindi:

- $TS_j = T - L_j \geq 0$, quindi $TS_j = 0$ se e solo se j è critico;
- per ogni δ con $0 \leq \delta \leq TS_j$ è previsto un programma di durata T con $t_j = ES_j + \delta$ e nessun programma di durata T ha $t_j > ES_j + TS_j$.

Dimostrazione. 1. Un percorso da INIZIO a FINE attraverso j è un percorso da INIZIO a j seguito da un percorso da j a FINE e la sua lunghezza è la somma delle due lunghezze. Prendendo quelli più lunghi, di [Teorema 9.8](#) e [Teorema 9.11](#),

$$L_j = ES_j + (T - LS_j) = T - TS_j.$$

- Ogni percorso da INIZIO a FINE ha lunghezza al massimo T , quindi $TS_j \geq 0$, con uguaglianza se e solo se un percorso fino a j ha lunghezza T , ovvero j è critico.
- Se $TS_j > 0$, lascia $\lambda = \delta/TS_j \in [0, 1]$. ES e LS sono orari di durata T , e i vincoli di una pianificazione sono lineari, quindi $(1 - \lambda)ES + \lambda LS$ è una pianificazione di durata T , con $t_j = ES_j + \lambda TS_j = ES_j + \delta$. Se $TS_j = 0$, allora $\delta = 0$ e ES funzionano.
- Per [Teorema 9.11](#), ogni programma di durata T ha $t_j \leq LS_j = ES_j + TS_j$. $\square$

Proposizione 9.14: lasco libero

Per ogni attività j , $0 \leq FS_j \leq TS_j$. Inoltre, per ogni δ con $0 \leq \delta \leq FS_j$, gli orari di inizio ES con $ES_j + \delta$ al posto di ES_j formano un programma di durata T : l'attività j

è ritardata di δ e ogni altro nodo mantiene la prima ora di inizio.

Dimostrazione. 1. Con il passaggio in avanti, $ES_k \geq EF_j$ per ogni arco (j, k) , quindi $FS_j \geq 0$. Inoltre $ES_k \leq LS_k$ per ogni nodo k , da [Teorema 9.13](#) per le attività e da allora $ES_{n+1} = LS_{n+1} = T$. Quindi

$$FS_j = \min_{(j,k) \in \delta^+(j)} ES_k - EF_j \leq \min_{(j,k) \in \delta^+(j)} LS_k - EF_j = LF_j - EF_j = TS_j.$$

2. Cambiano solo i vincoli degli archi di j . Per $(i, j) \in \delta^-(j)$: $ES_j + \delta \geq ES_j \geq EF_i$.
For $(j, k) \in \delta^+(j)$: $ES_k \geq EF_j + FS_j \geq (ES_j + \delta) + d_j$.

3. La durata è ancora $ES_{n+1} = T$, da $j \neq n+1$. □

Teorema 9.15: i percorsi critici sono percorsi di archi stretti

Un percorso P dall'INIZIO alla FINE è critico se e solo se tutti i suoi archi sono stretti.

Dimostrazione. Lascia che $P = i_0, i_1, \dots, i_k$ con $i_0 = 0$ e $i_k = n+1$. Ogni arco ha $ES_{i_{s+1}} - EF_{i_s} \geq 0$. Sommando oltre gli archi di P , il telescopio con i primi tempi di inizio:

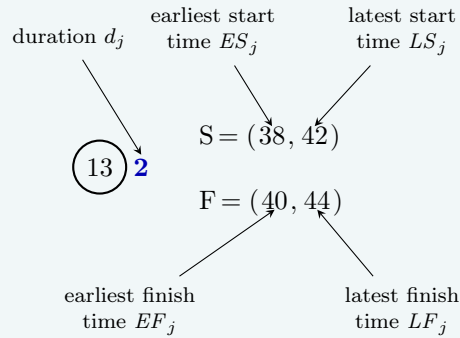
$$\sum_{s=0}^{k-1} (ES_{i_{s+1}} - EF_{i_s}) = ES_{n+1} - ES_0 - \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} = T - L(P).$$

Una somma di termini non negativi è zero se e solo se ogni termine è zero: $L(P) = T$ se e solo se ogni arco di P è stretto. □

- I percorsi critici sono i percorsi da INIZIO a FINE che utilizzano solo archi stretti: per elencarli tutti seguire gli archi stretti da START.
- Ogni attività di un percorso critico ha un margine di flessibilità totale pari a zero. Un percorso fatto di attività critiche, invece, lo è critico solo se i suoi archi sono stretti.

