



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

---

# Ottimizzazione su reti

Volume 3 — Flussi

---

I modelli di flusso su reti e l'unimodularità totale; il flusso massimo e il taglio minimo; il flusso di costo minimo con cicli negativi, potenziali e costi ridotti; i problemi di trasporto, trasbordo e assegnamento.

**Fabio Furini**

[fabiofurini.github.io](https://fabiofurini.github.io)

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:  
[fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/](https://fabiofurini.github.io/ottimizzazione-su-reti/)  
[github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti](https://github.com/fabiofurini/ottimizzazione-su-reti)

Anno accademico 2026–2027

---

# Indice

---

|          |                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Modelli di flusso su reti</b>                          | <b>3</b>  |
| 4.1      | Reti e flussi . . . . .                                   | 4         |
| 4.2      | Il modello di flusso di costo minimo . . . . .            | 6         |
| 4.3      | Feasibility conditions . . . . .                          | 7         |
| 4.4      | Rimozione dei limiti inferiori . . . . .                  | 8         |
| 4.5      | Istanze non bilanciate . . . . .                          | 9         |
| 4.6      | Totale unimodularità e integralità . . . . .              | 11        |
| 4.7      | Il modello duale e i costi ridotti . . . . .              | 13        |
| 4.8      | Casi speciali . . . . .                                   | 16        |
| 4.9      | Un'istanza di traslato . . . . .                          | 17        |
| 4.10     | Errori tipici . . . . .                                   | 18        |
| 4.11     | In sintesi . . . . .                                      | 19        |
| <b>5</b> | <b>Flusso massimo</b>                                     | <b>20</b> |
| 5.1      | Il problema del flusso massimo . . . . .                  | 21        |
| 5.2      | Tagli . . . . .                                           | 23        |
| 5.3      | La rete residua . . . . .                                 | 25        |
| 5.4      | Il teorema del taglio minimo del flusso massimo . . . . . | 27        |
| 5.5      | L'algoritmo Ford-Fulkerson . . . . .                      | 29        |
| 5.6      | L'algoritmo Edmonds-Karp . . . . .                        | 32        |
| 5.7      | Applicazioni . . . . .                                    | 35        |
| 5.8      | Errori tipici . . . . .                                   | 38        |
| 5.9      | In sintesi . . . . .                                      | 38        |
| <b>6</b> | <b>Flusso di costo minimo</b>                             | <b>40</b> |
| 6.1      | La rete residua con i costi . . . . .                     | 41        |
| 6.2      | Circolazioni e loro scomposizione . . . . .               | 43        |
| 6.3      | Condizioni di ottimalità del ciclo negativo . . . . .     | 45        |
| 6.4      | Condizioni di ottimalità con potenziali . . . . .         | 47        |
| 6.5      | Un primo flusso fattibile . . . . .                       | 49        |
| 6.6      | L'algoritmo di annullamento del ciclo . . . . .           | 51        |
| 6.7      | L'algoritmo del percorso più breve successivo . . . . .   | 55        |
| 6.8      | Errori tipici . . . . .                                   | 60        |

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| 6.9      | In sintesi . . . . .                           | 60        |
| <b>7</b> | <b>Trasporto e assegnamento</b>                | <b>62</b> |
| 7.1      | Il problema dei trasporti . . . . .            | 63        |
| 7.2      | Soluzioni di base . . . . .                    | 68        |
| 7.3      | Soluzioni iniziali di base fattibili . . . . . | 70        |
| 7.4      | Il metodo potenziale . . . . .                 | 74        |
| 7.5      | Il problema dell'assegnazione . . . . .        | 82        |
| 7.6      | Errori tipici . . . . .                        | 89        |
| 7.7      | In sintesi . . . . .                           | 89        |

## Modelli di flusso su reti

### Prerequisiti

- Da questo modulo, [Capitolo 1 «Graf»](#): grafi orientati, matrice di incidenza nodo-arco, alberi di copertura e rango della matrice di incidenza.
- Dal modulo Programmazione lineare, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#) e [Capitolo 15 «La geometria di Programmazione lineare»](#): duale di un LP, dualità debole e forte, vertici di un poliedro.
- Determinanti: lo sviluppo di Laplace lungo una colonna e la regola di Cramer.

### Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- descrivono una rete con saldi, limiti inferiori, capacità e costi e scrivono il modello di flusso di costo minimo, anche in forma matriciale con la matrice di incidenza;
- verificare le condizioni necessarie per l'esistenza di un flusso ammissibile e costruire controesempi;
- rimuove i limiti inferiori mediante una sostituzione e bilancia un'istanza con un nodo fittizio;
- dimostrare che la matrice di incidenza è totalmente unimodulare e dedurre che il modello ha ottimo intero soluzioni quando i dati sono interi;
- scrivere il duale con i potenziali  $\pi_i$ , calcolare i costi ridotti e certificare l'ottimalità di un flusso;
- riconosce il percorso più breve, il flusso massimo, i problemi di trasporto e di assegnazione come costo minimo modelli di flusso.

## 4.1 Reti e flussi

### Definizione 4.1: rete

Una **rete** è un grafo diretto  $G = (N, A)$ , con nodi  $n = |N|$  e archi  $m = |A|$ , insieme ai seguenti dati.

- Ogni nodo  $i \in N$  ha un **balance**  $b_i \in \mathbb{R}$ . Il nodo è un **nodo di fornitura** se  $b_i > 0$ , un **nodo di richiesta** se  $b_i < 0$  e **nodo di traslato** se  $b_i = 0$ .
- Ogni arco  $(i, j) \in A$  ha un **limite inferiore**  $l_{ij}$  e un **capacità**  $u_{ij}$ , con  $0 \leq l_{ij} \leq u_{ij} \leq +\infty$ , and a **cost**  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  per unità di portata.

Quando non vengono forniti i limiti inferiori,  $l_{ij} = 0$  per ogni arco.

### Definizione 4.2: flusso

Sia  $G = (N, A)$  una rete. Un **flusso** è un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  con una componente  $x_{ij}$  per ogni  $(i, j) \in A$ , pari alla quantità inviata lungo l'arco.

- Il flusso soddisfa il vincolo **conservazione del flusso** del nodo  $i$  se ciò che esce da  $i$  meno ciò che entra  $i$  equivale al saldo:

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = b_i.$$

- Il flusso è **ammissibile** se soddisfa la conservazione del flusso in ogni nodo e  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  per ogni arco. Il suo **costo** è  $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ .

- Un nodo di offerta invia  $b_i$  unità in più di quante ne riceve; un nodo di domanda riceve  $-b_i$  unità in più di quante ne invia. Un nodo di transito trasmette tutto il flusso che riceve.
- Con la matrice di incidenza nodo-arco  $\mathbf{B}$  del [Capitolo 1 «Graf»](#), la conservazione del flusso in tutti i nodi si scrive  $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ : la riga  $i$  di  $\mathbf{B}\mathbf{x}$  è il deflusso meno l'afflusso di  $i$ .

### Esempio 4.1: la rete di riferimento

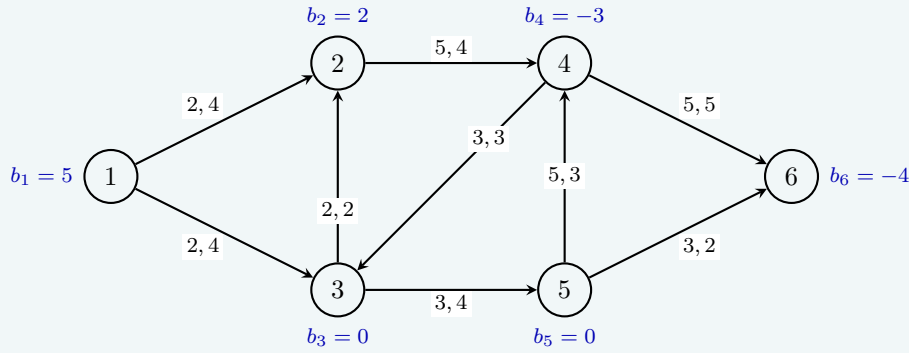
Aggiungiamo i dati al grafo di riferimento di [Capitolo 1 «Graf»](#), con gli archi numerati  $a_1, a_2, \dots, a_9$  in ordine lessicografico. I saldi sono

$$b_1 = 5, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -3, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = -4,$$

quindi i nodi 1 e 2 forniscono unità 7, i nodi 4 e 6 le richiedono e i nodi 3 e 5 sono nodi di traslato. I limiti inferiori sono zero e i costi e le capacità sono:

| arco     | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $c_{ij}$ | 2      | 2      | 5      | 2      | 3      | 3      | 5      | 5      | 3      |
| $u_{ij}$ | 4      | 4      | 4      | 2      | 4      | 3      | 5      | 3      | 2      |

Nella figura ogni arco porta la coppia  $c_{ij}, u_{ij}$ , e ogni nodo il suo equilibrio  $b_i$  (in blu).



Il flusso  $\bar{x}$  con

$$\bar{x}_{12} = 1, \bar{x}_{13} = 4, \bar{x}_{24} = 3, \bar{x}_{32} = 0, \bar{x}_{35} = 4, \bar{x}_{43} = 0, \bar{x}_{46} = 2, \bar{x}_{54} = 2, \bar{x}_{56} = 2$$

è fattibile. Ad esempio, nel nodo 4 il deflusso è  $\bar{x}_{43} + \bar{x}_{46} = 2$ , l'afflusso è  $\bar{x}_{24} + \bar{x}_{54} = 5$  e  $2 - 5 = -3 = b_4$ . Gli archi  $(1, 3)$ ,  $(3, 5)$  e  $(5, 6)$  sono al completo e il costo di  $\bar{x}$  è 63.

#### 4.1.1 Flusso attraverso un taglio

- Per un insieme di nodi  $S \subseteq N$ , denotiamo con  $\delta^+(S)$  gli archi con la coda in  $S$  e la testa all'esterno di  $S$ , da  $\delta^-(S)$  gli archi con la testa in  $S$  e la coda all'esterno di  $S$  e  $x(F) = \sum_{(i,j) \in F} x_{ij}$  for a set of arcs  $F$ .

##### Lemma 4.3: flusso attraverso un taglio

Lascia che  $x$  soddisfi la conservazione del flusso in ogni nodo di una rete  $G = (N, A)$ . Quindi, per ogni  $S \subseteq N$ ,

$$x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = \sum_{i \in S} b_i.$$

*Dimostrazione.* Sommare i vincoli di conservazione dei nodi di  $S$ ; il lato destro è  $\sum_{i \in S} b_i$ .

- Un arco con entrambi i punti finali in  $S$  appare due volte, con  $+x_{ij}$  nella riga della coda e  $-x_{ij}$  nella riga fila della sua testa: annulla.
- Un arco di  $\delta^+(S)$  appare solo nella riga della sua coda, con  $+x_{ij}$ ; un arco di  $\delta^-(S)$  solo in la fila della sua testa, con  $-x_{ij}$ ; gli altri archi non compaiono.  $\square$

- In [Esempio 4.1](#), l'insieme  $S = \{1, 2, 3\}$  ha  $\delta^+(S) = \{(2, 4), (3, 5)\}$  e  $\delta^-(S) = \{(4, 3)\}$ . Il flusso  $\bar{x}$  dà  $3 + 4 - 0 = 7 = b_1 + b_2 + b_3$ .

Una rete ha equilibri sui nodi e limiti inferiori, capacità e costi sugli archi. Un flusso ammissibile soddisfa  $Bx = b$  e i limiti; attraverso ogni taglio, il deflusso netto equivale al saldo totale dei nodi dentro.

## 4.2 Il modello di flusso di costo minimo

### Definizione 4.4: problema di flusso di costo minimo

Data una rete  $G = (N, A)$  con saldi  $b_i$ , limiti inferiori  $l_{ij}$ , capacità  $u_{ij}$  e costi  $c_{ij}$ , la **problema di flusso di costo minimo** richiede un flusso ammissibile di costo minimo.

- Usiamo una variabile continua  $x_{ij}$  per ogni arco  $(i, j) \in A$ , il flusso sull'arco.

Utilizzando queste variabili, un modello di Programmazione Lineare (LP) per il problema del flusso di costo minimo si legge come segue:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (4.1a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in N, \quad (4.1b)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (4.1c)$$

Questo modello LP è denominato modello MCF.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello MCF:
  - la funzione obiettivo lineare (4.1a) riduce al minimo il costo totale del flusso;
  - Vincoli (4.1b) sono i vincoli di conservazione del flusso, uno per ogni nodo;
  - infine, i vincoli (4.1c) impongono il limite inferiore e la capacità di ogni arco.
- Con la matrice di incidenza nodo-arco  $B$ , il vettore  $c$  dei costi ed i vettori  $l$ ,  $u$  dei limiti, il modello MCF è

$$\min \{ c'x : Bx = b, l \leq x \leq u \}.$$

- Il modello dispone di variabili  $m$  ed equazioni  $n$ . La colonna di  $x_{ij}$  in  $B$  ha solo due valori diversi da zero voci, +1 nella riga  $i$  e -1 nella riga  $j$ : questa struttura fornisce tutte le proprietà di questo capitolo.

### Esempio 4.2: il modello MCF della rete di riferimento

Per la rete di [Esempio 4.1](#) il modello MCF ha variabili 9 ed equazioni 6:

$$\begin{array}{lllllllll} \min & 2x_{12} & +2x_{13} & +5x_{24} & +2x_{32} & +3x_{35} & +3x_{43} & +5x_{46} & +5x_{54} & +3x_{56} \\ \text{subject to} & x_{12} & +x_{13} & & & & & & & & = 5 \\ & -x_{12} & & +x_{24} & -x_{32} & & & & & & = 2 \\ & & -x_{13} & & +x_{32} & +x_{35} & -x_{43} & & & & = 0 \\ & & & -x_{24} & & & +x_{43} & +x_{46} & -x_{54} & & = -3 \\ & & & & & -x_{35} & & & +x_{54} & +x_{56} & = 0 \\ & & & & & & & -x_{46} & & -x_{56} & = -4 \\ \text{together with} & 0 \leq x_{12} \leq 4, & 0 \leq x_{13} \leq 4, & 0 \leq x_{24} \leq 4, & 0 \leq x_{32} \leq 2, & 0 \leq x_{35} \leq 4, \end{array}$$

$0 \leq x_{43} \leq 3, 0 \leq x_{46} \leq 5, 0 \leq x_{54} \leq 3, 0 \leq x_{56} \leq 2$ . The coefficient matrix delle equazioni è la matrice di incidenza  $\mathbf{B}$  del grafo di riferimento.

Il problema del flusso di costo minimo è il LP  $\min\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$ : una variabile per arco, un'equazione di conservazione per nodo.

### 4.3 Feasibility conditions

#### Definizione 4.5: rete bilanciata

Una rete è **balanced** se  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ , cioè se l'offerta totale è uguale alla domanda totale.

#### Proposizione 4.6: una rete fattibile è bilanciata

Se una rete  $G = (N, A)$  ha un flusso fattibile, allora  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ .

*Dimostrazione.* Applicare Lemma 4.3 con  $S = N$ : nessun arco esce o entra in  $N$ , quindi  $\delta^+(N) = \delta^-(N) = \emptyset$  e  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ . In forma di matrice, le righe di  $\mathbf{B}$  si sommano al vettore zero, quindi le voci di  $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ .  $\square$

#### Proposizione 4.7: cut condition

Se una rete  $G = (N, A)$  ha un flusso ammissibile, allora per ogni  $S \subseteq N$

$$\sum_{i \in S} b_i \leq u(\delta^+(S)) - l(\delta^-(S)),$$

dove  $u(F)$  e  $l(F)$  sono le somme delle capacità e dei limiti inferiori degli archi di  $F$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x}$  un flusso ammissibile. Da Lemma 4.3 e i limiti  $x_{ij} \leq u_{ij}$  su  $\delta^+(S)$  e  $x_{ij} \geq l_{ij}$  su  $\delta^-(S)$ ,

$$\sum_{i \in S} b_i = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) \leq u(\delta^+(S)) - l(\delta^-(S)). \quad \square$$

- L'offerta dei nodi di  $S$ , al netto della loro domanda, deve poter uscire da  $S$  attraverso gli archi di  $\delta^+(S)$ , mentre gli archi di  $\delta^-(S)$  portano almeno i loro limiti inferiori in  $S$ .
- Una rete equilibrata non può ancora avere un flusso fattibile: l'equilibrio è solo una condizione necessaria.

#### Esempio 4.3: reti bilanciate senza flusso fattibile

Manteniamo gli archi, i costi e le capacità della rete di riferimento e cambiamo gli equilibri.

1. Con  $b_5 = -1, b_6 = 1$  e  $b_i = 0$  per gli altri nodi la rete è bilanciata. Ma il nodo 6 non ha uscita arco: per  $S = \{6\}$  otteniamo  $\delta^+(S) = \emptyset$  e la condizione di taglio fallisce,

poiché  $b_6 = 1 > 0$ .

2. Con  $b_1 = 9$ ,  $b_6 = -8$  e gli altri equilibri come in [Esempio 4.1](#), la rete è equilibrata, dal  $9 + 2 - 3 - 8 = 0$ . Per  $S = \{1\}$  otteniamo  $u(\delta^+(S)) = u_{12} + u_{13} = 8 < 9 = b_1$ : il nodo 1 non può inviare la sua fornitura.

Per la rete di riferimento stessa, tutti i set  $S$  con  $\emptyset \neq S \neq N$  soddisfano la condizione di taglio e il flusso  $\bar{x}$  di [Esempio 4.1](#) è fattibile.

Una rete con flusso ammissibile è equilibrata, e ogni taglio può portare al suo interno la fornitura netta dei nodi. Questi sono necessarie condizioni: una rete equilibrata potrebbe non avere un flusso fattibile.

## 4.4 Rimozione dei limiti inferiori

### Definizione 4.8: sostituzione dei limiti inferiori

Data una rete con limiti inferiori  $l$ , la **rete sostituita** ha gli stessi nodi, archi e costi, zero limiti inferiori e

$$b'_i = b_i - \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} l_{ij} + \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} l_{ji}, \quad \forall i \in N, \quad u'_{ij} = u_{ij} - l_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A,$$

ovvero  $b' = b - Bl$  e  $u' = u - l$ .

- Le unità  $l_{ij}$  che devono viaggiare su  $(i,j)$  vengono inviate in anticipo: la coda  $i$  ha unità  $l_{ij}$  in meno a inviare, la testa  $j$  ha unità  $l_{ij}$  in meno da ricevere e l'arco ha unità  $l_{ij}$  in meno di capacità libera.

### Proposizione 4.9: rimozione dei limiti inferiori

La mappa  $x' = x - l$  è una corrispondenza biunivoca tra i flussi realizzabili di una rete e quelli della sua rete sostituita, e

$$c'x = c'x' + c'l.$$

Quindi i due modelli MCF hanno le stesse soluzioni ottimali, fino allo spostamento di  $l$ , ed i loro valori ottimali differ by the constant  $c'l$ .

*Dimostrazione.* La mappa è lineare e invertibile, con  $x = x' + l$  inverso. Per ogni  $x \in \mathbb{R}^m$ :

1.  $Bx = b$  se e solo se  $Bx' = Bx - Bl = b - Bl = b'$ ;
2.  $l \leq x \leq u$  se e solo se  $0 \leq x' \leq u - l = u'$ ;
3.  $c'x = c'(x' + l) = c'x' + c'l$ .

Il costo di ogni flusso ammissibile varia della stessa costante, quindi le soluzioni ottime corrispondono.  $\square$

**Esempio 4.4: un limite inferiore sulla rete di riferimento**

Nella rete di [Esempio 4.1](#) imponiamo  $l_{32} = 1$ : almeno un'unità deve viaggiare da 3 a 2. La colonna di  $(3, 2)$  in  $\mathbf{B}$  ha  $+1$  nella riga 3 e  $-1$  nella riga 2, quindi  $\mathbf{B}\mathbf{l} = (0, -1, 1, 0, 0, 0)'$  e

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{l} = (5, 3, -1, -3, 0, -4)', \quad u'_{32} = 2 - 1 = 1, \quad \mathbf{c}'\mathbf{l} = c_{32} l_{32} = 2.$$

Il nodo 3 diventa un nodo di domanda, perché ha già inviato un'unità e il nodo 2 ha un'altra unità da inviare. Il la rete sostituita ha un valore ottimale 60; aggiungendo la costante 2, il valore ottimale con  $l_{32} = 1$  è 62.

La sostituzione  $\mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{x}'$  rimuove i limiti inferiori:  $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{l}$  e l'obiettivo cambia in base alla costante  $\mathbf{c}'\mathbf{l}$ .

## 4.5 Istanze non bilanciate

**Definizione 4.10: istanza non bilanciata**

Un'istanza con  $\sum_{i \in N} b_i > 0$  è **non bilanciata**: l'offerta totale supera la domanda totale. Ogni la domanda deve essere soddisfatta e ogni nodo di fornitura  $i$  invia *al massimo* unità  $b_i$ :

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} \leq b_i \quad \forall i \in N : b_i > 0, \quad = b_i \quad \forall i \in N : b_i \leq 0,$$

con i limiti  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  e l'obiettivo  $\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ .

**Definizione 4.11: nodo fittizio**

Sia  $P = \{i \in N : b_i > 0\}$  i nodi di fornitura e  $e = \sum_{i \in N} b_i > 0$  l'eccesso. **equilibrato rete** aggiunge un **nodo fittizio**  $d$  con bilanciamento  $b_d = -e$  e un arco  $(i, d)$  per ogni  $i \in P$  con  $l_{id} = 0$ ,  $u_{id} = +\infty$  e  $c_{id} = 0$ .

**Proposizione 4.12: il nodo fittizio**

Le soluzioni ammissibili dell'istanza sbilanciata ed i flussi ammissibili della rete equilibrata corrispondono, con l' stesso costo: per l'istanza sbilanciata è fattibile un flusso della rete bilanciata limitato a  $A$ , e una soluzione di l'istanza sbilanciata diventa un flusso fattibile con  $x_{id} = b_i - (\text{outflow} - \text{inflow of } i)$ .

*Dimostrazione.* Per un vettore  $\mathbf{x}$  su  $A$ , sia  $s_i(\mathbf{x})$  il deflusso meno l'afflusso del nodo  $i$  lungo gli archi di  $A$ .

1. Lascia che  $(\mathbf{x}, (x_{id})_{i \in P})$  sia fattibile per la rete bilanciata. In  $i \in P$  si legge conservazione  $s_i(\mathbf{x}) + x_{id} = b_i$  con  $x_{id} \geq 0$ , quindi  $s_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ ; negli altri nodi di  $N$  si legge  $s_i(\mathbf{x}) = b_i$ .
2. Al contrario, lascia che  $\mathbf{x}$  sia fattibile per l'istanza non bilanciata e imposta

$x_{id} = b_i - s_i(\mathbf{x}) \geq 0$  per  $i \in P$ . La conservazione vale in ogni nodo di  $N$  e in  $d$  l'afflusso è

$$\sum_{i \in P} x_{id} = \sum_{i \in P} b_i - \sum_{i \in N} s_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \notin P} s_i(\mathbf{x}) = \sum_{i \in P} b_i - 0 + \sum_{i \notin P} b_i = e,$$

poiché i valori  $s_i(\mathbf{x})$  si sommano a zero: ogni arco di  $A$  contribuisce con  $+x_{ij}$  alla sua coda e  $-x_{ij}$  alla testa. Pertanto  $d$  riceve esattamente unità  $-b_d = e$ .

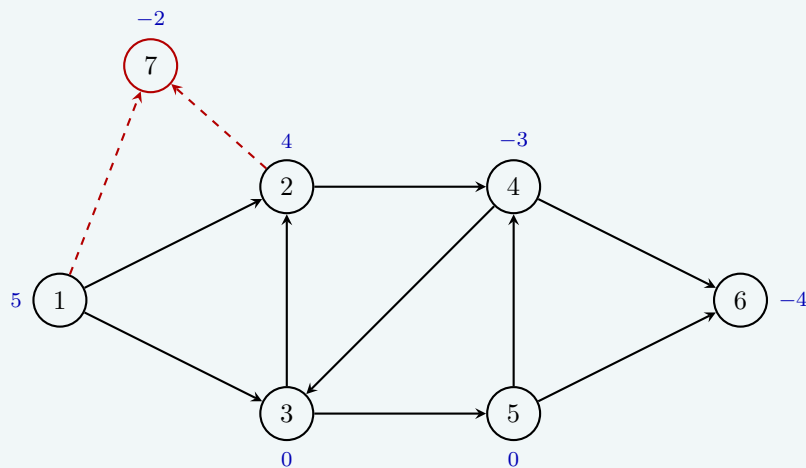
Gli archi fittizi costano zero, quindi i due costi coincidono.  $\square$

- Il flusso su  $(i, d)$  è la parte della fornitura di  $i$  che non viene utilizzata.
- Se la domanda totale supera l'offerta totale e le richieste sono limiti superiori, un nodo fittizio  $d$  con saldo  $b_d = -\sum_{i \in N} b_i$  e gli archi  $(d, j)$  ai nodi di domanda bilanciano la rete allo stesso modo.

#### Esempio 4.5: un nodo fittizio sulla rete di riferimento

Nella rete di [Esempio 4.1](#) aumentiamo l'offerta del nodo 2 a  $b_2 = 4$ . L'offerta totale è 9, la domanda totale è 7 e l'eccesso è  $e = 2$ .

- La rete bilanciata aggiunge il nodo 7 con  $b_7 = -2$  e gli archi  $(1, 7)$  e  $(2, 7)$  con costo 0 e capacità  $+\infty$  (tratteggiata in figura).
- Il suo flusso ottimale, calcolato con Gurobi, spedisce tutte le unità 4 del nodo 2 e solo le unità 3 del nodo 1:  $x_{17} = 2$ ,  $x_{27} = 0$ , con valore ottimale 56.



Un'istanza sbilanciata diventa una rete bilanciata con un nodo fittizio che assorbe l'eccesso attraverso archi a costo zero; il flusso su un arco fittizio è la riserva inutilizzata della sua coda.

## 4.6 Totale unimodularità e integralità

### Definizione 4.13: matrice totalmente unimodulare

Una matrice intera  $M$  è **totalmente unimodulare** (TU) se il determinante di ogni sottomatrice quadrata di  $M$  è 0, +1 o -1. Una sottomatrice quadrata si ottiene scegliendo  $k$  righe e  $k$  colonne, per qualsiasi  $k \geq 1$ .

- Con  $k = 1$  la definizione richiede che ogni voce di una matrice TU sia 0, +1 o -1.

### Teorema 4.14: la matrice di incidenza è totalmente unimodulare

La matrice di incidenza nodo-arco  $B$  di ogni grafo orientato  $G = (N, A)$  è totalmente unimodulare.

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una sottomatrice  $k \times k$  di  $B$ ; dimostriamo  $\det(M) \in \{0, +1, -1\}$  per induzione  $k$ . Per  $k = 1$  la voce è 0, +1 o -1. Lascia che  $k \geq 2$ . Ogni colonna di  $B$  ha esattamente uno +1 e uno -1, quindi ogni colonna di  $M$  ha al massimo due voci diverse da zero; i casi sono tre.

1. Una colonna di  $M$  è zero. Quindi  $\det(M) = 0$ .
2. Una colonna di  $M$  ha esattamente una voce diversa da zero,  $\pm 1$ . L'espansione di Laplace lungo questa colonna restituisce  $\det(M) = \pm \det(M')$ , dove  $M'$  è una sottomatrice  $(k-1) \times (k-1)$  di  $B$ : per induzione  $\det(M') \in \{0, +1, -1\}$ .
3. Ogni colonna di  $M$  ha due voci diverse da zero, +1 e -1. Quindi la somma delle righe di  $M$  dà come risultato il vettore zero, sono linearmente dipendenti e  $\det(M) = 0$ .  $\square$

### Esempio 4.6: sottomatrici della matrice di incidenza di riferimento

Prendiamo le righe 2, 3, 4 della matrice di incidenza  $B$  del grafo di riferimento e due scelte di tre colonne.

|   | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ |
|---|-------|-------|-------|
| 2 | -1    | 1     | 0     |
| 3 | 0     | 0     | 1     |
| 4 | 0     | -1    | 0     |

|   | $a_3$ | $a_4$ | $a_6$ |
|---|-------|-------|-------|
| 2 | 1     | -1    | 0     |
| 3 | 0     | 1     | -1    |
| 4 | -1    | 0     | 1     |

- La colonna di  $a_1 = (1, 2)$  nella prima matrice ha una voce diversa da zero (caso 2): espandendosi lungo di essa e poi lungo la colonna di  $a_5$ , il determinante è -1.
- Gli archi  $a_3 = (2, 4)$ ,  $a_4 = (3, 2)$ ,  $a_6 = (4, 3)$  della seconda matrice formano il ciclo 2, 4, 3, 2, e tutti i loro punti finali sono tra le righe scelte: ogni colonna ha +1 e -1 (caso 3) e il determinante è 0.
- La matrice  $B$  ha sottomatrici quadrate 5004; il calcolo di tutti i loro determinanti conferma che prendono solo i valori -1, 0 e +1.

### 4.6.1 Vertici interi

- Un punto  $\bar{x}$  di un poliedro  $P$  è un **vertice** se non è il punto medio di due distinti punti di  $P$ , come in [Capitolo 15 «La geometria della Programmazione Lineare»](#) del modulo Programmazione Lineare.
- Per un insieme di archi  $F$ , indichiamo con  $B_F$  la sottomatrice delle colonne di  $B$ , e con  $x_F$  la sottomatrice voci corrispondenti di  $x$ .

#### Teorema 4.15: vertici interi

Sia  $G = (N, A)$  una rete con saldi interi  $b$ , limiti inferiori interi  $l$  e capacità  $u$  che sono numeri interi o  $+\infty$ . Quindi ogni vertice di

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m : Bx = b, l \leq x \leq u\}$$

è un vettore intero.

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{x}$  un vertice di  $P$ , e siano  $F = \{a \in A : l_a < \bar{x}_a < u_a\}$  gli archi strettamente tra i loro confini. Se  $F = \emptyset$ , ogni voce di  $\bar{x}$  è un limite, quindi un numero intero.

1. Le colonne di  $B_F$  sono linearmente indipendenti. Altrimenti  $B_F d_F = 0$  per alcuni  $d \neq 0$  con  $d_a = 0$  per  $a \notin F$ . Per un piccolo  $\varepsilon > 0$  entrambi  $\bar{x} + \varepsilon d$  e  $\bar{x} - \varepsilon d$  soddisfano gli stretti limiti su  $F$  e  $Bx = b$ , così si trovano in  $P$  e  $\bar{x}$  è il loro punto centrale: una contraddizione.
2. Il sistema per  $\bar{x}_F$  dispone di dati interi. Ogni  $a \notin F$  ha  $\bar{x}_a \in \{l_a, u_a\}$ , un intero, quindi  $B_F \bar{x}_F = b - \sum_{a \notin F} B_a \bar{x}_a =: \hat{b}$  è intero.
3. Regola di Cramer.  $B_F$  ha rango  $|F|$ , quindi alcune  $|F|$  delle sue righe formano una matrice quadrata non singolare  $M$  e  $M \bar{x}_F = \hat{b}_R$  su queste righe  $R$ . Secondo la regola di Cramer ogni voce di  $\bar{x}_F$  è  $\det(M_a) / \det(M)$ , con  $M_a$  una matrice intera.
4. Di [Teorema 4.14](#),  $\det(M) = \pm 1$ , quindi ogni voce di  $\bar{x}_F$  è un intero. □

#### Corollario 4.16: integralità del modello di flusso di costo minimo

Lasciamo che gli equilibri, i limiti inferiori e le capacità siano interi, con ogni capacità finita. Se il modello MCF ha a soluzione ammissibile, allora ha una soluzione ottima intera, per qualsiasi costo  $c$ .

*Dimostrazione.* Il poliedro  $P$  è non vuoto e limitato, poiché  $l \leq x \leq u$  ha limiti finiti. Un lineare la funzione raggiunge il suo minimo su un poliedro limitato non vuoto in un vertice ([Capitolo 15 «La geometria di Programmazione lineare»](#)), e ogni vertice di  $P$  è intero secondo [Teorema 4.15](#). □

- L'algoritmo del simplesso termina in un vertice, quindi con dati interi restituisce un flusso ottimale intero: l'intero requisito  $x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  viene fornito gratuitamente.

- L'unimodularità totale è una proprietà della matrice: per una matrice che non è TU, un intero a destra può dare vertici frazionari.

**Esempio 4.7: una matrice non totalmente unimodulare**

Il triangolo non orientato con vertici 1, 2, 3 e lati  $e_1 = \{1, 2\}$ ,  $e_2 = \{1, 3\}$ ,  $e_3 = \{2, 3\}$  ha il matrice di incidenza vertice-lato

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(M) = -2,$$

quindi  $M$  non è TU. Il poliedro  $\{y \in \mathbb{R}^3 : My = \mathbf{1}, y \geq \mathbf{0}\}$  contiene il singolo punto  $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , poiché  $M$  non è singolare: questo il vertice è frazionario, sebbene i dati siano interi.

