



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione su reti

Volume 4 — Il simplesso su reti

Il simplesso su reti: le basi come alberi ricoprenti, il pivot nel caso non capacitato e capacitato, la degenerazione.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti

Anno accademico 2026–2027

Indice

8	Il semplice su reti	2
8.1	L'algoritmo del semplice sul modello del flusso di costo minimo	3
8.2	Basi e alberi ricoprenti	5
8.3	Potenziali e ottimalità	8
8.4	Il perno	10
8.5	L'algoritmo del semplice di rete	13
8.6	Un esempio senza capacità	15
8.7	Degenerazione e alberi fortemente fattibili	18
8.8	Un esempio capacitato con un perno degenerare	20
8.9	L'albero iniziale: Fase 0	22
8.10	Errori tipici	26
8.11	In sintesi	26

Il simplesso su reti

Prerequisiti

- Da questo modulo, [Capitolo 1 «Grafì»](#): alberi di copertura, foglie, cicli fondamentali e rango della matrice di incidenza nodo-arco.
- Da questo modulo, [Capitolo 4 «Modelli di flusso su reti»](#): il modello di flusso di costo minimo, la rimozione dei limiti inferiori, i potenziali, i costi ridotti e l'istanza di trasbordo sulla rete di riferimento.
- Dal modulo Programmazione lineare, [Capitolo 6 «Algoritmo del simplesso»](#), [Capitolo 7 «Condizioni di ottimalità e regole pivot»](#), [Capitolo 8 «Fase 0 dell'algoritmo del simplesso»](#) e [Capitolo 11 «Simpleso rivisto»](#): basi, soluzioni di base, costi ridotti, pivot, degenerazione e Fase 0.

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- dimostrare che le basi del modello di flusso di costo minimo corrispondono agli alberi ricoprenti e calcolare una soluzione associata a un albero eliminando le foglie;
- calcolare i potenziali di un albero ricoprente e i costi ridotti, e verificare l'ottimalità di una soluzione ad albero con archi ai limiti inferiori o superiori;
- eseguire un pivot, individuando l'arco entrante, il ciclo orientato, il passo e l'arco uscente, e aggiornare flussi, albero e potenziali;
- riconoscere un pivot degenerare, verificare la forte ammissibilità di una struttura ad albero e applicare la regola dell'arco uscente che la preserva e impedisce cicli;
- trovare una struttura ad albero iniziale con la Fase 0 sulla rete ausiliaria oppure dimostrare che non esistono flussi ammissibili.

8.1 L'algoritmo del simplesso sul modello del flusso di costo minimo

Definizione 8.1: base e soluzione di base

Sia $G = (N, A)$ una rete con n nodi e m archi, il cui grafo non orientato sottostante è connesso. La rete ha saldi b_i tali che $\sum_{i \in N} b_i = 0$, costi c_{ij} , limiti inferiori nulli e capacità $0 < u_{ij} \leq +\infty$. Indichiamo con $\mathbf{B}$ la matrice di incidenza nodo-arco e con $\mathbf{M}$ la matrice ottenuta eliminando da $\mathbf{B}$ la riga del nodo n . Sia $\mathbf{M}_a$ la colonna di $\mathbf{M}$ associata all'arco a e sia $\mathbf{h} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})'$.

- Una **base** è un insieme $T \subseteq A$ di $n - 1$ archi le cui colonne $\mathbf{M}_a$, con $a \in T$, sono linearmente indipendenti. Gli archi di T sono **di base**; gli altri sono **fuori base**.
- L'**assegnazione dei limiti** agli archi fuori base è una partizione di $A \setminus T$ in due insiemi L e U , dove ogni arco in U ha capacità finita. Gli archi in L sono fissati al limite inferiore, quelli in U al limite superiore.
- La **soluzione di base** associata a (T, L, U) è il vettore $\mathbf{x}$ definito da $x_{ij} = 0$ sugli archi in L , $x_{ij} = u_{ij}$ sugli archi in U e $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$. È **ammissibile** se $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ per ogni arco di T .

- In tutto il capitolo consideriamo reti con le proprietà appena descritte. Rimuoviamo i limiti inferiori come in [Capitolo 4 «Modelli di flusso su reti»](#); eliminiamo gli archi con $u_{ij} = 0$ e scriviamo il modello MCF come

$$\min \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \}.$$

- La base è un insieme di colonne; L e U indicano a quale limite è fissata ciascuna variabile fuori base. I valori delle variabili di base risolvono il sistema quadrato $\mathbf{M}_T \mathbf{x}_T = \mathbf{h} - \sum_{a \in U} \mathbf{M}_a u_a$. La soluzione è unica perché $\mathbf{M}_T$ è non singolare.

Lemma 8.2: l'equazione ridondante

Supponiamo che il grafo non orientato sottostante a G sia connesso e che $\sum_{i \in N} b_i = 0$. Allora $\mathbf{M}$ ha rango $n - 1$ e un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ soddisfa $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se soddisfa $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$.

Dimostrazione. La matrice $\mathbf{M}$ ha rango $n - 1$ per il [Corollario «Basi della matrice di incidenza» del Capitolo 1](#): eliminando una riga di $\mathbf{B}$ restano $n - 1$ righe linearmente indipendenti.

- Se $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, in particolare $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$.
- Viceversa, ogni colonna di $\mathbf{B}$ contiene un $+1$ e un -1 , quindi la somma delle righe di $\mathbf{B}$ è il vettore nullo. Se $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{h}$, la componente n di $\mathbf{B}\mathbf{x}$ vale $-\sum_{i=1}^{n-1} b_i = b_n$. $\square$

- Quindi ogni soluzione di base soddisfa i vincoli di conservazione in tutti i nodi, compreso il nodo n .

- La definizione coincide con quella usata nell'algoritmo del simplesso, con una differenza: nel [Capitolo 6 «Algoritmo del simplesso»](#) del modulo di Programmazione lineare ogni variabile fuori base è fissata a zero; qui può invece trovarsi al limite superiore u_{ij} .

8.1.1 L'algoritmo del simplesso con limiti

- Come nel [Capitolo 11 «Simpleso rivisto»](#) del modulo di Programmazione lineare, i **moltiplicatori del simplesso** $\pi \in \mathbb{R}^{n-1}$ associati alla base T risolvono il sistema $\pi' M_T = c'_T$. Il costo ridotto della variabile x_a è $c_a - \pi' M_a$.
- Il modello MCF è un problema di minimizzazione. Una variabile fuori base fissata al limite inferiore può ridurre il costo aumentando se il suo costo ridotto è negativo; una variabile fissata al limite superiore può ridurlo diminuendo se il costo ridotto è positivo.
- Se nessuna variabile fuori base può ridurre il costo, la soluzione di base è ottimale. Altrimenti si sceglie una variabile entrante. Il test del rapporto determina il massimo passo che mantiene le variabili di base entro i rispettivi limiti; una variabile di base che raggiunge un limite diventa la variabile uscente.
- **L'algoritmo del simplesso su reti** esegue le stesse operazioni senza ricorrere alle matrici: le basi sono alberi ricoprenti, i moltiplicatori sono potenziali calcolati lungo l'albero e il test del rapporto si svolge lungo un ciclo.

Esempio 8.1: basi della rete di riferimento

Nella rete di riferimento del [Capitolo 4 «Modelli di flusso su reti»](#), la matrice M è la matrice di incidenza privata della riga del nodo 6. Una base contiene $n - 1 = 5$ archi.

- Gli archi $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$ danno una sottomatrice 5×5 di M con determinante 1: formano una base.
- Gli archi $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 6)$ toccano ogni nodo, ma contengono il ciclo $2, 4, 3, 2$: la somma delle colonne $(2, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$ dà zero e il determinante è 0.
- Tra i 126 sottoinsiemi di 5 archi, esattamente 55 determinano una sottomatrice non singolare; corrispondono ai 55 alberi ricoprenti del grafo di riferimento. Tutti i determinanti valgono 1 oppure -1 .

In una rete connessa il vincolo del nodo n è ridondante. Una base è un insieme di $n - 1$ archi le cui colonne in M sono linearmente indipendenti. Gli archi fuori base sono fissati a 0 (insieme L) o alla propria capacità (insieme U); i valori degli archi di base determinano così la soluzione di base.

8.2 Basi e alberi ricoprenti

Teorema 8.3: le basi corrispondono agli alberi ricoprenti

Supponiamo che il grafo non orientato sottostante a $G = (N, A)$ sia connesso. Un insieme T di $n - 1$ archi è una base se e solo se è un albero ricoprente. Inoltre, per ogni albero ricoprente T si possono ordinare le righe e le colonne di M_T in modo che la matrice sia triangolare inferiore, con elementi diagonali pari a ± 1 ; dunque $\det(M_T) = \pm 1$.

Dimostrazione. Utilizziamo i risultati di [Capitolo 1 «Graf»](#).

1. *Indipendenza delle colonne.* Ogni combinazione lineare delle colonne di B ha somma delle componenti uguale a zero. Perciò, se le prime $n - 1$ componenti sono nulle, lo è anche la componente n . Ne segue che le colonne di M_T sono indipendenti se e solo se lo sono le corrispondenti colonne di B .
2. *Un albero ricoprente è una base.* Le colonne di B associate agli archi di un albero ricoprente sono linearmente indipendenti, per il Lemma «Colonne di una foresta».
3. *Una base è un albero ricoprente.* Se gli $n - 1$ archi di T non formassero un albero ricoprente, per la caratterizzazione degli alberi del Capitolo 1 conterebbero un ciclo. Le colonne associate a un ciclo sono linearmente dipendenti (Lemma «Colonne di un ciclo»), quindi T non sarebbe una base.
4. *Forma triangolare.* Procediamo per induzione su n . Per $n = 2$, M_T è una matrice 1×1 con elemento ± 1 . Per $n \geq 3$, l'albero ha almeno due foglie (Lemma «Foglie»); scegliamone una $\ell \neq n$ e indichiamo con a_ℓ il suo unico arco. Nella riga ℓ di M_T l'unico elemento non nullo è ± 1 , nella colonna di a_ℓ .
5. Ordiniamo per prima la riga ℓ e per prima la colonna di a_ℓ . Eliminandole, resta la matrice associata all'albero ricoprente $T \setminus \{a_\ell\}$ sui nodi $N \setminus \{\ell\}$, che contiene ancora n . Per induzione, questa sottomatrice si può ordinare in forma triangolare inferiore. Sviluppando il determinante lungo la prima riga, otteniamo $\det(M_T) = \pm 1$. $\square$

Corollario 8.4: soluzioni di alberi interi

Se i saldi e le capacità finite sono interi, ogni soluzione base del modello MCF è intera.