Esempio 9.5: pantaloni e percorso critico del caso studio

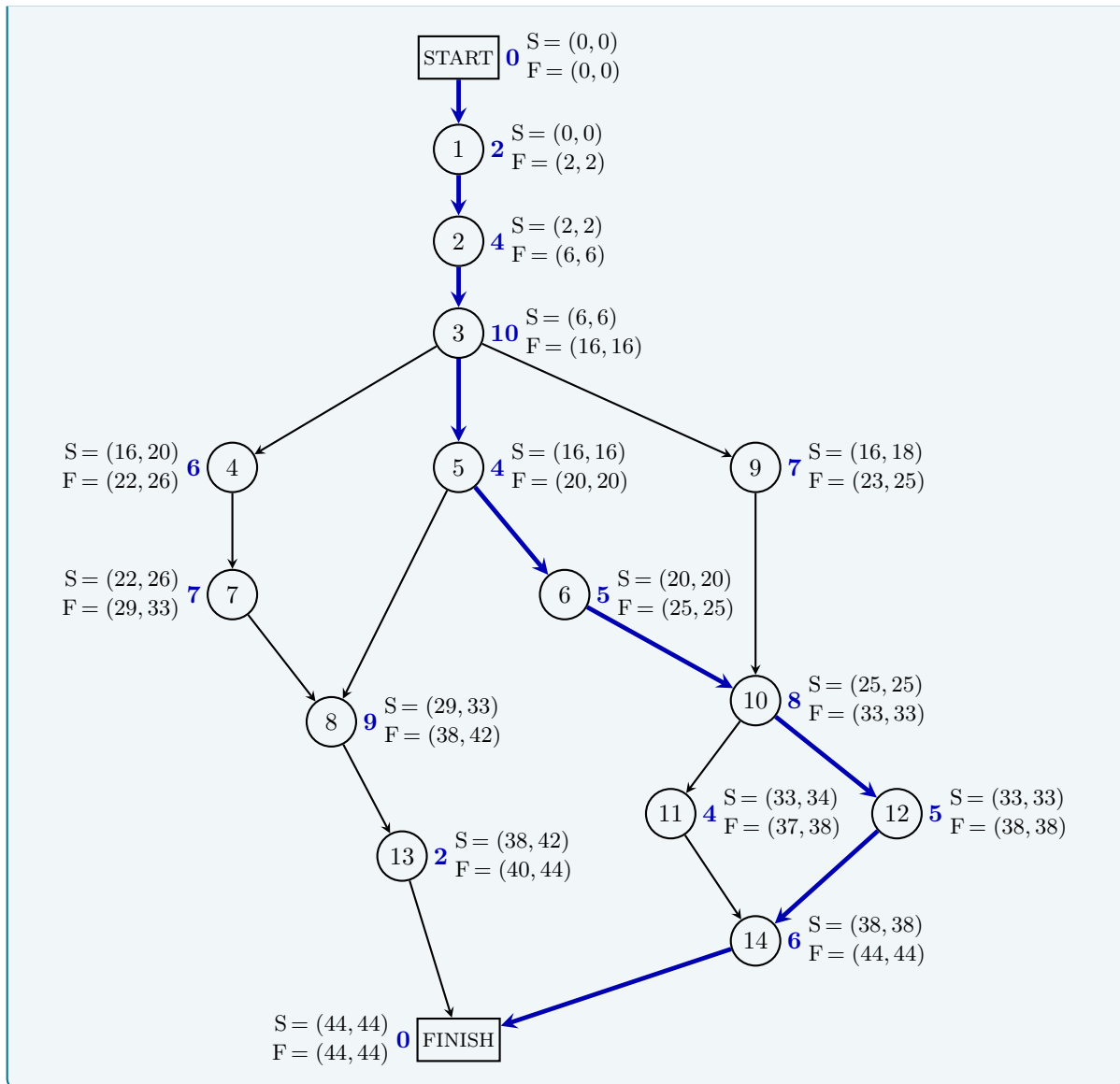
Per mostrare tutti gli orari contemporaneamente scriviamo accanto a ciascun nodo la coppia $S = (ES_j, LS_j)$ dei suoi orari di inizio e la coppia $F = (EF_j, LF_j)$ dei suoi tempi di arrivo, come nella figura dell'attività 13:



La tabella raccoglie gli orari ed i tempi delle attività di [Esempio 9.3](#) e [Esempio 9.4](#).