La matrice di incidenza di un grafo orientato è totalmente unimodulare. Quindi, con equilibri e limiti interi, ogni vertice della regione ammissibile è intera e il modello MCF ha una soluzione ottima intera.

## 4.7 Il modello duale e i costi ridotti

- Con [Proposizione 4.9](#) i limiti inferiori possono essere rimossi, quindi in questa sezione  $l = \mathbf{0}$  e ogni capacità è finita. Il vincolo  $x_{ij} \leq u_{ij}$  è scritto come  $-x_{ij} \geq -u_{ij}$ .
- Seguire le regole di [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#) del modulo Programmazione lineare, utilizziamo una variabile duale libera  $\pi_i$ , il **potenziale** di nodo  $i$ , per la sua equazione di conservazione, e una variabile duale non negativa  $\alpha_{ij}$  per la capacità di  $(i, j)$ .

Utilizzo delle variabili doppie libere  $\pi_i$  per i vincoli (4.1b) e delle variabili doppie non negative  $\alpha_{ij}$  per le capacità, il modello duale del modello MCF con  $l = \mathbf{0}$  è:

$$\max \sum_{i \in N} b_i \pi_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \alpha_{ij} \quad (4.2a)$$

$$\text{subject to } \pi_i - \pi_j - \alpha_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (4.2b)$$

$$\pi_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in N, \quad (4.2c)$$

$$\alpha_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (4.2d)$$

Questo modello LP è denominato modello  $D(\text{MCF})$ .

- Descrizione del modello duale:
  - la colonna di  $x_{ij}$  ha +1 nell'equazione di  $i$ , -1 nell'equazione di  $j$  e -1 nella sua capacità vincolo, che dà il vincolo duale (4.2b), uno per ogni arco;
  - le variabili primarie sono non negative, quindi i vincoli duali sono di tipo  $\leq$ .

- L'aggiunta della stessa costante a tutti i potenziali non modifica né (4.2b) né l'obiettivo, poiché  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ : i potenziali possono essere normalizzati, ad esempio con  $\pi_n = 0$ .

**Definizione 4.17: costo ridotto**

Date i potenziali  $\pi \in \mathbb{R}^n$ , il **costo ridotto** dell'arco  $(i, j) \in A$  è

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j.$$

- Il vincolo duale (4.2b) legge  $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} \geq 0$ . Per i potenziali fissi, il migliore la scelta di  $\alpha_{ij} \geq 0$  è la più piccola,  $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$ .

**Lemma 4.18: costo e costo ridotto**

Per ogni  $x$  con  $Bx = b$  e ogni  $\pi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in A} \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in N} b_i \pi_i.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $c_{ij} = \bar{c}_{ij} + \pi_i - \pi_j$  è sufficiente mostrare  $\sum_{(i,j) \in A} (\pi_i - \pi_j) x_{ij} = \sum_{i \in N} b_i \pi_i$ . Il termine  $\pi_i x_{ij}$  va alla coda e  $-\pi_j x_{ij}$  alla testa, quindi

$$\sum_{(i,j) \in A} (\pi_i - \pi_j) x_{ij} = \sum_{i \in N} \pi_i \left( \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} \right) = \sum_{i \in N} \pi_i b_i. \quad \square$$

**Teorema 4.19: dualità gap**

Sia  $x$  un flusso ammissibile ( $l = 0$ ) e  $(\pi, \alpha)$  una soluzione ammissibile del Modello  $D(\text{MCF})$ . Poi

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} - \left( \sum_{i \in N} b_i \pi_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \alpha_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in A} (\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij}) x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} \alpha_{ij} (u_{ij} - x_{ij}) \geq 0,$$

ed entrambe le soluzioni sono ottimali se e solo se, per ogni arco,  $(\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij}) x_{ij} = 0$  e  $\alpha_{ij} (u_{ij} - x_{ij}) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per Lemma 4.18, il lato sinistro è  $\sum \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum u_{ij} \alpha_{ij}$ , and  $u_{ij} \alpha_{ij} = \alpha_{ij} x_{ij} + \alpha_{ij} (u_{ij} - x_{ij})$  fornisce l'identità.

- Ogni termine è non negativo:  $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} \geq 0$  per (4.2b),  $\alpha_{ij} \geq 0$  e  $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ .
- Se il divario è zero, il costo primario è uguale a un valore duale, che è un limite inferiore su ogni costo primario da parte del la disuguaglianza appena dimostrata:  $x$  è ottimale, e allo stesso modo  $(\pi, \alpha)$  è ottimale.
- Se entrambi sono ottimali, il divario è zero per il teorema della dualità forte di [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#). Una somma di termini non negativi è zero se e solo se ogni termine è zero.  $\square$

**Corollario 4.20: certificato a costo ridotto**

Sia  $\mathbf{x}$  un flusso ammissibile ( $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ ) e  $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$  potenziali tali che, per ogni arco,

$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0, \quad \bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}.$$

Allora  $\mathbf{x}$  è un flusso ottimale e  $\boldsymbol{\pi}$  con  $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$  è una soluzione ottimale del modello  $D(\text{MCF})$ .

*Dimostrazione.* La coppia  $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\alpha})$  è duale, poiché  $\alpha_{ij} \geq 0$  e  $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} \geq 0$ . Controlliamo le due condizioni di [Teorema 4.19](#) su ogni arco.

- Se  $\bar{c}_{ij} \geq 0$ , allora  $\alpha_{ij} = 0$  e  $\bar{c}_{ij}x_{ij} = 0$  perché  $\bar{c}_{ij} > 0$  forza  $x_{ij} = 0$ .
- Se  $\bar{c}_{ij} < 0$ , allora  $\bar{c}_{ij} + \alpha_{ij} = 0$  e  $\alpha_{ij}(u_{ij} - x_{ij}) = 0$  perché  $x_{ij} = u_{ij}$ .

Il divario è zero, quindi entrambe le soluzioni sono ottimali. □

- Un arco con costo ridotto positivo è vuoto, un arco con costo ridotto negativo è saturo e un arco strettamente tra i suoi limiti ha un costo ridotto pari a zero.

**Esempio 4.8: il duale della rete di riferimento**

Per la rete di [Esempio 4.1](#), il modello  $D(\text{MCF})$  è

$$\max \quad 5\pi_1 + 2\pi_2 - 3\pi_4 - 4\pi_6 - (4\alpha_{12} + 4\alpha_{13} + 4\alpha_{24} + 2\alpha_{32} + 4\alpha_{35} + 3\alpha_{43} + 5\alpha_{46} + 3\alpha_{54} + 2\alpha_{56})$$

con  $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$ , potenziali liberi e un vincolo per arco:

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 - \alpha_{12} &\leq 2, & \pi_1 - \pi_3 - \alpha_{13} &\leq 2, & \pi_2 - \pi_4 - \alpha_{24} &\leq 5, \\ \pi_3 - \pi_2 - \alpha_{32} &\leq 2, & \pi_3 - \pi_5 - \alpha_{35} &\leq 3, & \pi_4 - \pi_3 - \alpha_{43} &\leq 3, \\ \pi_4 - \pi_6 - \alpha_{46} &\leq 5, & \pi_5 - \pi_4 - \alpha_{54} &\leq 5, & \pi_5 - \pi_6 - \alpha_{56} &\leq 3. \end{aligned}$$

I bilancieri  $b_3 = b_5 = 0$  fanno scomparire  $\pi_3$  e  $\pi_5$  dall'obiettivo.

- I potenziali ed i costi ridotti sono alla base dei test di ottimalità di [Capitolo 6 «Flusso di costo minimo»](#).

Il duale del modello MCF ha un potenziale  $\pi_i$  per nodo; il costo ridotto è  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ . Un flusso ammissibile i cui archi a costo ridotto positivo sono vuoti e gli archi a costo ridotto negativo sono saturati è ottimale.

## 4.8 Casi speciali

- Diversi problemi classici sono modelli MCF con dati speciali; tutti i limiti inferiori sono zero.

---

problema e modello MCF

---

**Percorso più breve**  $b_s = 1, b_t = -1, b_i = 0$  altrimenti;  $u_{ij} = +\infty, c_{ij}$  la lunghezza del arco: l'unità di flusso viaggia da  $s$  a  $t$ .

**Flusso massimo**  
e  $b_i = 0$  e  $c_{ij} = 0$  per ogni arco, più l'arco  $(t, s)$  con  $c_{ts} = -1$  e  $u_{ts} = +\infty$ : il flusso su  $(t, s)$  è il valore inviato da  $s$  a  $t$ .

**Trasporti** e  $N = P \cup D$  con archi dalle origini  $P$  alle destinazioni  $D$ ;  $b_i$  la fornitura di  $i \in P$ ,  $-b_j$  la domanda di  $j \in D$ ,  $u_{ij} = +\infty$ .

**Assegnazione** e un modello di trasporto con  $|P| = |D|$ ,  $b_i = 1$  per  $i \in P$  e  $b_j = -1$  per  $j \in D$ .

---

- Nei quattro modelli i saldi e i limiti sono interi, quindi i vertici interi di [Teorema 4.15](#) sono percorsi, flussi interi e assegnazioni.

Percorso più breve, flusso massimo, trasporto e assegnazione sono modelli di flusso a costo minimo con saldi speciali, capacità e costi.

## 4.9 Un'istanza di traslato

- Risolviamo il modello MCF di [Esempio 4.2](#): la rete di riferimento, con due nodi di alimentazione, due nodi di domanda e due nodi di traslato. La soluzione ottima viene calcolata con Gurobi (gurobipy), e poi certificato a mano con [Corollario 4.20](#).

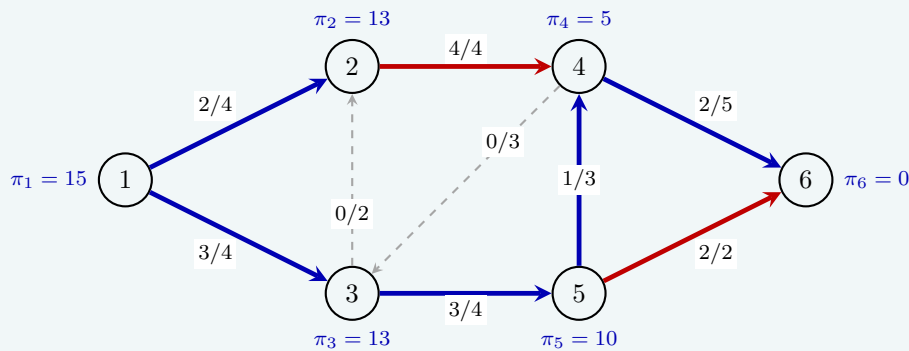
### Esempio 4.9: il flusso ottimale

Il flusso ottimale  $\tilde{x}$  e il suo valore ottimale sono

| arco             | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\tilde{x}_{ij}$ | 2      | 3      | 4      | 0      | 3      | 0      | 2      | 1      | 2      |
| $u_{ij}$         | 4      | 4      | 4      | 2      | 4      | 3      | 5      | 3      | 2      |

$$z(\text{MCF}) = 60.$$

Nella figura ogni arco porta  $\tilde{x}_{ij}/u_{ij}$ : gli archi strettamente compresi tra i loro limiti sono blu, gli archi a capacità rossa, gli archi vuoti grigi e tratteggiati. Accanto ad ogni nodo, il suo potenziale.



Il flusso è intero, come garantisce [Corollario 4.16](#).

### 4.9.1 Il certificato di ottimalità

1. I cinque archi blu (1, 2), (1, 3), (3, 5), (4, 6), (5, 4) formano uno albero ricoprente. Chiediamo costi ridotti zero su di essi,  $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$  e normalizza con  $\pi_6 = 0$ .
2. Andando indietro dal nodo 6:  $\pi_4 = \pi_6 + c_{46} = 5$ ,  $\pi_5 = \pi_4 + c_{54} = 10$ ,  $\pi_3 = \pi_5 + c_{35} = 13$ ,  $\pi_1 = \pi_3 + c_{13} = 15$  e  $\pi_2 = \pi_1 - c_{12} = 13$ .
3. Il potenziale  $\pi_i$  è il costo del percorso dell'albero da  $i$  a 6: ad esempio,  $\pi_1 = c_{13} + c_{35} + c_{54} + c_{46} = 2 + 3 + 5 + 5 = 15$ .

### Esempio 4.10: costi ridotti e ottimalità

I costi ridotti  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  sono:

| arco           | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{c}_{ij}$ | 0      | 0      | -3     | 2      | 0      | 11     | 0      | 0      | -7     |
| $\alpha_{ij}$  | 0      | 0      | 3      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 7      |

- Gli archi con  $\bar{c}_{ij} > 0$ , (3, 2) e (4, 3), sono vuoti; gli archi con  $\bar{c}_{ij} < 0$ , (2, 4) e (5, 6), sono al completo. Per [Corollario 4.20](#),  $\tilde{x}$  è ottimale.
- Il valore duale è  $\sum_{i \in N} b_i \pi_i - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \alpha_{ij} = 86 - 26 = 60$ , pari al costo di  $\tilde{x}$ . I potenziali coincidono con i valori duali restituiti da Gurobi, spostati in modo che  $\pi_6 = 0$ .

- **Unicità.** Ogni flusso ottimale ha gap zero con  $(\pi, \alpha)$ , quindi per [Teorema 4.19](#) ha  $x_{32} = x_{43} = 0$ ,  $x_{24} = 4$  e  $x_{56} = 2$ . Il flusso sui cinque gli archi degli alberi viene quindi fissato per conservazione, poiché le loro colonne sono linearmente indipendenti:  $\tilde{x}$  è il flusso ottimale unico.
- **Il flusso  $\bar{x}$ .** Il flusso ammissibile  $\bar{x}$  di [Esempio 4.1](#) costi 63, e il suo divario con la stessa soluzione duale è  $63 - 60 = 3 = \alpha_{24}(u_{24} - \bar{x}_{24}) = 3 \cdot (4 - 3)$ : l'arco (2, 4) non è utilizzato abbastanza.

Sulla rete di riferimento il flusso ottimale costa 60. I potenziali del suo albero ricoprente danno costi ridotti positivo solo su archi vuoti e negativo solo su archi saturi: certificano l'ottimalità senza solutore.

## 4.10 Errori tipici

### Attenzione

- **Scambio di flusso in uscita e in entrata.** Il vincolo di conservazione è il flusso in uscita meno l'afflusso pari a  $b_i$ , con  $b_i > 0$  in corrispondenza di un nodo di fornitura: i segni seguono la matrice di incidenza, +1 in coda.
- **Prendere  $\sum_i b_i = 0$  come sufficiente.** Una rete bilanciata non può avere un flusso fattibile: un taglio potrebbe essere troppo piccolo per portare la scorta al suo interno.
- **Sbagliare i segni di sostituzione.** Con  $x = l + x'$  la coda di  $(i, j)$  perde  $l_{ij}$  unità di equilibrio e la testa ne guadagna; al valore deve essere aggiunta nuovamente la costante  $c'l$ .
- **Dimenticando il nodo fittizio.** Un'istanza con più offerta che domanda non ha un flusso fattibile con uguaglianze; gli archi fittizi devono costare zero, altrimenti la fornitura inutilizzata viene addebitata.
- **Rivendicare l'integralità per qualsiasi matrice.** I vertici interi necessitano di una matrice TU e di un intero  $b, l, u$ ; i costi possono essere frazionari.
- **Scrivere il costo ridotto con i segni sbagliati.** In questo modulo  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ , con  $-\pi$  della coda e  $+\pi$  della testa.

- **Attesi potenziali unici.** I potenziali sono definiti fino a una costante additiva; sono fissati da una normalizzazione come  $\pi_n = 0$ .

## 4.11 In sintesi

### In sintesi

- Una rete ha saldi  $b_i$ , limiti inferiori  $l_{ij}$ , capacità  $u_{ij}$  e costi  $c_{ij}$ ; il costo minimo il problema del flusso è l'LP  $\min\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$ .
- Attraverso ogni taglio il deflusso netto è uguale al saldo interno; una rete ammissibile è equilibrata e soddisfa la condizione di taglio.
- I limiti inferiori vengono rimossi con  $\mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{x}'$ ; un eccesso di offerta passa attraverso un nodo fittizio archi a costo zero.
- La matrice di incidenza è totalmente unimodulare, quindi con l'intero  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{u}$  ogni vertice è intero e il modello MCF ha una soluzione ottima intera.
- Il duale ha potenziali  $\pi_i$ ; con  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ , un flusso con archi vuoti a costo positivo e gli archi saturati a costo negativo sono ottimali.
- Percorso più breve, flusso massimo, trasporto e assegnazione sono i modelli MCF.

### La rete di riferimento in sintesi.

|                                                                     |                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| saldi                                                               | $\mathbf{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$                                       |
| flusso ottimale                                                     | $\tilde{\mathbf{x}} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$ , $z(\text{MCF}) = 60$ |
| potenziali ( $\pi_6 = 0$ )                                          | $\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$                               |
| Archi vuoti/saturi                                                  | $(3, 2), (4, 3) / (2, 4), (5, 6)$                                         |
| con $l_{32} = 1$                                                    | $\mathbf{b}' = (5, 3, -1, -3, 0, -4)$ , valore ottimale 62                |
| con $b_2 = 4$ (nodo fittizio 7) e $x_{17} = 2$ , valore ottimale 56 |                                                                           |

---

# Flusso massimo

---

## Prerequisiti

- Da questo modulo, [Capitolo 1 «Grafì»](#): percorsi orientati, la ricerca in ampiezza e la ricerca in profondità.
- Da questo modulo, [Capitolo 4 «Modelli di flusso di rete»](#): conservazione del flusso, flusso attraverso un taglio, modello di flusso a costo minimo e suo intero vertici.
- Dal modulo Programmazione lineare, [Capitolo 15 «La geometria di Programmazione lineare»](#): una funzione lineare raggiunge il suo massimo su un poliedro limitato non vuoto.

## Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formula il problema del flusso massimo e scrive il suo modello LP;
- calcola la capacità di un taglio  $s-t$  e utilizza i tagli come limite superiore del valore di ogni flusso;
- costruisce la rete residua di un flusso, trova un percorso aumentante e il suo collo di bottiglia e aumenta il flusso;
- dimostrare il teorema del taglio minimo del flusso massimo e il teorema dell'integralità;
- esegue gli algoritmi Ford–Fulkerson e Edmonds–Karp, legge un taglio minimo alla fermata e fornisce i propri dati tempi di esecuzione;
- calcola una corrispondenza massima in un grafo bipartito e un insieme massimo di percorsi arcodisgiunti come flussi massimi.

## 5.1 Il problema del flusso massimo

### Definizione 5.1: problema di flusso massimo

Sia  $G = (N, A)$  un grafo diretto con nodi  $n = |N|$  e archi  $m = |A|$ , due nodi distinti  $s$ , il **source** e  $t$ , **sink** e **capacity**  $u_{ij} \geq 0$  per ogni arco  $(i, j) \in A$ .

- Un **flusso ammissibile** è un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  con  $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  per ogni arco  $(i, j) \in A$  e conservazione del flusso in ogni nodo diverso da  $s$  e  $t$ :

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{s, t\}.$$

- Il **valore** del flusso è il deflusso netto della sorgente:

$$v = \sum_{(s,j) \in \delta^+(s)} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \delta^-(s)} x_{js}.$$

- Il **problema di flusso massimo** richiede un flusso ammissibile di valore massimo, un **flusso massimo**. Suo il valore è indicato con  $\tilde{v}$ .

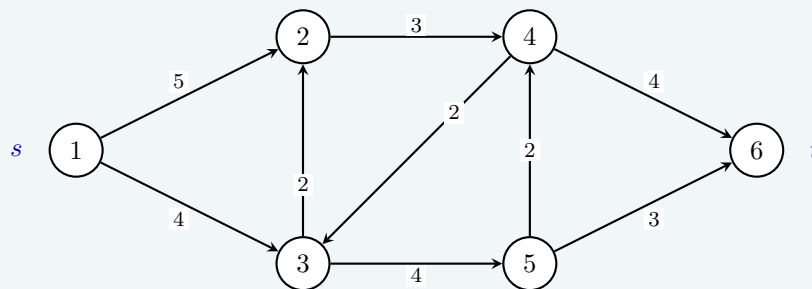
- Le capacità sono finite e il flusso  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , di valore 0, è sempre fattibile.
- I nodi diversi da  $s$  e  $t$  trasmettono tutto ciò che ricevono: il flusso lascia  $s$  e viaggia attraverso rete verso  $t$ .
- Come in [Capitolo 4 «Modelli di flusso di rete»](#),  $\delta^+(i)$  e  $\delta^-(i)$  sono gli archi che escono ed entrano nel nodo  $i$ , e gli archi sono numerato  $a_1, a_2, \dots, a_m$  in ordine lessicografico.

### Esempio 5.1: la rete di riferimento

Diamo capacità al grafo di riferimento di [Capitolo 1 «Grafici»](#), con sorgente  $s = 1$  e lavello  $t = 6$ :

| arco           | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $u_{ij}$       | 5      | 4      | 3      | 2      | 4      | 2      | 4      | 2      | 3      |
| $\bar{x}_{ij}$ | 3      | 0      | 3      | 0      | 2      | 2      | 1      | 0      | 2      |

Nella figura ogni arco porta la sua capacità  $u_{ij}$ .

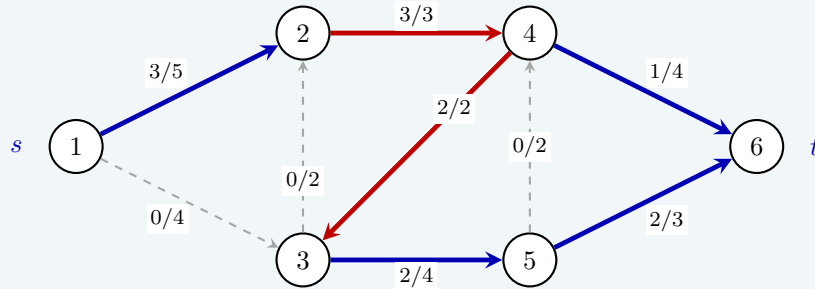


Il flusso  $\bar{\mathbf{x}}$  della tabella è fattibile. Ad esempio, nel nodo 4 l'afflusso è  $\bar{x}_{24} + \bar{x}_{54} = 3 + 0 = 3$

e il deflusso è  $\bar{x}_{43} + \bar{x}_{46} = 2 + 1 = 3$ . Il suo valore è

$$v = \bar{x}_{12} + \bar{x}_{13} = 3 + 0 = 3,$$

e il nodo 6 riceve unità  $\bar{x}_{46} + \bar{x}_{56} = 1 + 2 = 3$ . Nella figura ogni arco porta  $\bar{x}_{ij}/u_{ij}$ : gli archi con  $0 < \bar{x}_{ij} < u_{ij}$  sono blu, gli archi saturati ( $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$ ) rosso e gli archi vuoti grigi e tratteggiati.



### 5.1.1 Il modello LP

- Usiamo una variabile continua  $x_{ij}$  per ogni arco  $(i,j) \in A$ , il flusso sull'arco, e una variabile  $v$ , il valore del flusso.

Utilizzando queste variabili, un modello LP per il problema del flusso massimo si legge come segue:

$$\max v \quad (5.1a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{(s,j) \in \delta^+(s)} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in \delta^-(s)} x_{js} = v, \quad (5.1b)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{s, t\}, \quad (5.1c)$$

$$\sum_{(t,j) \in \delta^+(t)} x_{tj} - \sum_{(j,t) \in \delta^-(t)} x_{jt} = -v, \quad (5.1d)$$

$$x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad (5.1e)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A, \quad (5.1f)$$

$$v \in \mathbb{R}. \quad (5.1g)$$

Questo modello LP è denominato modello MF.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello MF:
  - la funzione obiettivo (5.1a) massimizza il valore del flusso;
  - Il vincolo (5.1b) afferma che il deflusso netto di  $s$  è  $v$  e il vincolo (5.1d) che l'afflusso netto di  $t$  è  $v$ ;
  - Vincoli (5.1c) sono i vincoli di conservazione del flusso degli altri nodi;

- I vincoli (5.1e) impongono le capacità, mentre i vincoli (5.1f) e (5.1g) definiscono le variabili del modello LP.
- Ogni arco contribuisce con  $+x_{ij}$  alla fila della coda e  $-x_{ij}$  alla fila della testa, quindi la mano sinistra i lati di (5.1b)–(5.1d) si sommano a zero: il vincolo (5.1d) segue dagli altri.
- In [Capitolo 4, Sezione «Casi particolari»](#) il problema del flusso massimo è un modello di flusso a costo minimo: zero saldi e zero costi, più il arco  $(t, s)$  con portata  $+\infty$  e costo  $-1$ . Chiamando  $v$  il flusso  $x_{ts}$  su questo arco, (5.1b)–(5.1d) sono i suoi vincoli di conservazione e  $\min(-x_{ts})$  è  $\max v$ .

Un flusso ammissibile rispetta le capacità e si conserva in ogni nodo diverso da  $s$  e  $t$ ; il suo valore  $v$  è il deflusso netto di  $s$ . Il problema del flusso massimo è il LP MF: massimizza  $v$  in condizioni di conservazione e capacità.

## 5.2 Tagli

### Definizione 5.2: $s$ - $t$ taglio

Lascia che  $S \subseteq N$  con  $s \in S$  e  $t \notin S$ . Il taglio  $s$ - $t$   $(S, N \setminus S)$  è la partizione dei nodi in  $S$  e  $N \setminus S$ .

- I suoi **archi in avanti** sono gli archi di  $\delta^+(S)$ , da  $S$  a  $N \setminus S$ , e i suoi **all'indietro archi** gli archi di  $\delta^-(S)$ , da  $N \setminus S$  a  $S$ .
- La sua **capacità** è la capacità totale degli archi anteriori:

$$u(S, N \setminus S) = \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} u_{ij}.$$

- Un **taglio minimo** è un taglio  $s$ - $t$  di capacità minima.

- Le capacità degli archi indietro non entrano in  $u(S, N \setminus S)$ .
- Ogni nodo diverso da  $s$  e  $t$  può trovarsi su entrambi i lati, quindi una rete ha tagli  $2^{n-2}$   $s$ - $t$ .
- Come nel Capitolo 4,  $x(F) = \sum_{(i,j) \in F} x_{ij}$  per un insieme di archi  $F$ .

### Lemma 5.3: flusso attraverso un $s$ - $t$ taglio

Sia  $x$  un flusso ammissibile di valore  $v$ . Quindi, per ogni  $s$ - $t$  tagliato  $(S, N \setminus S)$ ,

$$v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)).$$

In particolare, con  $S = N \setminus \{t\}$ , la raccolta netta di  $t$  è  $v$ .

*Dimostrazione.* Sia  $b_i$  il deflusso netto del nodo  $i$  sotto  $\mathbf{x}$ :  $b_s = v$  e  $b_i = 0$  per  $i \notin \{s, t\}$ . Poi  $\mathbf{x}$  soddisfa la conservazione del flusso con questi equilibri e [Capitolo 4, Lemma «flusso attraverso un taglio»](#) dà  $x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = \sum_{i \in S} b_i$  per ogni  $S \subseteq N$ .

1. Con  $S = N$  nessun arco esce o entra in  $S$ , quindi  $\sum_{i \in N} b_i = 0$  e  $b_t = -v$ .
2. Per un taglio  $s-t$ ,  $s \in S$  e  $t \notin S$ , quindi  $\sum_{i \in S} b_i = b_s = v$ . □

#### Corollario 5.4: dualità debole

Per ogni portata ammissibile  $\mathbf{x}$  di valore  $v$  ed ogni  $s-t$  taglio  $(S, N \setminus S)$ ,

$$v \leq u(S, N \setminus S),$$

con uguaglianza se e solo se  $x_{ij} = u_{ij}$  per ogni  $(i, j) \in \delta^+(S)$  e  $x_{ij} = 0$  per ogni  $(i, j) \in \delta^-(S)$ . In case of equality,  $\mathbf{x}$  is a maximum flow and  $(S, N \setminus S)$  è un taglio minimo.

*Dimostrazione.* Da [Lemma 5.3](#) e i limiti  $x_{ij} \leq u_{ij}$  su  $\delta^+(S)$  e  $x_{ij} \geq 0$  su  $\delta^-(S)$ ,

$$v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) \leq u(S, N \setminus S) - 0.$$

- L'uguaglianza vale se e solo se ogni limite utilizzato è stretto, arco per arco.
- In caso di uguaglianza, ogni flusso ammissibile  $\mathbf{x}'$  ha valore  $v' \leq u(S, N \setminus S) = v$ , e ogni  $s-t$  tagliare  $(S', N \setminus S')$  ha  $u(S', N \setminus S') \geq v = u(S, N \setminus S)$ . □

#### Esempio 5.2: i tagli della rete di riferimento

La rete di riferimento di [Esempio 5.1](#) ha tagli  $2^4 = 16$   $s-t$ . Accanto a ciascun set  $S$ , il capacità  $u(S, N \setminus S)$ :

| $S$              | $u$ | $S$              | $u$ | $S$              | $u$ | $S$                 | $u$ |
|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|---------------------|-----|
| $\{1\}$          | 9   | $\{1, 2\}$       | 7   | $\{1, 3\}$       | 11  | $\{1, 4\}$          | 15  |
| $\{1, 5\}$       | 14  | $\{1, 2, 3\}$    | 7   | $\{1, 2, 4\}$    | 10  | $\{1, 2, 5\}$       | 12  |
| $\{1, 3, 4\}$    | 15  | $\{1, 3, 5\}$    | 12  | $\{1, 4, 5\}$    | 18  | $\{1, 2, 3, 4\}$    | 8   |
| $\{1, 2, 3, 5\}$ | 8   | $\{1, 2, 4, 5\}$ | 13  | $\{1, 3, 4, 5\}$ | 14  | $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ | 7   |

- La capacità minima è 7, ottenuta con tre tagli:  $S = \{1, 2\}$ ,  $S = \{1, 2, 3\}$  e  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Di [Corollario 5.4](#), nessun flusso ammissibile ha un valore maggiore di 7.
- Per  $S = \{1, 2, 3\}$  gli archi in avanti sono  $(2, 4)$ ,  $(3, 5)$  e l'arco all'indietro è  $(4, 3)$ . Con il flusso  $\bar{\mathbf{x}}$  di [Esempio 5.1](#),

$$\bar{x}_{24} + \bar{x}_{35} - \bar{x}_{43} = 3 + 2 - 2 = 3 = v, \quad u(S, N \setminus S) = u_{24} + u_{35} = 3 + 4 = 7.$$

### La capacità di un taglio

La capacità  $u(S, N \setminus S)$  somma le capacità solo degli archi anteriori. Per  $S = \{1, 2, 3\}$  si  $u_{24} + u_{35} = 7$ ; aggiungendo la capacità dell'arco all'indietro  $(4, 3)$  si otterrebbe 9, che non delimita nulla. Un flusso su  $A$  L'arco all'indietro riporta le unità in  $S$  e riduce il flusso netto attraverso il taglio.

Il flusso netto attraverso ogni taglio  $s-t$  è il valore  $v$ , quindi  $v \leq u(S, N \setminus S)$  per ogni flusso e ogni taglio, con uguaglianza quando gli archi anteriori sono saturi e gli archi posteriori vuoti. Sulla rete di riferimento non c'è flusso valore maggiore di 7.

## 5.3 La rete residua

- Nel resto del capitolo  $G$  non presenta la coppia di archi opposti  $(i, j)$  e  $(j, i)$ , come il grafo di riferimento. Un arco  $(j, i)$  opposto a  $(i, j)$  può essere sostituito dagli archi  $(j, k)$  e  $(k, i)$  tramite un nuovo nodo  $k$ , entrambi con capacità  $u_{ji}$ : conservazione a  $k$  dà  $x_{jk} = x_{ki}$ , e i flussi delle due reti corrispondono, con lo stesso valore.

### Definizione 5.5: rete residua

Sia  $\mathbf{x}$  un flusso ammissibile. La **rete residua**  $G(\mathbf{x}) = (N, A(\mathbf{x}))$  ha, per ogni arco  $(i, j) \in A$ :

- il **arco avanti**  $(i, j)$ , con **capacità residua**  $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ , se  $x_{ij} < u_{ij}$ ;
- il **arco all'indietro**  $(j, i)$ , con capacità residua  $r_{ji} = x_{ij}$ , se  $x_{ij} > 0$ .

- La capacità residua  $r_{ij}$  è la quantità di flusso che può ancora essere inviata da  $i$  a  $j$ : sollevando  $x_{ij}$  su un arco in avanti o abbassando  $x_{ji}$  su un arco all'indietro.
- Un arco vuoto fornisce solo il suo arco anteriore, un arco saturo solo il suo arco indietro e un arco con  $0 < x_{ij} < u_{ij}$  entrambi. Pertanto  $G(\mathbf{x})$  ha al massimo archi  $2m$ , tutti con capacità residua positiva.
- Senza archi opposti in  $G$ , ogni coppia ordinata di nodi porta al massimo un arco residuo.