Dimostrazione. Il termine noto $h - \sum_{a \in U} M_a u_a$ è intero e, per [Teorema 8.3](#), $\det(M_T) = \pm 1$. Per la regola di Cramer, tutte le variabili di base sono quindi intere. È il risultato di integralità del [Capitolo 4](#), applicato alle soluzioni di base. $\square$

Definizione 8.5: struttura ad albero e soluzione ad albero

Sia T un albero ricoprente di G . Una **struttura ad albero** è una tripla (T, L, U) , dove L e U formano una partizione di $A \setminus T$ e ogni arco in U ha capacità finita. La **soluzione ad albero** associata è la soluzione di base definita da $x_{ij} = 0$ sugli archi in L , $x_{ij} = u_{ij}$

sugli archi in U e $Bx = b$.

- La struttura ad albero è **ammissibile** se $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ su ogni arco di T .
- Una struttura ad albero ammissibile è **degenerata** se qualche arco di T ha $x_{ij} = 0$ o $x_{ij} = u_{ij}$.

Base e stato associato

- L'albero T è la base. Gli insiemi L e U indicano soltanto a quale limite è fissato ciascun arco fuori base.
- Un arco in U è fuori base anche quando il suo flusso u_{ij} è positivo. Un arco di T può invece avere flusso 0 oppure u_{ij} : in tal caso la soluzione ad albero è degenera, ma l'arco rimane di base.

Proposizione 8.6: calcolo della soluzione ad albero eliminando le foglie

Sia (T, L, U) una struttura ad albero e siano **saldi residui**

$$\hat{b}_i = b_i - \sum_{(i,j) \in U} u_{ij} + \sum_{(j,i) \in U} u_{ji}, \quad \forall i \in N.$$

Finché restano archi dell'albero, scegli una foglia $\ell \neq n$ dell'albero residuo; siano a il suo unico arco e j il nodo adiacente. Poni $x_a = \hat{b}_\ell$ se $a = (\ell, j)$ e $x_a = -\hat{b}_\ell$ se $a = (j, \ell)$; aggiorna $\hat{b}_j$ aggiungendovi $\hat{b}_\ell$; infine elimina ℓ e a . I valori così ottenuti, insieme a $x = 0$ sugli archi in L e $x = u$ su quelli in U , costituiscono la soluzione ad albero.

Dimostrazione. Il saldo residuo $\hat{b}_i$ è il saldo del nodo i dopo aver trasferito al termine noto i flussi sugli archi di U . Mostriamo che ogni passo conserva questa proprietà: gli archi dell'albero rimasti devono soddisfare i vincoli di conservazione con i saldi residui correnti.

1. Alla foglia ℓ l'unica incognita rimasta è x_a , quindi il vincolo di conservazione di ℓ legge $x_a = \hat{b}_\ell$ se ℓ è la coda di a e $-x_a = \hat{b}_\ell$ se ℓ è la sua testa.
2. Nel vincolo del nodo j , il coefficiente di x_a è -1 se $a = (\ell, j)$ e $+1$ se $a = (j, \ell)$. Trasferendo il termine noto al secondo membro, il saldo residuo $\hat{b}_j$ aumenta di $x_a = \hat{b}_\ell$ oppure di $-x_a = \hat{b}_\ell$, rispettivamente.
3. Ogni albero con almeno due nodi ha una foglia diversa da n ([Lemma «Foglie» del Capitolo 1](#)); quindi la procedura termina quando resta il solo nodo n . Il suo vincolo è automaticamente soddisfatto per [Lemma 8.2](#), e la soluzione è unica per [Teorema 8.3](#). $\square$

- Negli esempi l'anta è sempre quella con **indice più piccolo** diverso da n .
- Ogni foglia trasferisce il suo saldo residuo alla vicina. Quindi il flusso su un arco di albero è uguale al residuo totale equilibrio dei nodi che l'arco separa da n , come in [Capitolo 4](#), [Lemma «flusso attraverso un taglio»](#).

Esempio 8.2: il flusso $\bar{x}$ del capitolo 4 come soluzione ad albero

Utilizziamo la rete di riferimento di [Capitolo 4](#), con $\mathbf{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ e

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
c_{ij}	2	2	5	2	3	3	5	5	3
u_{ij}	4	4	4	2	4	3	5	3	2

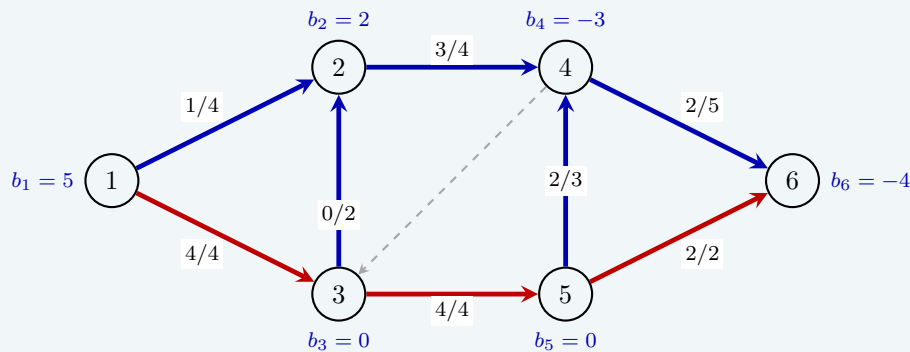
Prendi $T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 6), (5, 4)\}$, $U = \{(1, 3), (3, 5), (5, 6)\}$ e $L = \{(4, 3)\}$. I saldi residui sono

$$\hat{\mathbf{b}} = (5 - 4, 2, 0 + 4 - 4, -3, 0 + 4 - 2, -4 + 2) = (1, 2, 0, -3, 2, -2).$$

Le ante vengono lavorate nell'ordine 1, 3, 2, 5, 4:

foglia ℓ	arco dell'albero	flusso	saldo residuo del vicino
1	(1, 2)	$x_{12} = \hat{b}_1 = 1$	$\hat{b}_2 = 2 + 1 = 3$
3	(3, 2)	$x_{32} = \hat{b}_3 = 0$	$\hat{b}_2 = 3 + 0 = 3$
2	(2, 4)	$x_{24} = \hat{b}_2 = 3$	$\hat{b}_4 = -3 + 3 = 0$
5	(5, 4)	$x_{54} = \hat{b}_5 = 2$	$\hat{b}_4 = 0 + 2 = 2$
4	(4, 6)	$x_{46} = \hat{b}_4 = 2$	$\hat{b}_6 = -2 + 2 = 0$

La soluzione ad albero è il flusso $\bar{x} = (1, 4, 3, 0, 4, 0, 2, 2, 2)$ del Capitolo 4, con costo 63. Nella figura gli archi degli alberi sono blu, gli archi di U rossi e l'arco di L grigio e tratteggiato; ogni arco trasporta x_{ij}/u_{ij} .



L'arco dell'albero (3, 2) ha flusso 0: la struttura dell'albero è fattibile e degenere.

Le basi del modello MCF corrispondono agli alberi ricoprenti e le relative matrici hanno determinante ± 1 . La soluzione ad albero fissa a 0 i flussi sugli archi in L e alla capacità quelli sugli archi in U ; i flussi sugli archi dell'albero si calcolano eliminando le foglie.

8.3 Potenziali e ottimalità

Definizione 8.7: potenziali di un albero

Sia T un albero ricoprente di G . Il nodo n è la **radice** di T . I **potenziali** di T sono i valori π_i , per $i \in N$, tali che

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0, \quad \forall (i, j) \in T, \quad \pi_n = 0.$$

- Calcoliamo i potenziali a partire dalla radice, come nel certificato del [Capitolo 4](#): poniamo $\pi_n = 0$ e, per ogni arco (i, j) dell'albero con un potenziale già noto, ricaviamo $\pi_j = \pi_i - c_{ij}$ oppure $\pi_i = \pi_j + c_{ij}$.
- La normalizzazione $\pi_n = 0$ corrisponde alla riga cancellata del nodo n in M .

Lemma 8.8: potenziali e moltiplicatori del semplice

I potenziali di un albero ricoprente T esistono e sono unici. Il vettore $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1})$ è il vettore dei moltiplicatori del semplice associato alla base T e $\bar{c}_{ij}$ è il costo ridotto della variabile x_{ij} . Inoltre, π_i è il costo del cammino nell'albero da i a n , dove un arco percorso dalla coda alla testa contribuisce $+c_{ij}$ e un arco percorso dalla testa alla coda contribuisce $-c_{ij}$.

Dimostrazione. Scriviamo $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1})$ per i primi potenziali $n-1$ e $\pi_n = 0$.