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critico
1	2	0	2	0	2	0	0	sì
2	4	2	6	2	6	0	0	sì
3	10	6	16	6	16	0	0	sì
4	6	16	22	20	26	4	0	
5	4	16	20	16	20	0	0	sì
6	5	20	25	20	25	0	0	sì
7	7	22	29	26	33	4	0	
8	9	29	38	33	42	4	0	
9	7	16	23	18	25	2	2	
10	8	25	33	25	33	0	0	sì
11	4	33	37	34	38	1	1	
12	5	33	38	33	38	0	0	sì
13	2	38	40	42	44	4	4	
14	6	38	44	38	44	0	0	sì

- Le attività critiche sono 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14. Gli archi stretti dall'INIZIO raggiungono la FINE solo lungo START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH: il percorso critico è unico e la sua lunghezza è $T = 44$ (blu in figura).
- Le attività 4, 7, 8, 13 formano una catena con $TS_4 = TS_7 = TS_8 = TS_{13} = 4$, ma solo l'ultima ha margine libero, $FS_{13} = 4$. Se l'attività 4 inizia 4 con settimane di ritardo, le attività 7, 8, 13 devono iniziare 4 con settimane di ritardo anche, e il progetto termina ancora alla settimana 44.
- Le attività 9 e 11 hanno lo stesso margine di flessibilità totale e libero delle settimane 2 e 1.



I margini totali sono condivisi

Il margine totale di un'attività è condiviso con le altre attività dello stesso percorso. Le attività della catena 4, 7, 8, 13 hanno ciascuna un margine totale di 4 settimane. Se l'attività 4 dura 3 settimane in più e l'attività 8 dura 2 settimane in più, il ritardo complessivo lungo la catena è $5 > 4$ settimane e il progetto termina alla settimana 45.

Il margine di flessibilità totale $TS_j = LS_j - ES_j$ è il ritardo di j che non ritarda il progetto; il margine libero $FS_j \leq TS_j$ è il ritardo che non sposta nessun'altra attività. Le attività critiche hanno $TS_j = 0$ e i percorsi critici sono i percorsi dall'INIZIO alla FINE costituiti da archi stretti.

9.6 Il metodo del percorso critico

Algoritmo

Algorithm: Metodo del percorso critico (CPM)

Input: un progetto con attività $1, 2, \dots, n$, durate $d_j > 0$ e precedenze

Output: i tempi ES_j, EF_j, LS_j, LF_j , i margini, la durata minima del progetto T e gli archi stretti

- 1 **Passaggio 0 (rete).** Costruisci la rete del progetto $G = (N, A)$ e un ordine topologico: rimuovi ripetutamente un nodo senza inserire archi (l'indice più piccolo, se più di uno).
- 2 Se i nodi vengono lasciati e tutti hanno archi entranti, STOP: le precedenze contengono un ciclo.
- 3 **Passaggio 1 (passaggio in avanti).** Imposta $ES_0 := 0$. Per ogni nodo $j \neq 0$ in ordine topologico, impostare $ES_j := \max_{(i,j) \in \delta^-(j)} EF_i$; impostare $EF_j := ES_j + d_j$ per ogni j e $T := ES_{n+1}$.
- 4 **Passaggio 2 (passaggio all'indietro).** Imposta $LF_{n+1} := T$. Per ciascun nodo $j \neq n+1$ in ordine topologico inverso, impostare $LF_j := \min_{(j,k) \in \delta^+(j)} LS_k$; impostare $LS_j := LF_j - d_j$ per ogni j .
- 5 **Passaggio 3 (pantaloni).** Per ogni attività j , impostare $TS_j := LS_j - ES_j$ e $FS_j := \min_{(j,k) \in \delta^+(j)} ES_k - EF_j$; mark the tight arcs, $ES_j = EF_i$. I percorsi critici sono i percorsi di archi stretti da START a FINE.
- 6 STOP.

Teorema 9.16: tempo di esecuzione del metodo del percorso critico

Il metodo del percorso critico viene eseguito nel tempo $O(n + m)$, dove $m = |A|$.