### Definizione 5.6: percorso di aumento

Sia  $\mathbf{x}$  un flusso ammissibile. Un **percorso aumentante** è un percorso diretto  $P$  da  $s$  a  $t$  in  $G(\mathbf{x})$ . Il suo **collo di bottiglia** è

$$\delta = \min_{(i,j) \in P} r_{ij} > 0.$$

**Aumentare**  $\mathbf{x}$  lungo  $P$  significa inviare unità  $\delta$  lungo  $P$ : per ogni arco di  $P$ ,

- se si tratta di un arco in avanti  $(i, j)$ , allora  $x_{ij} := x_{ij} + \delta$ ;
- se è un arco all'indietro  $(j, i)$ , con  $(i, j) \in A$ , allora  $x_{ij} := x_{ij} - \delta$ .

**Lemma 5.7: aumento**

Aumentando un flusso ammissibile  $\mathbf{x}$  di valore  $v$  lungo un percorso aumentante  $P$  con collo di bottiglia  $\delta$  si ottiene un portata ammissibile  $\mathbf{x}'$  di valore  $v + \delta$ .

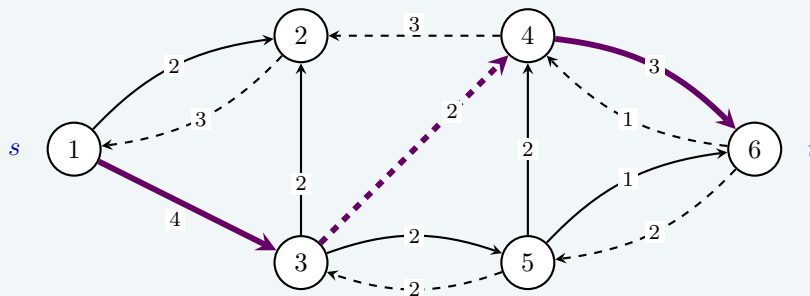
*Dimostrazione.* I nodi di  $P$  sono distinti e  $G$  non ha archi opposti, quindi ogni arco di  $A$  cambia al massimo una volta.

1. *Limiti.* Su un arco in avanti,  $x_{ij} + \delta \leq x_{ij} + r_{ij} = u_{ij}$ ; su un arco all'indietro,  $x_{ij} - \delta \geq x_{ij} - r_{ji} = 0$ .
2. *Conservazione.* Sia  $k \notin \{s, t\}$  un nodo di  $P$ . L'arco di  $P$  che entra in  $k$  aumenta l'afflusso netto di  $k$  di  $\delta$ : un arco in avanti  $(h, k)$  solleva  $x_{hk}$ , un arco all'indietro  $(h, k)$  abbassa  $x_{kh}$ . Allo stesso modo, l'arco di  $P$  in uscita da  $k$  aumenta il deflusso netto di  $k$  da parte di  $\delta$ . Le due modifiche si annullano, ed i nodi esterni  $P$  non vengono toccati.
3. *Valore.* Il percorso  $P$  lascia  $s$  una volta e non vi rientra mai più, quindi il deflusso netto di  $s$  cresce di  $\delta$ . □

**Esempio 5.3: la rete residua di  $\bar{\mathbf{x}}$** 

Per il flusso  $\bar{\mathbf{x}}$  di [Esempio 5.1](#), di valore 3, la rete residua  $G(\bar{\mathbf{x}})$  ha archi 13. I sei archi all'indietro, tratteggiati in figura, sono  $(2, 1)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(6, 4)$ ,  $(6, 5)$ .

- L'arco  $(2, 4)$  è saturo, quindi dà solo l'arco indietro  $(4, 2)$ , con  $r_{42} = \bar{x}_{24} = 3$ .
- L'arco  $(1, 2)$  ha  $0 < \bar{x}_{12} = 3 < 5$ , quindi dà l'arco in avanti  $(1, 2)$ , con  $r_{12} = 2$  e quello all'indietro arco  $(2, 1)$ , con  $r_{21} = 3$ .



La ricerca in profondità del Capitolo 1 dal nodo 1, con gli archi residui di ciascun nodo mediante indice crescente del testa, etichetta i nodi 1, 2, 3, 4, 6: da 2 l'unico arco residuo risale a 1, da 3 la ricerca prende arco all'indietro  $(3, 4)$  (è etichettato 2) e da 4 l'arco  $(4, 6)$ . Il percorso aumentante è  $P = 1, 3, 4, 6$  (viola), con collo di bottiglia

$$\delta = \min\{r_{13}, r_{34}, r_{46}\} = \min\{4, 2, 3\} = 2.$$

L'aumento fornisce  $x_{13} = 0 + 2 = 2$ ,  $x_{43} = 2 - 2 = 0$  (arco all'indietro) e  $x_{46} = 1 + 2 = 3$ , con valore  $3 + 2 = 5$ . Le due unità che è passato da 4 a 3 ora passa da 4 a 6 e il nodo 3 riceve due nuove unità da 1, che continuano 3, 5, 6.

**Esempio 5.4: perché sono necessari gli archi all'indietro**

Supponiamo che da  $\bar{x}$  utilizziamo solo gli archi diretti della rete residua, in modo che i flussi possano solo crescere.

- La ricerca in profondità sugli archi anteriori trova il percorso 1, 3, 5, 4, 6, con  $\delta = \min\{4, 2, 2, 3\} = 2$ , e il valore diventa 5 con il flusso  $x = (3, 2, 3, 0, 4, 2, 3, 2, 2)$ .
- Ora gli archi in avanti (2, 4) e (3, 5) che lasciano  $\{1, 2, 3\}$  sono saturi: la ricerca etichetta solo 1, 2, 3, e il metodo si interrompe con il valore 5.
- Il valore non è massimo: per  $S = \{1, 2, 3\}$ , Lemma 5.3 dà  $v = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = 7 - 2 = 5$ . Le due unità sull'arco posteriore (4, 3) del taglio, inviate lì dal primo scelte, torna in  $S$ .

Solo l'arco rovescio (3, 4) della rete residua può cancellarli: da questo flusso partono i cammini aumentanti 1, 3, 4, 5, 6 (con gli archi all'indietro (3, 4) e (4, 5)) e 1, 3, 4, 6, con  $\delta = 1$  ciascuno, raggiungono il valore 7.

La rete residua ha un arco in avanti dove il flusso può crescere e un arco all'indietro dove può ridursi. Inviare il collo di bottiglia  $\delta$  lungo un percorso da  $s$  a  $t$  della rete residua mantiene il flusso fattibile e ne aumenta il valore di  $\delta$ ; gli archi all'indietro annullano le scelte precedenti.

## 5.4 Il teorema del taglio minimo del flusso massimo

**Teorema 5.8: taglio minimo flusso massimo**

Sia  $x$  un flusso ammissibile di valore  $v$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a)  $x$  è un flusso massimo;
- (b) la rete residua  $G(x)$  non ha percorso aumentante;
- (c)  $v = u(S, N \setminus S)$  per alcuni  $s$ - $t$  taglio  $(S, N \setminus S)$ .

Inoltre, esiste un flusso massimo e il valore massimo di un flusso è uguale alla capacità minima di un taglio  $s$ - $t$ :

$$\tilde{v} = \min \{ u(S, N \setminus S) : S \subseteq N, s \in S, t \notin S \}.$$

*Dimostrazione.* (a) implica (b). Un cammino aumentante darebbe, per Lemma 5.7, un flusso ammissibile di valore  $v + \delta > v$ .

(b) implica (c). Sia  $S$  l'insieme dei nodi raggiungibili da  $s$  in  $G(x)$ ; poi  $s \in S$  e, di (b),  $t \notin S$ .

1. Se un arco  $(i, j) \in \delta^+(S)$  avesse  $x_{ij} < u_{ij}$ , l'arco in avanti  $(i, j)$  sarebbe in  $G(x)$  e  $j$  sarebbe raggiungibile: quindi  $x_{ij} = u_{ij}$ .

2. Se un arco  $(i, j) \in \delta^-(S)$  avesse  $x_{ij} > 0$ , l'arco all'indietro  $(j, i)$ , con  $j \in S$ , sarebbe in  $G(\mathbf{x})$  e  $i$  sarebbero raggiungibili: quindi  $x_{ij} = 0$ .

3. Di [Corollario 5.4](#),  $v = u(S, N \setminus S)$ .

(c) implica (a). Di [Corollario 5.4](#).

*Esistenza e uguaglianza.* La regione ammissibile del modello MF non è vuota ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $v = 0$ ) e limitato ( $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  e  $|v| \leq \sum_{(i,j) \in A} u_{ij}$ ), quindi il modello ha un valore ottimale soluzione ([Capitolo 15 «La geometria di Programmazione lineare»](#)). Per un flusso massimo, (a) implica (c): qualche taglio ha capacità  $\tilde{v}$ , e da [Corollario 5.4](#) nessun taglio ha una capacità inferiore.  $\square$

- La dimostrazione di (b) implica che (c) è costruttiva: al flusso massimo, i nodi raggiungibili da  $s$  nel residuo la rete forma un taglio minimo.
- Un flusso e un taglio con  $v = u(S, N \setminus S)$  si certificano a vicenda: il taglio dimostra che nessun flusso è migliore, e il flusso dimostra che nessun taglio è più piccolo.

#### Esempio 5.5: il flusso massimo della rete di riferimento

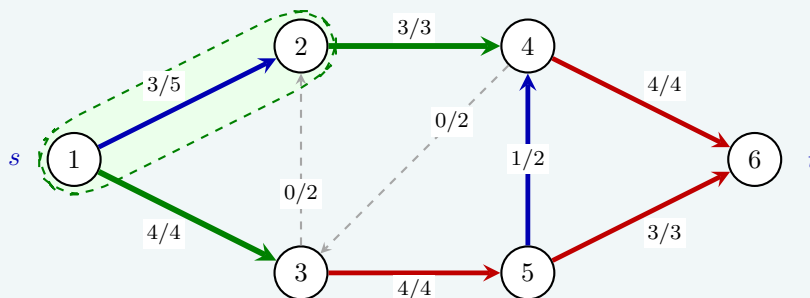
Sulla rete di riferimento di [Esempio 5.1](#) il flusso

| arco             | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\tilde{x}_{ij}$ | 3      | 4      | 3      | 0      | 4      | 0      | 4      | 1      | 3      |
| $u_{ij}$         | 5      | 4      | 3      | 2      | 4      | 2      | 4      | 2      | 3      |

è fattibile, con valore  $\tilde{x}_{12} + \tilde{x}_{13} = 7$ . Per  $S = \{1, 2\}$  gli archi in avanti (1, 3), (2, 4) sono saturati e l'arco all'indietro (3, 2) è vuoto, quindi

$$u(S, N \setminus S) = u_{13} + u_{24} = 4 + 3 = 7 = v.$$

Per [Teorema 5.8](#),  $\tilde{\mathbf{x}}$  è un flusso massimo,  $\tilde{v} = 7$ , e  $(\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\})$  è un taglio minimo. In  $G(\tilde{\mathbf{x}})$  i nodi raggiungibili da 1 sono esattamente 1 e 2. Nella figura,  $S$  è ombreggiato e gli archi anteriori del taglio sono verdi.



- **Unicità.** Per [Corollario 5.4](#), ogni flusso massimo satura la direzione archi e svuota gli

archi all'indietro di ciascuno dei tre tagli minimi di [Esempio 5.2](#):

$$\begin{aligned} S = \{1, 2\} : \quad & x_{13} = 4, \quad x_{24} = 3, \quad x_{32} = 0, \\ S = \{1, 2, 3\} : \quad & x_{35} = 4, \quad x_{43} = 0, \\ S = \{1, 2, 3, 4, 5\} : \quad & x_{46} = 4, \quad x_{56} = 3. \end{aligned}$$

La conservazione ai nodi 1 e 4 dà quindi  $x_{12} = 7 - x_{13} = 3$  e  $x_{54} = x_{43} + x_{46} - x_{24} = 1$ :  $\tilde{x}$  è l'unico flusso massimo, mentre il taglio minimo non è unico.

### Archi e tagli saturati

Gli archi saturi di flusso massimo non formano in generale un taglio. Sotto  $\tilde{x}$  gli archi saturati sono  $(1, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(5, 6)$ , con capacità totale 18. Viene letto un taglio minimo dai nodi raggiungibili da  $s$  nella rete residua.

Un flusso è massimo se e solo se la sua rete residua non ha cammini aumentanti, se e solo se il suo valore è uguale a capacità di un taglio. Il valore massimo equivale alla capacità di taglio minima e i nodi raggiungibili da  $s$  nella la rete residua di portata massima forma un taglio minimo.

## 5.5 L'algoritmo Ford-Fulkerson

- Per [Teorema 5.8](#), un flusso può essere migliorato purché la sua rete residua abbia una percorso aumentante. L'algoritmo **Ford–Fulkerson** parte dal flusso zero e aumenta lungo tali percorsi fino a non ne è rimasto nessuno.

### Algoritmo

**Algorithm:** Algoritmo Ford–Fulkerson

**Input:** un grafo diretto  $G = (N, A)$  con capacità intere  $u_{ij} \geq 0$ , una sorgente  $s$  e un sink  $t$

**Output:** un flusso massimo  $x$  e un taglio minimo  $(S, N \setminus S)$

- 1 **Passaggio 0 (inizializzazione).** Imposta  $x_{ij} := 0$  per ogni  $(i, j) \in A$  e  $v := 0$ .
- 2 **Passaggio 1 (ricerca).** Costruisci la rete residua  $G(x)$  e cercala da  $s$ .
- 3 Se  $t$  non è etichettato, **STOP:**  $x$  è un flusso massimo e  $S$  è l'insieme dei nodi etichettati.
- 4 **Passaggio 2 (aumento).** Sia  $P$  il percorso dei predecessori da  $s$  a  $t$  e  $\delta := \min_{(i,j) \in P} r_{ij}$ .
- 5 Aumenta  $x$  insieme a  $P$  di  $\delta$ , imposta  $v := v + \delta$  e vai al passaggio 1.

- Nel passaggio 1 è possibile utilizzare qualsiasi ricerca di [Capitolo 1, Sezione «Grafo cerca»](#). In questo modulo l'algoritmo Ford–Fulkerson utilizza la **ricerca approfondita**: *LIST* è uno stack, il gli archi residui che escono da ciascun nodo vengono scansionati aumentando l'indice della testa e la ricerca si interrompe non appena  $t$  è etichettato.
- Quando la ricerca non etichetta  $t$ , ha etichettato tutti i nodi raggiungibili da  $s$  ([Capitolo 1, Teorema «correttezza della ricerca»](#)): costituiscono l'insieme  $S$  dello Step 1.

**Teorema 5.9: correttezza di Ford–Fulkerson**

Lascia che le capacità siano intere. Allora ogni flusso calcolato dall'algoritmo Ford–Fulkerson è intero, l'algoritmo si ferma dopo al massimo gli aumenti  $\tilde{v}$  e alla fermata  $\mathbf{x}$  è un flusso massimo e  $(S, N \setminus S)$  è un taglio minimo.

*Dimostrazione.* Usiamo [Lemma 5.7](#) e [Teorema 5.8](#).

1. *Integralità.* Il flusso zero è intero. Se  $\mathbf{x}$  è intero, tutte le capacità residue sono intere, quindi  $\delta$  è un numero intero positivo e il flusso aumentato è un numero intero.
2. *Terminazione.* Ogni flusso è fattibile e ogni aumento aumenta il valore di  $\delta \geq 1$ . Nessun valore supera  $\tilde{v}$ , quindi ci sono al massimo aumenti  $\tilde{v}$ .
3. *Ottimalità.* Alla fermata  $t$  non è etichettato, quindi  $G(\mathbf{x})$  non ha percorso aumentante e  $S$  è l'insieme di i nodi raggiungibili da  $s$ . La dimostrazione di (b) implica che (c) dà  $v = u(S, N \setminus S)$ : il flusso è massimo e il il taglio è minimo.  $\square$

**Corollario 5.10: integralità**

Se tutte le capacità sono intere, esiste un flusso massimo con voci intere.

*Dimostrazione.* Il flusso restituito dall'algoritmo Ford–Fulkerson, da [Teorema 5.9](#).  $\square$

- La stessa conclusione segue da [Capitolo 4, Teorema «vertici interi»](#): con l'arco  $(t, s)$ , il modello MF è un modello di flusso a costo minimo con numero intero dati, e il suo ottimo è raggiunto su un vertice intero.
- Le capacità razionali diventano intere dopo la moltiplicazione per un denominatore comune, che moltiplica ogni flusso e ogni taglio dello stesso fattore: l'algoritmo si ferma anche alle capacità razionali.

**Teorema 5.11: tempo di esecuzione di Ford–Fulkerson**

Con capacità intere, l'algoritmo Ford–Fulkerson viene eseguito nel tempo  $O((n + m) \tilde{v})$  e  $\tilde{v} \leq (n - 1)U$ , where  $U$  è la capacità maggiore.

*Dimostrazione.* Ogni iterazione crea  $G(\mathbf{x})$  nel tempo  $O(m)$ , lo cerca nel tempo  $O(n + m)$ , poiché  $G(\mathbf{x})$  ha al massimo  $2m$  archi ([Capitolo 1, Teorema «tempo di esecuzione della ricerca»](#)), e le variazioni al massimo  $n - 1$  scorrono lungo  $P$ . Ci sono al massimo  $\tilde{v}$  iterazioni con un aumento, più l'ultima.

- Di [Corollario 5.4](#) con  $S = \{s\}$ ,  $\tilde{v} \leq u(\{s\}, N \setminus \{s\})$ , e  $s$  ha al massimo  $n - 1$  archi uscenti, ciascuno con capacità al massimo  $U$ .  $\square$
- Il limite cresce con il valore  $U$  delle capacità, e non solo con il numero delle loro cifre, di circa  $\log_2 U$ : il tempo di esecuzione è **pseudopolinomio**. [Esempio 5.7](#) mostra che il numero di gli aumenti possono davvero crescere con le capacità.

## 5.5.1 Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento

## Esempio 5.6: Ford–Fulkerson sulla rete di riferimento

Eseguiamo l'algoritmo sulla rete di [Esempio 5.1](#). Ogni riga è un'iterazione: il percorso aumentante, le capacità residue dei suoi archi, gli archi arretrati che utilizza, il collo di bottiglia e il nuovo valore.

| iterazione e percorso aumentante | $r_{ij}$ su $P$  | archi all'indietro | $\delta$ | $v$ |
|----------------------------------|------------------|--------------------|----------|-----|
| 1                                | 1, 2, 4, 3, 5, 6 | 5, 3, 2, 4, 3      | –        | 2 2 |
| 2                                | 1, 2, 4, 6       | 3, 1, 4            | –        | 1 3 |
| 3                                | 1, 3, 4, 6       | 4, 2, 3            | (3, 4)   | 2 5 |
| 4                                | 1, 3, 5, 4, 6    | 2, 2, 2, 1         | –        | 1 6 |
| 5                                | 1, 3, 5, 6       | 1, 1, 1            | –        | 1 7 |

I flussi dopo ogni iterazione ( $k = 0$  è il flusso zero) sono:

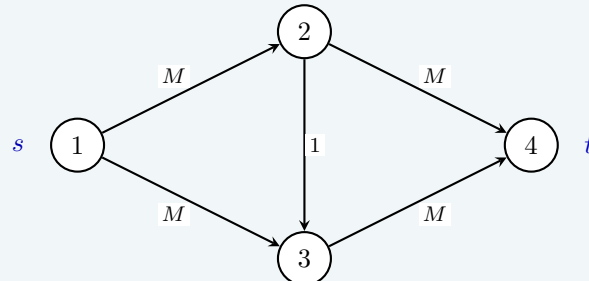
| $k$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{24}$ | $x_{32}$ | $x_{35}$ | $x_{43}$ | $x_{46}$ | $x_{54}$ | $x_{56}$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 1   | 2        | 0        | 2        | 0        | 2        | 2        | 0        | 0        | 2        |
| 2   | 3        | 0        | 3        | 0        | 2        | 2        | 1        | 0        | 2        |
| 3   | 3        | 2        | 3        | 0        | 2        | 0        | 3        | 0        | 2        |
| 4   | 3        | 3        | 3        | 0        | 3        | 0        | 4        | 1        | 2        |
| 5   | 3        | 4        | 3        | 0        | 4        | 0        | 4        | 1        | 3        |

- L'iterazione 1 è la ricerca approfondita di [Capitolo 1, Esempio «DFS da nodo 1»](#): tutti gli archi sono vuoti,  $G(\mathbf{0}) = G$ , e il percorso passa attraverso l'arco (4, 3).
- Dopo l'iterazione 2 il flusso è  $\bar{x}$  di [Esempio 5.1](#) e l'iterazione 3 è il aumento di [Esempio 5.3](#): l'arco all'indietro (3, 4) annulla le due unità inviate su (4, 3) nell'iterazione 1.
- La sesta ricerca etichetta solo i nodi 1 e 2, e l'algoritmo si interrompe: il flusso è  $\tilde{x}$  di [Esempio 5.5](#) e  $S = \{1, 2\}$  fornisce il taglio minimo di capacità  $u_{13} + u_{24} = 7$ .
- L'algoritmo effettua aumenti 5, entro il limite  $\tilde{v} = 7$  di [Teorema 5.9](#).

### 5.5.2 Il numero di aumenti

#### Esempio 5.7: molti miglioramenti

Nella rete seguente,  $M$  è un numero intero positivo. I percorsi 1, 2, 4 e 1, 3, 4 portano ciascuno unità  $M$  e il taglio  $S = \{1\}$  ha la capacità  $2M$ , quindi  $\tilde{v} = 2M$ .



- L'algoritmo Ford–Fulkerson consente qualsiasi percorso aumentante. Se i percorsi 1, 2, 3, 4 e 1, 3, 2, 4 si alternano, il secondo attraverso l'arco all'indietro (3, 2), ogni collo di bottiglia è  $\delta = 1$ , dato dall'arco (2, 3) o dal suo arco all'indietro: sono necessari gli aumenti  $2M$ , due milioni per  $M = 10^6$ .
- Con la ricerca approfondita di questo modulo, per  $M \geq 2$ , i percorsi sono 1, 2, 3, 4, quindi 1, 2, 4, 1, 3, 2, 4 e 1, 3, 4, con  $\delta = 1$ ,  $M - 1$ , 1,  $M - 1$ : quattro ampliamenti.

L'algoritmo Ford-Fulkerson aumenta lungo i percorsi della rete residua fino a quando non ne rimane più nessuno. Con numero intero capacità si ferma dopo al massimo  $\tilde{v}$  aumenti, con un flusso massimo intero e un taglio minimo; suo il tempo di esecuzione  $O((n + m) \tilde{v})$  è pseudopolinomiale.

## 5.6 L'algoritmo Edmonds–Karp

### Definizione 5.12: Algoritmo di Edmonds–Karp

L'algoritmo **Edmonds–Karp** è l'algoritmo Ford–Fulkerson in cui il Passo 1 utilizza l'algoritmo **ricerca in ampiezza**: *LIST* è una coda, gli archi residui che escono da ciascun nodo vengono scansionati aumentando l'indice della testa e la ricerca si interrompe non appena viene etichettato  $t$ . Le capacità sono numeri reali non negativi.

- Di [Capitolo 1](#), Proposta «BFS trova i percorsi più brevi in numero di archi», il percorso aumentante ha il numero minimo di archi tra i percorsi da  $s$  a  $t$  in  $G(\mathbf{x})$ .
- Per un flusso ammissibile  $\mathbf{x}$  e un nodo  $i$ ,  $d_{\mathbf{x}}(i)$  è il numero minimo di archi di un percorso da  $s$  a  $i$  in  $G(\mathbf{x})$  e  $d_{\mathbf{x}}(i) = +\infty$  se  $i$  non è raggiungibile.
- Un arco del cammino aumentante è **critico** se la sua capacità residua è uguale a  $\delta$ : dopo il aumento la sua capacità residua è zero e lascia la rete residua.

- Un aumento lungo  $P$  abbassa  $r_{ij}$  di  $\delta$  e solleva  $r_{ji}$  di  $\delta$  su ogni arco  $(i, j)$  di  $P$  e non modifica nessun'altra capacità residua. Quindi gli archi che entrano nella rete residua sono inversi di archi di  $P$ .

**Lemma 5.13: le distanze non diminuiscono**

Sia  $\mathbf{x}'$  ottenuto da  $\mathbf{x}$  mediante un aumento lungo un percorso  $P$  da  $s$  a  $t$  di  $G(\mathbf{x})$  con il numero minimo di archi. Quindi  $d_{\mathbf{x}'}(i) \geq d_{\mathbf{x}}(i)$  per ogni  $i \in N$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che ogni arco  $(a, b)$  di  $G(\mathbf{x}')$  soddisfa  $d_{\mathbf{x}}(b) \leq d_{\mathbf{x}}(a) + 1$ .

1. Se  $(a, b)$  è un arco di  $G(\mathbf{x})$ , un percorso più breve da  $s$  a  $a$  seguito da  $(a, b)$  raggiunge  $b$  con Archi  $d_{\mathbf{x}}(a) + 1$ .
2. Altrimenti  $(a, b)$  è il rovescio di un arco  $(b, a)$  di  $P$ . La parte di  $P$  da  $s$  a ciascuno dei suoi nodi ha il numero minimo di archi: un percorso verso quel nodo con meno archi, seguito dal resto di  $P$ , darebbe una passeggiata da  $s$  a  $t$  con meno archi di  $P$  e un percorso al suo interno ([Capitolo 1, Lemma «una passeggiata contiene un cammino»](#)). Quindi  $d_{\mathbf{x}}(a) = d_{\mathbf{x}}(b) + 1$  e  $d_{\mathbf{x}}(b) \leq d_{\mathbf{x}}(a) + 1$ .

Ora lasciamo che  $s = i_0, i_1, \dots, i_q = i$  sia un percorso di  $G(\mathbf{x}')$  con archi  $q = d_{\mathbf{x}'}(i)$ . Lungo i suoi archi  $d_{\mathbf{x}}$  cresce al massimo di 1 alla volta, quindi  $d_{\mathbf{x}}(i) \leq d_{\mathbf{x}}(s) + q = d_{\mathbf{x}'}(i)$ . Se  $i$  non lo è raggiungibile in  $G(\mathbf{x}')$ , quindi  $d_{\mathbf{x}'}(i) = +\infty$ .  $\square$

**Lemma 5.14: archi critici**

Nell'algoritmo Edmonds–Karp, lasciamo che l'arco residuo  $(i, j)$  sia critico nell'aumento al flusso  $\mathbf{x}$ , e nuovamente critico in un successivo aumento al flusso  $\mathbf{y}$ . Quindi  $d_{\mathbf{y}}(i) \geq d_{\mathbf{x}}(i) + 2$ .

*Dimostrazione.* Appliciamo [Lemma 5.13](#) ad ogni aumento tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

1. In  $\mathbf{x}$ , l'arco  $(i, j)$  si trova su un percorso con il numero minimo di archi, quindi  $d_{\mathbf{x}}(j) = d_{\mathbf{x}}(i) + 1$ ; dopo l'ampliamento  $r_{ij} = 0$ .
2. In  $\mathbf{y}$  l'arco  $(i, j)$  è tornato nella rete residua, quindi qualche aumento nel mezzo, in un flusso  $\mathbf{z}$ ,  $r_{ij}$  rialzato: il suo percorso utilizzava l'arco inverso  $(j, i)$  e  $d_{\mathbf{z}}(i) = d_{\mathbf{z}}(j) + 1$ .
3. Le distanze non diminuiscono mai, quindi  $d_{\mathbf{z}}(j) \geq d_{\mathbf{x}}(j)$  e  $d_{\mathbf{y}}(i) \geq d_{\mathbf{z}}(i)$ . Quindi

$$d_{\mathbf{y}}(i) \geq d_{\mathbf{z}}(i) = d_{\mathbf{z}}(j) + 1 \geq d_{\mathbf{x}}(j) + 1 = d_{\mathbf{x}}(i) + 2.$$

$\square$

**Teorema 5.15: tempo di esecuzione di Edmonds–Karp**

Per qualsiasi capacità non negativa, l'algoritmo Edmonds–Karp si ferma dopo al massimo gli aumenti  $nm$  con un massimo flusso e un taglio minimo e viene eseguito nel tempo

$O(nm(n+m))$ , ovvero  $O(nm^2)$  quando  $m \geq n-1$ .

- Dimostrazione.*
1. Ogni potenziamento ha almeno un arco critico: un arco di  $P$  la cui capacità residua è pari a  $\delta$ .
  2. Quando  $(i, j)$  è critico,  $i$  si trova prima di  $t$  su un percorso da  $s$  a  $t$  con al massimo  $n-1$  archi, quindi  $0 \leq d(i) \leq n-2$ . Per [Lemma 5.14](#) questa distanza cresce di almeno 2 tra due tempi critici, quindi  $(i, j)$  è critico al massimo nei tempi  $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1 \leq \frac{n}{2}$ .
  3. Ogni arco residuo è  $(i, j)$  o  $(j, i)$  per un arco  $(i, j) \in A$ : ce ne sono al massimo  $2m$ , e al massimo Miglioramenti  $2m \cdot \frac{n}{2} = nm$ .
  4. Ogni iterazione richiede tempo  $O(n+m)$ , come in [Teorema 5.11](#). Alla fermata  $G(x)$  non ha cammino aumentante, e [Teorema 5.8](#) si applica come nella dimostrazione di [Teorema 5.9](#).  $\square$

- Il limite dipende solo da  $n$  e  $m$ , non dalle capacità: l'algoritmo Edmonds–Karp è **fortemente polinomiale**, e si ferma anche alle capacità irrazionali.

### 5.6.1 Edmonds–Karp sulla rete di riferimento

#### Esempio 5.8: Edmonds–Karp sulla rete di riferimento

Eseguiamo l'algoritmo sulla rete di [Esempio 5.1](#); la colonna «archi» è il numero di archi del percorso aumentante.

| iterazione e percorso incrementale e archi | $r_{ij}$ su $P$ e archi all'indietro | $\delta$ | $v$              |
|--------------------------------------------|--------------------------------------|----------|------------------|
| 1                                          | 1, 2, 4, 6                           | 3        | 5, 3, 4 – 3 3    |
| 2                                          | 1, 3, 5, 6                           | 3        | 4, 4, 3 – 3 6    |
| 3                                          | 1, 3, 5, 4, 6                        | 4        | 1, 1, 2, 1 – 1 7 |

Le distanze  $d_x(i)$  nella rete residua prima di ogni ricerca sono:

| iterazione | $d(1)$ | $d(2)$ | $d(3)$   | $d(4)$   | $d(5)$   | $d(6)$   |
|------------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|
| 1          | 0      | 1      | 1        | 2        | 2        | 3        |
| 2          | 0      | 1      | 1        | 3        | 2        | 3        |
| 3          | 0      | 1      | 1        | 3        | 2        | 4        |
| arresto    | 0      | 1      | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |

- Iterazione 1 è la ricerca in ampiezza di [Capitolo 1, Esempio «BFS da nodo 1»](#), il cui percorso dell'albero al nodo 6 è 1, 2, 4, 6.
- Gli archi critici sono (2, 4) nell'iterazione 1, (5, 6) nell'iterazione 2 e (1, 3), (3, 5), (4, 6) nell'iterazione iterazione 3. Quando (2, 4) lascia la rete residua,  $d(4)$  cresce da 2 a 3; nessuna distanza diminuisce mai.

- L'algoritmo necessita di aumenti 3, rispetto a 5 di [Esempio 5.6](#), molto al di sotto del limite  $nm = 54$ . Termina con la stessa portata massima  $\tilde{x}$ , unica, e lo stesso taglio  $S = \{1, 2\}$ .
- Sulla rete di [Esempio 5.7](#) la ricerca in ampiezza trova prima 1, 2, 4 e poi 1, 3, 4, ciascuno con  $\delta = M$ : due ampliamenti per ogni  $M$ .

L'algoritmo di Edmonds–Karp sceglie, con una ricerca in ampiezza, un cammino aumentante con il minor numero di archi. Le distanze dei nodi da  $s$  nella rete residua non diminuiscono mai. Ogni arco diventa critico al massimo  $\frac{n}{2}$  volte, perciò l'algoritmo esegue al più  $nm$  aumenti e richiede tempo  $O(nm^2)$ , indipendentemente dai valori delle capacità.

## 5.7 Applicazioni

### 5.7.1 Corrispondenza massima in un grafo bipartito

#### Definizione 5.16: grafo bipartito e corrispondenza

Un grafo non orientato  $H = (V_1 \cup V_2, E)$  è **bipartito** se  $V_1$  e  $V_2$  sono disgiunti e ogni lato ne ha uno estremo in  $V_1$  e uno in  $V_2$ ; scriviamo i lati come  $\{i, j\}$  con  $i \in V_1$  e  $j \in V_2$ .

- A **matching** è un insieme  $M \subseteq E$  di lati, nessuno dei quali ha un punto finale comune.
- Il **problema di corrispondenza massima** richiede una corrispondenza con il maggior numero di lati.

La **rete di  $H$**  ha i nodi  $\{s\} \cup V_1 \cup V_2 \cup \{t\}$ , gli archi  $(s, i)$  per  $i \in V_1$ ,  $(i, j)$  per ogni lato  $\{i, j\} \in E$ ,  $(j, t)$  per  $j \in V_2$  e tutte le capacità uguali a 1.