1. La colonna di (i, j) in M ha $+1$ nella riga i e -1 nella riga j , la riga di n essendo eliminata. Quindi $\pi' M_{(i,j)} = \pi_i - \pi_j$, anche quando $i = n$ o $j = n$.
2. Il sistema $\pi' M_T = c'_T$ legge $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$ sugli archi dell'albero, ovvero $\bar{c}_{ij} = 0$. La sua matrice è non singolare per [Teorema 8.3](#), quindi i potenziali esistono e sono unici e $c_{ij} - \pi' M_{(i,j)} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = \bar{c}_{ij}$.
3. Sia $i = v_0, v_1, \dots, v_r = n$ il percorso dell'albero. Un arco percorso dalla coda alla testa dà $\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t} = c_{v_{t-1}v_t}$; un arco percorso dalla testa alla coda dà $\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t} = -c_{v_t v_{t-1}}$. Sommando lungo il cammino, i termini telescopici danno $\pi_i - \pi_n = \pi_i$. $\square$

- Percorriamo un **ciclo** C di G in una delle due direzioni. Gli archi attraversati dalla coda alla testa sono percorsi **in avanti**, gli altri **all'indietro**; il costo del ciclo è

$$c(C) = \sum_{(i,j) \text{ in avanti}} c_{ij} - \sum_{(i,j) \text{ all'indietro}} c_{ij}.$$

Lemma 8.9: il costo di un ciclo

Per ogni vettore di potenziali π e ogni ciclo C percorso in una direzione,

$$c(C) = \sum_{(i,j) \text{ in avanti}} \bar{c}_{ij} - \sum_{(i,j) \text{ all'indietro}} \bar{c}_{ij}.$$

In particolare, se π è il vettore dei potenziali di un albero ricoprente T e C è il ciclo fondamentale di un arco $(k, l) \notin T$, percorso in direzione di (k, l) , poi $c(C) = \bar{c}_{kl}$.

Dimostrazione. Sia C il ciclo $v_0, v_1, \dots, v_r = v_0$ e sia a_t l'arco che collega v_{t-1} a v_t .

1. Se $a_t = (v_{t-1}, v_t)$ è percorso in avanti, allora $\bar{c}_{a_t} = c_{a_t} - (\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t})$. Se invece $a_t = (v_t, v_{t-1})$ è percorso all'indietro, allora $-\bar{c}_{a_t} = -c_{a_t} - (\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t})$.
2. Sommando lungo il ciclo, i termini $\pi_{v_{t-1}} - \pi_{v_t}$ si cancellano e danno $\pi_{v_0} - \pi_{v_r} = 0$. Si ottiene così la formula.
3. Per il ciclo fondamentale di (k, l) , ogni arco dell'albero ha $\bar{c}_{ij} = 0$ e (k, l) è in avanti: la somma è $\bar{c}_{kl}$. $\square$

Teorema 8.10: ottimalità di una soluzione ad albero

Sia (T, L, U) una struttura ad albero ammissibile, con soluzione ad albero x e potenziali π . Se

$$\bar{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in L, \quad \bar{c}_{ij} \leq 0, \quad \forall (i, j) \in U,$$

allora x è una soluzione ottimale del modello MCF. Se le disuguaglianze sono strette, x è l'unica soluzione ottimale.

Dimostrazione. Sia y un flusso ammissibile. Per il [Lemma «Costo e costo ridotto» del Capitolo 4](#), $c'y = \bar{c}'y + b'\pi$ e $c'x = \bar{c}'x + b'\pi$, quindi

$$c'y - c'x = \sum_{(i,j) \in A} \bar{c}_{ij} (y_{ij} - x_{ij}).$$

- Sugli archi di T il termine è zero, poiché $\bar{c}_{ij} = 0$.
- Sugli archi di L , $x_{ij} = 0 \leq y_{ij}$ e $\bar{c}_{ij} \geq 0$: il termine è $\bar{c}_{ij}y_{ij} \geq 0$.
- Sugli archi di U , $x_{ij} = u_{ij} \geq y_{ij}$ e $\bar{c}_{ij} \leq 0$: il termine è $\bar{c}_{ij}(y_{ij} - u_{ij}) \geq 0$.

Quindi $c'y \geq c'x$. Se le disuguaglianze sono strette, l'uguaglianza $c'y = c'x$ implica $y_{ij} = 0$ sugli archi in L e $y_{ij} = u_{ij}$ su quelli in U . I flussi sugli archi di T coincidono quindi con quelli della soluzione ad albero, che è unica ([Teorema 8.3](#)) e $y = x$. $\square$

- Sono le condizioni del [Corollario «Certificato di costo ridotto» del Capitolo 4](#): un arco con costo ridotto positivo è al limite inferiore, uno con costo ridotto negativo è al limite superiore e ogni arco dell'albero ha costo ridotto nullo.
- Un arco di L con $\bar{c}_{ij} < 0$ o di U con $\bar{c}_{ij} > 0$ viola queste condizioni. Per il [Lemma 8.9](#), inviando flusso lungo il suo ciclo fondamentale nella direzione opportuna, il costo diminuisce di $|\bar{c}_{ij}|$ per unità.

Esempio 8.3: potenziali e costi ridotti dell'albero di $\bar{x}$

Per la struttura ad albero di [Esempio 8.2](#) partiamo dalla radice 6:

$$\begin{aligned}\pi_6 &= 0, & \pi_4 &= \pi_6 + c_{46} = 5, & \pi_2 &= \pi_4 + c_{24} = 10, \\ \pi_5 &= \pi_4 + c_{54} = 10, & \pi_1 &= \pi_2 + c_{12} = 12, & \pi_3 &= \pi_2 + c_{32} = 12.\end{aligned}$$

Ad esempio, $\pi_1 = c_{12} + c_{24} + c_{46} = 12$ è il costo del cammino nell'albero 1, 2, 4, 6. I costi ridotti degli archi fuori base sono

$$\begin{aligned}\bar{c}_{13} &= 2 - 12 + 12 = 2, & \bar{c}_{35} &= 3 - 12 + 10 = 1, \\ \bar{c}_{43} &= 3 - 5 + 12 = 10, & \bar{c}_{56} &= 3 - 10 + 0 = -7.\end{aligned}$$

- L'arco $(4, 3) \in L$ ha $\bar{c}_{43} \geq 0$ e l'arco $(5, 6) \in U$ ha $\bar{c}_{56} \leq 0$.
- Gli archi $(1, 3)$ e $(3, 5)$ appartengono a U e hanno costo ridotto positivo: le condizioni del [Teorema 8.10](#) non sono soddisfatte.
- Il ciclo fondamentale di $(1, 3)$, percorso nella direzione dell'arco, è 1, 3, 2, 1: percorre $(1, 3)$ e $(3, 2)$ in avanti e $(1, 2)$ all'indietro. Il suo costo è $c_{13} + c_{32} - c_{12} = 2 + 2 - 2 = 2 = \bar{c}_{13}$. Riducendo x_{13} e inviando flusso lungo il ciclo nella direzione opposta, il costo diminuisce di 2 per unità.

I potenziali sono normalizzati a zero nella radice e rendono nullo il costo ridotto di ogni arco dell'albero. I primi $n - 1$ potenziali sono i moltiplicatori del semplice. Il costo ridotto di un arco fuori base coincide con il costo del suo ciclo fondamentale; una soluzione ad albero è ottimale se $\bar{c} \geq 0$ su L e $\bar{c} \leq 0$ su U .

8.4 Il perno

Definizione 8.11: il pivot del semplice su reti

Sia (T, L, U) una struttura ad albero ammissibile, con soluzione ad albero x e potenziali π .

- Un arco è **ammissibile per l'ingresso** se appartiene a L e $\bar{c}_{ij} < 0$, oppure a U e $\bar{c}_{ij} > 0$. L'**arco entrante** $e = (k, l)$ è quello ammissibile con il massimo valore di $|\bar{c}_{ij}|$; in caso di parità, scegliamo il primo in ordine lessicografico.
- Il **ciclo del pivot** C è il ciclo fondamentale di e , percorso nella direzione di e se $e \in L$, e nella direzione opposta se $e \in U$.
- La **capacità residua** di un arco di C è $u_{ij} - x_{ij}$ se viene percorso in avanti (ed è $+\infty$ se $u_{ij} = +\infty$) e x_{ij} se viene percorso all'indietro. Il **passo** θ è la minima capacità residua lungo C ; gli archi che la raggiungono sono **bloccanti**.
- L'**apice** w di C è il primo nodo comune ai cammini nell'albero da k e da l alla radice n . L'**arco uscente** f è l'ultimo arco bloccante incontrato percorrendo C a partire da w .

Un pivot con $\theta = 0$ è **degenerato**.

- L'invio di una quantità θ lungo C aumenta il flusso sugli archi percorsi in avanti e lo diminuisce su quelli percorsi all'indietro. L'arco entrante viene percorso in avanti se appartiene a L (il suo flusso aumenta) e all'indietro se appartiene a U (il suo flusso diminuisce).
- Siano p e q gli estremi di e nell'ordine in cui è percorso in C : $p = k, q = l$ se $e \in L$ e $p = l, q = k$ se $e \in U$. Partendo dall'apice, il ciclo segue il cammino nell'albero da w a p , percorre l'arco e da p a q e torna da q a w lungo il cammino nell'albero.
- Anche l'arco entrante può essere l'arco uscente: la sua capacità residua è u_{kl} , quindi $\theta \leq u_{kl}$.

Proposizione 8.12: il pivot

Nell'impostazione di [Definizione 8.11](#), lascia che $\theta < +\infty$ e $\mathbf{x}'$ siano ottenuti da $\mathbf{x}$ aggiungendo θ sugli archi anteriori di C e sottraendo θ sugli archi posteriori.

- (a) $\mathbf{x}'$ è un flusso ammissibile e $\mathbf{c}'\mathbf{x}' = \mathbf{c}'\mathbf{x} - \theta|\bar{c}_{kl}|$.
- (b) $T' = T \cup \{e\} \setminus \{f\}$ è un albero ricoprente e $\mathbf{x}'$ è la soluzione ad albero della struttura (T', L', U') , dove f va a U se è avanti in C e a L se è indietro. Se $f = e$, allora $T' = T$ e e si sposta da L a U o da U a L .

Dimostrazione. Sia $\varepsilon_a = +1$ sugli archi anteriori e -1 sugli archi posteriori di C , e sia $\mathbf{x}^C$ il vettore di incidenza con segno di C , con $x_a^C = \varepsilon_a$ su C e 0 altrove: quindi $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \theta\mathbf{x}^C$.