Dimostrazione.

1. Passo 0 crea gli archi dagli elenchi dei predecessori immediati, più al massimo gli archi $2n$ di INIZIO e FINE. L'ordine topologico richiede tempo $O(n + m)$, con un contatore degli archi entranti di ogni nodo, come in [Capitolo 3](#).
2. Il passo 1 scansiona ogni arco una volta, come un arco entrante della sua testa; Il passo 2 scansiona ogni arco una volta, come arco uscente la sua coda.
3. Il passo 3 scansiona ancora una volta gli archi uscenti di ogni attività e contrassegna gli archi stretti con un confronto per arco. $\square$

- L'output fornisce il sottografo degli archi stretti e i suoi percorsi da INIZIO a FINE sono i percorsi critici ([Teorema 9.15](#)). Elencarli uno per uno può richiedere più tempo, quando sono molti.

9.6.1 Il diagramma di Gantt

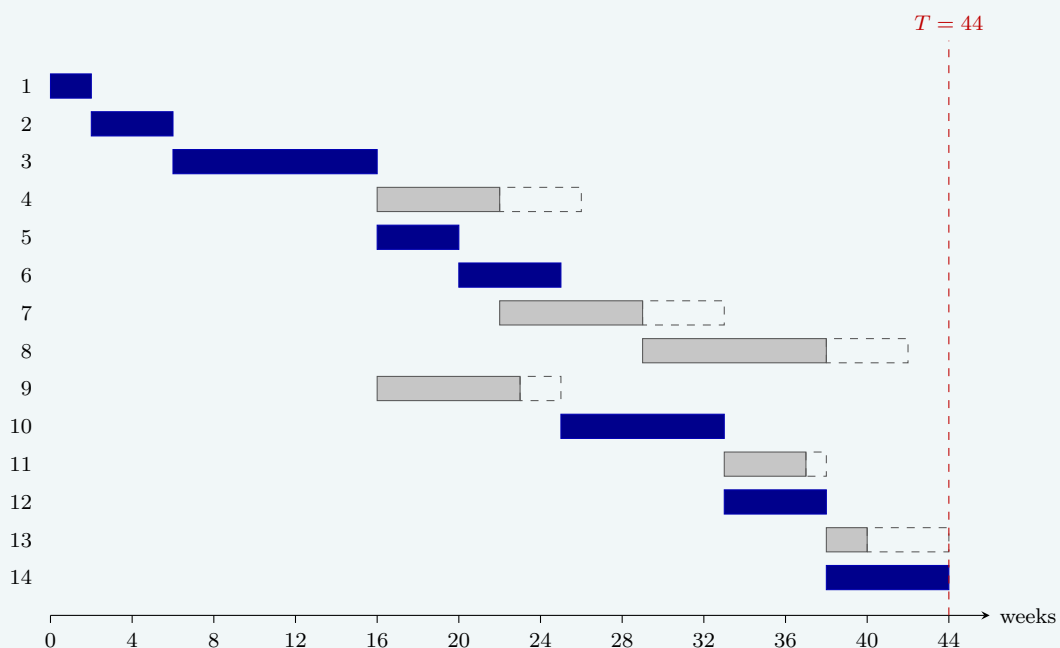
Definizione 9.17: diagramma di Gantt

Il **diagramma di Gantt** di una pianificazione t ha un asse temporale e una riga per ogni attività: la riga dell'attività j ha una barra da t_j a $t_j + d_j$.

- Il grafo mostra a colpo d'occhio quali attività sono in corso in ogni momento. Disegniamo il primo programma ES , con le barre delle attività critiche in blu, e un riquadro tratteggiato da EF_j a LF_j che mostra le rallentamento totale di ciascuna attività non critica.

Esempio 9.6: il diagramma di Gantt del caso di studio

Il diagramma di Gantt della prima pianificazione del caso studio, in settimane:



- Le barre blu delle attività critiche si susseguono senza interruzioni dalla settimana 0 alla settimana 44: un ritardo su nessuno di loro ritarda il progetto.
- Nella settimana 16 iniziano insieme le attività 4, 5 e 9: da (H2), tre squadre lavorano in parallelo.
- Le caselle tratteggiate della catena 4, 7, 8, 13 sono tutte 4 lunghe settimane, ma le barre della catena si susseguono: le settimane di rallentamento 4 sono condivise.