- Con  $V_1$  un insieme di lavoratori,  $V_2$  un insieme di lavori e un margine in cui un lavoratore può svolgere un lavoro, viene assegnata una corrispondenza posti di lavoro ai lavoratori, al massimo un posto di lavoro per lavoratore e un lavoratore per posto di lavoro.
- Nell'ordine dei nodi,  $s$  viene per primo e  $t$  per ultimo; gli altri nodi mantengono i loro indici.

#### Proposizione 5.17: corrispondenze e flussi

Il numero massimo di fronti di una corrispondenza di  $H$  equivale al valore massimo  $\tilde{v}$  di un flusso nella rete di  $H$ . Se  $\tilde{x}$  è un flusso massimo intero, allora  $M = \{\{i, j\} \in E : \tilde{x}_{ij} = 1\}$  è una corrispondenza massima.

*Dimostrazione.* 1. *Dagli abbinamenti ai flussi.* Dato un corrispondente  $M$ , impostare  $x = 1$  sugli archi  $(s, i)$ ,  $(i, j)$ ,  $(j, t)$  di ogni lato  $\{i, j\} \in M$  e  $x = 0$  altrove. Ogni nodo di  $V_1 \cup V_2$  è un punto finale di almeno un lato di  $M$ , quindi il flusso è fattibile e il suo valore è  $|M|$ .

2. *Da flussi interi agli abbinamenti.* Sia  $\mathbf{x}$  un flusso ammissibile intero, quindi  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ . A il nodo  $i \in V_1$  ha il singolo arco entrante  $(s, i)$ , quindi al massimo un arco  $(i, j)$  trasporta flusso; ha un nodo  $j \in V_2$  l'unico arco uscente  $(j, t)$ , quindi al massimo un arco  $(i, j)$  trasporta il flusso. Quindi  $M = \{(i, j) : x_{ij} = 1\}$  è un corrispondenza. Per  $S = \{s\} \cup V_1$ , gli archi in avanti sono gli archi  $(i, j)$  e non ci sono archi all'indietro: da Lemma 5.3,  $v = |M|$ .
3. Per Corollario 5.10 esiste un flusso massimo intero  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Entro l'1, nessuna corrispondenza ha più di lati  $\tilde{v}$  e per 2 la corrispondenza di  $\tilde{\mathbf{x}}$  ha lati  $\tilde{v}$ .  $\square$

### Esempio 5.9: lavoratori e posti di lavoro

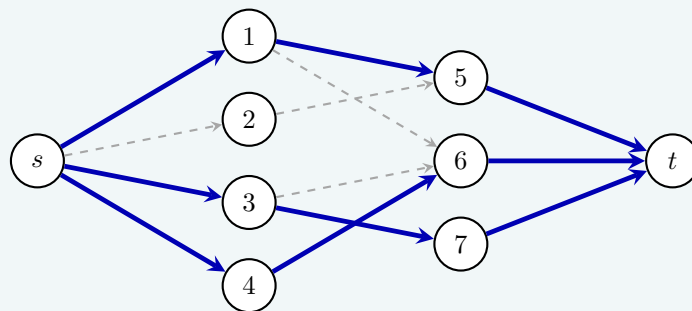
Quattro lavoratori  $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  e tre lavori  $V_2 = \{5, 6, 7\}$  hanno i vantaggi

$$E = \{\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}.$$

L'algoritmo Edmonds–Karp sulla rete di  $H$ , con i nodi nell'ordine  $s, 1, 2, \dots, 7, t$ , dà:

| iterazione e percorso aumentante | $r_{ij}$ su $P$    | archi all'indietro | $\delta$ | $v$ |
|----------------------------------|--------------------|--------------------|----------|-----|
| 1                                | $s, 1, 5, t$       | 1, 1, 1            | –        | 1 1 |
| 2                                | $s, 3, 6, t$       | 1, 1, 1            | –        | 1 2 |
| 3                                | $s, 4, 6, 3, 7, t$ | 1, 1, 1, 1, 1      | (6, 3)   | 1 3 |

- L'iterazione 3 utilizza l'arco all'indietro  $(6, 3)$ : il lavoratore 3 lascia il lavoro 6 per il lavoro 7 e il lavoratore 4 accetta il lavoro 6.
- L'abbinamento massimo è  $M = \{\{1, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$ , con lati 3; il lavoratore 2 resta senza lavoro. Dentro nella figura gli archi con flusso 1 sono blu.
- Alla fermata cerca le etichette  $S = \{s, 1, 2, 4, 5, 6\}$ ; gli archi anteriori del taglio sono  $(s, 3)$ ,  $(5, t)$ ,  $(6, t)$ , con capacità  $3 = |M|$ .



### 5.7.2 Percorsi arcodisgiunti

- Due percorsi diretti sono **arco-disgiunti** se non hanno arco in comune; possono condividere nodi.

#### Teorema 5.18: Menger, versione ad arco

Sia  $G = (N, A)$  un grafo diretto e  $s \neq t$  due nodi. Il numero massimo di percorsi diretti a coppie di archi disgiunti da  $s$  a  $t$  è uguale al numero minimo di archi la cui rimozione non lascia alcun percorso diretto da  $s$  a  $t$ .

*Dimostrazione.* Assegna ad ogni arco la capacità 1 e lascia che  $\tilde{v}$  sia il valore massimo di un flusso.

1. *I percorsi danno flussi.* La somma dei vettori di incidenza dei percorsi arcodisgiunti  $k$  da  $s$  a  $t$  è un flusso di valore ammissibile  $k$ : ogni arco porta al massimo 1, e ogni percorso entra ed esce dai suoi nodi interni. Quindi  $k \leq \tilde{v}$ .
2. *I flussi danno percorsi.* Per [Corollario 5.10](#) esiste un flusso  $\mathbf{x}$  con  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  e valore  $\tilde{v}$ . Se  $\tilde{v} \geq 1$ , camminare da  $s$  lungo gli archi con  $x_{ij} = 1$ , ciascuno utilizzato al massimo una volta, finché non viene raggiunto  $t$ :
  - in un nodo  $i \notin \{s, t\}$  il cammino ha utilizzato un arco in entrata in più rispetto agli archi in uscita, e la conservazione dà un arco di uscita inutilizzato con flusso;
  - a  $s$  il cammino ha utilizzato tanti archi in uscita quanti in entrata, mentre gli archi con flusso in uscita da  $s$  sono  $\tilde{v} \geq 1$  più di quelli che entrano: ne esiste uno inutilizzato.

La passeggiata termina, in  $t$ , e contiene un percorso  $P$  da  $s$  a  $t$  ([Capitolo 1, Lemma «una passeggiata contiene un cammino»](#)). L'impostazione di  $x_{ij} = 0$  su  $P$  lascia un flusso 0/1 di valore  $\tilde{v} - 1$ ; ripetendo fornisce percorsi  $\tilde{v}$  arcodisgiunti.

3. *Rimozione archi.* Se la rimozione di un set  $F$  di archi non lascia alcun percorso da  $s$  a  $t$ , il set  $S$  dei nodi ancora raggiungibile da  $s$  ha  $t \notin S$  e  $\delta^+(S) \subseteq F$ , quindi  $|F| \geq u(S, N \setminus S) \geq \tilde{v}$ . Viceversa, ogni percorso da  $s$  a  $t$  lascia  $S$  attraverso un arco di  $\delta^+(S)$ : rimozione del  $\tilde{v}$  archi in avanti di un taglio minimo ([Teorema 5.8](#)) non lasciano alcun percorso.  $\square$

#### Esempio 5.10: percorsi arcodisgiunti nel grafo di riferimento

Sul grafo di riferimento con tutte le capacità 1,  $s = 1$  e  $t = 6$ , l'algoritmo Edmonds–Karp trova i percorsi 1, 2, 4, 6 e 1, 3, 5, 6 e  $\tilde{v} = 2$ . Questi due percorsi sono archi disgiunti e rimuovendo i due archi (1, 2), (1, 3) lasciando il nodo 1 non lascia alcun percorso da 1 a 6: entrambi i numeri di [Teorema 5.18](#) sono 2.

Una corrispondenza massima di un grafo bipartito è un flusso massimo intero in una rete con capacità unitaria, e lo sono anche i percorsi arcodisgiunti da  $s$  a  $t$ ; il taglio minimo

certifica entrambi.

## 5.8 Errori tipici

### Attenzione

- **Conteggio degli archi all'indietro di un taglio.** La capacità  $u(S, N \setminus S)$  somma solo gli archi di  $S$  a  $N \setminus S$ .
- **Dimenticando gli archi all'indietro della rete residua.** Solo con gli archi in avanti, il metodo può fermarsi a portata non massima, pari al valore 5 sulla rete di riferimento.
- **Dando ad un arco all'indietro la capacità  $u_{ij}$ .** L'arco all'indietro  $(j, i)$  ha  $r_{ji} = x_{ij}$ : solo il flusso già inviato può essere rinviato.
- **Prendere il collo di bottiglia dalle capacità.** Il collo di bottiglia è la capacità residua più piccola  $r_{ij}$  sul percorso, non il più piccolo  $u_{ij}$ .
- **Aggiungendo  $\delta$  su un arco all'indietro.** Lungo un arco all'indietro  $(j, i)$  il flusso  $x_{ij}$  diminuisce di  $\delta$ .
- **Lettura del taglio dagli archi saturati.** Il taglio minimo è dato dai nodi raggiungibili da  $s$  in la rete residua alla fermata; non è necessario che gli archi saturati formino un taglio.
- **Chiamata del polinomio Ford–Fulkerson.** Il suo numero di aumenti può crescere con le capacità, come  $2M$  in [Esempio 5.7](#); Edmonds–Karp produce al massimo  $nm$ .

## 5.9 In sintesi

### In sintesi

- Un flusso ammissibile rispetta le capacità e si conserva nei nodi diversi da  $s$  e  $t$ ; il suo valore è il deflusso netto di  $s$  ed è uguale al flusso netto attraverso ogni taglio  $s-t$ .
- Dualità debole:  $v \leq u(S, N \setminus S)$  per ogni flusso e ogni taglio.
- La rete residua ha archi avanti con  $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$  e archi indietro con  $r_{ji} = x_{ij}$ ; un percorso aumentante aumenta il valore tramite il collo di bottiglia  $\delta$ .
- Taglio minimo flusso massimo: un flusso è massimo se e solo se non esiste alcun percorso aumentante e  $\tilde{v}$  è uguale al capacità di taglio minima; con capacità intere si ha una portata massima intera.
- Ford–Fulkerson (ricerca approfondita): con capacità intere al massimo degli aumenti  $\tilde{v}$ , pseudopolinomiale. Edmonds–Karp (ricerca in ampiezza): al massimo aumenti  $nm$ , tempo  $O(nm^2)$ .

- Gli abbinamenti massimi nei grafi bipartiti e nei percorsi arcodisgiunti sono flussi massimi interi.

#### La rete di riferimento in sintesi.

|                                                                          |                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| capacità, $s = 1$ , $t = 6$                                              | $\mathbf{u} = (5, 4, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 3)$                           |
| portata massima (unico)                                                  | $\tilde{\mathbf{x}} = (3, 4, 3, 0, 4, 0, 4, 1, 3)$ , $\tilde{v} = 7$ |
| tagli minimi, capacità 7                                                 | $S = \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$                       |
| Ford–Fulkerson (DFS) e potenziamenti 5, $\delta = 2, 1, 2, 1, 1$         |                                                                      |
| Edmonds–Karp (BFS) e potenziamenti 3, $\delta = 3, 3, 1$                 |                                                                      |
| tutte le capacità 1 e percorsi ad arco disgiunto 1, 2, 4, 6 e 1, 3, 5, 6 |                                                                      |

# Flusso di costo minimo

## Prerequisiti

- Da questo modulo, [Capitolo 3 «Percorsi più brevi»](#): l'algoritmo di Bellman–Ford con la rilevazione di un ciclo negativo, l'algoritmo di Dijkstra e il potenziali  $\pi_i = -\tilde{d}(i)$  come certificato.
- [Capitolo 4 «Flusso di rete modelli»](#): il modello di flusso a costo minimo, il flusso attraverso un taglio, la sostituzione dei limiti inferiori, i potenziali e i costi ridotti.
- [Capitolo 5 «Portata massima»](#): il rete residua  $G(\mathbf{x})$ , percorsi aumentanti e algoritmo di Edmonds–Karp.

## Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- costruire la rete residua di un flusso con capacità e costi residui, calcolare il costo di uno dei suoi cicli, e aumentare il flusso lungo di esso;
- decomporre una circolazione, e la differenza di due flussi ammissibili, in cicli;
- dimostrare che un flusso ammissibile è ottimale se e solo se la sua rete residua non ha ciclo negativo, e se e solo se esistono potenziali con costi ridotti non negativi, e riconoscono un'istanza illimitata;
- trovare una prima portata ammissibile con portata massima;
- esegue l'algoritmo di annullamento del ciclo e il successivo algoritmo del percorso più breve e ne dimostra la correttezza.

## Dove eravamo

- In [Capitolo 4 «Rete modelli di flusso»](#) il problema del flusso di costo minimo è il LP  $\min\{\mathbf{c}'\mathbf{x} : \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}$ . Potentials  $\pi_i$  whose reduced costs  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  sono positivi solo su archi vuoti e negativi solo su archi saturi certificano che un flusso è ottimale.
- Sulla rete di riferimento il flusso ottimale  $\tilde{\mathbf{x}}$  costa 60 e  $\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$  lo

certifica.

- In [Capitolo 5 «Portata massima»](#) a il flusso cresce lungo percorsi aumentanti della rete residua  $G(\mathbf{x})$ .
- In questo capitolo il certificato diventa un algoritmo: abbassiamo il costo di un flusso ammissibile lungo cicli di  $G(\mathbf{x})$ , oppure costruiamo il flusso lungo i percorsi più brevi di  $G(\mathbf{x})$  mantenendo vero il certificato.

## 6.1 La rete residua con i costi

- In questo capitolo la rete  $G = (N, A)$  ha saldi  $b_i$  con  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ , limiti inferiori  $l_{ij}$ , capacità  $u_{ij}$  (finite o  $+\infty$ ) e costi  $c_{ij}$ , come in [Capitolo 4](#). Gli archi sono numerati  $a_1, a_2, \dots, a_m$  in ordine lessicografico.
- L'insieme  $A$  non ha coppia di archi opposti  $(i, j), (j, i)$ . Un arco  $(j, i)$  opposto a  $(i, j)$  può essere sostituito da gli archi  $(j, k)$  e  $(k, i)$  attraverso un nuovo nodo di traslato  $k$ , entrambi con i limiti di  $(j, i)$ , il primo con il suo costo e il secondo con costo 0: i flussi ed i relativi costi non cambiano.

### Definizione 6.1: rete residua

Sia  $\mathbf{x}$  un vettore con  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  per ogni arco. La **rete residua**  $G(\mathbf{x}) = (N, A(\mathbf{x}))$  ha, per ogni arco  $(i, j) \in A$ :

- il **arco avanti**  $(i, j)$ , se  $x_{ij} < u_{ij}$ , con **capacità residua**  $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$  e costo  $c_{ij}$ ;
- il **arco all'indietro**  $(j, i)$ , se  $x_{ij} > l_{ij}$ , con capacità residua  $r_{ji} = x_{ij} - l_{ij}$  e costo  $-c_{ij}$ .

Scriviamo  $c_{ij}^x$  per il costo dell'arco  $(i, j)$  di  $G(\mathbf{x})$ .

- Un arco in avanti può trasportare  $r_{ij}$  più unità su  $(i, j)$ . Un arco all'indietro  $(j, i)$  rimanda le unità da  $j$  a  $i$  diminuendo  $x_{ij}$  e risparmia  $c_{ij}$  per unità.
- Un arco di  $A$  dà due archi di  $G(\mathbf{x})$  esattamente quando  $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$ . Con  $\mathbf{l} = \mathbf{0}$  e senza i costi,  $G(\mathbf{x})$  è la rete residua di [Capitolo 5 «Flusso massimo»](#).

### Definizione 6.2: cicli della rete residua

Sia  $W$  un ciclo diretto di  $G(\mathbf{x})$ . Il suo **costo** e il suo **capacità residua** sono

$$c(W) = \sum_{(i,j) \in W} c_{ij}^x, \quad r(W) = \min_{(i,j) \in W} r_{ij},$$

e  $W$  è un **ciclo negativo** se  $c(W) < 0$ . **Aumento**  $\mathbf{x}$  insieme a  $W$  di  $\theta$ , con  $0 < \theta \leq r(W)$ , significa aumentare  $x_{ij}$  di  $\theta$  per ogni arco in avanti  $(i, j)$  di  $W$  e diminuire  $x_{ij}$  da  $\theta$  per ogni arco  $(i, j) \in A$  il cui arco all'indietro  $(j, i)$  è in  $W$ .

**Proposizione 6.3: aumentare lungo un ciclo**

Sia  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ , sia  $W$  un ciclo di  $G(\mathbf{x})$  e  $0 < \theta \leq r(W)$ , e sia  $\mathbf{x}'$  può essere  $\mathbf{x}$  ampliato insieme a  $W$  da  $\theta$ . Quindi  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x}' \leq \mathbf{u}$ , ogni nodo ha il file stesso deflusso meno afflusso in  $\mathbf{x}'$  e in  $\mathbf{x}$ , e

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}' = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \theta c(W).$$

*Dimostrazione.* Controlliamo le tre affermazioni arco per arco.

1. *Bounds.* Su un arco in avanti,  $x'_{ij} = x_{ij} + \theta \leq x_{ij} + r_{ij} = u_{ij}$ . Se l'arco all'indietro  $(j, i)$  è in  $W$ , quindi  $x'_{ij} = x_{ij} - \theta \geq x_{ij} - r_{ji} = l_{ij}$ .
2. *Saldi.* Aumentando di  $\theta$  lungo un arco  $(i, k)$  di  $G(\mathbf{x})$  aumenta il deflusso meno l'afflusso di  $i$  di  $\theta$  e abbassa quello di  $k$  di  $\theta$ : un arco in avanti invia più flusso da  $i$  a  $k$ , un arco all'indietro invia meno flusso da  $k$  a  $i$ . Ogni nodo di  $W$  è la coda di un arco di  $W$  e la testa di un altro, quindi le modifiche annullare.
3. *Costo.* Un arco in avanti modifica il costo di  $c_{ij}\theta = c_{ij}^x\theta$ ; un arco all'indietro  $(j, i)$  lo cambia di  $-c_{ij}\theta = c_{ji}^x\theta$ . La somma di  $W$  dà  $\theta c(W)$ .  $\square$

- Se  $\mathbf{x}$  è un flusso ammissibile, lo è anche  $\mathbf{x}'$ . Durante un ciclo negativo il costo diminuisce di  $\theta |c(W)|$ .

**Esempio 6.1: la rete residua del flusso più costoso**

Utilizziamo la rete di riferimento di [Capitolo 4](#), con limiti inferiori pari a zero, i saldi  $\mathbf{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$  e i costi e le capacità

| arco     | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $c_{ij}$ | 2      | 2      | 5      | 2      | 3      | 3      | 5      | 5      | 3      |
| $u_{ij}$ | 4      | 4      | 4      | 2      | 4      | 3      | 5      | 3      | 2      |

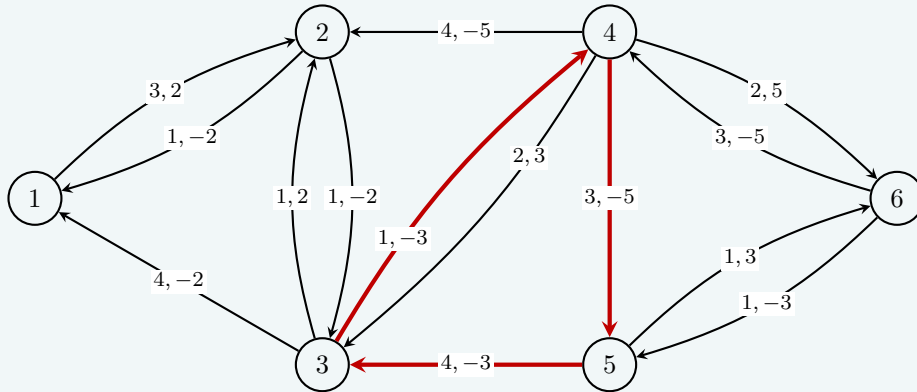
Il suo flusso ammissibile più costoso, calcolato con Gurobi massimizzando il costo, è

$$\mathbf{x}^0 = (1, 4, 4, 1, 4, 1, 3, 3, 1), \quad \mathbf{c}'\mathbf{x}^0 = 80,$$

con le voci nell'ordine degli archi; è l'unico flusso di costo 80, come enumerazione dell'intero 12 confermano i flussi fattibili. Ogni arco dà i seguenti archi di  $G(\mathbf{x}^0)$ , con capacità residua e costo:

| arco $(i, j)$           | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_{ij}^0$              | 1      | 4      | 4      | 1      | 4      | 1      | 3      | 3      | 1      |
| avanti $(i, j): r, c$   | 3, 2   | —      | —      | 1, 2   | —      | 2, 3   | 2, 5   | —      | 1, 3   |
| indietro $(j, i): r, c$ | 1, -2  | 4, -2  | 4, -5  | 1, -2  | 4, -3  | 1, -3  | 3, -5  | 3, -5  | 1, -3  |

Nella figura ogni arco di  $G(\mathbf{x}^0)$  porta la coppia  $r_{ij}, c_{ij}^x$ ; il ciclo  $W = 4, 5, 3, 4$  è rosso.



- Il ciclo  $W = 4, 5, 3, 4$  utilizza gli archi indietro di  $(5, 4)$ ,  $(3, 5)$  e  $(4, 3)$ :

$$c(W) = -5 - 3 - 3 = -11, \quad r(W) = \min\{3, 4, 1\} = 1.$$

- L'aumento di  $\theta = 1$  diminuisce  $x_{54}$ ,  $x_{35}$  e  $x_{43}$  di un'unità. Il nuovo flusso  $\mathbf{x}^1 = (1, 4, 4, 1, 3, 0, 3, 2, 1)$  è fattibile e costa  $80 - 11 = 69$ : l'unità che ha fatto il giro del ciclo diretto  $3, 5, 4, 3$  di  $G$  costa 11 e non consegna nulla.

La rete residua  $G(\mathbf{x})$  ha un arco di costo in avanti  $c_{ij}$  dove  $x_{ij}$  può crescere e un arco all'indietro di costo  $-c_{ij}$  dove  $x_{ij}$  può diminuire. L'aumento lungo un ciclo di  $G(\mathbf{x})$  mantiene i limiti e i saldi e modifica il costo di  $\theta c(W)$ .

## 6.2 Circolazioni e loro scomposizione

### Definizione 6.4: circolazione

Sia  $H = (N, F)$  un grafo diretto. Un **circolazione** su  $H$  è un vettore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^F$  con  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  tale che ogni nodo abbia un flusso in uscita uguale all'afflusso:

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} y_{ij} = \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} y_{ji}, \quad \forall i \in N.$$

Il **vettore di incidenza**  $\chi^W$  di un ciclo diretto  $W$  di  $H$ , con  $\chi_a^W = 1$  sugli archi di  $W$  e  $\chi_a^W = 0$  altrove, è una circolazione.

### Lemma 6.5: scomposizione in cicli

Sia  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  una circolazione su  $H = (N, F)$ , con archi  $p$  dove  $y_a > 0$ . Poi ci sono i cicli diretti  $W_1, W_2, \dots, W_k$  di  $H$ , con  $k \leq p$ , composto da archi con  $y_a > 0$  e numeri  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k > 0$  tale che

$$\mathbf{y} = \sum_{h=1}^k \theta_h \chi^{W_h}.$$

Se  $\mathbf{y}$  è un numero intero, i numeri  $\theta_h$  sono numeri interi.

*Dimostrazione.* Per induzione su  $p$ .

1. *Un ciclo.* Sia  $(i_0, i_1)$  un arco con  $y_{i_0 i_1} > 0$ . Il nodo  $i_1$  riceve un afflusso positivo, quindi da bilanciare alcuni archi  $(i_1, i_2)$  ha  $y_{i_1 i_2} > 0$ . Proseguendo allo stesso modo costruiamo un cammino diretto formato da archi con  $y > 0$ . Poiché  $N$  è finito, un nodo si ripete e il tratto di cammino tra le sue due occorrenze è un ciclo diretto  $W_1$ .
2. *Rimozione.* Lascia che  $\theta_1 = \min_{a \in W_1} y_a > 0$ . Il vettore  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \theta_1 \chi^{W_1}$  è non negativo, è bilanciato come differenza di vettori bilanciati e ha al massimo  $p - 1$  archi positivi, poiché  $y'_a = 0$  su un arco di  $W_1$  che raggiunge il minimo.
3. *Induzione.* Se  $\mathbf{y}' = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{y} = \theta_1 \chi^{W_1}$ . Altrimenti l'induzione dà  $\mathbf{y}' = \sum_{h=2}^k \theta_h \chi^{W_h}$  con  $k - 1 \leq p - 1$  cicli di archi con  $y'_a > 0$ , quindi  $y_a > 0$ .

Se  $\mathbf{y}$  è un numero intero,  $\theta_1$  è una delle sue voci e  $\mathbf{y}'$  è un numero intero, quindi tutti i  $\theta_h$  sono numeri interi.  $\square$

### Lemma 6.6: la differenza di due flussi fattibili

Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  flussi ammissibili. Definire  $\mathbf{y}$  sugli archi di  $G(\mathbf{x})$ : per ogni  $(i, j) \in A$ ,

$$\begin{aligned} y_{ij} &= x'_{ij} - x_{ij} \quad \text{sull'arco in avanti } (i, j), \text{ se } x'_{ij} > x_{ij}, \\ y_{ji} &= x_{ij} - x'_{ij} \quad \text{sull'arco all'indietro } (j, i), \text{ se } x'_{ij} < x_{ij}, \end{aligned}$$

e  $y = 0$  sugli altri archi di  $G(\mathbf{x})$ . Quindi  $\mathbf{y}$  è una circolazione su  $G(\mathbf{x})$  con  $y_{ij} \leq r_{ij}$ , e

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}' - \mathbf{c}'\mathbf{x} = \sum_{(i,j) \in A(\mathbf{x})} c_{ij}^x y_{ij} = \sum_{h=1}^k \theta_h c(W_h)$$

per ogni scomposizione di  $\mathbf{y} = \sum_{h=1}^k \theta_h \chi^{W_h}$  in cicli di  $G(\mathbf{x})$ .

*Dimostrazione.* Controlliamo che  $\mathbf{y}$  viva su  $G(\mathbf{x})$ , che sia bilanciato e il suo costo.

1. Se  $x'_{ij} > x_{ij}$ , allora  $x_{ij} < x'_{ij} \leq u_{ij}$ : l'arco in avanti esiste e  $y_{ij} \leq u_{ij} - x_{ij} = r_{ij}$ .  
Se  $x'_{ij} < x_{ij}$ , allora  $x_{ij} > x'_{ij} \geq l_{ij}$ : esiste l'arco all'indietro e  $y_{ji} \leq x_{ij} - l_{ij} = r_{ji}$ .
2. Come nella dimostrazione di [Proposizione 6.3](#),  $y$  su un arco  $(i, k)$  di  $G(\mathbf{x})$  aggiunge  $y$  al deflusso meno l'afflusso di  $i$  e lo sottrae da quello di  $k$ , esattamente come la variazione da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}'$  fa sull'arco corrispondente di  $A$ . Quindi il deflusso meno l'afflusso di  $\mathbf{y}$  nel nodo  $i$  è  $(B\mathbf{x}')_i - (B\mathbf{x})_i = b_i - b_i = 0$ .
3. Un arco in avanti contribuisce  $c_{ij}(x'_{ij} - x_{ij})$ , un arco all'indietro  $-c_{ij}(x_{ij} - x'_{ij}) = c_{ij}(x'_{ij} - x_{ij})$ : il totale è  $\mathbf{c}'(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ . Con la scomposizione,  $\sum c_{ij}^x y_{ij} = \sum_h \theta_h \sum_{(i,j) \in W_h} c_{ij}^x = \sum_h \theta_h c(W_h)$ .  $\square$

- Per [Lemma 6.5](#) esiste una tale scomposizione:  $\mathbf{x}'$  è  $\mathbf{x}$  aumentata lungo i cicli  $W_1, W_2, \dots, W_k$  di  $G(\mathbf{x})$  di  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ . Poiché  $\mathbf{y}$  è positivo su al massimo un arco di  $G(\mathbf{x})$  per arco di

$A, k \leq m$ .

### Esempio 6.2: dal flusso più costoso al flusso ottimale

Confrontiamo  $\mathbf{x}^0$  di [Esempio 6.1](#), di costo 80, con il flusso ottimale  $\tilde{\mathbf{x}} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$  del capitolo 4, di costo 60. La differenza è

$$\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0 = (1, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -2, 1),$$

quindi  $\mathbf{y}$  è positivo su otto archi di  $G(\mathbf{x}^0)$ : gli archi in avanti (1,2) e (5,6), con  $y = 1$ , e gli archi all'indietro

$$y_{31} = 1, \quad y_{23} = 1, \quad y_{53} = 1, \quad y_{34} = 1, \quad y_{64} = 1, \quad y_{45} = 2.$$

Seguiamo la dimostrazione di [Lemma 6.5](#), partendo ogni volta dal primo arco con  $y > 0$  in ordine lessicografico e lasciando ogni nodo lungo il suo arco con  $y > 0$  di testa più piccola:

| $h$ | ciclo $W_h$ | $\theta_h$ | $c(W_h)$           |
|-----|-------------|------------|--------------------|
| 1   | 1, 2, 3, 1  | 1          | $2 - 2 - 2 = -2$   |
| 2   | 3, 4, 5, 3  | 1          | $-3 - 5 - 3 = -11$ |
| 3   | 4, 5, 6, 4  | 1          | $-5 + 3 - 5 = -7$  |

Di [Lemma 6.6](#),  $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{c}'\mathbf{x}^0 = -2 - 11 - 7 = -20 = 60 - 80$ . Tutto tre cicli sono negativi e  $W_2$  è il ciclo 4, 5, 3, 4 di [Esempio 6.1](#), scritto da nodo 3.

Una circolazione è una somma di multipli positivi di cicli orientati. La differenza tra due flussi ammissibili è a circolazione su  $G(\mathbf{x})$ : ogni flusso fattibile viene raggiunto da  $\mathbf{x}$  lungo cicli di  $G(\mathbf{x})$ , e il costo modifiche apportate da  $\sum_h \theta_h c(W_h)$ .

## 6.3 Condizioni di ottimalità del ciclo negativo

### Teorema 6.7: ottimalità del ciclo negativo

Un flusso ammissibile  $\mathbf{x}$  è ottimale se e solo se la sua rete residua  $G(\mathbf{x})$  non ha ciclo negativo.

*Dimostrazione.* Dimostriamo le due implicazioni.

- *Un ciclo negativo migliora  $\mathbf{x}$ .* Sia  $W$  un ciclo negativo di  $G(\mathbf{x})$  e  $\theta = \min\{r(W), 1\} > 0$ . By [Proposition 6.3](#),  $\mathbf{x}$  augmented along  $W$  by  $\theta$  è un flusso di costi fattibile  $\mathbf{c}'\mathbf{x} + \theta c(W) < \mathbf{c}'\mathbf{x}$ , quindi  $\mathbf{x}$  non è ottimale.
- *Senza cicli negativi  $\mathbf{x}$  è ottimale.* Sia  $\mathbf{x}'$  un flusso qualsiasi ammissibile. Di [Lemma 6.6](#),  $\mathbf{c}'\mathbf{x}' = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \sum_h \theta_h c(W_h)$  con cicli  $W_h$  di  $G(\mathbf{x})$  e  $\theta_h > 0$ . Ogni  $c(W_h)$  è non negativo, quindi  $\mathbf{c}'\mathbf{x}' \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}$ .  $\square$

- La dimostrazione confronta due flussi attraverso la loro differenza e non utilizza la dualità LP.
- Quando alcune capacità sono infinite, il modello può essere illimitato e la proposizione successiva dice esattamente quando.

**Proposizione 6.8: istanze illimitate**

Supponiamo che il modello MCF abbia un flusso ammissibile. È illimitato se e solo se  $G$  ha un ciclo diretto  $C$  di costo negativo,  $\sum_{(i,j) \in C} c_{ij} < 0$ , i cui archi hanno tutti  $u_{ij} = +\infty$ .

*Dimostrazione. Se.* Sia  $\mathbf{x}$  fattibile. Ogni arco di  $C$  ha  $x_{ij} < u_{ij} = +\infty$ , quindi  $C$  è un ciclo di archi in avanti di  $G(\mathbf{x})$  con  $r(C) = +\infty$ . L'integrazione lungo  $C$  con qualsiasi  $\theta > 0$  fornisce flussi di costi fattibili  $\mathbf{c}'\mathbf{x} + \theta c(C)$ , che tende a  $-\infty$ .