1. *Conservazione.* Per il [Lemma «Colonne di un ciclo» del Capitolo 1](#), $\mathbf{B}\mathbf{x}^C = \sum_{a \in C} \varepsilon_a \mathbf{B}_a = \mathbf{0}$; quindi $\mathbf{B}\mathbf{x}' = \mathbf{b}$.
2. *Limiti.* Il flusso su un arco percorso in avanti aumenta di $\theta \leq u_{ij} - x_{ij}$; su un arco percorso all'indietro diminuisce di $\theta \leq x_{ij}$. I flussi sugli altri archi non cambiano.
3. *Costo.* $\mathbf{c}'\mathbf{x}' - \mathbf{c}'\mathbf{x} = \theta c(C) = \theta \varepsilon_e \bar{c}_{kl}$ per il [Lemma 8.9](#), poiché gli archi dell'albero hanno $\bar{c}_{ij} = 0$. Se $e \in L$, allora $\varepsilon_e = +1$ e $\bar{c}_{kl} < 0$; se $e \in U$, allora $\varepsilon_e = -1$ e $\bar{c}_{kl} > 0$. In entrambi i casi $\varepsilon_e \bar{c}_{kl} = -|\bar{c}_{kl}|$.
4. *Il nuovo albero.* C è l'unico ciclo di $T \cup \{e\}$ ([Proposizione «Ciclo fondamentale» del Capitolo 1](#)). Rimuovendo $f \in C$ si ottiene un grafo connesso, poiché il resto del ciclo collega ancora gli estremi di f . Il grafo ha $n - 1$ archi, quindi è un albero ricoprente per la caratterizzazione degli alberi del Capitolo 1.
5. *La nuova soluzione ad albero.* Gli archi fuori base diversi da e e f mantengono flusso e limite. L'arco f è bloccante: dopo il pivot $x'_f = u_f$ se è percorso in avanti e $x'_f = 0$ se è percorso all'indietro. Quindi $\mathbf{x}'$ soddisfa $\mathbf{B}\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ e i limiti imposti da (T', L', U') ; è pertanto la soluzione ad albero per il [Teorema 8.3](#). $\square$

Proposizione 8.13: l'aggiornamento dei potenziali

Nel pivot della [Proposizione 8.12](#), sia $f \neq e$ e siano R e S gli insiemi di nodi delle due componenti di $T \setminus \{f\}$, con $n \in R$. L'arco e ha quindi un estremo in R e uno in S . I potenziali di T' sono

$$\pi'_i = \pi_i, \quad \forall i \in R, \quad \pi'_i = \begin{cases} \pi_i - \bar{c}_{kl} & \text{se } l \in S, \\ \pi_i + \bar{c}_{kl} & \text{se } k \in S, \end{cases} \quad \forall i \in S.$$

Dimostrazione. L'albero T' è connesso e $T' \setminus \{e\} = T \setminus \{f\}$ non ha arco tra R e S : quindi e si unisce R e S . Verifichiamo che i valori π' dell'enunciato siano i potenziali di T' , che sono unici per [Lemma 8.8](#).

1. Ogni arco di $T' \setminus \{e\}$ ha entrambi gli estremi in R oppure entrambi in S . In ciascuna componente tutti i potenziali cambiano della stessa quantità, quindi il costo ridotto dell'arco resta nullo.
2. Se $l \in S$, allora $c_{kl} - \pi'_k + \pi'_l = c_{kl} - \pi_k + \pi_l - \bar{c}_{kl} = 0$. Se $k \in S$, allora $c_{kl} - \pi'_k + \pi'_l = c_{kl} - \pi_k - \bar{c}_{kl} + \pi_l = 0$.
3. La radice n è in R , quindi $\pi'_n = \pi_n = 0$. □

- Cambiano solo i potenziali dei nodi di S , tutti della stessa quantità. Se $f = e$, l'albero e i potenziali non cambiano.
- Cambiano i costi ridotti soltanto degli archi che hanno un estremo in R e l'altro in S .

Proposizione 8.14: problema illimitato

Se $\theta = +\infty$, allora $e \in L$, il ciclo C è diretto, tutti i suoi archi hanno capacità infinita e il suo costo è $-|\bar{c}_{kl}| < 0$. Il problema MCF è quindi illimitato.

Dimostrazione. Un arco percorso all'indietro ha capacità residua finita x_{ij} ; anche un arco percorso in avanti con capacità finita ha capacità residua finita $u_{ij} - x_{ij}$. Dunque ogni arco di C è percorso in avanti e ha capacità infinita; in particolare, e è percorso in avanti e appartiene a L . Come nella [Proposizione 8.12](#), il flusso $\mathbf{x} + t\mathbf{x}^C$ è ammissibile per ogni $t \geq 0$ e ha costo $\mathbf{c}'\mathbf{x} - t|\bar{c}_{kl}|$, che tende a $-\infty$. □

Esempio 8.4: un pivot dall'albero di $\bar{\mathbf{x}}$

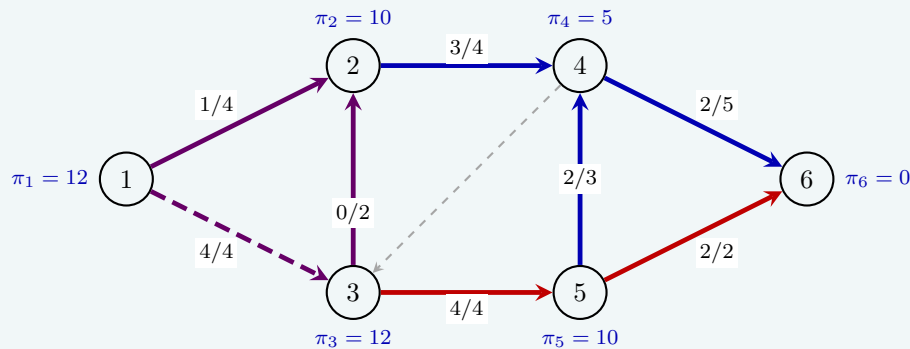
Riprendiamo l'[Esempio 8.3](#). Gli archi ammissibili per l'ingresso sono $(1, 3)$ e $(3, 5)$, entrambi in U , con $\bar{c}_{13} = 2$ e $\bar{c}_{35} = 1$.

- *Entrata nell'arco.* Il più grande $|\bar{c}_{ij}|$ è 2: $e = (1, 3)$. È in U , quindi C viene attraversato $(1, 3)$: $p = 3$ e $q = 1$.
- *Apex.* I percorsi dell'albero fino alla radice sono $1, 2, 4, 6$ e $3, 2, 4, 6$: l'apice è $w = 2$. Da w il ciclo va $2 \rightarrow 3$ lungo $(3, 2)$, $3 \rightarrow 1$ lungo $(1, 3)$, $1 \rightarrow 2$ lungo $(1, 2)$:

arco di C	(3, 2)	(1, 3)	(1, 2)
direzione	–	–	+
residuo	0	4	3

- *Passo e uscita dall'arco.* $\theta = \min\{0, 4, 3\} = 0$ e l'unico arco bloccante è (3, 2): lascia l'albero, all'indietro, quindi va a L . Il perno è degenerato.
- *Aggiornamento.* Il flusso non cambia e il costo rimane 63. Il nuovo albero è $T' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 6), (5, 4)\}$, dove (1, 3) è un arco base alla sua capacità. La rimozione di (3, 2) da T interrompe $S = \{3\}$, che contiene $l = 3$: $\pi'_3 = \pi_3 - \bar{c}_{13} = 12 - 2 = 10$.

Nella figura gli archi di C sono viola, l'arco entrante è tratteggiato; accanto ad ogni nodo il suo potenziale.



Un perno invia le unità θ attorno al ciclo fondamentale dell'arco entrante, orientato in modo che il suo flusso si allontani da è limitato; il costo diminuisce di $\theta|\bar{c}_{kl}|$. L'arco uscente è l'ultimo arco bloccante dall'apice e cambiano solo i potenziali del sottoalbero che taglia.

8.5 L'algoritmo del semplice di rete

Algoritmo

Algorithm: Algoritmo del simplesso su reti

Input: una rete $G = (N, A)$ con una struttura ad albero ammissibile (T, L, U)

Output: una soluzione ottimale dell'albero, o un ciclo che dimostra che il problema non ha limiti

- 1 **Passaggio 0 (inizializzazione).** Calcola la soluzione dell'albero x dalle foglie,
- 2 e i potenziali π dalla radice n , con $\pi_n = 0$.
- 3 **Passaggio 1 (controllo dell'ottimalità).** Calcola i costi ridotti $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$.
- 4 Se $\bar{c}_{ij} \geq 0$ su L e $\bar{c}_{ij} \leq 0$ su U , STOP: x è ottimale.
- 5 **Passaggio 2 (inserimento dell'arco).** Scegli l'arco idoneo e con il più grande $|\bar{c}_{ij}|$.
- 6 Orienta il suo ciclo C come e se $e \in L$, e contro e se $e \in U$.
- 7 **Passaggio 3 (test del rapporto).** Calcola θ , la capacità residua minima lungo C .
- 8 Se $\theta = +\infty$, STOP: il problema non è limitato.
- 9 Altrimenti l'arco in uscita f è l'ultimo arco bloccante lungo C dall'apice.
- 10 **Passaggio 4 (aggiornamento).** Invia le unità θ lungo C e imposta
 $T := T \cup \{e\} \setminus \{f\}$.
- 11 L'arco f va a U o a L .
- 12 Aggiorna i potenziali del sottoalbero tagliato da f e vai al passo 1.