Il metodo del percorso critico costruisce la rete e un ordine topologico, esegue i passaggi in avanti e all'indietro e calcola i margini in tempo $O(n + m)$. Il diagramma di Gantt mostra le attività in corso in ogni istante e mette in evidenza il percorso critico.

9.7 Il modello di programmazione lineare

- La durata minima del progetto è il valore ottimale di un modello LP le cui variabili sono gli orari di inizio. Usiamo $n + 2$ variabili libere, una per ogni nodo:

$$t_j = \text{start time of node } j, \quad \forall j \in N.$$

Utilizzando queste variabili, un modello LP per la durata minima del progetto è il seguente:

$$\min \quad t_{n+1} - t_0 \quad (9.1a)$$

$$\text{subject to} \quad t_j - t_i \geq d_i, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (9.1b)$$

$$t_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in N. \quad (9.1c)$$

Questo modello LP è denominato modello PD.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello PD:
 - la funzione obiettivo (9.1a) riduce al minimo il tempo dall'inizio del progetto alla FINE;
 - Vincoli (9.1b) fanno sì che ogni nodo inizi dopo che ciascuno dei suoi immediati predecessori è terminato;
 - infine, i vincoli (9.1c) definiscono le variabili del modello LP, che sono libere.
- Aggiungendo la stessa costante a tutti gli orari di inizio si mantengono i vincoli e il valore: gli orari sono gli soluzioni realizzabili con $t_0 = 0$ e $z(\text{PD}) = T$.

9.7.1 Il modello duale: il percorso più lungo

- Seguire le regole di [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#) del modulo Programmazione lineare, utilizziamo una variabile duale $x_{ij} \geq 0$ per ogni vincolo (9.1b), un vincolo $\geq$ di un modello di minimizzazione. Ogni variabile libera t_i dà un duale equazione, il cui membro destro è il coefficiente di t_i nella funzione obiettivo.
- La variabile t_i ha coefficiente $+1$ nei vincoli degli archi entranti in i e -1 in quelli degli archi in uscita da i . Con i saldi

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = -1, \quad b_i = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0, n+1\},$$

l'equazione di t_i , moltiplicata per -1 , è un vincolo di conservazione del flusso.

Utilizzando una variabile duale non negativa x_{ij} per ciascun vincolo (9.1b), il modello duale del modello PD è:

$$\max \quad \sum_{(i,j) \in A} d_i x_{ij} \quad (9.2a)$$

$$\text{subject to } \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in N, \quad (9.2b)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A. \quad (9.2c)$$

Questo modello LP è denominato modello $D(PD)$.

- Descrizione del modello duale:
 - Vincoli (9.2b) invia un'unità di flusso da INIZIO a FINE;
 - la funzione obiettivo (9.2a) massimizza la lunghezza del flusso, con lunghezza d_i sull'arco (i,j) : è ammissibile il vettore di incidenza di un percorso P da INIZIO a FINE, con valore $L(P)$.
- Con le lunghezze $-d_i$, il modello $D(PD)$ è il modello $SP(0, n+1)$ di [Capitolo 3](#) con il obiettivo moltiplicato per -1 , e il modello PD è il suo duale: gli orari di inizio sono i potenziali, $\pi_i = t_i$.
- Il costo ridotto dell'arco (i,j) è quindi $\bar{c}_{ij} = -d_i - t_i + t_j$. Con $\mathbf{t} = ES$ lo è $\bar{c}_{ij} = ES_j - EF_i \geq 0$: gli archi stretti sono gli archi a costo ridotto zero, e [Teorema 9.15](#) è il certificato di [Capitolo 3](#), potenziali ammissibili e percorso di archi con costo ridotto zero.

Teorema 9.18: Modelli LP e percorsi critici

$z(PD) = z(D(PD)) = T$. Gli orari ES e LS sono ottimali per il modello PD e il vettore di incidenza di ogni percorso critico è ottimale per il modello $D(PD)$. Inoltre, ogni soluzione ottimale del modello PD soddisfa $t_j = t_i + d_i$ su ogni arco (i,j) di ogni percorso critico.

Dimostrazione. 1. ES e LS sono realizzabili per il modello PD , con valore $T-0 = T$, da [Teorema 9.8](#) e [Teorema 9.11](#).