*Solo se.* Assumi che non esista un tale ciclo  $C$  e fissa un flusso ammissibile  $\mathbf{x}$ . Lascia che  $R$  sia il più grande capacità residua finita di un arco di  $G(\mathbf{x})$  ( $R = 0$  se non ce n'è) e  $K = \max_{(i,j) \in A} |c_{ij}|$ . Lascia che  $\mathbf{x}'$  sia qualsiasi flusso ammissibile, scomposto come in [Lemma 6.6](#).

1. Un ciclo  $W_h$  con  $c(W_h) < 0$  ha un arco  $a$  di capacità residua finita: gli archi all'indietro hanno residuo finito capacità e un ciclo di archi in avanti con capacità infinita sarebbe un ciclo  $C$ . Quindi  $\theta_h \leq y_a \leq r_a \leq R$ .
2.  $W_h$  ha al massimo archi  $n$ , quindi  $c(W_h) \geq -nK$ ; ci sono al massimo i cicli  $m$ .

Quindi  $\mathbf{c}'\mathbf{x}' \geq \mathbf{c}'\mathbf{x} - m R n K$  per ogni  $\mathbf{x}'$  ammissibile: il modello è limitato.  $\square$

- Un PL ammissibile limitato ha una soluzione ottima ([Programmazione lineare, capitolo 15 «La geometria della Programmazione Lineare»](#)). Con capacità limitate, il modello MCF non è mai illimitato.

**Esempio 6.3: un flusso non ottimale e un'istanza illimitata**

- Il flusso ammissibile  $\bar{\mathbf{x}} = (1, 4, 3, 0, 4, 0, 2, 2, 2)$  di [Capitolo 4](#) costa 63. La sua rete residua ha il ciclo  $W = 1, 2, 4, 5, 3, 1$ , composto dagli archi diretti  $(1, 2)$ ,  $(2, 4)$  e dagli archi all'indietro  $(4, 5)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(3, 1)$ :

$$c(W) = 2 + 5 - 5 - 3 - 2 = -3, \quad r(W) = \min\{3, 1, 2, 4, 4\} = 1.$$

Per [Teorema 6.7](#)  $\bar{\mathbf{x}}$  non è ottimale. L'aumento di 1 dà  $\tilde{\mathbf{x}}$ , del costo  $63 - 3 = 60$ : il gap 3 di  $\bar{\mathbf{x}}$  calcolato con la soluzione duale nel [Capitolo 4](#).

- Con  $c_{54} = -12$  e  $u_{35} = u_{54} = u_{43} = +\infty$ , il ciclo diretto  $3, 5, 4, 3$  di  $G$  costa  $3 - 12 + 3 = -6$  e ha capacità infinite. Con [Proposizione 6.8](#) il modello è illimitato, come Gurobi conferma: ogni unità inviata nel ciclo riduce il costo di 6.

Un flusso ammissibile è ottimale se e solo se la sua rete residua non ha ciclo negativo. Un modello fattibile è illimitato se e solo se un ciclo diretto negativamente ha tutte le sue

capacità infinite.

## 6.4 Condizioni di ottimalità con potenziali

- Dati i potenziali  $\pi \in \mathbb{R}^n$ , il costo ridotto di un arco  $(i, j)$  di  $G(\mathbf{x})$  è  $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j$ . For a forward arc it is  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ , il costo ridotto di [Capitolo 4](#); per l'arco all'indietro  $(j, i)$  di  $(i, j)$  è  $-c_{ij} - \pi_j + \pi_i = -\bar{c}_{ij}$ .
- Lungo un ciclo  $W$  di  $G(\mathbf{x})$  i potenziali si telescopio, come in [Capitolo 3](#):

$$c(W) = \sum_{(i,j) \in W} (c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j).$$

### Teorema 6.9: ottimizzazione dei costi ridotti

Un flusso ammissibile  $\mathbf{x}$  è ottimale se e solo se esistono potenziali  $\pi \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j \geq 0 \quad \text{per ogni arco } (i, j) \text{ di } G(\mathbf{x}).$$

*Dimostrazione. If.* Con la formula telescopica ogni ciclo di  $G(\mathbf{x})$  ha  $c(W) \geq 0$  e  $\mathbf{x}$  è ottimale per [Teorema 6.7](#).

*Solo se.* Sia  $\mathbf{x}$  ottimale: per [Teorema 6.7](#),  $G(\mathbf{x})$  non ha ciclo negativo.

1. Aggiungere un nodo  $r$  e un arco  $(r, i)$  di costo 0 per ogni  $i \in N$ . Nel nuovo grafo ogni nodo è raggiungibile da  $r$ , e i cicli sono quelli di  $G(\mathbf{x})$ , poiché nessun arco entra in  $r$ : nessuno è negativo.
2. Per il Teorema «Equazioni di Bellman» di [Capitolo 3](#), le distanze  $d(i)$  da  $r$  sono finite e  $d(j) \leq d(i) + c_{ij}^x$  per ogni arco  $(i, j)$  di  $G(\mathbf{x})$ .
3. Con  $\pi_i = -d(i)$  otteniamo  $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j = c_{ij}^x + d(i) - d(j) \geq 0$ . □

### Corollario 6.10: allentamento complementare

Sia  $\mathbf{x}$  un flusso ammissibile e  $\pi \in \mathbb{R}^n$ . La condizione di [Teorema 6.9](#) vale se e solo se, per ogni arco  $(i, j) \in A$ ,

$$\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = l_{ij}, \quad \bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}.$$

In particolare,  $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$  implica  $\bar{c}_{ij} = 0$ .

*Dimostrazione.* L'arco  $(i, j) \in A$  dà luogo all'arco in avanti, di costo ridotto  $\bar{c}_{ij}$ , quando  $x_{ij} < u_{ij}$ , e all'arco all'indietro, di costo ridotto  $-\bar{c}_{ij}$ , quando  $x_{ij} > l_{ij}$ . Quindi la condizione sugli archi del grafo residuo è

$$x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow \bar{c}_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} > l_{ij} \Rightarrow \bar{c}_{ij} \leq 0.$$

Poiché  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ , la prima implicazione è equivalente a  $\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$ , mentre la seconda equivale a  $\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = l_{ij}$ . Se  $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$ , si applicano

entrambe le implicazioni e  $\bar{c}_{ij} = 0$ . □

- Con  $l = 0$  queste sono le condizioni del Corollario «certificato a costo ridotto» di [Capitolo 4](#). Lì si sono dimostrati sufficienti con la dualità LP; [Teorema 6.9](#) mostra che ogni il flusso ottimale ha tali potenziali che con  $\alpha_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}\}$  formano una soluzione duale ottimale.
- I potenziali della prova sono  $\pi_i = -d(i)$ , meno le distanze da  $r$ , come  $\pi_i = -\tilde{d}(i)$  in [Capitolo 3](#). Possono essere spostati di una costante; li normalizziamo con  $\pi_n = 0$ .

#### Esempio 6.4: il certificato del flusso ottimale

Prendiamo  $\tilde{x}$  e i potenziali  $\pi = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$  del capitolo 4. I costi ridotti dei gli archi di  $G(\tilde{x})$  sono  $\bar{c}_{ij}$  sugli archi in avanti e  $-\bar{c}_{ij}$  sugli archi all'indietro:

| arco $(i, j)$     | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\tilde{x}_{ij}$  | 2      | 3      | 4      | 0      | 3      | 0      | 2      | 1      | 2      |
| $\bar{c}_{ij}$    | 0      | 0      | -3     | 2      | 0      | 11     | 0      | 0      | -7     |
| avanti $(i, j)$   | 0      | 0      | -      | 2      | 0      | 11     | 0      | 0      | -      |
| indietro $(j, i)$ | 0      | 0      | 3      | -      | 0      | -      | 0      | 0      | 7      |

- Tutti gli archi 14 di  $G(\tilde{x})$  hanno costo ridotto non negativo: da [Teorema 6.9](#),  $\tilde{x}$  è ottimale. Sotto forma di [Corollario 6.10](#): (3, 2) e (4, 3) sono vuoti, (2, 4) e (5, 6) sono saturati.
- I potenziali sono meno i costi delle passeggiate più economiche di  $G(\tilde{x})$  che terminano in ciascun nodo. Per esempio, il cammino 6, 4, 5, 3, 1 utilizza quattro archi all'indietro e costa  $-5 - 5 - 3 - 2 = -15 = -\pi_1$ : in  $G$  è il percorso 1, 3, 5, 4, 6 dello albero ricoprente del capitolo 4.

Un flusso ammissibile è ottimo se e solo se alcuni potenziali danno costi ridotti non negativi su tutti gli archi di  $G(x)$ : positivo  $\bar{c}_{ij}$  solo sugli archi al limite inferiore, negativo solo sugli archi saturati. Tale i potenziali sono meno le distanze in  $G(x)$  da un nodo unito a tutti gli altri.

## 6.5 Un primo flusso fattibile

- Un algoritmo che migliora un flusso fattibile necessita di un flusso fattibile da cui partire. Con la sostituzione di [Capitolo 4](#) possiamo assumere  $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ .

### Definizione 6.11: rete ausiliaria

Supponiamo che  $G = (N, A)$  sia una rete bilanciata con  $\mathbf{l} = \mathbf{0}$  e  $D = \sum_{i \in N: b_i > 0} b_i$  la sua offerta totale. Il **rete ausiliaria** aggiunge a  $G$  un **super source**  $s$  e un **super sink**  $t$ , un arco  $(s, i)$  con capacità  $b_i$  per ogni nodo di fornitura  $i$ , e un arco  $(i, t)$  con capacità  $-b_i$  per ogni nodo di domanda  $i$ ; gli archi di  $A$  mantengono le loro capacità.

### Proposizione 6.12: un flusso fattibile da un flusso massimo

La rete  $G$  ha una portata ammissibile se e solo se la portata massima  $s-t$  della rete ausiliaria ha valore  $D$ . In tal caso, un flusso massimo limitato agli archi di  $A$  è un flusso ammissibile di  $G$ .

*Dimostrazione.* Il valore di un flusso  $s-t$  è il flusso in uscita da  $s$ , al massimo la capacità totale  $D$  degli archi  $(s, i)$ .

1. *Solo se.* Sia  $\mathbf{x}$  ammissibile, e poniamo  $x_{si} = b_i$  sugli archi  $(s, i)$  e  $x_{it} = -b_i$  sugli archi  $(i, t)$ . In un nodo di offerta il deflusso meno l'afflusso diventa  $b_i - x_{si} = 0$ , in un nodo di domanda  $b_i + x_{it} = 0$  e i nodi di traslato non cambiano: si tratta di un flusso  $s-t$  di valore  $D$ , quindi massimo.
2. *Se.* Lascia che un flusso massimo abbia valore  $D$ . Quindi tutti gli archi  $(s, i)$  sono saturati. Il valore è anche il flusso entrante in  $t$  e gli archi  $(i, t)$  hanno capacità totale  $\sum_{i: b_i < 0} (-b_i) = D$ , poiché la rete è bilanciata: anch'essi sono saturi.
3. La conservazione in  $i \in N$  dà quindi, lungo gli archi di  $A$ , deflusso meno afflusso pari a  $x_{si} - x_{it} = b_i$ , e le capacità reggono: la limitazione a  $A$  è un flusso fattibile.

□

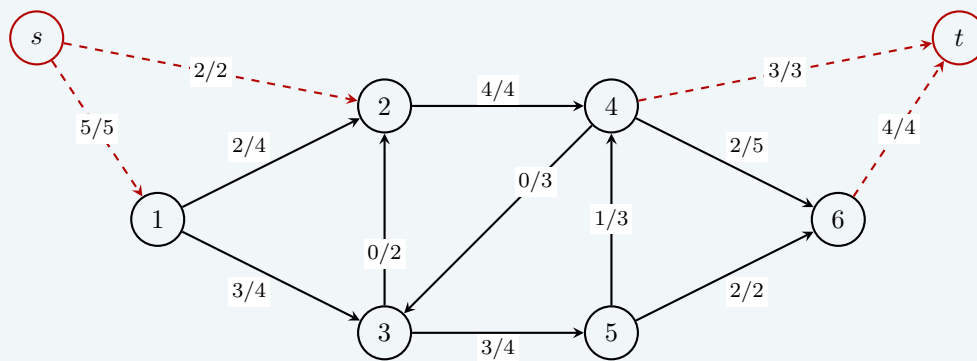
- Calcoliamo il flusso massimo con l'algoritmo Edmonds–Karp di [Capitolo 5](#): una ricerca in ampiezza da  $s$  nella rete residua, scandendo gli archi che lasciano un nodo aumentando l'indice di la testa ( $s$  prima del nodo 1,  $t$  dopo il nodo  $n$ ).
- La portata massima ignora i costi: fornisce una portata fattibile, solitamente lontana dall'ottimale.

**Esempio 6.5: un flusso fattibile della rete di riferimento**

La rete di riferimento ha  $D = 5 + 2 = 7$ . La rete ausiliaria aggiunge gli archi  $(s, 1)$ ,  $(s, 2)$  con capacità 5, 2, e  $(4, t)$ ,  $(6, t)$  con capacità 3, 4 (rosso e tratteggiato nella figura). I cammini aumentanti del L'algoritmo di Edmonds–Karp è:

| percorso | nodi                  | unità |
|----------|-----------------------|-------|
| 1        | $s, 2, 4, t$          | 2     |
| 2        | $s, 1, 2, 4, t$       | 1     |
| 3        | $s, 1, 2, 4, 6, t$    | 1     |
| 4        | $s, 1, 3, 5, 6, t$    | 2     |
| 5        | $s, 1, 3, 5, 4, 6, t$ | 1     |

Il valore è  $7 = D$ , quindi la rete ha un flusso fattibile. Ciascun arco trasporta  $x_{ij}/u_{ij}$ :



La restrizione a  $A$  è  $(2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$ : su questa istanza è il flusso ottimale  $\tilde{x}$  di Capitolo 4. Questa è una coincidenza, poiché la ricerca non prende mai in considerazione i costi.

Una super fonte che alimenta i nodi di offerta e un super sink alimentato dai nodi di domanda trasformano la fattibilità in un flusso massimo problema: la rete ha un flusso ammissibile se e solo se il flusso massimo satura tutti i nuovi archi.

## 6.6 L'algoritmo di annullamento del ciclo

- **Teorema 6.7** suggerisce un algoritmo dovuto a Klein: mentre  $G(\mathbf{x})$  ha ciclo negativo, aumenta lungo di esso. L'aumento di  $r(W)$  satura un arco di  $W$ , che lascia  $G(\mathbf{x})$ : il ciclo è annullato.

### 6.6.1 Trovare un ciclo negativo

- Non è necessario che un ciclo negativo di  $G(\mathbf{x})$  sia raggiungibile da un dato nodo. Eseguiamo l'algoritmo Bellman–Ford di [Capitolo 3](#) da un nuovo nodo  $r$  unito ad ogni nodo da un arco di costo 0; il suo primo passaggio assegna l'etichetta 0 a ogni nodo e noi scriviamo la tabella da lì.

#### Proposizione 6.13: Bellman–Ford sulla rete residua

Sia  $d^0(j) = 0$  per ogni  $j \in N$  e, per  $k \geq 1$ ,

$$d^k(j) = \min \left\{ d^{k-1}(j), \min_{(i,j) \in A(\mathbf{x})} (d^{k-1}(i) + c_{ij}^x) \right\}, \quad \forall j \in N.$$

- $d^k(j)$  è il costo minimo di un cammino in  $G(\mathbf{x})$  con al massimo  $k$  archi che termina a  $j$ , il cammino senza archi con costo 0.
- $G(\mathbf{x})$  ha un ciclo negativo se e solo se  $d^n \neq d^{n-1}$ . In tal caso, se  $d^n(j) < d^{n-1}(j)$ , i predecessori leggono all'indietro da  $j$ , una riga per passaggio dalla riga  $n$  alla riga 1, danno una passeggiata di  $G(\mathbf{x})$  con Archi  $n$ , che terminano in  $j$ , che contengono un ciclo negativo.
- Se  $d^k = d^{k-1}$  per alcuni  $k \leq n$ , i potenziali  $\pi_i = -d^k(i)$  soddisfano  $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j \geq 0$  su ogni arco di  $G(\mathbf{x})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H$   $G(\mathbf{x})$  più il nodo  $r$  e gli archi  $(r, i)$  di costo 0, e siano  $D^k$  le etichette di Bellman–Ford da  $r$  a  $H$ :  $D^1(i) = 0$  per ogni  $i \in N$  e  $D^k(r) = 0$  per ogni  $k$ .

- Per induzione su  $k$ ,  $D^{k+1}(j) = d^k(j)$  per  $j \in N$ : le ricorsioni coincidono, e l'arco  $(r, j)$  offre  $D^k(r) + 0 = 0$ , che non abbassa mai il minimo da  $d^{k-1}(j) \leq d^0(j) = 0$ . Una passeggiata da  $r$  con gli archi  $k + 1$  è un arco  $(r, i)$  seguito da un cammino in  $G(\mathbf{x})$  con archi  $k$  da  $i$ : questo dimostra (a).
- In  $H$  ogni nodo è raggiungibile da  $r$ , ed i cicli sono quelli di  $G(\mathbf{x})$ . Per il Teorema «rilevazione di un ciclo negativo» del Capitolo 3, applicato ai nodi  $n + 1$  di  $H$ , esiste un ciclo negativo se e solo se  $D^{n+1} \neq D^n$ , cioè  $d^n \neq d^{n-1}$ . La cammino da  $r$  con gli archi  $n + 1$  letti in righe  $n + 1, \dots, 2$  di  $H$ , quali sono le nostre righe  $n, \dots, 1$ , contiene un ciclo negativo; senza il suo primo arco  $(r, \cdot)$  è una passeggiata  $G(\mathbf{x})$  con archi  $n$  e il ciclo non contiene  $r$ . Ciò dimostra (b).
- Se  $d^k = d^{k-1}$ , la passata successiva ripete le etichette:  $d^k(j) \leq d^k(i) + c_{ij}^x$  per ogni arco  $(i, j)$  di  $G(\mathbf{x})$ , che è (c) con  $\pi = -d^k$ .  $\square$

- **Regole di questo capitolo.** Gli archi di  $G(\mathbf{x})$  vengono scanditi in ordine lessicografico; come nel capitolo 3, i legami nel minimo vanno alla coda più piccola e un predecessore cambia solo quando l'etichetta diminuisce rigorosamente. Se  $d^n \neq d^{n-1}$ ,  $j$  è il nodo più piccolo con  $d^n(j) < d^{n-1}(j)$  e il ciclo è la parte del percorso tra le due occorrenze del primo nodo si sono incontrate due volte, leggendo il cammino dal suo primo nodo.
- Alla fermata i potenziali  $\pi_i = -d^k(i)$  vengono spostati in modo che  $\pi_n = 0$ .

### 6.6.2 L'algoritmo

#### Algoritmo

**Algorithm:** Algoritmo di annullamento ciclo

**Input:** una rete bilanciata con  $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ , capacità  $u_{ij}$ , costi  $c_{ij}$

**Output:** un flusso ottimale  $\mathbf{x}$  con il suo certificato  $\boldsymbol{\pi}$ , o «irammissibile», o «illimitato»

- 1 **Passo 0 (inizio).** Se un ciclo di archi con  $u_{ij} = +\infty$  ha costo negativo, STOP: illimitato.
- 2 Trovare un flusso ammissibile  $\mathbf{x}$  con un flusso massimo della rete ausiliaria.
- 3 Se il suo valore è inferiore a  $D$ , STOP: impossibile.
- 4 **Passaggio 1 (ciclo negativo).** Esegui Bellman–Ford su  $G(\mathbf{x})$  da  $d^0 = \mathbf{0}$ .
- 5 Se  $d^k = d^{k-1}$  per alcuni  $k \leq n$ , STOP:  $\mathbf{x}$  è ottimale, con  $\boldsymbol{\pi} = -d^k$ .
- 6 Altrimenti leggere un ciclo negativo  $W$  dalla tabella.
- 7 **Passaggio 2 (annulla).** Aumenta  $\mathbf{x}$  insieme a  $W$  con  $\theta = r(W)$  e vai al passaggio 1.

- Il test del Passo 0 è [Proposizione 6.13](#) applicato al grafo degli archi con  $u_{ij} = +\infty$  e relativi costi. Quando fallisce, ogni ciclo negativo di  $G(\mathbf{x})$  ha un arco di residuo finito capacità (prova di [Proposizione 6.8](#)), quindi  $r(W) < +\infty$  nel passaggio 2.
- Qualsiasi flusso fattibile può essere utilizzato nel passaggio 0; il flusso massimo è un modo per trovarlo.

#### Teorema 6.14: correttezza annullamento ciclo

Siano interi i saldi, le capacità ed i costi, con capacità possibilmente  $+\infty$ , e si lasci che l'algoritmo superare il passo 0 con un flusso ammissibile intero  $\mathbf{x}^0$ . Allora ogni flusso dell'algoritmo è intero e ammissibile, ogni l'iterazione riduce il costo almeno di 1 e l'algoritmo si ferma al massimo dopo  $\mathbf{c}'\mathbf{x}^0 - z(\text{MCF})$  iterazioni con un flusso ottimale.

*Dimostrazione.* Con [Proposizione 6.8](#) il modello è limitato, quindi ha un valore ottimale  $z(\text{MCF})$ .

1. Se  $\mathbf{x}$  è un numero intero, le capacità residue sono numeri interi positivi o  $+\infty$  e  $r(W)$  è un valore positivo intero, poiché  $r(W) < +\infty$ . Per [Proposizione 6.3](#) il nuovo flusso è fattibile e intero.
2. Il costo varia di  $r(W)c(W)$ , dove  $r(W) \geq 1$  e  $c(W) \leq -1$  sono numeri interi:

diminuisce di almeno 1.

3. Il costo parte da  $c'x^0$  e non scende mai sotto  $z(\text{MCF})$ , quindi ci sono al massimo Iterazioni  $c'x^0 - z(\text{MCF})$ . Alla fermata  $G(x)$  non ha ciclo negativo (Proposizione 6.13) e  $x$  è ottimale per Teorema 6.7.  $\square$

- **Tempo di esecuzione.**  $G(x)$  ha al massimo archi  $2m$ , quindi il passaggio 1 richiede tempo  $O(nm)$ . Con finito capacità,  $U = \max u_{ij}$  e  $K = \max |c_{ij}|$ , ogni flusso costa tra  $-mKU$  e  $mKU$ : al massimo  $2mKU$  iterazioni e tempo  $O(nm^2KU)$ .
- Il limite dipende dalla dimensione dei numeri  $K$  e  $U$ , non solo da  $n$  e  $m$ : è un Limite pseudo-polinomio.

### 6.6.3 Annullamento ciclo sulla rete di riferimento

- Sulla rete di riferimento, il Passaggio 0 restituisce  $\tilde{x}$  (Esempio 6.5) e l'algoritmo termina alla prima esecuzione di Bellman–Ford. Per osservarne il funzionamento, partiamo dal flusso di costo massimo  $x^0$  di Esempio 6.1, di costo 80.
- Nelle tabelle ogni riga è una tessera  $k$ ; accanto a un'etichetta diminuita, il suo nuovo predecessore tra parentesi. Le etichette lette in ordine inverso per ricostruire il cammino sono in grassetto.

#### Esempio 6.6: ciclo di annullamento dal flusso più costoso

##### Iterazione 1

$G(x^0)$  è la rete residua di Esempio 6.1. Bellman–Ford fornisce:

| $k$                                                           | $d^k(1)$ | $d^k(2)$ | $d^k(3)$ | $d^k(4)$ | $d^k(5)$ | $d^k(6)$ |
|---------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                                                             | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 1 e -2 (2) e -5 (4) e -3 (5) e -5 (6) e -5 (4)                | 0        |          |          |          |          |          |
| 2 e -7 (2) e -10 (4) e -8 (5) e -6 (3) e -10 (4) e -2 (5)     |          |          |          |          |          |          |
| 3 e -12 (2) e -11 (4) e -13 (5) e -11 (3) e -11 (4) e -7 (5)  |          |          |          |          |          |          |
| 4 e -15 (3) e -16 (4) e -14 (5) e -16 (3) e -16 (4) e -8 (5)  |          |          |          |          |          |          |
| 5 e -18 (2) e -21 (4) e -19 (5) e -17 (3) e -21 (4) e -13 (5) |          |          |          |          |          |          |
| 6 e -23 (2) e -22 (4) e -24 (5) e -22 (3) e -22 (4)           | -18 (5)  |          |          |          |          |          |

Tutte le etichette diminuiscono nel passaggio 6, quindi  $j = 1$ . Leggendo all'indietro: la riga 6 dà 2, la riga 5 per il nodo 2 dà 4, quindi 3, 5, 4, 6. La passeggiata 6, 4, 5, 3, 4, 2, 1 incontra il nodo 4 due volte:  $W = 4, 5, 3, 4$ , con  $c(W) = -11$  e  $r(W) = 1$ . Il nuovo flusso è  $x^1 = (1, 4, 4, 1, 3, 0, 3, 2, 1)$ , di costo 69.

##### Iterazione 2

Gli archi di  $W$  cambiano: (4, 5) e (5, 3) perdono un'unità, (3, 4) scompare e gli archi in avanti Vengono visualizzati (3, 5), (5, 4).  $G(x^1)$  è:

| arco $(i, j)$           | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_{ij}^1$              | 1      | 4      | 4      | 1      | 3      | 0      | 3      | 2      | 1      |
| avanti $(i, j): r, c$   | 3, 2   | –      | –      | 1, 2   | 1, 3   | 3, 3   | 2, 5   | 1, 5   | 1, 3   |
| indietro $(j, i): r, c$ | 1, –2  | 4, –2  | 4, –5  | 1, –2  | 3, –3  | –      | 3, –5  | 2, –5  | 1, –3  |

| $k$                                                     | $d^k(1)$       | $d^k(2)$ | $d^k(3)$ | $d^k(4)$ | $d^k(5)$ | $d^k(6)$ |
|---------------------------------------------------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                                                       | 0              | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 1 e –2 (2) e –5 (4) e –3 (5) e – <b>5 (6)</b> e –5 (4)  | 0              |          |          |          |          |          |
| 2 e –7 (2) e –10 (4) e –8 (5) e –5 e – <b>10 (4)</b>    | –2 (5)         |          |          |          |          |          |
| 3 e –12 (2) e –10 e –13 (5) e –7 (6) e –10              | – <b>7 (5)</b> |          |          |          |          |          |
| 4 e –15 (3) e –12 (4) e –13 e – <b>12 (6)</b> e –12 (4) | –7             |          |          |          |          |          |
| 5 e –15 e – <b>17 (4)</b> e –15 (5) e –12 e –17 (4)     | –9 (5)         |          |          |          |          |          |
| 6 e – <b>19 (2)</b> e –17 e –20 (5) e –14 (6) e –17     | –14 (5)        |          |          |          |          |          |

Ancora  $j = 1$ , e il cammino è 6, 4, 5, 6, 4, 2, 1:  $W = 6, 4, 5, 6$ , formato dagli archi all'indietro di (4, 6) e (5, 4) e da l'arco in avanti (5, 6), con  $c(W) = -5 - 5 + 3 = -7$  e  $r(W) = \min\{3, 2, 1\} = 1$ . Il nuovo flusso è  $\mathbf{x}^2 = (1, 4, 4, 1, 3, 0, 2, 1, 2)$ , di costo 62.

### Iterazione 3

In  $G(\mathbf{x}^2)$  l'arco (5, 6) è saturo: rimane solo il suo arco all'indietro (6, 5), con  $r = 2$ , e gli archi (6, 4), (4, 5) hanno capacità residue 2 e 1, gli archi in avanti (4, 6), (5, 4) residui capacità 3 e 2. Bellman–Ford fornisce:

| $k$                                                    | $d^k(1)$        | $d^k(2)$        | $d^k(3)$        | $d^k(4)$ | $d^k(5)$ | $d^k(6)$ |
|--------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|
| 0                                                      | 0               | 0               | 0               | 0        | 0        | 0        |
| 1 e –2 (2) e –5 (4) e –3 (5) e – <b>5 (6)</b> e –5 (4) | 0               |                 |                 |          |          |          |
| 2 e –7 (2) e –10 (4) e –8 (5) e –5 e – <b>10 (4)</b>   | 0               |                 |                 |          |          |          |
| 3                                                      | –12 (2)         | –10             | – <b>13 (5)</b> | –5       | –10      | 0        |
| 4                                                      | – <b>15 (3)</b> | –11 (3)         | –13             | –5       | –10      | 0        |
| 5                                                      | –15             | – <b>13 (1)</b> | –13             | –5       | –10      | 0        |
| 6                                                      | –15             | –13             | – <b>15 (2)</b> | –5       | –10      | 0        |

Solo il nodo 3 diminuisce nel passaggio 6:  $j = 3$  e il cammino è 6, 4, 5, 3, 1, 2, 3. Il nodo 3 è soddisfatto due volte:  $W = 3, 1, 2, 3$ , realizzato dell'arco all'indietro di (1, 3), dell'arco in avanti (1, 2) e dell'arco all'indietro di (3, 2), con  $c(W) = -2 + 2 - 2 = -2$  e  $r(W) = \min\{4, 3, 1\} = 1$ . Il nuovo flusso è  $\mathbf{x}^3 = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2) = \tilde{\mathbf{x}}$ , di costo 60.

### Iterazione 4

Bellman–Ford su  $G(\tilde{\mathbf{x}})$  ripete le righe 0–5 dell'iterazione 3 e nel passaggio 6 no l'etichetta diminuisce:  $d^6 = d^5 = (-15, -13, -13, -5, -10, 0)$ . L'algoritmo si ferma con  $\tilde{\mathbf{x}}$ , certificato da  $\boldsymbol{\pi} = -d^6 = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$ , già normalizzato con  $\pi_6 = 0$ : i potenziali del capitolo 4.

- In sintesi:

| iterazione e costo di $\mathbf{x}$ e $j$ e ciclo $W$ e $c(W)$ e $r(W)$ |    |   |                       |     |   |
|------------------------------------------------------------------------|----|---|-----------------------|-----|---|
| 1                                                                      | 80 | 1 | 4, 5, 3, 4            | -11 | 1 |
| 2                                                                      | 69 | 1 | 6, 4, 5, 6            | -7  | 1 |
| 3                                                                      | 62 | 3 | 3, 1, 2, 3            | -2  | 1 |
| 4                                                                      | 60 | - | nessun ciclo negativo | -   | - |

- Il limite di [Teorema 6.14](#) consente le iterazioni  $80 - 60 = 20$ ; ne bastano tre. I tre i cicli sono i cicli della scomposizione di [Esempio 6.2](#), trovati in un ordine diverso.

L'algoritmo di annullamento del ciclo parte da un flusso ammissibile e annulla i cicli negativi di  $G(\mathbf{x})$ , trovati da Bellman-Ford dalle etichette tutte uguali a 0. Con dati interi ogni cancellazione abbassa il costo di almeno 1; a allo stop le etichette danno i potenziali che certificano il flusso ottimale.

## 6.7 L'algoritmo del percorso più breve successivo

### Definizione 6.15: pseudoflusso e squilibri

Un **pseudoflusso** è un vettore  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ , che potrebbe violare il flusso conservazione. Lo **squilibrio** del nodo  $i$  è

$$e_i = b_i - \left( \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in \delta^-(i)} x_{ji} \right) :$$

l'offerta che  $i$  deve ancora inviare se  $e_i > 0$  (un **nodo in eccesso**), la domanda che deve ancora ricevere se  $e_i < 0$  (un **nodo in deficit**).

- Uno pseudoflusso è un flusso ammissibile esattamente quando  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ . La somma degli squilibri ammonta a zero, poiché il i saldi lo fanno e ogni arco aggiunge  $x_{ij}$  alla coda e lo sottrae alla testa.
- La rete residua  $G(\mathbf{x})$  di uno pseudoflusso è definita come in [Definizione 6.1](#). Ampliamento di  $\mathbf{x}$  lungo un percorso  $P$  di  $G(\mathbf{x})$  da  $s$  a  $t$  tramite  $\delta \leq r(P) = \min_{(i,j) \in P} r_{ij}$  è definito come per i cicli: i limiti rimangono validi,  $e_s$  diminuisce di  $\delta$ ,  $e_t$  aumenta di  $\delta$  e il costo aumenta di  $\delta c(P)$ , dove  $c(P) = \sum_{(i,j) \in P} c_{ij}^x$ .
- L'idea è di mantenere i potenziali con costi ridotti non negativi su  $G(\mathbf{x})$ , la condizione di [Teorema 6.9](#), mentre gli squilibri vanno a zero. Con  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$  and costs  $c_{ij} \geq 0$  la condizione vale all'inizio.