- Nel Passaggio 2 risolviamo le parità scegliendo gli archi in ordine lessicografico. Nel Passaggio 0 calcoliamo la soluzione ad albero con la [Proposizione 8.6](#); nel Passaggio 4 aggiorniamo flussi e albero con la [Proposizione 8.12](#) e i potenziali con la [Proposizione 8.13](#).
- L'arresto al Passaggio 1 è corretto per il [Teorema 8.10](#); l'arresto al Passaggio 3 è corretto per la [Proposizione 8.14](#).
- Ogni struttura incontrata è ammissibile per la [Proposizione 8.12](#). Se i saldi e le capacità sono interi, tutti i flussi sono interi per il [Corollario 8.4](#); se anche i costi sono interi, lo sono anche i potenziali.

Proposizione 8.15: terminazione senza pivot degenerati

Se ogni pivot dell'algoritmo ha $\theta > 0$, l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di pivot.

Dimostrazione. Una struttura ad albero determina univocamente la soluzione ad albero e il relativo costo. Per la [Proposizione 8.12](#), ogni pivot con $\theta > 0$ riduce il costo di $\theta|\bar{c}_{kl}| > 0$; quindi nessuna struttura può ripetersi. Le strutture sono in numero finito: ci sono al più $\binom{m}{n-1}$ possibili alberi e, per ciascuno, al più 2^{m-n+1} assegnazioni dei limiti. $\square$

8.5.1 L'algebra del pivot

- Nella terminologia del [Capitolo 11 «Simpleso rivisto»](#), i potenziali risolvono il primo sistema $\pi' M_T = c'_T$.
- Il secondo sistema, $M_T d = M_e$, si risolve usando il cammino nell'albero da k a l . Per il [Lemma «Colonne di un ciclo» del Capitolo 1](#), poniamo $d_a = +1$ sugli archi del cammino percorsi dalla coda alla testa, $d_a = -1$ sugli altri archi del cammino e $d_a = 0$ fuori dal cammino. Se aumentiamo x_e di t , le variabili di base cambiano di $-t d$: è l'aumento di flusso lungo il ciclo fondamentale.
- Il metodo dei potenziali per il problema di trasporto del [Capitolo 7 «Trasporto e assegnamento»](#) è un algoritmo del simpleso su reti applicato al grafo bipartito di origini e destinazioni: le celle di base formano un albero ricoprente, i potenziali e i costi ridotti sono quelli definiti in questo capitolo.

L'algoritmo del simpleso su reti passa da un albero ricoprente al successivo: calcola i potenziali e i costi ridotti, sceglie l'arco entrante, determina il ciclo e il passo, quindi aggiorna l'albero. Se non si verificano pivot degeneri, il costo diminuisce a ogni iterazione e l'algoritmo termina.

8.6 Un esempio senza capacità

- Utilizziamo la rete di riferimento con i saldi $b = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ e i costi di [Esempio 8.2](#), ma senza capacità: $u_{ij} = +\infty$ per ogni arco, quindi $U = \emptyset$.
- La struttura ad albero iniziale invia lungo il percorso 5 le unità 1 del nodo 1, 3, 5, 4 e le unità 2 del nodo 2 lungo (2, 4); il nodo 4 mantiene le unità 3 e inoltra le unità 4 al nodo 6:

$$T = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 4)\}, \quad L = \{(1, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 6)\}, \quad U = \emptyset.$$

- Ogni soluzione ad albero dell'esempio non è degenera. Ogni tabella riporta lo stato degli archi (T, L, U), i flussi e la riduzione dei costi; ciascuna tabella dei cicli elenca gli archi di C dall'apice.

Esempio 8.5: rete senza capacità

Iterazione 1

I potenziali sono $\pi = (15, 10, 13, 5, 10, 0)$ e il costo è 80.

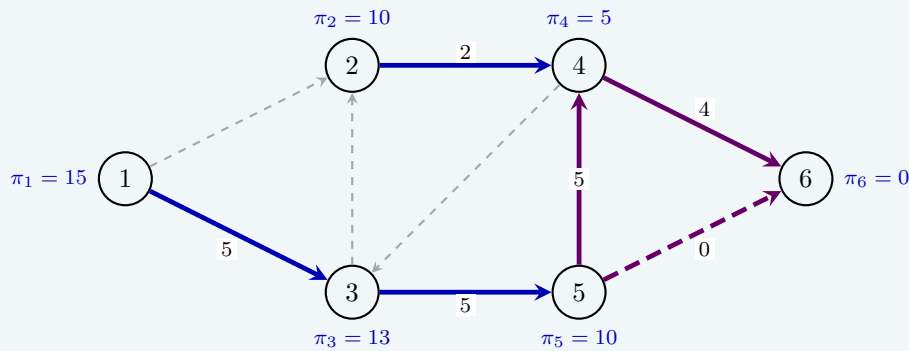
arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
stato	L	T	T	L	T	L	T	T	L
x_{ij}	0	5	2	0	5	0	4	5	0
$\bar{c}_{ij}$	-3	0	0	-1	0	11	0	0	-7

- Gli archi idonei sono (1, 2), (3, 2) e (5, 6); l'arco entrante è $e = (5, 6)$, con $\bar{c}_{56} = -7$. Lo è in L , quindi C segue (5, 6).

- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 5, 4, 6 e 6: l'apice è $w = 6$ e C è 6, 4, 5, 6.

arco di C	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
direzione	—	—	+
residuo	4	5	$+\infty$

- $\theta = 4$ e (4, 6) lasciano l'albero verso L . Le unità 4 per il nodo 6 ora viaggiano su (5, 6) invece che 5, 4, 6 e il costo diventa $80 - 4 \cdot 7 = 52$.
- La rimozione di (4, 6) elimina $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, che contiene $k = 5$: questi potenziali cambiano con $\bar{c}_{56} = -7$.



Iterazione 2

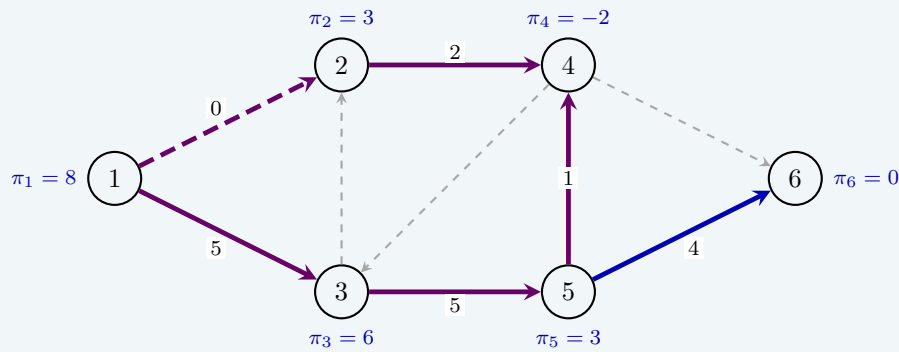
I potenziali sono $\pi = (8, 3, 6, -2, 3, 0)$ e il costo è 52.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
stato	L	T	T	L	T	L	L	T	T
x_{ij}	0	5	2	0	5	0	0	1	4
$\bar{c}_{ij}$	-3	0	0	-1	0	11	7	0	0

- Gli archi idonei sono (1, 2) e (3, 2); l'arco entrante è $e = (1, 2)$, con $\bar{c}_{12} = -3$, in L .
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 1, 3, 5, 6 e 2, 4, 5, 6: l'apice è $w = 5$ e C è 5, 3, 1, 2, 4, 5.

arco di C	(3, 5)	(1, 3)	(1, 2)	(2, 4)	(5, 4)
direzione	—	—	+	+	—
residuo	5	5	$+\infty$	$+\infty$	1

- $\theta = 1$ e (5, 4) lasciano l'albero verso L . L'unità per il nodo 4 che ha viaggiato lungo 1, 3, 5, 4, al costo 10, ora viaggia lungo 1, 2, 4, al costo 7: il costo diventa $52 - 1 \cdot 3 = 49$.
- La rimozione di (5, 4) esclude $S = \{2, 4\}$, che contiene $l = 2$: questi potenziali cambiano con $-\bar{c}_{12} = 3$.



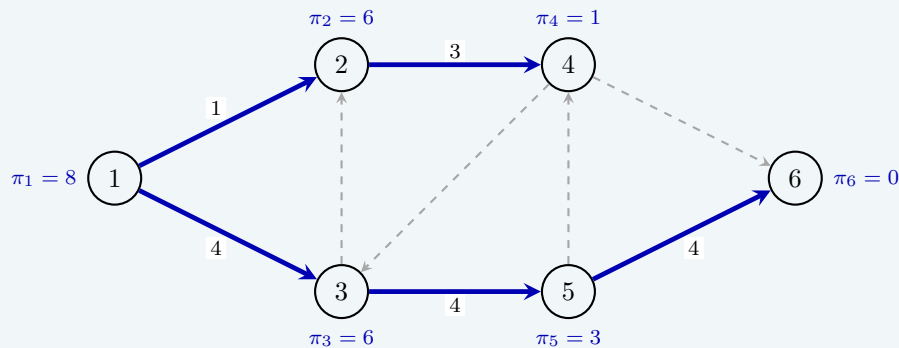
Iterazione 3

I potenziali sono $\pi = (8, 6, 6, 1, 3, 0)$ e il costo è 49.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
stato	T	T	T	L	T	L	L	L	T
x_{ij}	1	4	3	0	4	0	0	0	4
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	2	0	8	4	3	0

Tutti gli archi di L hanno $\bar{c}_{ij} > 0$: STOP. Per Teorema 8.10 il flusso $x_{12} = 1$, $x_{13} = 4$, $x_{24} = 3$, $x_{35} = 4$, $x_{56} = 4$ è l'unico flusso ottimale, con valore

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 49.$$



- Gurobi (gurobipy) conferma il valore ottimale 49 e il flusso ottimale; enumerando tutti gli alberi fattibili strutture danno lo stesso ottimo unico.
- Il flusso ottimale invia le unità 4 su (5, 6), la cui capacità nel Capitolo 4 è $u_{56} = 2$: con le capacità questo flusso non è fattibile e il valore ottimale aumenta da 49 a 60.