2. Sia P un percorso critico e $\mathbf{x}^P$ il suo vettore di incidenza, con $x_{ij}^P = 1$ sugli archi di P e 0 altrove. Un'unità lascia $START$, un'unità entra $FINISH$ e ogni altro nodo di P ha un ingresso e uno arco in uscita da P : $\mathbf{x}^P$ è fattibile per il modello $D(PD)$, con valore $L(P) = T$.

3. Una soluzione ammissibile del modello PD e una soluzione ammissibile del suo duale con lo stesso valore sono entrambe ottimali, per dualità debole.

4. Lascia che $\mathbf{t}$ sia ottimale per il modello PD e $P = i_0, i_1, \dots, i_k$ un percorso critico. Sommando il vincoli dei suoi archi,

$$T = t_{n+1} - t_0 = \sum_{s=0}^{k-1} (t_{i_{s+1}} - t_{i_s}) \geq \sum_{s=0}^{k-1} d_{i_s} = L(P) = T,$$

quindi ogni vincolo di un arco di P vale con uguaglianza. $\square$

- In ogni programma di durata minima le attività critiche iniziano al primo orario di inizio, che equivale a i loro ultimi orari di inizio.

Esempio 9.7: i modelli LP del caso studio

Per il caso di studio il modello PD ha variabili 16 e vincoli 19; ad esempio, il vincolo dell'arco (5, 8) è $t_8 - t_5 \geq 4$. Risolto con Gurobi:

- $z(\text{PD}) = z(D(\text{PD})) = 44$ e la soluzione duale ottimale restituita da Gurobi è il vettore di incidenza del critico percorso START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH;
- la soluzione ottimale del modello PD non è unica: ES e LS sono entrambi ottimali, e differiscono, per ad esempio, sull'attività 4, con $ES_4 = 16$ e $LS_4 = 20$;
- con $t = ES$ i costi ridotti $\bar{c}_{ij} = ES_j - EF_i$ sono pari a zero su ogni arco escluso $\bar{c}_{58} = 9$, $\bar{c}_{9,10} = 2$, $\bar{c}_{11,14} = 1$ e $\bar{c}_{13,15} = 4$. Gli archi (3, 4), (4, 7), (7, 8), (8, 13) sono stretti, ma gli archi stretti dell'attività 13 non raggiungono FINE, quindi la catena 4, 7, 8, 13 è non su un percorso critico.

Il modello PD minimizza $t_{n+1} - t_0$ soggetto a $t_j - t_i \geq d_i$ su ogni arco; il suo duale invia un'unità di flusso dall'INIZIO alla FINE lungo il percorso più lungo. Entrambi i valori ottimali sono T : ES e LS sono pianificazioni ottimali e ogni percorso critico è una soluzione duale ottimale.

9.8 Due percorsi critici e cambi di durata

- Un pianificatore spesso chiede cosa succede al progetto se un'attività richiede più tempo o se più squadre la realizzano più breve. Gli allentamenti e i percorsi critici rispondono senza eseguire nuovamente il metodo.

Proposizione 9.19: modifica una durata

Lascia che j sia un'attività, $\delta > 0$ e T' la durata minima del progetto dopo la modifica.

- Se d_j aumenta di δ , allora $T' = T + \max\{0, \delta - TS_j\}$.
- Se d_j diminuisce di $\delta < d_j$, allora $T - \delta \leq T' \leq T$ e $T' = T$ se qualche percorso critico lo fa non contenere j .

Dimostrazione. Per Teorema 9.9, la durata minima del progetto è la lunghezza massima di un percorso da INIZIO per FINE. La modifica modifica con $\pm\delta$ la lunghezza dei percorsi attraverso j , e solo di essi.

- Secondo Teorema 9.13, i percorsi più lunghi attraverso j crescono fino a $L_j + \delta = T - TS_j + \delta$. Se $TS_j > 0$, i percorsi critici evitano j e mantengono la lunghezza T ; se $TS_j = 0$, i percorsi che evitano j hanno una lunghezza massima pari a $T < T + \delta$. In entrambi i casi $T' = \max\{T, T - TS_j + \delta\}$.
- Nessun percorso cresce e ogni percorso perde al massimo δ , quindi $T - \delta \leq T' \leq T$. Un percorso critico quello evita j mantiene la lunghezza T . $\square$