### Lemma 6.16: i percorsi più brevi mantengono i costi ridotti non negativi

Sia  $\mathbf{x}$  uno pseudoflusso e i potenziali  $\boldsymbol{\pi}$  con  $\bar{c}_{ij}^\pi = c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j \geq 0$  su ogni arco di  $G(\mathbf{x})$ . Sia  $d(i)$  la distanza da un nodo  $s$  in  $G(\mathbf{x})$  con lunghezze  $\bar{c}^\pi$  ( $d(i) = +\infty$  se  $i$  non è raggiungibile),  $t$  un nodo con  $d(t) < +\infty$ ,  $P$  un percorso più breve da  $s$  a  $t$  e

$$\pi'_i = \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}, \quad \forall i \in N.$$

- (a)  $c_{ij}^x - \pi'_i + \pi'_j \geq 0$  su ogni arco di  $G(\mathbf{x})$ .
- (b)  $c_{ij}^x - \pi'_i + \pi'_j = 0$  su ogni arco di  $P$ .
- (c) Se  $\mathbf{x}'$  è  $\mathbf{x}$  aumentato lungo  $P$  da  $\delta \leq r(P)$ , allora  $c_{ij}^{x'} - \pi'_i + \pi'_j \geq 0$  su ogni arco di  $G(\mathbf{x}')$ .

*Dimostrazione.* Lascia che  $\hat{d}(i) = \min\{d(i), d(t)\}$ . Il costo ridotto di  $(i, j)$  con  $\pi'$  è  $\bar{c}_{ij}^\pi + \hat{d}(i) - \hat{d}(j)$ .

- (a) Sia  $(i, j)$  un arco di  $G(\mathbf{x})$ . Se  $d(i) < +\infty$ , un percorso più breve verso  $i$  seguito da  $(i, j)$  dà  $d(j) \leq d(i) + \bar{c}_{ij}^\pi$ , quindi  $\hat{d}(j) \leq \min\{d(i) + \bar{c}_{ij}^\pi, d(t)\} \leq \hat{d}(i) + \bar{c}_{ij}^\pi$ , poiché  $\bar{c}_{ij}^\pi \geq 0$ . Se  $d(i) = +\infty$ , allora  $\hat{d}(i) = d(t) \geq \hat{d}(j)$ . Dentro in entrambi i casi il nuovo costo ridotto è non negativo.
- (b) I sottopercorsi di  $P$  sono i più brevi (Lemma «ottimalità dei sottopercorsi» del Capitolo 3), quindi  $d(j) = d(i) + \bar{c}_{ij}^\pi$  on every arc of  $P$ , and  $d(i) \leq d(t)$  along  $P$  poiché le lunghezze non sono negative. Quindi  $\hat{d} = d$  su  $P$  e il nuovo costo ridotto è 0.
- (c) Aumentando lungo  $P$  cambia  $G(\mathbf{x})$  solo sugli archi di  $P$ : un arco  $(i, j)$  di  $P$  potrebbe scomparire, e potrebbe apparire l'arco inverso  $(j, i)$ . L'inverso di un arco residuo ha il costo opposto, quindi per (b) costo ridotto 0; gli altri archi mantengono i costi ridotti, non negativi per (a).  $\square$

- Per ogni percorso  $P$  da  $s$  a  $t$  il telescopio dei potenziali:  $\sum_{(i,j) \in P} \bar{c}_{ij}^\pi = c(P) - \pi_s + \pi_t$ .  
A shortest path for the reduced costs is a minimum cost path of  $G(\mathbf{x})$ : il flusso viaggia lungo la direzione più economica percorsa, da cui il nome dell'algoritmo.

### Algoritmo

**Algorithm:** Algoritmo del percorso più breve successivo

**Input:** una rete bilanciata con  $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ , intero  $b_i$  e  $u_{ij}$ , costa  $c_{ij} \geq 0$

**Output:** un flusso ottimale  $\mathbf{x}$  con il suo certificato  $\pi$ , ovvero «irammissibile»

- 1 **Passaggio 0 (inizializzazione).** Imposta  $\mathbf{x} := \mathbf{0}$ ,  $\pi := \mathbf{0}$  e  $\mathbf{e} := \mathbf{b}$ .
- 2 **Passaggio 1 (selezione).** Se  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , STOP:  $\mathbf{x}$  è ottimale, con  $\pi$ .
- 3 Altrimenti sia  $s$  il nodo di indice più piccolo con  $e_s > 0$ .
- 4 **Passaggio 2 (percorsi più brevi).** Esegui Dijkstra da  $s$  su  $G(\mathbf{x})$ , lunghezze  $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j$ .
- 5 Se nessun nodo con  $e_t < 0$  è raggiungibile, STOP: impossibile.
- 6 Altrimenti  $t$  è il nodo raggiungibile con  $e_t < 0$  e il più piccolo  $d(t)$ , e  $P$  il suo percorso.
- 7 **Passaggio 3 (aumento).** Imposta  $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$  per ogni  $i \in N$ .
- 8 Potenzia  $\mathbf{x}$  insieme a  $P$  di  $\delta := \min\{e_s, -e_t, r(P)\}$  e aggiorna  $e_s, e_t$ .
- 9 Vai al passaggio 1.

- **Regole di questo capitolo.** L'algoritmo di Dijkstra rompe i pareggi in base all'indice più piccolo, come nel Capitolo 3; tra i nodi deficitari alla stessa distanza,  $t$  è quello di indice più piccolo.

**Teorema 6.17: correttezza dell'algoritmo del percorso più breve successivo**

Con l'input dell'algoritmo, all'inizio di ogni iterazione  $\mathbf{x}$  è uno pseudoflusso intero e  $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j \geq 0$  su ogni arco di  $G(\mathbf{x})$ . L'algoritmo si ferma al massimo dopo  $D = \sum_{i:b_i>0} b_i$  iterazioni. Se si ferma al passaggio 1,  $\mathbf{x}$  è un flusso ottimale; se si ferma al passaggio 2, la rete non è fattibile flusso.

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'invariante, poi il limite e i due arresti.

1. *Invariante.* All'inizio  $G(\mathbf{0})$  ha solo gli archi in avanti, con costi  $c_{ij} \geq 0$ , e  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ . Si applica l'algoritmo di Dijkstra, le lunghezze non sono negative e Lemma 6.16(c) mantiene i costi ridotti non negativi. L'importo  $\delta$  è positivo intero, poiché  $e_s, -e_t$  e le capacità residue sono numeri interi positivi (o  $+\infty$ ), quindi  $\mathbf{x}$  rimane intero.
2. *Bound.* Se  $e_s > 0$ , qualche nodo ha  $e_t < 0$ , poiché gli squilibri si sommano a zero. Ogni iterazione si abbassa  $\sum_{i:e_i>0} e_i$  da  $\delta \geq 1$  e nessuno squilibrio cambia segno, poiché  $\delta \leq e_s$  e  $\delta \leq -e_t$ . La somma inizia da  $D$ .
3. *Arresta al passaggio 1.*  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , quindi  $\mathbf{x}$  è un flusso ammissibile, ottimo per l'invariante e Teorema 6.9.
4. *Interrompi al passaggio 2.* Sia  $S$  l'insieme dei nodi raggiungibili da  $s$ . Nessun arco di  $G(\mathbf{x})$  lascia  $S$ , quindi  $x_{ij} = u_{ij}$  su  $\delta^+(S)$  e  $x_{ij} = 0$  su  $\delta^-(S)$ . Lo pseudoflusso soddisfa la conservazione con il bilancio  $b_i - e_i$ , quindi per il Lemma «flusso attraverso un taglio» del Capitolo 4

$$\sum_{i \in S} b_i = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) + \sum_{i \in S} e_i = u(\delta^+(S)) + \sum_{i \in S} e_i > u(\delta^+(S)),$$

perché  $e_s > 0$  e nessun nodo di  $S$  ha  $e_i < 0$ . La condizione di taglio del Capitolo 4 fallisce per  $S$ : non è possibile flusso.  $\square$

- **Tempo di esecuzione.** Ogni iterazione esegue l'algoritmo di Dijkstra nel tempo  $O(n^2)$ :  $O(Dn^2)$  in totale, a limite pseudo-polinomiale.
- **Costi negativi.** Se alcuni archi con capacità finita hanno  $c_{ij} < 0$ , iniziare da  $x_{ij} = u_{ij}$  su di essi e  $x_{ij} = 0$  altrove, con  $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{x}$ : tale arco fornisce solo il suo arco all'indietro, di costo  $-c_{ij} > 0$  e  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$  funzionano di nuovo.

## 6.7.1 Percorsi più brevi successivi sulla rete di riferimento

## Esempio 6.7: percorsi più brevi successivi

Partiamo da  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{e} = \mathbf{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$ . Nella prima tabella ciascuno riga è un'iterazione, con il nodo  $s$ , le distanze dell'algoritmo di Dijkstra e il nodo  $t$ ; la seconda tabella dà il percorso  $P$ , il suo costo ridotto  $d(t)$  e il suo costo  $c(P)$ , l'importo  $\delta$  e il costo del nuovo flusso.

| esso. | $s$ | $d(1)$ | $d(2)$ | $d(3)$ | $d(4)$ | $d(5)$ | $d(6)$ | $t$ |
|-------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 1     | 1   | 0      | 2      | 2      | 7      | 5      | 8      | 4   |
| 2     | 1   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 1      | 6   |
| 3     | 2   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 4      | 6   |
| 4     | 2   | 0      | 0      | 0      | 3      | 0      | 3      | 6   |

| esso. | $P$              | $d(t)$ | $c(P)$ | $\delta$ | costo |
|-------|------------------|--------|--------|----------|-------|
| 1     | 1, 2, 4          | 7      | 7      | 3        | 21    |
| 2     | 1, 3, 5, 6       | 1      | 8      | 2        | 37    |
| 3     | 2, 4, 6          | 4      | 10     | 1        | 47    |
| 4     | 2, 1, 3, 5, 4, 6 | 3      | 13     | 1        | 60    |

La terza tabella riporta, dopo ogni iterazione, i potenziali, gli squilibri e il flusso.

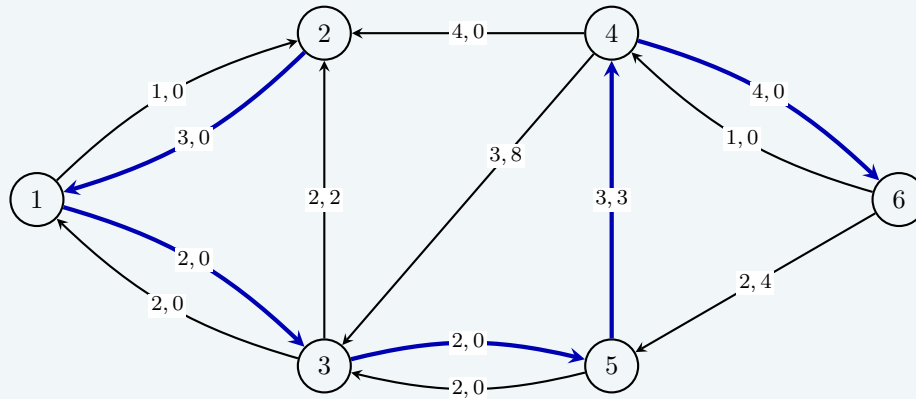
| esso. | $\boldsymbol{\pi}$        | $\mathbf{e}$         | $\mathbf{x}$                |
|-------|---------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 0     | (0, 0, 0, 0, 0, 0)        | (5, 2, 0, -3, 0, -4) | (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)    |
| 1     | (0, -2, -2, -7, -5, -7)   | (2, 2, 0, 0, 0, -4)  | (3, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0)    |
| 2     | (0, -2, -2, -7, -5, -8)   | (0, 2, 0, 0, 0, -2)  | (3, 2, 3, 0, 2, 0, 0, 2)    |
| 3     | (0, -2, -2, -7, -5, -12)  | (0, 1, 0, 0, 0, -1)  | (3, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 0, 2) |
| 4     | (0, -2, -2, -10, -5, -15) | (0, 0, 0, 0, 0, 0)   | (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2) |

I costi ridotti  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  degli archi di  $A$ , prima di ogni iterazione, sono (l'arco in avanti ha  $\bar{c}_{ij}$  se  $x_{ij} < u_{ij}$ , l'arco all'indietro  $-\bar{c}_{ij}$  se  $x_{ij} > 0$ ):

| esso. | (1, 2) | (1, 3) | (2, 4) | (3, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (4, 6) | (5, 4) | (5, 6) |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1     | 2      | 2      | 5      | 2      | 3      | 3      | 5      | 5      | 3      |
| 2     | 0      | 0      | 0      | 2      | 0      | 8      | 5      | 3      | 1      |
| 3     | 0      | 0      | 0      | 2      | 0      | 8      | 4      | 3      | 0      |
| 4     | 0      | 0      | 0      | 2      | 0      | 8      | 0      | 3      | -4     |

- *Iterazione 1.* I costi ridotti sono i costi. I nodi deficit 4 e 6 sono alla distanza 7 e 8:  $t = 4$  e  $\delta = \min\{5, 3, 4, 4\} = 3$ . Il nodo 6 è più lontano di  $t$  e il suo potenziale diminuisce di 7, non di 8.
- *Iterazione 2.* Gli archi (1, 2), (2, 4) del primo percorso ora hanno un costo ridotto 0, così come i loro archi all'indietro. Il percorso 1, 3, 5, 6 ha costo ridotto 1 e costo 8;  $\delta = \min\{2, 4, 4, 2\} = 2$  è impostato da  $e_1$  e da  $u_{56}$ .

- *Iterazione 3.*  $s = 2$  e  $d(1) = 0$  attraverso l'arco all'indietro  $(2, 1)$ . Il percorso  $2, 4, 6$  utilizza l'ultima unità di  $(2, 4)$ .
- *Iterazione 4.* Il percorso  $2, 1, 3, 5, 4, 6$  utilizza l'arco all'indietro  $(2, 1)$ : un'unità che è andata da 1 a 2 viene reindirizzato da 1 a 3, 5 e 4. La figura mostra  $G(\mathbf{x})$  con  $r_{ij}$  e il costo ridotto ogni arco e il percorso in blu.



Dopo l'iterazione 4 gli squilibri sono pari a zero e  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ , di costo 60. Spostato da 15, il i potenziali diventano  $(15, 13, 13, 5, 10, 0)$ : i potenziali del Capitolo 4.

- Qui i costi 7, 8, 10, 13 dei percorsi crescono da un'iterazione all'altra: le unità successive percorrono più percorsi costosi e il costo totale è  $3 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 10 + 13 = 60$ .
- Qui sono sufficienti quattro iterazioni, mentre il limite di [Teorema 6.17](#) è  $D = 7$ .

### Dijkstra ha bisogno di costi ridotti

Nell'iterazione 4 gli archi  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(6, 4)$ ,  $(6, 5)$  di  $G(\mathbf{x})$  sono archi all'indietro con costi negativi  $c_{ij}^x$  e l'algoritmo di Dijkstra con lunghezze negative può fallire ([Capitolo 3](#)). I potenziali rendono tutte le lunghezze non negative senza modificare i percorsi più brevi.

L'algoritmo del percorso minimo successivo invia il flusso da un nodo in eccesso a un nodo in deficit lungo un percorso minimo di  $G(\mathbf{x})$ , trovato dall'algoritmo di Dijkstra sui costi ridotti. L'aggiornamento  $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$  continua i costi ridotti non sono negativi, quindi il flusso finale è ottimale e i potenziali lo certificano.

## 6.8 Errori tipici

### Attenzione

- **Dando all'arco all'indietro il costo  $+c_{ij}$ .** Un arco all'indietro diminuisce  $x_{ij}$ , quindi risparmia  $c_{ij}$  per unità: il suo costo è  $-c_{ij}$  e la sua capacità residua è  $x_{ij} - l_{ij}$ .
- **Aumentando di più di  $r(W)$ .** Alcuni archi del ciclo lascerebbero i suoi limiti;  $\theta = r(W)$  è il passo più grande.
- **Esecuzione di Bellman–Ford da un singolo nodo.** Un ciclo negativo che non è raggiungibile da quel nodo è mancato; le etichette iniziano da 0 su ogni nodo.
- **Fare la passeggiata per il ciclo.** La passeggiata con archi  $n$  letta dalla tabella contiene un ciclo negativo, ma non è un ciclo in sé: il ciclo è il pezzo tra due occorrenze dello stesso nodo.
- **Eseguendo l'algoritmo di Dijkstra sui costi  $c_{ij}^x$ .** Gli archi all'indietro possono avere costi negativi; i pesi degli archi sono i costi ridotti  $c_{ij}^x - \pi_i + \pi_j$ .
- **Aggiornamento dei potenziali con segno sbagliato.** Con  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  l'aggiornamento è  $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$ ; i nodi più lontani da  $t$  diminuiscono solo di  $d(t)$ .
- **Prendendo come ottimale il flusso massimo dello Step 0.** La rete ausiliaria non ha costi: il suo flusso massimo è fattibile e ottimale solo per caso.

## 6.9 In sintesi

### In sintesi

- La rete residua  $G(\mathbf{x})$  ha un arco in avanti  $(i, j)$  con  $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$  e costo  $c_{ij}$ , e un arco rovescio  $(j, i)$  con  $r_{ji} = x_{ij} - l_{ij}$  e costo  $-c_{ij}$ ; l'aumento lungo un ciclo  $W$  modifica il costo di  $\theta c(W)$ .
- Una circolazione si scompone in cicli; la differenza tra due flussi realizzabili è una circolazione su  $G(\mathbf{x})$ .
- Un flusso ammissibile è ottimo se e solo se  $G(\mathbf{x})$  non ha ciclo negativo, se e solo se alcuni potenziali danno costi ridotti non negativi su  $G(\mathbf{x})$ ; sugli archi di  $A$ :  $\bar{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = l_{ij}$ ,  $\bar{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$ .
- Un flusso massimo da una super sorgente a un super sink trova un flusso ammissibile o dimostra che non ce n'è.
- Annullamento ciclo: Bellman–Ford dalle etichette 0 trova un ciclo negativo, l'aumento di  $r(W)$  lo annulla; al massimo Iterazioni  $\mathbf{c}'\mathbf{x}^0 - z(\text{MCF})$  con dati interi.
- Percorsi minimi successivi: Dijkstra sui costi ridotti da un nodo in eccesso al nodo in deficit più vicino,  $\pi_i := \pi_i - \min\{d(i), d(t)\}$ ; al massimo le iterazioni  $D$ .

### La rete di riferimento in sintesi.

|                                                                                                               |                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| flusso più costoso                                                                                            | $\mathbf{x}^0 = (1, 4, 4, 1, 4, 1, 3, 3, 1)$ , costo 80                   |
| annullamento ciclo da $\mathbf{x}^0$ e cicli 4, 5, 3, 4; 6, 4, 5, 6; 3, 1, 2, 3: costa 80, 69, 62, 60         |                                                                           |
| percorsi e percorsi più brevi successivi 1, 2, 4; 1, 3, 5, 6; 2, 4, 6; 2, 1, 3, 5, 4, 6: costa 21, 37, 47, 60 |                                                                           |
| prima portata ammissibile e portata massima di valore 7; su $A$ è $\tilde{\mathbf{x}}$                        |                                                                           |
| flusso ottimale                                                                                               | $\tilde{\mathbf{x}} = (2, 3, 4, 0, 3, 0, 2, 1, 2)$ , $z(\text{MCF}) = 60$ |
| potenziali ( $\pi_6 = 0$ )                                                                                    | $\boldsymbol{\pi} = (15, 13, 13, 5, 10, 0)$                               |

# Trasporto e assegnamento

## Prerequisiti

- Da questo modulo, [Capitolo 1 «Grafì»](#): alberi, foglie, cicli fondamentali e rango della matrice di incidenza nodo-arco.
- Da questo modulo, [Capitolo 3 «Percorsi più brevi»](#): distanze e [Capitolo 4 «Modelli di flusso di rete»](#): il modello di flusso a costo minimo, il nodo dummy, vertici interi, potenziali e costi ridotti.
- Dal modulo Programmazione lineare, [Capitolo 9 «Teoria della dualità»](#): il duale di un modello LP e i teoremi della dualità debole e forte.

## Obiettivi

Alla fine di questo capitolo sarai in grado di:

- formulare il problema di trasporto e rappresentarlo in tabella, bilanciare un'istanza aggiungendo un'origine o una destinazione fittizia e ridurre un problema di trasbordo senza capacità a un problema di trasporto;
- interpretare le basi del modello di trasporto come alberi ricoprenti di una rete bipartita, calcolare una soluzione di base e riconoscerne la degenerazione;
- costruire una soluzione ammissibile di base iniziale con la regola dell'angolo nord-ovest o quella del costo minimo;
- applicare il metodo dei potenziali, calcolare i costi ridotti e i cicli di pivot e certificare l'ottimalità con il modello duale;
- formulare il problema di assegnamento, dimostrare il teorema di König–Egerváry ed eseguire l'algoritmo ungherese, interpretando i potenziali come una soluzione duale ottimale.

## 7.1 Il problema dei trasporti

### Definizione 7.1: problema di trasporto

Esistono  $m$  **origini** e  $n$  **destinazioni**. Numeriamo le origini  $1, 2, \dots, m$  e le destinazioni  $m+1, m+2, \dots, m+n$  e scriviamo

$$P = \{1, 2, \dots, m\}, \quad D = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}.$$

- Ogni origine  $i \in P$  ha un **supply**  $a_i > 0$ , ogni destinazione  $j \in D$  ha un **demand**  $d_j > 0$  e  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  è il costo di spedizione di un'unità da  $i$  a  $j$ .
- L'istanza è **bilanciata** se  $\sum_{i \in P} a_i = \sum_{j \in D} d_j$ .

Il **problema di trasporto** richiede gli importi  $x_{ij} \geq 0$  da spedire da ogni origine  $i$  a ogni destinazione  $j$ , in modo che ogni origine spedisca l'intera fornitura e ogni destinazione riceva almeno la sua domanda costo totale.

- In questo capitolo  $m$  e  $n$  indicano rispettivamente il numero di origini e di destinazioni. La rete associata ha  $m+n$  nodi e un arco  $(i, j)$  per ogni coppia  $i \in P, j \in D$ : è il grafo bipartito completo tra  $P$  e  $D$ , con  $mn$  archi.
- Numeriamo prima le origini e poi le destinazioni, così ogni nodo ha un indice univoco.
- Per ogni coppia  $i \in P, j \in D$  introduciamo la variabile continua  $x_{ij}$ , che rappresenta la quantità spedita da  $i$  a  $j$ .

Utilizzando queste variabili, un modello LP per il problema dei trasporti è il seguente:

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} \quad (7.1a)$$

$$\text{subject to } \sum_{j \in D} x_{ij} = a_i, \quad \forall i \in P, \quad (7.1b)$$

$$\sum_{i \in P} x_{ij} = d_j, \quad \forall j \in D, \quad (7.1c)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in P, \forall j \in D. \quad (7.1d)$$

Questo modello LP è denominato modello TP.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello TP:
  - la funzione obiettivo (7.1a) riduce al minimo il costo totale di spedizione;
  - Vincoli (7.1b), uno per ogni origine, spedisce l'intera fornitura dell'origine;
  - Vincoli (7.1c), uno per ogni destinazione, soddisfa l'intera domanda della destinazione;
  - infine, i vincoli (7.1d) definiscono le variabili del modello LP.

- Moltiplicando i vincoli (7.1c) per  $-1$  si ottengono i vincoli di conservazione del flusso dell'intero rete bipartita, con saldi  $b_i = a_i$  per  $i \in P$ ,  $b_j = -d_j$  per  $j \in D$  e nessuna capacità. Il TP il modello è il modello MCF della riga «Trasporti» della tabella «Casi speciali» di [Capitolo 4 «Modelli di flusso di rete»](#).

### Proposizione 7.2: fattibilità e integralità

Un esempio del problema dei trasporti ha una soluzione ammissibile se e solo se è bilanciata. Un'istanza equilibrata ha una soluzione ottima e se le forniture  $a_i$  e le richieste  $d_j$  sono intere, ha un ottimo intero soluzione.

*Dimostrazione.* Lascia che  $S = \sum_{i \in P} a_i$ .

1. *L'equilibrio è necessario.* Se  $\mathbf{x}$  è fattibile, sommando i vincoli (7.1b) e il vincoli (7.1c) fornisce la stessa somma di tutte le variabili:  $\sum_{i \in P} a_i = \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} x_{ij} = \sum_{j \in D} d_j$ .
2. *Il saldo è sufficiente.* Se  $S = \sum_{j \in D} d_j$ , gli importi  $x_{ij} = a_i d_j / S \geq 0$  sono fattibili: la riga  $i$  si somma a  $a_i \sum_{j \in D} d_j / S = a_i$  e la colonna  $j$  a  $d_j \sum_{i \in P} a_i / S = d_j$ .
3. *Soluzione ottimale.* Ogni soluzione ammissibile ha  $0 \leq x_{ij} \leq a_i$ , quindi la regione ammissibile è poliedro limitato non vuoto e una funzione lineare raggiunge il suo minimo su di esso in un vertice ([Capitolo 15 «La geometria di Programmazione lineare»](#) del modulo Programmazione lineare).
4. *Integralità.* Con bilanci interi e senza capacità, ogni vertice è intero per il Teorema «intero vertici» di [Capitolo 4](#). □

#### 7.1.1 Il quadro dei trasporti

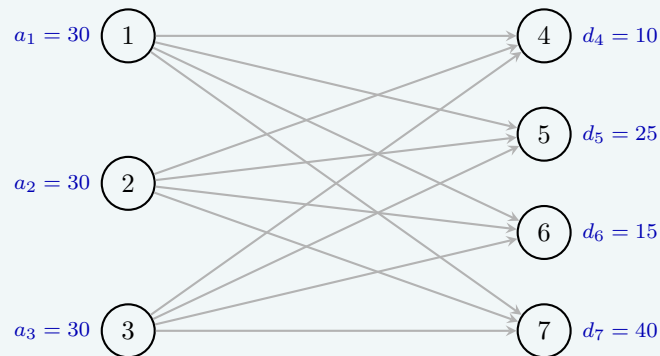
- **tableau di trasporto** è una tabella  $m \times n$  con una riga per ogni origine e una colonna per ogni destinazione. La cella  $(i, j)$  contiene il costo  $c_{ij}$ , o successivamente l'importo  $x_{ij}$ ; l'ultima colonna contiene il fornisce  $a_i$  e l'ultima riga richiede  $d_j$ .
- Un vettore  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  scritto nel tableau è fattibile se e solo se ogni riga si somma alla sua offerta e ogni colonna alla sua richiesta.

#### Esempio 7.1: tre magazzini e quattro negozi

Un'azienda ha tre magazzini, le origini 1, 2, 3, con unità 30 ciascuno, e quattro negozi, le destinazioni 4, 5, 6, 7, con richieste 10, 25, 15 e 40. I costi unitari sono nel tableau:

| $c_{ij}$ | 4  | 5  | 6  | 7  | $a_i$ |
|----------|----|----|----|----|-------|
| 1        | 1  | 9  | 2  | 3  | 30    |
| 2        | 3  | 4  | 2  | 2  | 30    |
| 3        | 9  | 1  | 4  | 6  | 30    |
| $d_j$    | 10 | 25 | 15 | 40 | 90    |

L'istanza è bilanciata: l'offerta totale e la domanda totale sono entrambe 90. Nella completa rete bipartita ogni origine è unita ad ogni destinazione, con archi  $3 \cdot 4 = 12$ ; accanto a ciascun nodo, la sua offerta o la sua domanda.



Gli importi proporzionali  $x_{ij} = a_i d_j / 90$  di [Proposizione 7.2](#) sono fattibili, per esempio  $x_{14} = 30 \cdot 10 / 90 = \frac{10}{3}$ , ma frazionario; i vertici della regione ammissibile sono interi.

### 7.1.2 Istanze non bilanciate

- Se l'offerta totale supera la domanda totale e ogni origine spedisce *al massimo* la propria offerta, aggiungiamo un **destinazione fittizia** con domanda  $\sum_{i \in P} a_i - \sum_{j \in D} d_j$  e costo 0 da ogni origine. Il importo spedito ad esso è la fornitura inutilizzata dell'origine: questo è il nodo fittizio di [Capitolo 4](#), come colonna del quadro.
- Se la domanda totale supera l'offerta totale e una destinazione potrebbe ricevere meno della sua domanda, aggiungiamo un **origine fittizia** con fornitura  $\sum_{j \in D} d_j - \sum_{i \in P} a_i$ . Il costo della sua cella  $(\cdot, j)$  è il penalità per ogni unità di domanda non soddisfatta di  $j$  o 0 se non ce n'è.

#### Esempio 7.2: una destinazione fittizia

In [Esempio 7.1](#) la fornitura del magazzino 1 cresce fino a  $a_1 = 40$ : la fornitura totale è 100 e la domanda totale 90.

- Aggiungiamo la destinazione fittizia 8 con richiesta  $d_8 = 100 - 90 = 10$  e le celle  $(1, 8)$ ,  $(2, 8)$ ,  $(3, 8)$  con costo 0: il tableau ha una quinta colonna.
- La soluzione ottimale, calcolata con Gurobi, è unica:

$$\tilde{x}_{14} = 10, \tilde{x}_{16} = 15, \tilde{x}_{17} = 10, \tilde{x}_{18} = 5, \tilde{x}_{27} = 30, \tilde{x}_{35} = 25, \tilde{x}_{38} = 5,$$

con costo 155. I magazzini 1 e 3 conservano ciascuno le unità 5 e il magazzino 2 spedisce tutta la sua fornitura.

### 7.1.3 Trasbordo come problema di trasporto

- In un'istanza di traslato le unità possono passare attraverso nodi intermedi. Quando gli archi non hanno capacità, ogni unità può percorrere il percorso più breve e contano solo le distanze tra i nodi di domanda e di offerta.

#### Proposizione 7.3: traslato come trasporto

Sia  $G = (N, A)$  una rete con saldi  $b_i$ , zero limiti inferiori, nessuna capacità e costi  $c_{ij} \geq 0$ . Lasciamo  $P = \{i \in N : b_i > 0\}$  e  $D = \{j \in N : b_j < 0\}$  e supponiamo che ogni  $j \in D$  sia raggiungibile da ogni  $i \in P$ . Indichiamo con  $\tilde{d}(i, j)$  la lunghezza di un cammino minimo da  $i$  a  $j$ , usando  $c_{ij}$  come lunghezza degli archi. Il costo minimo di un flusso ammissibile coincide con il valore ottimo del problema di trasporto con origini  $P$ , offerte  $a_i = b_i$ , destinazioni  $D$ , domande  $d_j = -b_j$  e costi unitari  $\tilde{d}(i, j)$ .

*Dimostrazione.* Confrontiamo i due valori ottimali.

1. *Dalle spedizioni ai flussi.* Sia  $\mathbf{y}$  un flusso ammissibile per il problema di trasporto. Per ogni coppia  $(i, j)$ , inviamo  $y_{ij}$  unità lungo un cammino minimo da  $i$  a  $j$ . Otteniamo così un flusso  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ : ogni nodo  $i \in P$  invia  $\sum_{j \in D} y_{ij} = b_i$  unità, ogni nodo  $j \in D$  riceve  $-b_j$  unità e i nodi intermedi trasmettono il flusso che ricevono. Il costo è  $\sum_{i,j} \tilde{d}(i, j) y_{ij}$ ; dunque il costo minimo di flusso non supera il valore ottimo del problema di trasporto.
2. *Dai flussi alle spedizioni.* Mostriamo per induzione sul numero di archi con  $x_{ij} > 0$  più il numero di nodi con  $b_i \neq 0$  che ogni flusso fattibile  $\mathbf{x}$  costa almeno  $\sum_{i,j} \tilde{d}(i, j) y_{ij}$  per alcuni ammissibile  $\mathbf{y}$ . Se  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , prendi  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .
3. Altrimenti inizia da un nodo  $i_0$  con  $b_{i_0} > 0$ : il suo deflusso è positivo, quindi ha un arco uscente con positivo flusso. Un nodo  $v$  con  $b_v \geq 0$  raggiunto lungo tale arco ha un afflusso positivo, quindi un deflusso positivo. Segui questi archi fino a quando un nodo si ripete o viene raggiunto un nodo  $j_0$  con  $b_{j_0} < 0$ .
4. Se un nodo si ripete, gli archi formano un ciclo diretto  $C$  con flussi positivi. Sottraendo il loro minimo  $\varepsilon$  insieme a  $C$  mantiene fattibile il flusso, non aumenta il costo, poiché  $c \geq 0$ , e svuota un arco: il si applica l'induzione.
5. Altrimenti abbiamo un percorso  $Q$  da  $i_0$  a  $j_0$ . Sia  $\varepsilon > 0$  il minimo di  $b_{i_0}$ ,  $-b_{j_0}$  e i flussi su  $Q$ . Sottraendo  $\varepsilon$  lungo  $Q$  e da  $b_{i_0}$  e  $-b_{j_0}$  si ottiene un flusso ammissibile  $\mathbf{x}'$  per i nuovi saldi, con meno archi positivi o saldi diversi da zero e

$$c'x = c'x' + \varepsilon c(Q) \geq c'x' + \varepsilon \tilde{d}(i_0, j_0).$$

Per induzione  $c'x' \geq \sum \tilde{d}(i, j) y'_{ij}$ ; aggiungendo  $\varepsilon$  a  $y'_{i_0 j_0}$  si ottiene il richiesto  $\mathbf{y}$ .  $\square$

**Esempio 7.3: l'istanza di traslato del capitolo 4 senza capacità**

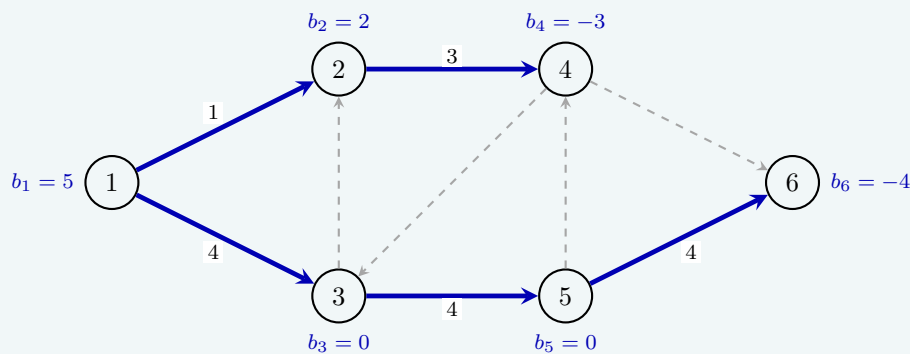
Prendiamo la rete di riferimento di [Capitolo 4](#), con lo stesso bilancia  $\mathbf{b} = (5, 2, 0, -3, 0, -4)$  e costi e rimuove le capacità. Le origini sono i nodi di alimentazione 1, 2 e le destinazioni i nodi di domanda 4, 6; manteniamo i nomi della rete.