Senza capacità U è vuoto e solo gli archi all'indietro possono bloccarsi. Sulla rete di riferimento due pivot abbassano il costo da 80 a 52 e a 49; i costi ridotti dell'ultimo albero sono positivi su tutti gli archi non basici.

8.7 Degenerazione e alberi fortemente fattibili

Definizione 8.16: struttura ad albero fortemente ammissibile

Sia (T, L, U) una struttura ad albero fattibile con la soluzione ad albero $\mathbf{x}$ e radice n . Per un nodo $i \neq n$, l'albero arco tra i e il nodo successivo del suo percorso verso la radice **punta verso la radice** se i è la sua coda, e **lontano dalla radice** se i è la sua testa. La struttura ad albero è **fortemente fattibile** se

- ogni arco di albero con $x_{ij} = 0$ punta verso la radice e
- ogni arco di albero con $x_{ij} = u_{ij}$ punta lontano dalla radice.

- Equivalentemente, una quantità positiva di flusso può essere inviata da ogni nodo alla radice lungo il suo percorso ad albero. Un arco puntando verso la radice viene traslato in avanti e necessita di $x_{ij} < u_{ij}$; un arco rivolto in direzione opposta viene percorso all'indietro e necessita di $x_{ij} > 0$.
- Una struttura ad albero ammissibile non degenerata è fortemente ammissibile.
- In un pivot degenerare il flusso e il costo non cambiano, ma l'albero sì. [Proposizione 8.15](#) non esclude che una sequenza di pivot degeneri ritorni ad una struttura ad albero già soddisfatta: l'algoritmo sarebbe quindi **ciclo**, come l'algoritmo del simplesso di [Capitolo 7](#) «Condizioni di ottimalità e regole pivot».

Esempio 8.6: le quattro strutture ad albero di $\bar{\mathbf{x}}$

Nel flusso $\bar{\mathbf{x}}$ di [Esempio 8.2](#) gli archi $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$ sono strettamente tra i loro limiti e collegano tutti i nodi tranne 3. Uno albero ricoprente che li contiene aggiunge un arco alla volta incidente legato al nodo 3 e ogni scelta fornisce una struttura ad albero con la stessa soluzione ad albero $\bar{\mathbf{x}}$:

aggiunti arco, flusso e percorso da 3 alla radice e fortemente ammissibile

$(3, 2)$	0	3, 2, 4, 6: l'arco punta verso la radice e sì
$(1, 3)$	$4 = u_{13}$	3, 1, 2, 4, 6: l'arco punta lontano dalla radice e sì
$(3, 5)$	$4 = u_{35}$	3, 5, 4, 6: l'arco punta verso la radice e no
$(4, 3)$	0	3, 4, 6: l'arco punta lontano dalla radice e no

Con $(3, 5)$ nell'albero, nessun flusso può lasciare il nodo 3 verso la radice, perché $(3, 5)$ è saturo; con $(4, 3)$, il flusso può raggiungere 4 da 3, perché $(4, 3)$ è vuoto. Il perno di [Esempio 8.4](#) va dal primo struttura al secondo.

Lemma 8.17: pivot degenerati

Sia (T, L, U) fortemente ammissibile, e sia C il ciclo di un pivot, percorso dall'apice w : il percorso dell'albero P da w a p , l'arco e , il percorso dell'albero Q da q a w . Quindi ogni arco di Q e l'arco e hanno positivo capacità residua. In particolare, se $\theta = 0$, tutti gli archi di blocco giacciono su P .

Dimostrazione. La capacità residua di e è $u_{kl} > 0$: è $u_{kl} - 0$ se $e \in L$ e $x_{kl} = u_{kl}$ se $e \in U$. L'apice w si trova sul percorso dell'albero da q alla radice, quindi Q è la prima parte di questo percorso, percorsa verso la radice. Di forte fattibilità una quantità positiva di flusso può essere inviata da q alla radice lungo di esso: ogni arco di Q ha positivo capacità residua in direzione di C . $\square$

Teorema 8.18: la regola dell'arco uscente mantiene una forte fattibilità

Se (T, L, U) è fortemente ammissibile e $\theta < +\infty$, la struttura ad albero ottenuta dal pivot, con l'arco uscente di [Definizione 8.11](#), è fortemente fattibile.

Dimostrazione. Lascia che C visiti $w = v_0, v_1, \dots, v_r = w$ nella sua direzione, con f tra v_s e v_{s+1} , e lascia che x' sia il nuovo flusso. Supponiamo che i sia un nodo e y il primo nodo di C nel percorso ad albero fino alla radice in T .

1. *Il nuovo percorso.* Se il percorso di i non soddisfa C , è lo stesso in T' . Altrimenti il percorso di i in T' va da i a y come in T , poi da y a w all'interno di $C \setminus \{f\}$, quindi da w alla radice come in T . Le due parti esterne non utilizzano alcun arco di C , quindi i loro flussi non cambiano e portano ancora flusso positivo verso il radice.
2. *La parte all'interno di C .* Se $y = v_t$ con $t \leq s$, il percorso va $v_t, v_{t-1}, \dots, v_0 = w$, contro il direzione di C . Se $t \geq s + 1$, va $v_t, v_{t+1}, \dots, v_r = w$, nella direzione di C .
3. *Caso $\theta > 0$.* Rispetto a C , la capacità residua di ogni arco aumenta di $\theta > 0$. In direzione di C , gli archi dopo f non sono bloccanti, perché f è l'ultimo arco bloccante: la loro capacità residua è maggiore di θ e rimane positivo.
4. *Caso $\theta = 0$.* Il flusso non cambia, e f giace su P di [Lemma 8.17](#). Per $t \leq s$, il percorso da v_t a w sale fino a P : fa parte del percorso ad albero di v_t in T , che porta flusso positivo verso la radice. Per $t \geq s + 1$, gli archi di P dopo f non sono bloccanti e e e gli archi di Q hanno capacità residua positiva per lo stesso lemma.

In tutti i casi ogni nodo può inviare una quantità positiva di flusso alla radice in T' . $\square$

Teorema 8.19: finitezza dell'algoritmo del simpleso di rete

Se la struttura ad albero iniziale è fortemente ammissibile e ogni perno utilizza l'arco uscente di [Definizione 8.11](#), allora ogni struttura ad albero incontrata è fortemente ammissibile, nessuna struttura ad albero è si incontrano due volte e l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di pivot. Ciò vale per qualunque regola che scelga l'entrata arco tra gli archi idonei.

Dimostrazione. L'ammissibilità forte segue per induzione da [Teorema 8.18](#).

1. Un pivot con $\theta > 0$ diminuisce il costo ([Proposizione 8.12](#)).
2. In un pivot degenere, f giace su P ([Lemma 8.17](#)), quindi il percorso da p al root passa attraverso f e $p \in S$. Se $e \in L$, allora $p = k$ e i potenziali di S cambiano di $\bar{c}_{kl} < 0$; se $e \in U$, allora $p = l$ e cambiano con $-\bar{c}_{kl} < 0$ ([Proposizione 8.13](#)). Quindi $\sum_{i \in N} \pi_i$ diminuisce rigorosamente, mentre il costo non cambia.
3. Una struttura ad albero determina il suo costo e le sue potenziali. Ad ogni pivot la coppia $(\mathbf{c}'\mathbf{x}, \sum_{i \in N} \pi_i)$ diminuisce rigorosamente in ordine lessicografico, quindi nessuna struttura ad albero viene soddisfatta due volte; ci sono infinitamente molti di loro. $\square$

- La dimostrazione utilizza la regola in due punti: in un perno degenere l'arco uscente si trova tra l'apice e p , e il nuovo albero è fortemente fattibile. Una scelta diversa tra gli archi di blocco può produrre una struttura ad albero che non lo è fortemente fattibile.
- Il teorema necessita di una struttura ad albero iniziale fortemente ammissibile: quando non se ne conosce alcuna, si costruisce con un albero ausiliario rete.

In un albero fortemente ammissibile ogni nodo può spingere il flusso alla radice. Scegliere come arco di uscita l'ultimo arco di blocco da cui partire l'apice mantiene questa proprietà; quindi un perno degenere abbassa i potenziali di un sottoalbero e nessuna struttura ad albero ripete: l'algoritmo non può ciclare.

8.8 Un esempio capacitato con un perno degenere

- Risolviamo l'istanza di traslato di [Capitolo 4](#), la rete di riferimento con capacità, partendo dal flusso $\bar{\mathbf{x}}$ di costo 63 con la struttura ad albero fortemente ammissibile di [Esempio 8.2](#):

$$T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 6), (5, 4)\}, \quad L = \{(4, 3)\}, \quad U = \{(1, 3), (3, 5), (5, 6)\}.$$

Esempio 8.7: rete con capacità

Iterazione 1

I potenziali sono $\boldsymbol{\pi} = (12, 10, 12, 5, 10, 0)$ e il costo è 63.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
stato	T	U	T	T	U	L	T	T	U
x_{ij}	1	4	3	0	4	0	2	2	2
$\bar{c}_{ij}$	0	2	0	0	1	10	0	0	-7

- Questo è il perno di [Esempio 8.4](#): $e = (1, 3) \in U$, apice $w = 2$, $C = 2, 3, 1, 2$, residuo capacità 0, 4, 3.

- $\theta = 0$: il perno è degenerare. L'arco $(3, 2)$ lascia l'albero verso L e $(1, 3)$ vi entra nel suo capacità. Il costo rimane 63 e π_3 scende da 12 a 10.