Esempio 9.8: un progetto con due percorsi critici

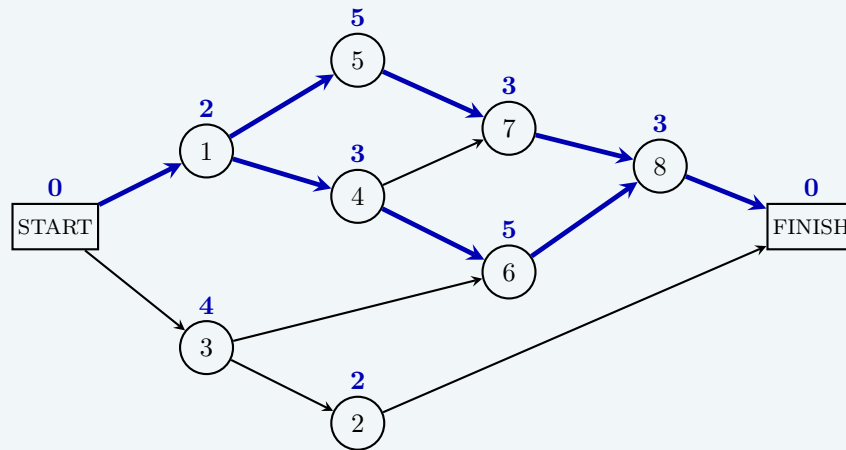
Un progetto ha attività 8 con i predecessori immediati e le durate della tabella.

attività j e predecessori immediati e d_j	
1	— 2 giorni
2	3 2 giorni
3	— 4 giorni
4	1 3 giorni
5	1 5 giorni
6	3, 4 5 giorni
7	4, 5 3 giorni
8	6, 7 3 giorni

L'attività 2 segue l'attività 3, quindi l'ordine topologico non è quello naturale. START libera 1 e 3; nodo 1 viene rimosso per primo e libera 4 e 5; quindi 3 è il nodo libero con l'indice più piccolo e libera 2, che viene prima di 4. L'ordine è 0, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e il passaggio avanti e quello indietro danno:

j	d_j	ES_j	EF_j	LS_j	LF_j	TS_j	FS_j	critico
1	2	0	2	0	2	0	0	sì
2	2	4	6	11	13	7	7	
3	4	0	4	1	5	1	0	
4	3	2	5	2	5	0	0	sì
5	5	2	7	2	7	0	0	sì
6	5	5	10	5	10	0	0	sì
7	3	7	10	7	10	0	0	sì
8	3	10	13	10	13	0	0	sì

- $T = 13$ e due percorsi di archi stretti vanno dall'INIZIO alla FINE: START, 1, 4, 6, 8, FINISH e START, 1, 5, 7, 8, FINISH, entrambi di lunghezza 13 (blu in figura, con le durate sopra i nodi).
- L'attività 3 ha $TS_3 = 1$ e $FS_3 = 0$: un giorno di ritardo sposta la prima ora di inizio dell'attività 2, non la fine del progetto. L'attività 2 ha $TS_2 = FS_2 = 7$.
- Il percorso START, 1, 4, 7, 8, FINISH utilizza solo attività critiche, ma il suo arco (4, 7) non è stretto, $EF_4 = 5 < 7 = ES_7$: la sua lunghezza è $2 + 3 + 3 + 3 = 11$ e non è critica.



Esempio 9.9: modifiche di una durata

Modifichiamo una durata alla volta nel progetto di [Esempio 9.8](#); la nuova durata e la criticità i percorsi sono calcolati con il metodo del percorso critico e concordano con [Proposizione 9.19](#).

modifica	TS_j e nuovo T e percorsi critici dopo la modifica	
$d_5 = 5 \rightarrow 4$	0	13 START, 1, 4, 6, 8, FINISH
$d_8 = 3 \rightarrow 2$ e 0 e 12 e START, 1, 4, 6, 8, FINISH; START, 1, 5, 7, 8, FINISH		
$d_3 = 4 \rightarrow 6$	1	14 START, 3, 6, 8, FINISH

- Accorciare di un giorno l'attività 5 non abbrevia il progetto: il percorso critico START, 1, 4, 6, 8, FINISH evita l'attività 5 e $T' = T = 13$ da (b). Rimane solo un percorso critico.
- L'attività 8 si trova su entrambi i percorsi critici: accorciandolo di un giorno si ottiene $T' = T - 1 = 12$ ed entrambi i percorsi rimangono critici.
- L'attività 3 impiega 2 giorni in più, più del suo rallentamento totale $TS_3 = 1$: da (a), $T' = 13 + (2 - 1) = 14$ e START, 3, 6, 8, FINISH diventa il percorso critico.