- Le distanze sono  $\tilde{d}(1, 4) = 7$  lungo 1, 2, 4,  $\tilde{d}(1, 6) = 8$  lungo 1, 3, 5, 6,  $\tilde{d}(2, 4) = 5$  lungo 2, 4 e  $\tilde{d}(2, 6) = 10$  lungo 2, 4, 6.
- L'istanza di trasporto  $2 \times 2$  ha  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 2$ ,  $d_4 = 3$ ,  $d_6 = 4$ . Con  $y_{24} = t \in [0, 2]$  il gli altri importi sono  $y_{14} = 3 - t$ ,  $y_{16} = 2 + t$ ,  $y_{26} = 2 - t$  e il costo è

$$7(3 - t) + 8(2 + t) + 5t + 10(2 - t) = 57 - 4t,$$

minimo per  $t = 2$ :  $y_{14} = 1$ ,  $y_{16} = 4$ ,  $y_{24} = 2$ ,  $y_{26} = 0$ , con costo 49.

- Lungo i percorsi più brevi si ottiene il flusso  $x_{12} = 1$ ,  $x_{13} = 4$ ,  $x_{24} = 3$ ,  $x_{35} = 4$ ,  $x_{56} = 4$  (blu), del costo 49, l'ottimo calcolato da Gurobi. Con i limiti di capacità del Capitolo 4 questo flusso non è ammissibile, perché l'arco (5, 6) ha capacità 2; l'ottimo con capacità è 60.



Il problema del trasporto spedisce le forniture dalle origini  $m$  alle richieste delle destinazioni  $n$  a un costo minimo. Lo è un modello di flusso di costo minimo sull'intera rete bipartita; è fattibile esattamente quando è equilibrato, e a l'origine o la destinazione fittizia lo bilancia.

## 7.2 Soluzioni di base

- La colonna di  $x_{ij}$  nei vincoli del modello TP ha due voci uguali a 1, nella riga dell'offerta di  $i$  e nella riga della domanda di  $j$ . Cambiando il segno delle righe della domanda si ottiene la matrice di incidenza  $B$  della rete bipartita completa e non modifica né il rango né le dipendenze lineari delle colonne.

### Proposizione 7.4: rango del modello di trasporto

I vincoli  $m + n$  del modello TP hanno il rango  $m + n - 1$ . In un'istanza bilanciata ogni vincolo è implicito nel altri.

*Dimostrazione.* Ogni origine è unita ad ogni destinazione, quindi è connessa l'intera rete bipartita, e la sua incidenza matrice ha rango  $m + n - 1$  per il Teorema «rango della matrice di incidenza» di [Capitolo 1](#). La somma delle righe dell'offerta meno la somma delle righe della domanda è zero, poiché entrambe le somme contengono ogni variabile una volta e la stessa combinazione dei lati destri è  $\sum_{i \in P} a_i - \sum_{j \in D} d_j = 0$ : qualsiasi vincolo è a combinazione degli altri.  $\square$

### Definizione 7.5: base e soluzione di base

Una **basis** del modello TP è un insieme  $T$  di celle  $m + n - 1$  i cui archi formano uno albero ricoprente dell'intero rete bipartita; le sue celle sono le **celle base**. Una **soluzione base** di  $T$  è una soluzione di vincoli (7.1b) e (7.1c) con  $x_{ij} = 0$  per ogni cella esterna a  $T$ . È un **base soluzione ammissibile** se  $x \geq 0$ , ed è **degenerata** se qualche cella base ha  $x_{ij} = 0$ .

### Teorema 7.6: le basi sono alberi ricoperti

- Un insieme di celle  $m + n - 1$  ha colonne linearmente indipendenti se e solo se i suoi archi formano uno albero ricoprente.
- In un'istanza bilanciata, ogni base  $T$  ha esattamente una soluzione di base. Si trova fissando, ancora e ancora, la cella di una foglia dell'albero, ed è intera quando le forniture e le richieste sono intere.

*Dimostrazione.* La parte (a) è il Corollario «basi della matrice di incidenza» di [Capitolo 1](#), poiché il segno delle righe della domanda non modifica le dipendenze delle colonne. Per la parte (b):

1. *Unicità.* Due soluzioni base di  $T$  differiscono per un vettore  $y$  che è zero all'esterno di  $T$  e soddisfa i vincoli con zero lati destri; le colonne di  $T$  sono indipendenti da (a), quindi  $y = 0$ .
2. *Costruzione.* L'albero ha una foglia  $v$  (Lemma «foglie» di [Capitolo 1](#)), con uno solo cella  $e$  di  $T$ . Il vincolo di  $v$  non contiene altre celle di base, quindi  $x_e$  equivale all'offerta o alla domanda di  $v$ .

3. Rimuoviamo  $v$  e  $e$  e sottraiamo  $x_e$  dall'offerta o dalla domanda dell'altro estremo di  $e$ . Il restante le celle formano un albero di copertura dei nodi rimanenti e le rimanenti forniture e domande hanno ancora somme uguali.
4. Quando viene lasciata una singola cella, entrambi i suoi punti finali sono foglie e le somme uguali danno lo stesso valore per entrambi vincoli. Ogni valore è ottenuto da somme e differenze dei dati, quindi è intero per dati interi.  $\square$

### Proposizione 7.7: i vertici sono basilari

Ogni vertice  $\bar{x}$  della regione ammissibile del modello TP è una soluzione ammissibile di base: le sue celle con  $\bar{x}_{ij} > 0$  formano una foresta, contenuta in una base  $T$ , e  $\bar{x}$  è la soluzione base di  $T$ .

*Dimostrazione.* Lascia che  $F$  siano le celle con  $\bar{x}_{ij} > 0$ .

1. Le colonne di  $F$  sono linearmente indipendenti, per il primo passo della dimostrazione del Teorema «vertici interi» di [Capitolo 4](#): qui rigorosamente le celle tra i loro limiti ci sono quelli di  $F$ . Un ciclo ha colonne dipendenti (Lemma «colonne di un ciclo» del Capitolo 1), quindi  $F$  è una foresta.
2. La rete è connessa: mentre la foresta ha due o più componenti, qualche arco ne unisce uno all'altro uno, e sommandolo non si crea alcun ciclo (Lemma «aggiungere un lato» del Capitolo 1). Terminiamo con un albero ricoprente  $T \supseteq F$ .
3.  $\bar{x}$  è zero all'esterno di  $F \subseteq T$ , quindi è la soluzione base di  $T$ , unica per [Teorema 7.6](#).  $\square$

- Un ciclo della rete bipartita alterna origini e destinazioni. Nel tableau è un percorso chiuso delle celle dell'insieme, spostandosi alternativamente lungo una riga e lungo una colonna: un insieme di celle è una base se ha  $m + n - 1$  celle e nessun percorso chiuso.
- Una soluzione ammissibile di base ha al massimo  $m + n - 1$  quantità positive; ne ha di meno quando è degenere.

### Esempio 7.4: basi dell'istanza di trasporto

In [Esempio 7.1](#) una base ha celle  $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ .

- Le celle  $(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7)$  non sono una base:  $(1, 4), (2, 4), (2, 5), (1, 5)$  costituiscono il ciclo  $1, 4, 2, 5, 1$ , anzi  $A_{14} - A_{24} + A_{25} - A_{15} = 0$  per la loro colonne  $A_{ij}$ .
- Le celle  $(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 7), (3, 7)$  formano un albero ricoprente. Lascia  $2, 3, 4, 5, 6$  fisso  $x_{27} = 30, x_{37} = 30, x_{14} = 10, x_{15} = 25, x_{16} = 15$ ; quindi viene fornita la riga di origine 1

$$x_{17} = 30 - 10 - 25 - 15 = -20.$$

La soluzione di base esiste, ma non è fattibile.

I vincoli del modello TP hanno rango  $m + n - 1$ . Una base è un albero di copertura della rete bipartita, con celle  $m + n - 1$ ; la sua soluzione di base si trova foglia per foglia, è intera per dati interi e ogni vertice è una base soluzione fattibile.

### 7.3 Soluzioni iniziali di base fattibili

- Una soluzione fattibile di base viene creata riempiendo il tableau una cella alla volta. Una riga o una colonna lo è **attivo** finché non viene cancellato; l'offerta residua  $\bar{a}_i$  e la domanda residua  $\bar{d}_j$  sono ciò che è rimasto da spedire e da ricevere.
- Le due regole seguenti differiscono solo per la scelta della cella successiva.

#### Algoritmo

**Algorithm:** Soluzione fattibile di base iniziale

**Input:** un'istanza bilanciata con forniture  $a_i$ , richieste  $d_j$  e costi  $c_{ij}$

**Output:** una base  $T$  e la sua soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$

- 1 **Passaggio 0 (inizializzazione).** Tutte le righe e le colonne sono attive;  $\bar{a}_i := a_i$ ,  $\bar{d}_j := d_j$ ,  $T := \emptyset$ .
- 2 **Passaggio 1 (scelta della cella).** Scegli una cella  $(i, j)$  con riga e colonna attive:
  - 3 *regola dell'angolo nord-ovest:* la cella con il più piccolo  $i$  e il più piccolo  $j$ ;
  - 4 *regola del costo minimo:* la cella con il più piccolo  $c_{ij}$  (il più piccolo  $i$ , poi  $j$ , in parità).
- 5 **Passaggio 2 (importo).** Imposta  $\bar{x}_{ij} := \min\{\bar{a}_i, \bar{d}_j\}$ , aggiungi  $(i, j)$  a  $T$  e sottrai  $\bar{x}_{ij}$  da  $\bar{a}_i$  e da  $\bar{d}_j$ .
- 6 **Passaggio 3 (cancellazione).** Se  $\bar{a}_i = 0$  e un'altra riga sono attivi, cancella la riga  $i$ ; altrimenti cancella la colonna  $j$ .
- 7 Se nessuna colonna è attiva, **STOP**; altrimenti vai al passo 1.

- Quando  $\bar{a}_i = \bar{d}_j = 0$  contemporaneamente viene barrata solo la riga: la colonna rimane attiva con residuo richiesto 0 e una cella successiva di quella colonna ottiene l'importo 0. Questa cella base con valore 0 mantiene  $T$  un intervallo albero e la soluzione è degenera.

#### Teorema 7.8: la soluzione iniziale è semplice

Con entrambe le regole, l'algoritmo «Soluzione di base ammissibile iniziale» si ferma dopo i passaggi  $m + n - 1$  e  $T$  è una base con soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* 1. *Invariante.* Le forniture residue delle righe attive e le richieste residue delle colonne attive hanno somme uguali: vero all'inizio e il passaggio 2 sottrae lo stesso importo da entrambi i lati.

2. *Una linea incrociata ha un residuo 0.* Una riga incrociata ha  $\bar{a}_i = 0$ . Una colonna viene attraversata quando  $\bar{a}_i > 0$ , e poi  $\bar{x}_{ij} = \bar{d}_j$  e  $\bar{d}_j = 0$ , o quando la riga  $i$  è l'unica riga attiva con  $\bar{a}_i = 0$ , e poi ogni colonna attiva ha 0 residuo rispetto all'invariante.

3. *Conteggio*. Una riga viene barrata solo se un'altra riga è attiva, quindi una riga  $r$  non viene mai barrata e l'algoritmo si interrompe quando le colonne  $n$  vengono cancellate. All'arresto le righe attive hanno 0 residuo dall'invariante, e una riga che raggiunge 0 senza essere barrata è l'unica riga attiva. Quindi i passaggi sono  $(m-1) + n = m+n-1$ , una cella ciascuna, tutte diverse, poiché una cella viene scelta in due righe attive e una di queste viene poi barrata.
4. *Fattibilità*. Alla fine ogni riga e ogni colonna ha un residuo 0, quindi  $\bar{x} \geq 0$  soddisfa tutti i vincoli.
5. *Albero*. Sia  $L_t$  la linea attraversata nel passaggio  $t$ : nessuna cella successiva si trova in  $L_t$ . All'indietro rispetto all'ultimo passo, le celle dei passi  $t, t+1, \dots$  formano un albero: la cella del passo  $t$  unisce il nuovo nodo  $L_t$  alla sua altra linea, che è ancora attivo, quindi un nodo delle celle successive ovvero la riga  $r$ . In  $t=1$  l'albero si estende su tutti i nodi  $m+n$ .  $\square$

### 7.3.1 La regola dell'angolo nord-ovest

#### Esempio 7.5: la regola dell'angolo nord-ovest

Su [Esempio 7.1](#) la regola dell'angolo nord-ovest inizia dalla cella  $(1,4)$  e si sposta verso destra o verso il basso. Suo i passaggi sono:

| passo | cella | importo | barrato           |
|-------|-------|---------|-------------------|
| 1     | (1,4) | 10      | colonna 4         |
| 2     | (1,5) | 20      | riga 1            |
| 3     | (2,5) | 5       | colonna 5         |
| 4     | (2,6) | 15      | colonna 6         |
| 5     | (2,7) | 10      | riga 2            |
| 6     | (3,7) | 30      | riga 3, colonna 7 |

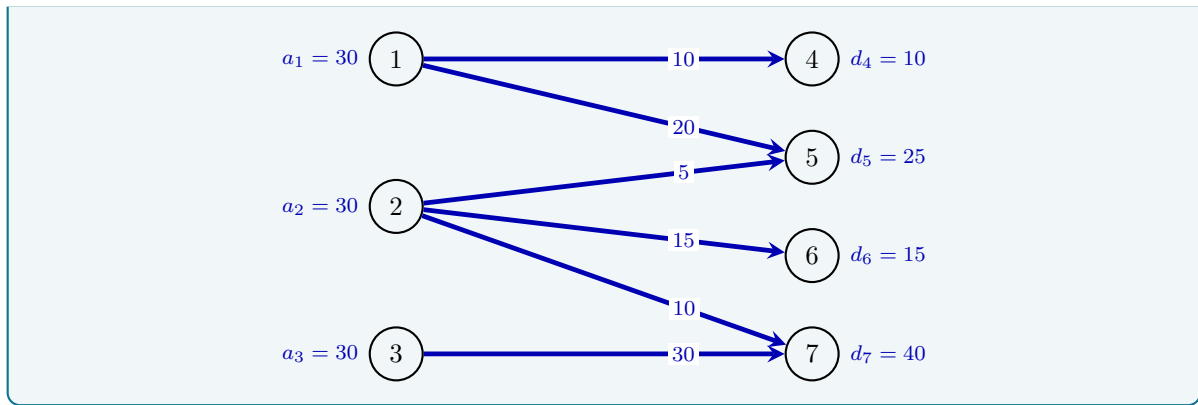
La soluzione di base ammissibile, con le celle base in blu, è

| $\bar{x}_{ij}$ | 4  | 5  | 6  | 7  | $a_i$ |
|----------------|----|----|----|----|-------|
| 1              | 10 | 20 |    |    | 30    |
| 2              |    | 5  | 15 | 10 | 30    |
| 3              |    |    |    | 30 | 30    |
| $d_j$          | 10 | 25 | 15 | 40 |       |

Il suo costo è

$$1 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 30 = 440.$$

Le sei celle base formano l'albero di copertura sottostante, con gli importi sugli archi.



- La regola dell'angolo nord-ovest ignora i costi: in questo caso spedisce unità 20 sulla cella (1,5), di costo Unità 9 e 30 su (3,7), al costo di 6.

### 7.3.2 La regola del costo minimo

### Esempio 7.6: la regola del costo minimo

Su [Esempio 7.1](#) la regola del costo minimo sceglie, ad ogni passo, la cella più economica tra le righe attive e colonne:

| passo | cella  | importo | barrato           |
|-------|--------|---------|-------------------|
| 1     | (1, 4) | 10      | colonna 4         |
| 2     | (3, 5) | 25      | colonna 5         |
| 3     | (1, 6) | 15      | colonna 6         |
| 4     | (2, 7) | 30      | riga 2            |
| 5     | (1, 7) | 5       | riga 1            |
| 6     | (3, 7) | 5       | riga 3, colonna 7 |

- Nel passaggio 1 le celle (1, 4) e (3, 5) costano entrambe 1 e (1, 4) inizia per prima, poiché la sua riga è più piccola. Al passo 3 le celle (1, 6), (2, 6), (2, 7) costano 2 e (1, 6) vanno per prime.
- Al passo 4 è attiva solo la colonna 7: prende tutta la fornitura della riga 2, quindi le unità 5 dalla riga 1 e 5 dalla riga 3.

La soluzione fattibile di base è

| $\bar{x}_{ij}$ | 4  | 5  | 6  | 7  | $a_i$ |
|----------------|----|----|----|----|-------|
| 1              | 10 |    | 15 | 5  | 30    |
| 2              |    |    |    | 30 | 30    |
| 3              |    | 25 |    | 5  | 30    |
| $d_j$          | 10 | 25 | 15 | 40 |       |

con costo

$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 25 + 6 \cdot 5 = 170.$$

Riempiendo una cella per passaggio e cancellando una riga per passaggio si ottiene una soluzione di base fattibile con le celle di base  $m + n - 1$ . La regola dell'angolo nord-ovest ignora i costi; la regola del costo minimo di solito inizia molto più vicino al valore ottimale (170 invece di 440 nell'esempio).

## 7.4 Il metodo potenziale

- Scriviamo i vincoli (7.1c) come  $-\sum_{i \in P} x_{ij} = -d_j$ , i vincoli di conservazione del destinazioni e utilizzare una variabile duale libera  $\pi_v$ , il potenziale del nodo  $v$ , per il vincolo di ogni nodo  $v \in P \cup D$ , entra [Capitolo 4](#).

Utilizzando una variabile duale libera  $\pi_v$  per il vincolo di ciascun nodo  $v \in P \cup D$ , il modello duale del modello TP è:

$$\max \sum_{i \in P} a_i \pi_i - \sum_{j \in D} d_j \pi_j \quad (7.2a)$$

$$\text{subject to } \pi_i - \pi_j \leq c_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \quad (7.2b)$$

$$\pi_v \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in P \cup D. \quad (7.2c)$$

Questo modello LP è denominato modello  $D(TP)$ .

- Con il costo ridotto di  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  di [Capitolo 4](#), il vincolo duale (7.2b) equivale a richiedere  $\bar{c}_{ij} \geq 0$ .
- Aggiungere la stessa costante a tutti i potenziali non modifica i costi ridotti né, se l'istanza è bilanciata, il valore della funzione obiettivo (7.2a). Normalizziamo con  $\pi_{m+n} = 0$  il potenziale dell'ultima destinazione.
- Per ogni  $x$  che soddisfa i vincoli (7.1b) e (7.1c), i potenziali si sommano su riga per riga e colonna per colonna:

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in D} (\pi_i - \pi_j) x_{ij} = \sum_{i \in P} a_i \pi_i - \sum_{j \in D} d_j \pi_j,$$

e da  $c_{ij} = \bar{c}_{ij} + \pi_i - \pi_j$ ,

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in P} a_i \pi_i - \sum_{j \in D} d_j \pi_j.$$

Questo è il Lemma «costo e costo ridotto» del Capitolo 4 per la rete bipartita.

### Definizione 7.9: potenziali di una base

I **potenziali di una base**  $T$  sono i valori  $\pi_v$ ,  $v \in P \cup D$ , tali che

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0, \quad \forall (i, j) \in T, \quad \pi_{m+n} = 0.$$

- I potenziali associati a una base esistono e sono univoci. A partire da  $\pi_{m+n} = 0$ , una cella base  $(i, j)$  con un estremo già noto permette di calcolare l'altro:  $\pi_i = \pi_j + c_{ij}$  o  $\pi_j = \pi_i - c_{ij}$ . Ogni nodo viene raggiunto lungo il suo percorso unico nell'albero da  $m+n$ , che ne forza il valore.

**Teorema 7.10: criterio di ottimalità**

Sia  $\bar{x}$  la soluzione di base ammissibile di una base  $T$ , con potenziali  $\pi$ . Se  $\bar{c}_{ij} \geq 0$  per ogni cella, allora  $\bar{x}$  è ottimale per il modello TP,  $\pi$  è ottimale per il modello  $D(\text{TP})$ , e

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in D} c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i \in P} a_i \pi_i - \sum_{j \in D} d_j \pi_j.$$

Se inoltre  $\bar{c}_{ij} > 0$  per ogni cella esterna a  $T$ , allora  $\bar{x}$  è l'unica soluzione ottimale.

*Dimostrazione.* Usiamo l'identità sopra. Lascia che  $z_\pi = \sum_{i \in P} a_i \pi_i - \sum_{j \in D} d_j \pi_j$ .

1. Per  $\bar{x}$ :  $\bar{c}_{ij} = 0$  su  $T$  e  $\bar{x}_{ij} = 0$  all'esterno di  $T$ , quindi  $\sum \bar{c}_{ij} \bar{x}_{ij} = 0$  e il costo di  $\bar{x}$  è  $z_\pi$ .
2. Per ogni  $x$  ammissibile:  $\bar{c} \geq 0$  e  $x \geq 0$ , quindi il suo costo è almeno  $z_\pi$ ; quindi  $\bar{x}$  è ottimale. I potenziali soddisfano (7.2b), e il loro valore  $z_\pi$  equivale a un costo primario: da dualità debole sono ottimali.
3. Se  $\bar{c}_{ij} > 0$  esterno a  $T$ , uno  $x$  ottimale ha  $\sum \bar{c}_{ij} x_{ij} = 0$ , quindi  $x_{ij} = 0$  esterno a  $T$ : è la soluzione base di  $T$ , ovvero  $\bar{x}$  di [Teorema 7.6](#).  $\square$

**7.4.1 Il ciclo di una cella e il pivot**
**Lemma 7.11: il ciclo di una cella non basica**

Sia  $T$  una base e  $e = (k, l) \notin T$ . Le celle  $T \cup \{e\}$  contengono esattamente un ciclo  $C$ , composto da  $e$  e da il percorso da  $l$  a  $k$  nell'albero. Scrivi  $C$  partendo da  $e$  e muovendoti prima lungo la riga  $k$ , e dai il segno  $+$  alle celle in posizione dispari ( $e$  compreso) e  $-$  alle altre. Quindi ogni riga e ogni colonna che soddisfa  $C$  contiene esattamente una cella di  $C$  con segno  $+$  e una con segno  $-$ .

*Dimostrazione.* Il ciclo è il ciclo fondamentale dell'arco  $(k, l)$  (Proposizione «ciclo fondamentale» di [Capitolo 1](#)). Visita il nodi  $k, j_1, i_1, j_2, \dots, l$  alternativamente in  $P$  e in  $D$ , quindi ha un numero pari di celle e due consecutive le celle condividono un nodo: le prime due condividono la riga  $k$ , le due successive una colonna e così via. Ogni nodo di  $C$  si trova in esattamente due celle di  $C$ , che sono consecutive lungo  $C$ , l'ultima e la prima comprese: le loro posizioni sono parità diversa, quindi segni diversi.  $\square$

**Teorema 7.12: il perno**

Sia  $\bar{x}$  la soluzione ammissibile di base di una base  $T$  con potenziali  $\pi$ , sia  $e \notin T$  con  $\bar{c}_e < 0$ , siano  $C^+$  e  $C^-$  le celle del suo ciclo con segno  $+$  e  $-$ , e siano

$$\theta = \min\{\bar{x}_f : f \in C^-\},$$

raggiunto in una cella  $f^* \in C^-$ . Per  $0 \leq t \leq \theta$ , lasciare che  $x(t)$  sia  $\bar{x}$  con  $t$  aggiunto sulle celle di  $C^+$  e sottratto sulle celle di  $C^-$ .

- (a)  $\mathbf{x}(t)$  è fattibile e il suo costo è il costo di  $\bar{\mathbf{x}}$  più  $t\bar{c}_e$ .
- (b)  $T' = T \cup \{e\} \setminus \{f^*\}$  è una base e  $\mathbf{x}(\theta)$  è la sua soluzione fattibile di base.

*Dimostrazione.* 1. *Fattibilità.* Per Lemma 7.11 ogni riga e colonna di  $C$  guadagna  $t$  su una cella e perde  $t$  su un'altra, quindi tutte le somme rimangono invariate. Le celle di  $C^-$  mantengono  $\bar{x}_f - t \geq 0$  da  $t \leq \theta$ .

2. *Costo.* La variazione del costo è  $t(\sum_{C^+} c_{ij} - \sum_{C^-} c_{ij})$ . Ogni nodo di  $C$  si trova in una cella di  $C^+$  e una di  $C^-$ , quindi  $\sum_{C^+} (\pi_i - \pi_j) = \sum_{C^-} (\pi_i - \pi_j)$ , e la modifica è  $t(\sum_{C^+} \bar{c}_{ij} - \sum_{C^-} \bar{c}_{ij}) = t\bar{c}_e$ : le altre celle di  $C$  sono base, con  $\bar{c}_{ij} = 0$ .

3. *Nuova base.*  $T'$  ha celle  $m+n-1$  e non ha ciclo: l'unico ciclo di  $T \cup \{e\}$  è  $C$ , che contiene  $f^*$ . Un insieme aciclico di archi  $m+n-1$  sui nodi  $m+n$  è un albero ricoprente (Teorema «caratterizzazioni di un albero» del Capitolo 1).  $\mathbf{x}(\theta)$  è zero all'esterno di  $T'$ , poiché  $x_{f^*}(\theta) = 0$ , quindi è la soluzione di base di  $T'$ .  $\square$

### Algoritmo

**Algorithm:** Il metodo potenziale

**Input:** un'istanza bilanciata con forniture  $a_i$ , richieste  $d_j$  e costi  $c_{ij}$

**Output:** una soluzione fattibile di base ottimale  $\bar{\mathbf{x}}$  e potenziali ottimali  $\tilde{\pi}$

- 1 **Passaggio 0 (base iniziale).** Costruisci una base  $T$  e la sua soluzione di base fattibile  $\bar{\mathbf{x}}$  con il regola dell'angolo nord-ovest o regola del costo minimo.
- 2 **Passaggio 1 (potenziali).** Calcola i potenziali di  $T$  e i costi ridotti  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  di le celle all'esterno di  $T$ .
- 3 **Passaggio 2 (test di ottimalità).** Se  $\bar{c}_{ij} \geq 0$  per ogni cella, STOP:  $\bar{\mathbf{x}}$  è ottimale.
- 4 **Passaggio 3 (immissione nella cella).** Scegli una cella  $e$  con  $\bar{c}_e < 0$ .
- 5 **Passaggio 4 (ciclo).** Trova il ciclo di  $e$  con i suoi segni,  $\theta := \min\{\bar{x}_f : f \in C^-\}$ , e un'uscita cella  $f^* \in C^-$  con  $\bar{x}_{f^*} = \theta$ .
- 6 **Passaggio 5 (perno).** Aggiungi  $\theta$  su  $C^+$ , sottrai  $\theta$  su  $C^-$ , imposta  $T := T \cup \{e\} \setminus \{f^*\}$  e vai al passaggio 1.

- **Regole degli esempi.** Nel passo 3 la cella in ingresso ha il costo ridotto più negativo (il più piccolo  $i$ , poi  $j$ , in parità). Nel passaggio 4 il ciclo viene scritto dalla cella in entrata che si muove prima lungo la sua riga e in uscita cella è la prima cella di  $C^-$  con  $\bar{x}_f = \theta$  in ordine riga-colonna.
- Il metodo è noto anche come **metodo u-v** o metodo MODI (distribuzione modificata) e il ciclo come metodo **stepping stone** percorso: gli importi si muovono lungo di esso come sulle pietre al di là di un fiume.

### Teorema 7.13: terminazione

Se  $\theta > 0$  ad ogni iterazione, il metodo potenziale si ferma dopo un numero finito di iterazioni con una base ottimale soluzione fattibile e potenziali ottimali.

*Dimostrazione.* Con [Teorema 7.12](#) ogni iterazione con  $\theta > 0$  si sposta su una nuova base e diminuisce il costo di  $\theta |\bar{c}_e| > 0$ . Una base determina la sua soluzione di base ([Teorema 7.6](#)), quindi una base visitata due volte avrebbe due costi diversi: nessuna base si ripete. Esistono un numero finito di set di  $m + n - 1$  celle, quindi il metodo si interrompe al passaggio 2 e si applica [Teorema 7.10](#).  $\square$

- Quando  $\theta = 0$  il pivot è **degenere**: cambia la base, ma non la soluzione di base né il costo. Il metodo dei potenziali è l'algoritmo del simplesso sul modello TP: le celle di base sono le variabili di base,  $\bar{c}_{ij}$  sono i costi ridotti e il ciclo descrive come cambiano le variabili di base quando  $x_e$  cresce.
- La regola anticiclaggio di Bland garantisce che nessuna base si ripeta, anche in presenza di pivot degeneri. Qui scegliamo come cella entrante la prima con  $\bar{c}_{ij} < 0$  in ordine lessicografico e applichiamo la regola di uscita descritta nel [Capitolo 7 «Condizioni di ottimalità e regole pivot»](#) del modulo di Programmazione lineare.

#### La convenzione u-v

Molti libri di testo formulano il metodo  $u-v$  con  $u_i + v_j = c_{ij}$  sulle celle di base e  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ . Nella notazione di questo capitolo, si pone  $u_i = \pi_i$  per le origini e  $v_j = -\pi_j$  per le destinazioni. I costi ridotti coincidono; cambia soltanto il segno dei potenziali associati alle destinazioni.

### 7.4.2 Il metodo potenziale sull'istanza di trasporto

- Partiamo dalla soluzione angolo nord-ovest di [Esempio 7.5](#), di costo 440.
- In ogni tableau le celle base (blu) contengono la quantità  $\bar{x}_{ij}$  in grassetto, e le altre celle la quantità ridotta costo  $\bar{c}_{ij}$ ; l'ultima colonna e l'ultima riga contengono i potenziali. La cella entrante è rossa e le celle del ciclo sono contrassegnate con  $\oplus$  e  $\ominus$ .

#### Esempio 7.7: il metodo potenziale dall'angolo nord-ovest

Nella prima iterazione i potenziali della base nord-ovest provengono da  $\pi_7 = 0$ , lungo l'albero:

$$\pi_2 = \pi_7 + c_{27} = 2, \quad \pi_3 = \pi_7 + c_{37} = 6, \quad \pi_5 = \pi_2 - c_{25} = -2,$$

$$\pi_6 = \pi_2 - c_{26} = 0, \quad \pi_1 = \pi_5 + c_{15} = 7, \quad \pi_4 = \pi_1 - c_{14} = 6.$$

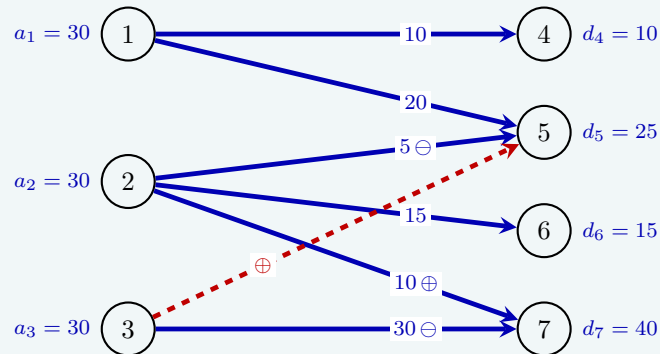
Ad esempio,  $\bar{c}_{35} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 1 - 6 - 2 = -7$ .