Iterazione 2

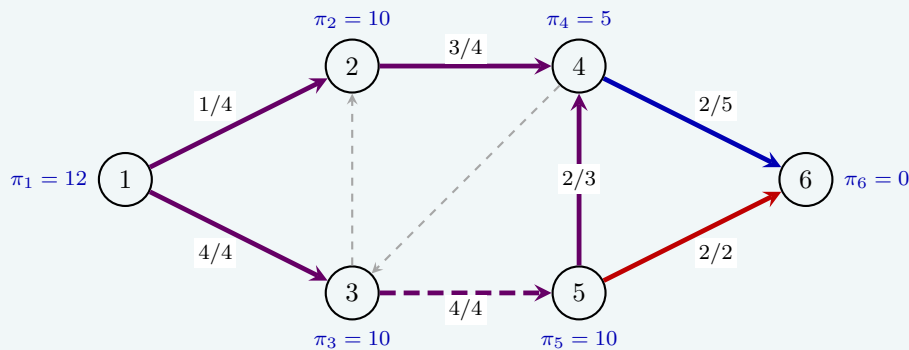
I potenziali sono $\pi = (12, 10, 10, 5, 10, 0)$ e il costo è 63.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
stato	T	T	T	L	U	L	T	T	U
x_{ij}	1	4	3	0	4	0	2	2	2
$\bar{c}_{ij}$	0	0	0	2	3	8	0	0	-7

- L'unico arco idoneo è $e = (3, 5) \in U$, con $\bar{c}_{35} = 3$: C viene attraversato contro di esso, con $p = 5$ e $q = 3$.
- I percorsi dell'albero fino alla radice sono 3, 1, 2, 4, 6 e 5, 4, 6: l'apice è $w = 4$ e C è 4, 5, 3, 1, 2, 4.

arco di C	(5, 4)	(3, 5)	(1, 3)	(1, 2)	(2, 4)
direzione	-	-	-	+	+
residuo	2	4	4	3	1

- $\theta = 1$ e l'arco di blocco $(2, 4)$, in avanti, lascia l'albero e va a U . Un'unità si muove dal percorso 1, 3, 5, 4 al percorso 1, 2, 4 e il costo diventa $63 - 1 \cdot 3 = 60$.
- La rimozione di $(2, 4)$ elimina $S = \{1, 2, 3\}$, che contiene $k = 3$: questi potenziali cambiano con $\bar{c}_{35} = 3$.

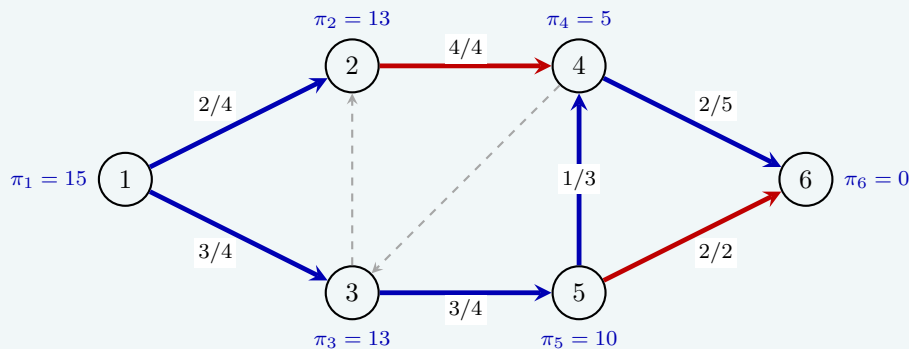


Iterazione 3

I potenziali sono $\pi = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$ e il costo è 60.

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 4)	(5, 6)
stato	T	T	U	L	T	L	T	T	U
x_{ij}	2	3	4	0	3	0	2	1	2
$\bar{c}_{ij}$	0	0	-3	2	0	11	0	0	-7

Gli archi di L hanno $\bar{c}_{32} = 2 > 0$ e $\bar{c}_{43} = 11 > 0$, gli archi di U hanno $\bar{c}_{24} = -3 < 0$ e $\bar{c}_{56} = -7 < 0$: **STOP**. Il flusso è l'unico flusso ottimale del Capitolo 4, con valore 60, e i potenziali sono quelli del suo certificato.



- Le tre strutture ad albero sono fortemente realizzabili. Nel secondo l'arco base $(1,3)$ è al massimo delle sue capacità e punti lontani dalla radice, come richiede la definizione.
- Il pivot degenerare non abbassa il costo: sostituisce solo $(3,2)$ con $(1,3)$ nella base. Viene prima perché la regola di immissione preferisce $|\bar{c}_{13}| = 2$ a $|\bar{c}_{35}| = 1$.
- Gurobi conferma il valore ottimale 60 e l'enumerazione delle strutture ad albero realizzabili fornisce lo stesso ottimo unico.

Con le capacità, gli archi di U entrano diminuendo il loro flusso e un arco saturo può lasciare l'albero verso U . Dal flusso $\bar{x}$ un pivot degenerare e un pivot con $\theta = 1$ raggiungono il flusso ottimale del capitolo 4, di valore 60.

8.9 L'albero iniziale: Fase 0

Definizione 8.20: rete ausiliaria

Sia $G = (N, A)$ una rete con $\sum_{i \in N} b_i = 0$. La **rete ausiliaria** G^0 aggiunge a G il **nodo artificiale** $r = n + 1$, con $b_r = 0$ e un **arco artificiale** per ogni nodo $i \in N$:

$$(i, r) \text{ se } b_i \geq 0, \quad (r, i) \text{ se } b_i < 0,$$

con capacità $+\infty$. I costi della Fase 0 sono $c_{ij}^0 = 1$ sugli archi artificiali e $c_{ij}^0 = 0$ sugli archi di A . **Fase 0** applica l'algoritmo del simplesso su reti a G^0 con i costi c_{ij}^0 , partendo dall'albero degli archi artificiali, con $L = A$ e $U = \emptyset$; la radice è l'ultimo nodo, r .

- Il valore della Fase 0 è il flusso totale sugli archi artificiali: misura quanto il flusso è lontano dall'essere un flusso di G . Questo è il problema ausiliario di [Capitolo 8 «Fase 0 del simplesso»](#), scritto sulla rete.

Proposizione 8.21: l'albero iniziale della Fase 0

Gli archi artificiali formano un albero di copertura di G^0 . La sua soluzione ad albero ha $x_{ir} = b_i$ se $b_i \geq 0$, $x_{ri} = -b_i$ se $b_i < 0$ e $x_{ij} = 0$ su A ; il suo costo è $\sum_{i \in N} |b_i|$ e la struttura ad albero è fortemente ammissibile.

Dimostrazione. Gli archi artificiali n uniscono ogni nodo di N a r : formano un grafo connesso con $n+1$ nodi e n archi, un albero di copertura.

- In un nodo $i \in N$ l'unico arco con flusso è il suo arco artificiale, quindi vale la conservazione. A r il deflusso meno l'afflusso è $\sum_{i: b_i < 0} (-b_i) - \sum_{i: b_i \geq 0} b_i = -\sum_{i \in N} b_i = 0 = b_r$.
- Gli archi dell'albero con flusso zero sono gli archi (i, r) con $b_i = 0$: la loro coda è i , quindi puntano verso la radice. Nessun arco di albero raggiunge la sua capacità, ovvero $+\infty$. $\square$

Teorema 8.22: Fase 0

La fase 0 si ferma dopo un numero finito di pivot con un valore ottimale $z_0 \geq 0$. La rete G ha un flusso fattibile se e solo se $z_0 = 0$, e in tal caso il flusso finale della Fase 0, limitato a A , è un flusso fattibile di G .

Dimostrazione. Tutte le capacità di G^0 sono positive e la struttura ad albero iniziale è fortemente ammissibile (Proposizione 8.21), quindi la Fase 0 si interrompe con Teorema 8.19.

1. Non può fermarsi al passo 3: i costi $\bar{c}_{ij}^0$ sono non negativi, quindi nessun ciclo ha costi negativi (Proposizione 8.14). Si ferma al passo 1 con un flusso ottimale, di valore $z_0 \geq 0$.
2. Se G ha un flusso ammissibile, lo stesso flusso con zero sugli archi artificiali è ammissibile per G^0 con costo 0, quindi $z_0 = 0$.
3. Se $z_0 = 0$, ogni arco artificiale porta flusso nullo, quindi i vincoli di conservazione dei nodi di N comportano solo archi di A : la restrizione a A è un flusso ammissibile di G . $\square$

- Quando $z_0 = 0$, l'albero finale della Fase 0 contiene ancora archi artificiali, necessari per collegare la radice r agli altri nodi. La proposizione seguente mostra come proseguire a partire da questo albero.

Proposizione 8.23: dalla Fase 0 al simplesso su reti

Supponiamo che la Fase 0 termini con $z_0 = 0$, flusso $\tilde{x}^0$, struttura ad albero (T, L, U) e costi ridotti $\bar{c}_{ij}^0$. Applichiamo a G^0 l'algoritmo del simplesso su reti a partire da (T, L, U) , assegnando i costi c_{ij} agli archi di A e costo 0 agli archi artificiali. Facciamo entrare soltanto archi con $\bar{c}_{ij}^0 = 0$. Ogni flusso visitato assegna valore zero agli archi artificiali e l'algoritmo termina con un flusso ottimale di G , oppure dimostra che il modello MCF è

illimitato.

Dimostrazione. Chiamiamo *fissati* gli archi con $\bar{c}_{ij}^0 \neq 0$. Sono fuori base e, per l'ottimalità della Fase 0, quelli con $\bar{c}_{ij}^0 > 0$ appartengono a L e hanno flusso 0, mentre quelli con $\bar{c}_{ij}^0 < 0$ appartengono a U e hanno flusso u_{ij} .

1. *Identità chiave.* Sia $\mathbf{y}$ un flusso ammissibile di G^0 . Per il [Lemma «Costo e costo ridotto» del Capitolo 4](#) e poiché il costo di $\tilde{\mathbf{x}}^0$ è $z_0 = 0$,

$$\sum_a c_a^0 y_a = \sum_a \bar{c}_a^0 (y_a - \tilde{x}_a^0).$$

Ogni termine è $\bar{c}_a^0 y_a \geq 0$ sugli archi congelati di L , $\bar{c}_a^0 (y_a - u_a) \geq 0$ sugli archi congelati di U , e 0 altrove.