Riduzione di un progetto

Per abbreviare un progetto, ogni percorso critico deve diventare più breve. Quando sono presenti diversi percorsi critici, un'attività poggia su uno solo di essi non aiuta: abbreviare un'attività comune a tutti, oppure un'attività su ciascuno.

Se d_j cresce di δ , il progetto dura $\max\{0, \delta - TS_j\}$ di più. Se d_j diminuisce, il progetto guadagna a più o meno la stessa quantità, e niente se un percorso critico evita j : con diversi percorsi critici, tutti devono essere accorciati.

9.9 Errori tipici

Attenzione

- **Sommando tutte le durate.** Il caso di studio dura $T = 44$ settimane, non 79: attività che non sono collegati da precedenze funzionano in parallelo.
- **Prendendo il minimo nel passaggio in avanti.** Un'attività inizia quando *tutti* i suoi immediati predecessori sono finiti: ES_j è il massimo dei loro primi tempi di arrivo. Simmetricamente, LF_j è il minimo dei ultimi orari di inizio dei successori.
- **Dimenticando INIZIO, FINE e i loro archi.** Ogni attività senza predecessori immediati necessita dell'arco da INIZIO, e ogni attività senza successori l'arco fino a FINE.
- **Somma dei rallentamenti totali lungo un percorso.** La catena 4, 7, 8, 13 del caso di studio ha 4 settimane di rallentamento in tutto, non 16.
- **Confusione del margine di flessibilità totale e libero.** Un ritardo maggiore di FS_j sposta altre attività, anche quando lo fa non ritardare il progetto.
- **Lettura di un percorso critico solo dalle attività critiche.** In [Esempio 9.8](#) il percorso START, 1, 4, 7, 8, FINISH ha solo attività critiche, e non è critico: controlla che gli archi siano stretti.
- **Riduzione di un'attività su uno dei numerosi percorsi critici.** La durata del progetto non cambia.
- **Accettare le precedenze con un ciclo.** Non esiste alcuna pianificazione e l'ordine topologico si interrompe prima ordinare tutti i nodi.

9.10 In sintesi

In sintesi

- Un progetto ha attività con durate e precedenze deterministiche; la sua rete di progetto ha un nodo per ogni attività, più INIZIO e FINE, e deve essere aciclica.
- La lunghezza di un percorso dall'INIZIO alla FINE è la durata totale delle sue attività; ogni programma dura alle almeno quanto ogni percorso, e i percorsi critici sono i più lunghi.
- Il passaggio in avanti fornisce $ES_j = \max EF_i$ e $T = ES_{n+1}$, la lunghezza di un percorso critico; il passaggio all'indietro dà $LF_j = \min LS_k$ a partire da $LF_{n+1} = T$.
- $TS_j = LS_j - ES_j$ è il ritardo che non ritarda il progetto, $FS_j \leq TS_j$ il ritardo che non sposta altre attività; i percorsi critici sono i percorsi di archi stretti.
- Il modello PD $\min\{t_{n+1} - t_0 : t_j - t_i \geq d_i\}$ ha il modello con percorso più lungo come duale ed entrambi hanno valore ottimale T .

- L'aumento di d_j di δ ritarda il progetto di $\max\{0, \delta - TS_j\}$; l'accorciamento aiuta solo se ogni il percorso critico si accorcia.

I due progetti in sintesi.

caso di studio e attività 14, settimane 79 in tutto; $T = 44$ settimane	
percorso critico	START, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, FINISH
non critico j (TS_j, FS_j) e 4 (4, 0), 7 (4, 0), 8 (4, 0), 9 (2, 2), 11 (1, 1), 13 (4, 4)	
Modelli LP e $z(PD) = z(D(PD)) = 44$; ES e LS ottimali	
secondo esempio	$T = 13$, 2 percorsi critici: START, 1, 4, 6, 8, FINISH e START, 1, 5, 7, 8, FINISH
modifiche	$d_5 = 5 \rightarrow 4$: $T = 13$; $d_8 = 3 \rightarrow 2$: $T = 12$; $d_3 = 4 \rightarrow 6$: $T = 14$