Iterazione 1

|         | 4         | 5                  | 6         | 7                   | $\pi_i$ |
|---------|-----------|--------------------|-----------|---------------------|---------|
| 1       | <b>10</b> | <b>20</b>          | -5        | -4                  | 7       |
| 2       | 7         | <b>5</b> $\ominus$ | <b>15</b> | <b>10</b> $\oplus$  | 2       |
| 3       | 9         | -7 $\oplus$        | -2        | <b>30</b> $\ominus$ | 6       |
| $\pi_j$ | 6         | -2                 | 0         | 0                   |         |

- I costi ridotti negativi sono  $\bar{c}_{35} = -7$ ,  $\bar{c}_{16} = -5$ ,  $\bar{c}_{17} = -4$ ,  $\bar{c}_{36} = -2$ ; la cella (3, 5) entra nella base.
- Il ciclo è  $(3, 5)^+$ ,  $(3, 7)^-$ ,  $(2, 7)^+$ ,  $(2, 5)^-$ .
- Le celle con segno  $-$  hanno  $\bar{x}_{37} = 30$  e  $\bar{x}_{25} = 5$ :  $\theta = 5$  e la cella (2, 5) lascia la base.
- Il costo va da 440 a  $440 + 5 \cdot (-7) = 405$ .

Nella rete l'arco entrante (3, 5) (rosso tratteggiato) chiude il ciclo 3, 5, 2, 7, 3 con l'albero.



Nella seconda iterazione il ciclo ha sei celle e visita tutte e tre le righe.

**Iterazione 2**

|         | 4  | 5            | 6            | 7            | $\pi_i$ |
|---------|----|--------------|--------------|--------------|---------|
| 1       | 10 | 20 $\ominus$ | -12 $\oplus$ | -11          | 14      |
| 2       | 14 | 7            | 15 $\ominus$ | 15 $\oplus$  | 2       |
| 3       | 16 | 5 $\oplus$   | -2           | 25 $\ominus$ | 6       |
| $\pi_j$ | 13 | 5            | 0            | 0            |         |

- I costi ridotti negativi sono  $\bar{c}_{16} = -12$ ,  $\bar{c}_{17} = -11$ ,  $\bar{c}_{36} = -2$ ; la cella (1, 6) entra nella base.
- Il ciclo è  $(1, 6)^+$ ,  $(1, 5)^-$ ,  $(3, 5)^+$ ,  $(3, 7)^-$ ,  $(2, 7)^+$ ,  $(2, 6)^-$ .
- Le celle con segno  $-$  hanno  $\bar{x}_{15} = 20$ ,  $\bar{x}_{37} = 25$  e  $\bar{x}_{26} = 15$ :  $\theta = 15$  e la cella (2, 6) lascia la base.
- Il costo va da 405 a  $405 + 15 \cdot (-12) = 225$ .

**Iterazione 3**

|         | 4  | 5           | 6  | 7            | $\pi_i$ |
|---------|----|-------------|----|--------------|---------|
| 1       | 10 | 5 $\ominus$ | 15 | -11 $\oplus$ | 14      |
| 2       | 14 | 7           | 12 | 30           | 2       |
| 3       | 16 | 20 $\oplus$ | 10 | 10 $\ominus$ | 6       |
| $\pi_j$ | 13 | 5           | 12 | 0            |         |

- L'unico costo ridotto negativo è  $\bar{c}_{17} = -11$ : la cella (1, 7) entra nella base.
- Il ciclo è  $(1, 7)^+, (1, 5)^-, (3, 5)^+, (3, 7)^-$ .
- Le celle con segno  $-$  hanno  $\bar{x}_{15} = 5$  e  $\bar{x}_{37} = 10$ :  $\theta = 5$  e la cella (1, 5) lascia la base.
- Il costo va da 225 a  $225 + 5 \cdot (-11) = 170$ .

Iterazione 4

|         | 4  | 5  | 6            | 7           | $\pi_i$ |
|---------|----|----|--------------|-------------|---------|
| 1       | 10 | 11 | 15 $\ominus$ | 5 $\oplus$  | 3       |
| 2       | 3  | 7  | 1            | 30          | 2       |
| 3       | 5  | 25 | -1 $\oplus$  | 5 $\ominus$ | 6       |
| $\pi_j$ | 2  | 5  | 1            | 0           |         |

- L'unico costo ridotto negativo è  $\bar{c}_{36} = -1$ : la cella (3, 6) entra nella base.
- Il ciclo è  $(3, 6)^+, (3, 7)^-, (1, 7)^+, (1, 6)^-$ .
- Le celle con segno  $-$  hanno  $\bar{x}_{37} = 5$  e  $\bar{x}_{16} = 15$ :  $\theta = 5$  e la cella (3, 7) lascia la base.
- Il costo va da 170 a  $170 + 5 \cdot (-1) = 165$ .

Iterazione 5

|         | 4  | 5  | 6  | 7  | $\pi_i$ |
|---------|----|----|----|----|---------|
| 1       | 10 | 10 | 10 | 10 | 3       |
| 2       | 3  | 6  | 1  | 30 | 2       |
| 3       | 6  | 25 | 5  | 1  | 5       |
| $\pi_j$ | 2  | 4  | 1  | 0  |         |

- Tutti i costi ridotti sono non negativi: la soluzione di base ammissibile è ottimale, con costo  $z = 165$ .

- La soluzione ottimale è

$$\tilde{x}_{14} = 10, \quad \tilde{x}_{16} = 10, \quad \tilde{x}_{17} = 10, \quad \tilde{x}_{27} = 30, \quad \tilde{x}_{35} = 25, \quad \tilde{x}_{36} = 5, \quad z(\text{TP}) = 165.$$

Ogni cella esterna alla base ha  $\bar{c}_{ij} > 0$ , quindi per [Teorema 7.10](#) l'ottimo è unico.

- I potenziali  $\tilde{\pi} = (3, 2, 5, 2, 4, 1, 0)$  sono ottimali per il modello  $D(\text{TP})$ , con valore

$$30(3 + 2 + 5) - (10 \cdot 2 + 25 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 40 \cdot 0) = 300 - 135 = 165.$$

Gurobi restituisce la stessa soluzione ottimale e i suoi valori duali coincidono con  $\tilde{\pi}$ .

- Dalla soluzione a costo minimo di [Esempio 7.6](#) il metodo necessita di un unico pivot: quella soluzione ha la base dell'iterazione 4 e la cella in ingresso (3, 6), con  $\theta = 5$ , fornisce l'ottimale.

### 7.4.3 Degeneracy

#### Esempio 7.8: un pivot degenerato

Consideriamo l'istanza

| $c_{ij}$ | 4  | 5  | 6  | $a_i$ |
|----------|----|----|----|-------|
| 1        | 1  | 4  | 7  | 30    |
| 2        | 6  | 2  | 5  | 25    |
| 3        | 3  | 9  | 5  | 30    |
| $d_j$    | 30 | 30 | 25 | 85    |

- Nella regola dell'angolo nord-ovest la prima cella scarica la riga 1 e la colonna 4 contemporaneamente. Solo la riga è incrociata esce, e la cella (2,4) entra in  $T$  con l'importo 0: la soluzione, di costo 250, è degenere.

| passo | cella | importo | barrato           |
|-------|-------|---------|-------------------|
| 1     | (1,4) | 30      | riga 1            |
| 2     | (2,4) | 0       | colonna 4         |
| 3     | (2,5) | 25      | riga 2            |
| 4     | (3,5) | 5       | colonna 5         |
| 5     | (3,6) | 25      | riga 3, colonna 6 |

#### Iterazione 1

|         | 4                   | 5                  | 6         | $\pi_i$ |
|---------|---------------------|--------------------|-----------|---------|
| 1       | <b>30</b>           | 7                  | 14        | -7      |
| 2       | <b>0</b> $\ominus$  | <b>25</b> $\oplus$ | 7         | -2      |
| 3       | <b>-10</b> $\oplus$ | <b>5</b> $\ominus$ | <b>25</b> | 5       |
| $\pi_j$ | -8                  | -4                 | 0         |         |

- L'unico costo ridotto negativo è  $\bar{c}_{34} = -10$ : la cella (3,4) entra nella base.
- Il ciclo è  $(3,4)^+$ ,  $(3,5)^-$ ,  $(2,5)^+$ ,  $(2,4)^-$ .
- Le celle con segno  $-$  hanno  $\bar{x}_{35} = 5$  e  $\bar{x}_{24} = 0$ :  $\theta = 0$  e la cella (2,4) lascia la base.
- Il perno è degenere: la soluzione ed il suo costo  $z = 250$  non cambiano, cambia solo la base.

Nella seconda iterazione è cambiata la base, quindi sono cambiate anche i potenziali: ora  $\bar{c}_{15} < 0$ .

## Iterazione 2

|         | 4                   | 5                  | 6         | $\pi_i$ |
|---------|---------------------|--------------------|-----------|---------|
| 1       | <b>30</b> $\ominus$ | <b>-3</b> $\oplus$ | 4         | 3       |
| 2       | 10                  | <b>25</b>          | 7         | -2      |
| 3       | <b>0</b> $\oplus$   | <b>5</b> $\ominus$ | <b>25</b> | 5       |
| $\pi_j$ | 2                   | -4                 | 0         |         |

- L'unico costo ridotto negativo è  $\bar{c}_{15} = -3$ : la cella (1, 5) entra nella base.
- Il ciclo è  $(1, 5)^+$ ,  $(1, 4)^-$ ,  $(3, 4)^+$ ,  $(3, 5)^-$ .
- Le celle con segno  $-$  hanno  $\bar{x}_{14} = 30$  e  $\bar{x}_{35} = 5$ :  $\theta = 5$  e la cella (3, 5) lascia la base.
- Il costo va da 250 a  $250 + 5 \cdot (-3) = 235$ .

## Iterazione 3

|         | 4         | 5         | 6         | $\pi_i$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|---------|
| 1       | <b>25</b> | <b>5</b>  | 4         | 3       |
| 2       | 7         | <b>25</b> | 4         | 1       |
| 3       | <b>5</b>  | 3         | <b>25</b> | 5       |
| $\pi_j$ | 2         | -1        | 0         |         |

- Tutti i costi ridotti sono non negativi: la soluzione di base ammissibile è ottimale, con costo  $z = 235$ .

La soluzione ottimale è unica, con costo 235, e Gurobi lo conferma.

- La cella base con valore 0 deve essere mantenuta in  $T$ : senza di essa le altre quattro celle non si estenderebbero sulle sei nodi e i potenziali non potevano essere calcolati.
- Il perno degenerare dell'iterazione 1 non abbassa il costo, ma si sposta su una base le cui potenziali rivelano una cella migliorante.

Il metodo dei potenziali calcola i potenziali della base ( $\bar{c}_{ij} = 0$  sulle celle base,  $\pi_{m+n} = 0$ ), ferma quando ogni costo ridotto non è negativo e altrimenti sposta le unità  $\theta$  attorno al ciclo di una cella in entrata. Il riduzione dei costi di  $\theta |\bar{c}_e|$ ; con  $\theta = 0$  cambia solo la base.

## 7.5 Il problema dell'assegnazione

### Definizione 7.14: problema di assegnazione

Sono presenti i lavoratori  $n$ , le origini  $P = \{1, 2, \dots, n\}$ , e i lavori  $n$ , le destinazioni  $D = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ ;  $c_{ij}$  è il costo di assegnazione del lavoratore  $i$  al lavoro  $j$ . Un **assegnazione** assegna a ogni lavoratore esattamente un lavoro e ogni lavoro a esattamente un lavoratore. Il **problema di assegnazione** richiede un'assegnazione di costo totale minimo.

- Usiamo una variabile binaria  $x_{ij}$  per ogni coppia  $i \in P, j \in D$ , uguale a 1 se il lavoratore  $i$  ottiene il lavoro  $j$ .

Utilizzando queste variabili, un modello di Programmazione Lineare Intera (ILP) per il problema di assegnazione si legge come segue:

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} \quad (7.3a)$$

$$\text{subject to } \sum_{j \in D} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in P, \quad (7.3b)$$

$$\sum_{i \in P} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in D, \quad (7.3c)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D. \quad (7.3d)$$

Questo modello è denominato modello AP.

- Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello AP:
  - la funzione obiettivo (7.3a) minimizza il costo totale dell'incarico;
  - Vincoli (7.3b) assegna a ogni lavoratore esattamente un lavoro;
  - Vincoli (7.3c) assegna ogni lavoro esattamente a un lavoratore;
  - infine, i vincoli (7.3d) definiscono le variabili binarie del modello.
- Una matrice  $n \times n$  con voci in  $\{0, 1\}$  ed esattamente uno 1 in ogni riga e in ogni colonna è una **matrice di permutazione**. Le soluzioni ammissibili del modello AP sono le matrici di permutazione: esistono  $n!$  incarichi.

### Proposizione 7.15: il rilassamento LP del modello di assegnazione

Il relax LP del modello AP, con  $x_{ij} \geq 0$  al posto di (7.3d), è il modello TP con  $a_i = 1$  e  $d_j = 1$ . I suoi vertici sono matrici di permutazione e ha una soluzione ottima che è un assegnamento.

*Dimostrazione.* I vincoli (7.3b) e (7.3c) sono (7.1b) e (7.1c) con alimentazioni unitarie e richieste e l'istanza è bilanciata, con  $n$  totale. Per [Proposizione 7.2](#) ha un soluzione ottima in un vertice, e ogni vertice è intero per il Teorema «vertici interi» di [Capitolo 4](#).

Un intero ammissibile la soluzione ha  $0 \leq x_{ij} \leq 1$ , poiché  $x_{ij}$  è al massimo la somma della sua riga: è una matrice di permutazione.  $\square$

### Esempio 7.9: quattro lavoratori e quattro lavori

Quattro lavoratori 1, 2, 3, 4 e quattro lavori 5, 6, 7, 8 hanno i costi

| $c_{ij}$ | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|---|---|---|---|
| 1        | 2 | 4 | 3 | 5 |
| 2        | 4 | 8 | 1 | 1 |
| 3        | 2 | 6 | 9 | 6 |
| 4        | 1 | 9 | 8 | 6 |

Le assegnazioni  $4! = 24$ , enumerate, hanno un minimo univoco: lavoratore 1 ottiene lavoro 7, lavoratore 2 lavoro 8, lavoratore 3 lavoro 6, lavoratore 4 lavoro 5, con costo  $3+1+6+1 = 11$ . Gurobi assegna lo stesso compito della soluzione ottima del Rilassamento dell'LP.

#### 7.5.1 Degenerazione del metodo potenziale

- Una base del rilassamento LP ha celle  $2n - 1$ , ma un'assegnazione ha solo celle  $n$  con  $x_{ij} = 1$ : ogni base la soluzione fattibile ha celle base  $n - 1$  con valore 0 ed è degenera.
- Il metodo potenziale risolve il rilassamento LP, ma molti dei suoi perni hanno  $\theta = 0$ . Su [Esempio 7.9](#) la regola dell'angolo nord-ovest dà la base sottostante, con tre zeri fondamentali; da esso il potenziale metodo giunge al ottimale dopo i perni 6, 4 degenera.

| $\bar{x}_{ij}$ | 5 | 6 | 7 | 8 | $a_i$ |
|----------------|---|---|---|---|-------|
| 1              | 1 |   |   |   | 1     |
| 2              | 0 | 1 |   |   | 1     |
| 3              |   | 0 | 1 |   | 1     |
| 4              |   |   | 0 | 1 | 1     |
| $d_j$          | 1 | 1 | 1 | 1 |       |

### 7.5.2 Riduzioni e potenziali

#### Lemma 7.16: costi ridotti di un incarico

Per i potenziali  $\pi$ , sia  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ . Per ogni  $x$  che soddisfa (7.3b) e (7.3c),

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in P} \pi_i - \sum_{j \in D} \pi_j.$$

Quindi sottraendo una costante da una riga o da una colonna della matrice dei costi si modifica il costo di ogni assegnazione di stessa costante e le assegnazioni ottimali non cambiano.

*Dimostrazione.* È l'identità di Sezione 7.4 con  $a_i = d_j = 1$ . Sottrarre  $r$  dalla riga  $i$  equivale a porre  $\pi_i = r$  e tutti gli altri potenziali uguali a zero: il costo ridotto della cella  $(i, j)$  diminuisce di  $r$ . Sottrarre  $s$  dalla colonna  $j$  equivale a porre  $\pi_j = -s$  e gli altri potenziali a zero: il costo ridotto della cella  $(i, j)$  diminuisce di  $s$ .  $\square$

#### Corollario 7.17: gli incarichi a costo zero sono ottimali

Se  $\bar{c}_{ij} \geq 0$  per ogni cella, ogni assegnazione che utilizza soltanto celle con costo ridotto nullo è ottimale. Il suo costo coincide con  $\sum_{i \in P} \pi_i - \sum_{j \in D} \pi_j$ ; pertanto  $\pi$  è una soluzione ottimale del duale del rilassamento lineare, il modello  $D(TP)$  con  $a_i = d_j = 1$ .

*Dimostrazione.* Per Lemma 7.16, l'incarico costa  $\sum_{i \in P} \pi_i - \sum_{j \in D} \pi_j$ , e ogni  $x \geq 0$  soddisfacente (7.3b) e (7.3c) costa almeno altrettanto, visto che  $\bar{c} \geq 0$ . Il i potenziali soddisfano  $\pi_i - \pi_j \leq c_{ij}$  con lo stesso valore, quindi sono ottimali per dualità debole.  $\square$

### 7.5.3 Zeri indipendenti e righe

#### Definizione 7.18: zeri e coperture indipendenti

Sia  $\bar{c}$  una matrice  $n \times n$  con voci non negative. Un insieme di zero voci è **indipendente** se no due di essi si trovano nella stessa riga o nella stessa colonna. Un insieme di **linee**, righe e colonne, **copre** il zeri se ogni voce zero si trova in almeno una delle righe.

- $n$  zeri indipendenti formano un'assegnazione di costo zero ridotto, ottimale per Corollario 7.17.
- Nella rete bipartita i cui archi sono le celle con  $\bar{c}_{ij} = 0$ , un insieme di zeri indipendenti è un corrispondenza, un insieme di archi senza punti finali comuni come in Capitolo 5 «Flusso massimo» e una copertura è un insieme di nodi che tocca ogni arco.

#### Teorema 7.19: König e Egerváry

Il numero massimo di zeri indipendenti di una matrice è uguale al numero minimo di righe che coprono tutti i suoi zeri.

*Dimostrazione.* Sia  $M$  un insieme massimo di zeri indipendenti. Una riga o una colonna è **corrispondente** se contiene uno zero di  $M$ .

1. *Righe  $\geq$  zeri.* Gli zeri di  $M$  si trovano in righe e colonne diverse, quindi una riga contiene al massimo uno di e una copertura necessita di almeno linee  $|M|$ .
2. *Percorsi alternati.* Un **percorso alternato** inizia in una riga senza corrispondenza, va da una riga a una colonna attraverso uno zero non in  $M$  e da una colonna a una riga attraverso lo zero di  $M$  di quella colonna. Lascia che  $R$  e  $K$  siano i le righe e le colonne raggiunte da percorsi alternati, comprese le righe non corrispondenti.
3. *Ogni colonna di  $K$  corrisponde.* Altrimenti un percorso alternato termina con una colonna senza corrispondenza. Lungo esso, il gli zeri non presenti in  $M$  sono uno in più rispetto agli zeri di  $M$ : scambiandoli si ottiene un insieme indipendente con zeri  $|M| + 1$ , contro la massimalità di  $M$ .
4. *Le righe.* Sia  $L$  le righe non in  $R$  e le colonne in  $K$ . Ha uno zero  $(i, j)$  con la riga  $i \in R$  colonna  $j \in K$ : se non è in  $M$ , un percorso verso  $i$  continua fino a  $j$ ; se è in  $M$ , la riga  $i$  viene abbinata, quindi era raggiunto dalla sua colonna  $j$ . Quindi  $L$  copre tutti gli zeri.
5. *Conteggio.* Le righe non in  $R$  vengono abbinate, poiché le righe senza corrispondenza sono in  $R$  e le colonne di  $K$  sono abbinate. Uno zero di  $M$  in una colonna di  $K$  ha la sua riga in  $R$ , quindi si trova esattamente su una riga di  $L$ . Linee e zeri di  $M$  corrispondono uno a uno e  $|L| = |M|$ .  $\square$

- La dimostrazione è costruttiva: fornisce le linee di una copertura minima da un insieme massimo di zeri indipendenti, e un insieme che non è massimo viene ampliato lungo un percorso alternato che termina in una colonna non abbinata.

#### 7.5.4 L'algoritmo ungherese

### Algoritmo

**Algorithm:** L'algoritmo ungherese

**Input:** una matrice dei costi  $n \times n$   $c_{ij}$ ,  $i \in P$ ,  $j \in D$

**Output:** un'assegnazione ottimale e potenziali ottimali  $\pi$

- 1 **Passaggio 0 (riduzione).** Sottrai da ciascuna riga il suo minimo,  $\pi_i$ ; quindi sottrai da ciascuna colonna del risultato il suo minimo,  $-\pi_j$ . Sia  $\bar{c}$  la matrice ridotta.
- 2 **Passaggio 1 (zeri indipendenti).** Trova un insieme massimo  $M$  di zeri indipendenti di  $\bar{c}$ .
- 3 Se  $|M| = n$ , **STOP**:  $M$  è un'assegnazione ottimale.
- 4 **Passaggio 2 (linee).** Copri gli zeri con le linee  $|M| < n$ , come nella dimostrazione del teorema di König e Egerváry.
- 5 **Passaggio 3 (regolazione).** Sia  $\delta$  la voce minima scoperta. Sottrarre  $\delta$  dallo scoperto voci e aggiungerlo alle voci coperte due volte:  $\pi_i := \pi_i + \delta$  per ogni riga scoperta,  $\pi_j := \pi_j + \delta$  per ogni colonna coperta. Vai al passaggio 1.

- **Regola degli esempi.** Nel Passo 1 l'insieme  $M$  viene costruito riga per riga, in ordine crescente: ogni riga cerca un percorso alternato verso una colonna senza eguali, prima la profondità, provando le colonne in ordine crescente.
- L'algoritmo è dovuto a H. W. Kuhn (1955), che lo chiamò in onore dei matematici ungheresi D. König e J. Egerváry.

### Teorema 7.20: correttezza dell'algoritmo ungherese

Ad ogni iterazione  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j \geq 0$  per ogni cella e il passaggio 3 aumenta il valore duale  $\sum_{i \in P} \pi_i - \sum_{j \in D} \pi_j$  per  $\delta(n - k) > 0$ , dove  $k < n$  è il numero di righe. Con costi interi l'algoritmo si ferma dopo un numero finito di iterazioni con un'assegnazione ottimale e  $\pi$  è ottimale per il duale del rilassamento LP.

*Dimostrazione.* 1. *Passaggio 0.* La sottrazione del minimo di una riga lascia voci non negative e uno zero nella riga; la colonna i minimi sono quindi  $\geq 0$  e la loro sottrazione mantiene le voci non negative. Per costruzione  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ .

2. *Passaggio 3.* Tutti gli zeri sono coperti, quindi  $\delta > 0$  e le voci scoperte rimangono  $\geq 0$ . L'aggiornamento dei potenziali danno  $-\delta$  su riga e colonna scoperte,  $-\delta + \delta = 0$  su riga scoperta e colonna coperta,  $+\delta$  su riga e colonna coperte,  $0$  su riga coperta e colonna scoperta: esattamente la regolazione.

3. *Valore duale.* Con righe coperte  $k_r$  e colonne coperte  $k_c$ , il valore aumenta di  $\delta(n - k_r) - \delta k_c = \delta(n - k)$  e  $k = |M| < n$  di [Teorema 7.19](#).

4. *Terminazione.* Con [Lemma 7.16](#) il valore duale non supera mai il costo di un incarico. Con costi interi ogni  $\delta$  è un intero  $\geq 1$ , quindi il numero di aggiustamenti è finito. Alla fermata  $M$  è un'assegnazione di zeri, ottimale con  $\pi$  di [Corollario 7.17](#).  $\square$

### 7.5.5 L'algoritmo ungherese nell'esempio

#### Esempio 7.10: l'algoritmo ungherese

Eseguiamo l'algoritmo su [Esempio 7.9](#).

**Passaggio 0.** I minimi di riga sono 2, 1, 2, 1, quindi  $\pi_1 = 2$ ,  $\pi_2 = 1$ ,  $\pi_3 = 2$ ,  $\pi_4 = 1$  e le righe diventano

| $c_{ij} - \pi_i$ | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------|---|---|---|---|
| 1                | 0 | 2 | 1 | 3 |
| 2                | 3 | 7 | 0 | 0 |
| 3                | 0 | 4 | 7 | 4 |
| 4                | 0 | 8 | 7 | 5 |

I minimi di colonna sono 0, 2, 0, 0: cambia solo la colonna 6 e  $\pi_6 = -2$ . Il valore duale  $2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8$  è un limite inferiore sul costo di ogni incarico.

In ciascuna matrice gli zeri indipendenti sono riquadrati, le linee blu e la cella corrispondente a  $\delta$  è evidenziata in rosso; i potenziali sono riportati ai margini.

#### Iterazione 1

| $\bar{c}_{ij}$ | 5 | 6  | 7 | 8 | $\pi_i$ |
|----------------|---|----|---|---|---------|
| 1              | 0 | 0  | 1 | 3 | 2       |
| 2              | 3 | 5  | 0 | 0 | 1       |
| 3              | 0 | 2  | 7 | 4 | 2       |
| 4              | 0 | 6  | 7 | 5 | 1       |
| $\pi_j$        | 0 | -2 | 0 | 0 |         |

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 3: (1, 6), (2, 7), (3, 5).
- Le linee  $3 < 4$  (blu) sono le righe 1 e 2 e la colonna 5.
- La voce minima scoperta è  $\delta = 2$ , nella cella (3, 6) (rossa). Lo sottraiamo dalle voci scoperte e lo aggiungiamo alle voci coperte due volte:  $\pi_i$  cresce di 2 per le righe scoperte 3 e 4 e  $\pi_j$  cresce di 2 per la colonna coperta 5. Il valore duale cresce di  $2 \cdot (4 - 3) = 2$ .

#### Iterazione 2

| $\bar{c}_{ij}$ | 5 | 6  | 7 | 8 | $\pi_i$ |
|----------------|---|----|---|---|---------|
| 1              | 2 | 0  | 1 | 3 | 2       |
| 2              | 5 | 5  | 0 | 0 | 1       |
| 3              | 0 | 0  | 5 | 2 | 4       |
| 4              | 0 | 4  | 5 | 3 | 3       |
| $\pi_j$        | 2 | -2 | 0 | 0 |         |

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 3:  $(1, 6)$ ,  $(2, 7)$ ,  $(3, 5)$ .
- Le linee  $3 < 4$  (blu) sono la riga 2 e le colonne 5 e 6.
- La voce minima scoperta è  $\delta = 1$ , nella cella  $(1, 7)$  (rossa). Lo sottraiamo dalle voci scoperte e lo aggiungiamo alle voci coperte due volte:  $\pi_i$  cresce di 1 per le righe scoperte 1, 3 e 4 e  $\pi_j$  cresce di 1 per le colonne coperte 5 e 6. Il valore duale cresce di  $1 \cdot (4 - 3) = 1$ .

| Iterazione 3   |   |    |   |   |         |
|----------------|---|----|---|---|---------|
| $\bar{c}_{ij}$ | 5 | 6  | 7 | 8 | $\pi_i$ |
| 1              | 2 | 0  | 0 | 2 | 3       |
| 2              | 6 | 6  | 0 | 0 | 1       |
| 3              | 0 | 0  | 4 | 1 | 5       |
| 4              | 0 | 4  | 4 | 2 | 4       |
| $\pi_j$        | 3 | -1 | 0 | 0 |         |

- Un set massimo di zeri indipendenti (riquadro) ha elementi 4:  $(1, 7)$ ,  $(2, 8)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(4, 5)$ .
- Formano un'assegnazione a costo ridotto zero: l'algoritmo si ferma e l'assegnazione è ottimale.

- L'assegnazione ottimale è  $1 \rightarrow 7$ ,  $2 \rightarrow 8$ ,  $3 \rightarrow 6$ ,  $4 \rightarrow 5$ , con costo  $3 + 1 + 6 + 1 = 11$ , l'ottimo unico di [Esempio 7.9](#).
- I potenziali finali  $\pi_1 = 3$ ,  $\pi_2 = 1$ ,  $\pi_3 = 5$ ,  $\pi_4 = 4$  e  $\pi_5 = 3$ ,  $\pi_6 = -1$ ,  $\pi_7 = 0$ ,  $\pi_8 = 0$  sono un'ottima soluzione duale, di valore  $(3 + 1 + 5 + 4) - (3 - 1 + 0 + 0) = 11$ . Il valore duale è cresciuto da 8 a 10 e poi a 11.
- Le righe sono quelle della dimostrazione di [Teorema 7.19](#). Nell'iterazione 1 la riga 4 è senza eguali; da esso un percorso alternato raggiunge, attraverso il suo zero, la colonna 5, e poi la riga 3, abbinata alla colonna 5. Quindi  $R = \{3, 4\}$ ,  $K = \{5\}$  e le righe sono le righe 1, 2 e la colonna 5.

Il problema di assegnazione è un problema di trasporto con offerte e domande unitarie. Il metodo dei potenziali è alla base dell'algoritmo ungherese, che può richiedere pivot degeneri. L'algoritmo ungherese mantiene  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j \geq 0$ , copre gli zeri con il numero minimo di linee (König-Egerváry) e aumenta il valore duale finché  $n$  zeri indipendenti non forniscono un'assegnazione ottimale.

## 7.6 Errori tipici

### Attenzione

- **Risolvere un'istanza sbilanciata così com'è.** Con più offerta che domanda i vincoli di uguaglianza non hanno soluzione: aggiungere una destinazione fittizia a costi zero, oppure un'origine fittizia quando la domanda supera l'offerta.
- **Tralasciare uno zero di base.** Una base degenera ha ancora celle  $m + n - 1$ ; senza la cella del valore 0 l'albero è disconnesso e i potenziali non possono essere calcolati.
- **Prendere un insieme con un ciclo come base.**  $m + n - 1$  le celle sono una base solo se non contengono un percorso chiuso righe e colonne alternate.
- **Mescolare le convenzioni dei segni.** Qui  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  con  $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$  sulle celle di base; con  $u_i + v_j = c_{ij}$  i potenziali di destinazione cambiano segno.
- **Calcolo  $\theta$  su tutte le celle del ciclo.**  $\theta$  è il minimo sulle celle con segno  $-$  solo; la cella entrante riceve  $\theta$ .
- **Coprire gli zeri con troppe righe.** Le righe dell'algoritmo ungherese devono essere una copertura minima, poiché tanti quanti gli zeri indipendenti; con più linee  $\delta$  potrebbe essere sbagliato o la fermata saltata.
- **Dimenticare le voci coperte due volte.** Nel passaggio 3 dell'algoritmo ungherese  $\delta$  viene sottratto da le voci scoperte e sommate a quelle coperte da una riga e da una colonna.
- **Eseguire gli algoritmi sui profitti.** Minimizzano: con i profitti  $p_{ij}$  per massimizzare, utilizzare i costi  $c_{ij} = -p_{ij}$  o  $c_{ij} = p_{\max} - p_{ij}$  con  $p_{\max}$  il profitto maggiore, per mantenerli non negativi.

## 7.7 In sintesi

### In sintesi

- Il modello TP spedisce le forniture  $a_i$  delle origini  $m$  alle richieste  $d_j$  delle destinazioni  $n$ ; è un Modello MCF su rete bipartita completa, ammissibile esattamente quando è bilanciata.
- Un'istanza di trasloco senza capacità diventa un'istanza di trasporto con le distanze come costi.
- Una base è uno albero ricoprente della rete bipartita, con celle  $m + n - 1$ ; la sua soluzione di base si trova foglia per foglia ed è intero per dati interi.
- L'angolo nord-ovest e le regole del costo minimo costruiscono una soluzione fattibile di base, una riga per passaggio.

- Il metodo dei potenziali: potenziali con  $\bar{c}_{ij} = 0$  sulla base e  $\pi_{m+n} = 0$ ; ottimale quando  $\bar{c} \geq 0$ ; altrimenti le unità  $\theta$  si muovono attorno al ciclo della cella entrante e il costo diminuisce di  $\theta |\bar{c}_e|$ .
- Il modello AP è un modello TP con dati dell'unità; l'algoritmo ungherese riduce righe e colonne, copre il zero con un numero minimo di righe (König–Egerváry) e si regola con  $\delta$ , aumentando il valore duale.

#### Le istanze in breve.

|                                                                            |                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| magazzini e negozi                                                         | nord-ovest 440, costo minimo 170, ottimale 165          |
| metodo potenziale                                                          | 4 pivot da nord-ovest, 1 dal costo minimo               |
| potenziali ottimali                                                        | $\tilde{\pi} = (3, 2, 5, 2, 4, 1, 0)$ , con $\pi_7 = 0$ |
| con $a_1 = 40$ e destinazione fittizia 8, ottimale 155                     |                                                         |
| istanza degenerata                                                         | $\theta = 0$ , quindi $\theta = 5$ ; ottimale 235       |
| traslato, nessuna capacità e 49 ottimale                                   |                                                         |
| lavoratori e lavori e vincoli 8, $\delta = 2$ , $\delta = 1$ , ottimale 11 |                                                         |