2. *Nessun flusso artificiale.* Gli archi fissati non entrano mai nell'albero, quindi mantengono i propri valori in ogni soluzione visitata. Ogni termine nell'identità è nullo; di conseguenza il flusso artificiale totale $\sum_a c_a^0 y_a$ è zero e ciascun arco artificiale trasporta flusso nullo.
3. *I flussi ammissibili di G rispettano i valori fissati.* Sia $\mathbf{y}$ un flusso ammissibile di G , esteso con valore zero sugli archi artificiali. Poiché $\sum_a c_a^0 y_a = 0$, ogni termine dell'identità è nullo: quindi $y_a = 0$ sugli archi fissati in L e $y_a = u_a$ su quelli fissati in U .
4. *Ottimalità.* Supponiamo che l'algoritmo termini con il flusso $\mathbf{x}$ e i potenziali $\boldsymbol{\pi}$. Come nel [Teorema 8.10](#), vale

$$\mathbf{c}'\mathbf{y} - \mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_a \bar{c}_a (y_a - x_a).$$

Gli archi fissati e quelli dell'albero contribuiscono zero; per gli altri archi in L e U , le condizioni di arresto rendono ogni termine non negativo. Quindi $\mathbf{c}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}$.

5. *Illimitatezza.* Se l'algoritmo termina al Passaggio 3, i flussi

$$\mathbf{x} + t\mathbf{x}^C, \quad t \geq 0,$$

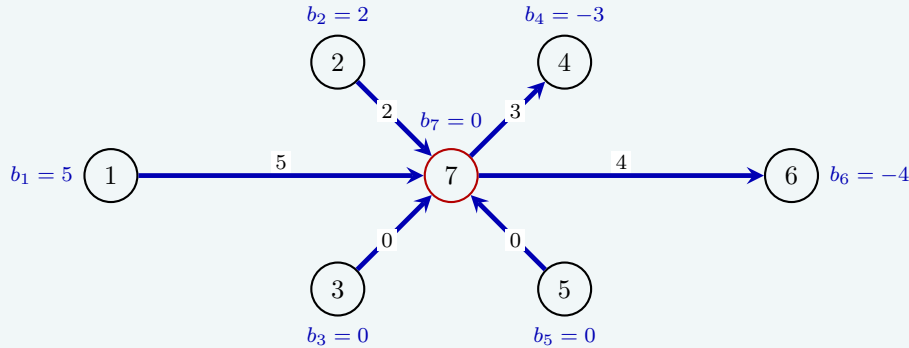
della [Proposizione 8.14](#) mantengono invariati i valori sugli archi fissati. Per l'identità del punto 1 hanno flusso nullo sugli archi artificiali; sono quindi flussi ammissibili di G e il loro costo tende a $-\infty$. $\square$

Le strutture incontrate rimangono fortemente ammissibili e l'algoritmo si ferma per [Teorema 8.19](#).

Esempio 8.8: Fase 0 sulla rete di riferimento

Per la rete di riferimento con capacità, la rete ausiliaria aggiunge il nodo artificiale 7 e gli archi artificiali $(1, 7)$, $(2, 7)$, $(3, 7)$, $(5, 7)$ per i nodi con $b_i \geq 0$, e $(7, 4)$, $(7, 6)$ per quelli

con $b_i < 0$. L'albero iniziale (in blu) trasporta rispettivamente 5, 2, 0, 0, 3 e 4 unità su questi archi. Gli archi di A sono inizialmente vuoti e non sono disegnati; il valore iniziale è $z_0 = 14$. I potenziali iniziali valgono $\pi_i = 1$ per i nodi collegati a 7 da un arco $(i, 7)$ e $\pi_i = -1$ per quelli collegati da un arco $(7, i)$.



La Fase 0 esegue sei pivot: ogni arco entrante ha $\bar{c}_{ij}^0 = -2$ e l'apice del ciclo è sempre la radice 7.

pivot	arco entrante	$\bar{c}_{ij}^0$	apice	θ	archi bloccanti	arco uscente	z_0 dopo
1	(2, 4)	-2	7	2	(2, 7)	(2, 7)	10
2	(1, 2)	-2	7	1	(7, 4)	(7, 4)	8
3	(4, 6)	-2	7	1	(2, 4)	(2, 4)	6
4	(5, 4)	-2	7	0	(5, 7)	(5, 7)	6
5	(3, 5)	-2	7	0	(3, 7)	(3, 7)	6
6	(1, 3)	-2	7	3	(1, 7), (5, 4), (7, 6)	(7, 6)	0

- I pivot 4 e 5 sono degeneri. Al pivot 3, l'arco (2, 4) raggiunge la capacità e passa all'insieme U .
- Al pivot 6, il ciclo è 7, 1, 3, 5, 4, 6, 7 e ha tre archi bloccanti. La regola sceglie (7, 6), l'ultimo arco bloccante incontrato percorrendo il ciclo dall'apice. Se uscisse (1, 7), l'albero conterrebbe l'arco saturo (5, 4) diretto verso la radice e l'arco vuoto (7, 6) diretto in senso opposto; se uscisse (5, 4), (7, 6) resterebbe vuoto e diretto lontano dalla radice. In entrambi i casi la nuova struttura perderebbe la forte ammissibilità.
- La Fase 0 termina con $z_0 = 0$, albero formato dagli archi (1, 2), (1, 3), (1, 7), (3, 5), (4, 6), (5, 4), e $U = \{(2, 4)\}$. Tutti i potenziali dei nodi di N valgono 1: i costi ridotti della Fase 0 sono nulli su ogni arco, tranne (7, 4) e (7, 6), per i quali valgono 2. Questi due archi restano fissati.

Con i costi c_{ij} la soluzione ad albero costa 74. Gli archi (7, 4) e (7, 6) hanno costi ridotti -10 e -15, ma sono congelati: l'unico arco che può entrare è (5, 6), con $\bar{c}_{56} = -7$. La sua capacità residua $u_{56} = 2$ è il più piccolo lungo il suo ciclo, quindi (5, 6) stesso è l'arco uscente e si sposta su U e il costo diventa $74 - 2 \cdot 7 = 60$: l'ottimo di [Esempio 8.7](#). Se (7, 6) potesse entrare, le unità 3 viaggierebbero da 1 a 6 attraverso il nodo artificiale, al costo 29: non un flusso di G .

La fase 0 parte dalla stella fortemente ammissibile degli archi artificiali e minimizza il flusso artificiale: $z_0 > 0$ dimostra che non esiste alcun flusso fattibile. Se $z_0 = 0$, il semplice so su reti continua dall'albero finale, con i costi originali, e possono entrare solo gli archi con costo ridotto pari a zero in Fase 0.

8.10 Errori tipici

Attenzione

- **Considerare di base gli archi con flusso positivo.** La base è l'albero T : un arco in U può avere flusso positivo pur essendo fuori base; un arco dell'albero può invece avere flusso 0 oppure u_{ij} .
- **Utilizzo del test del segno di una massimizzazione.** Nel modello MCF, una minimizzazione, un arco di L è idoneo se $\bar{c}_{ij} < 0$ e un arco di U se $\bar{c}_{ij} > 0$.
- **Orientare il ciclo come arco entrante quando è in U .** Il suo flusso deve diminuire, quindi il ciclo va contro di esso e l'arco entrante è all'indietro.
- **Dimenticare l'arco entrante nel test del rapporto.** La sua capacità residua è u_{kl} ; se è l'unico arco bloccante, l'albero non cambia e l'arco passa da L a U o viceversa.
- **Aggiornamento di tutti i potenziali.** Cambiano solo i potenziali del sottoalbero tagliato dall'arco uscente, tutti per $\bar{c}_{kl}$ o $-\bar{c}_{kl}$.
- **Scegliere un arco bloccante qualsiasi.** Selezionare l'ultimo arco bloccante incontrato dall'apice preserva la forte ammissibilità dell'albero; una scelta diversa può far perdere questa proprietà e la garanzia di terminazione.
- **Far entrare archi fissati dopo la Fase 0.** Un arco con $\bar{c}_{ij}^0 \neq 0$ può reintrodurre flusso sugli archi artificiali. Possono entrare soltanto gli archi con $\bar{c}_{ij}^0 = 0$.

8.11 In sintesi

In sintesi

- In una rete connessa l'equazione del nodo n è ridondante; le basi del modello MCF corrispondono agli alberi ricoprenti e le relative matrici hanno determinante ± 1 .
- Una struttura ad albero (T, L, U) assegna agli archi fuori dall'albero il valore 0 oppure la capacità. La soluzione sugli archi dell'albero si calcola eliminando le foglie; i potenziali si calcolano a partire dalla radice, ponendo $\pi_n = 0$.
- Il costo ridotto di un arco non basico è il costo del suo ciclo fondamentale; $\bar{c} \geq 0$ su L e $\bar{c} \leq 0$ su U certificano l'ottimalità.
- Un pivot invia θ unità lungo il ciclo fondamentale dell'arco entrante e riduce il costo di $\theta|\bar{c}_{kl}|$. L'arco uscente è l'ultimo arco bloccante incontrato dall'apice; cambiano

soltanto i potenziali dei nodi di un sottoalbero.

- La forte ammissibilità degli alberi e la regola per scegliere l'arco uscente evitano il ciclaggio. La Fase 0 sulla rete ausiliaria trova un albero iniziale fortemente ammissibile oppure dimostra che non esiste un flusso ammissibile.

La rete di riferimento in sintesi.

senza capacità e costi 80, 52, 49; albero ottimale $(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 6)$

con capacità, da $\bar{x}$ e costa 63, 63 (degenerato), 60; $U = \{(2, 4), (5, 6)\}$

potenziali ottimali $(\pi_6 = 0)$ e $(8, 6, 6, 1, 3, 0)$ senza capacità, $(15, 13, 13, 5, 10, 0)$ con

Fase 0

z_0 da 14 a 0 in sei perni, poi un perno da 74 a 60