

Problemi di ottimizzazione convessi e concavi



Indice

Problemi di ottimizzazione convessi e concavi

Ottimi locali dei problemi convessi e concavi

Esempi di problemi di ottimizzazione convessi e concavi



Problemi di ottimizzazione convessi e concavi



Introduzione: Problemi di ottimizzazione convessi e concavi

- ▶ In questa sezione definiamo i **problemi di ottimizzazione convessi** e **concavi**: problemi con una regione ammissibile convessa e una funzione obiettivo convessa o concava su di essa.
- ▶ Questi problemi sono importanti perché, come vedremo, i loro ottimi locali sono anche soluzioni ottime.
- ▶ Usiamo gli insiemi convessi e le funzioni convesse e concave dei capitoli precedenti, e i problemi di ottimizzazione del capitolo «Problemi di ottimizzazione».



Definizione 1: problemi di ottimizzazione convessi e concavi

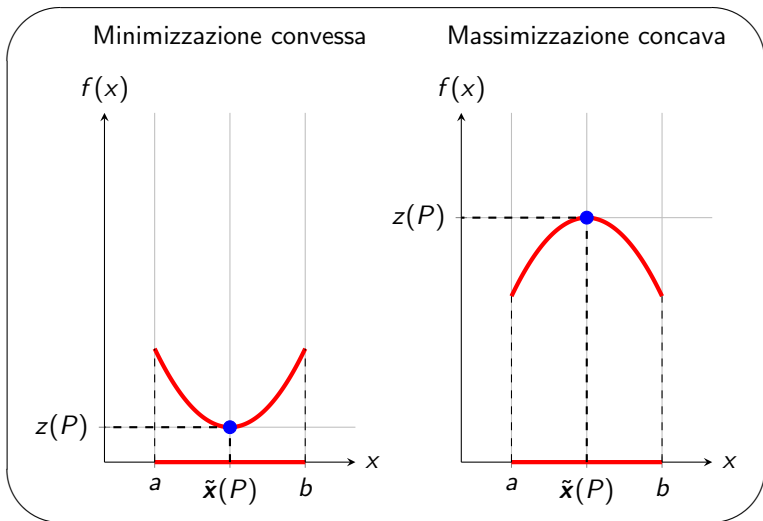
Dato un problema di ottimizzazione con una regione ammissibile convessa,

- ▶ *se la funzione obiettivo è convessa sulla regione ammissibile, il problema si chiama **problema di ottimizzazione convesso**;*
- ▶ *se la funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile, il problema si chiama **problema di ottimizzazione concavo**.*

Le figure di questo capitolo

- ▶ Nelle figure di questo capitolo, come nel capitolo «Problemi di ottimizzazione»:
 - ▶ il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è **rosso**;
 - ▶ la regione ammissibile è la parte **rossa** dell'asse x ;
 - ▶ le soluzioni ottime sono **blu**.
- ▶ Nella prossima slide: un problema di minimizzazione convesso e un problema di massimizzazione concavo, con regione ammissibile $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Minimizzazione convessa e massimizzazione concava



La regione ammissibile è convessa

- ▶ Le definizioni di funzione convessa e di funzione concava del capitolo «Funzioni convesse e concave» richiedono un dominio convesso: se la funzione obiettivo è convessa o concava sulla regione ammissibile, la regione ammissibile è un insieme convesso.
- ▶ La regione ammissibile è spesso descritta da un numero finito di vincoli:

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

Regioni ammissibili definite da funzioni convesse

- ▶ Se ogni funzione g_i è convessa, F è un insieme convesso, per la proprietà degli insiemi definiti da funzioni convesse del capitolo «Funzioni convesse e concave».
- ▶ Per esempio, l'intervallo

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a - x \leq 0, x - b \leq 0 \}$$

è definito da due funzioni lineari, e quindi convesse.

Problemi di ottimizzazione convessi e concavi:

- ▶ La regione ammissibile è un **insieme convesso**.
- ▶ La funzione obiettivo è **convessa** (problema convesso) o **concava** (problema concavo) sulla regione ammissibile.

Regioni ammissibili convesse:

- ▶ Una regione ammissibile
 $F = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$ con tutte le funzioni g_i convesse è un insieme convesso.
- ▶ Esempio: l'intervallo $[a, b]$, definito da due funzioni lineari.

Ottimi locali dei problemi convessi e concavi

Introduzione: Ottimi locali dei problemi convessi e concavi

- ▶ In questa sezione dimostriamo la proprietà principale dei problemi di minimizzazione convessi: ogni **punto di minimo locale** è un **punto di minimo**.
- ▶ La stessa proprietà vale per i punti di massimo locale dei problemi di massimizzazione concavi.
- ▶ Questa proprietà è molto utile: per trovare una soluzione ottima basta trovare un punto di ottimo **locale**, che si verifica soltanto in un intorno del punto.



Ogni punto di minimo è anche un punto di minimo locale.

La proposizione seguente afferma che, in un problema di minimizzazione convesso, vale anche il viceversa.

Minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi

Proposizione 1: minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi

In un problema di minimizzazione convesso, con funzione obiettivo f convessa sulla regione ammissibile convessa F , se un punto $\bar{\mathbf{x}} \in F$ è un punto di minimo locale di f in F , allora è un punto di minimo di f in F , cioè una soluzione ottima.

L'idea della dimostrazione

- ▶ Confrontiamo $f(\bar{\mathbf{x}})$ con il valore $f(\mathbf{x})$ in un punto qualsiasi $\mathbf{x} \in F$.
- ▶ Poiché F è convesso, il segmento che unisce $\bar{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{x}$ è contenuto in F .
- ▶ I punti del segmento abbastanza vicini a $\bar{\mathbf{x}}$ stanno nell'intorno di $\bar{\mathbf{x}}$, dove $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di minimo.
- ▶ La convessità di f lungo il segmento dà allora $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$.

Dimostrazione

Se $\bar{\mathbf{x}} \in F$ è un punto di minimo locale, esiste un intorno sferico $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$ con $\delta > 0$ tale che:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap F$$

Per ogni $\mathbf{x} \in F \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$, poiché F è convesso, tutti i punti della forma

$$\hat{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \bar{\mathbf{x}}$$

con $\lambda \in (0, 1]$ appartengono anch'essi a F .

Inoltre, per λ sufficientemente piccolo, abbiamo $\hat{\mathbf{x}} \in N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap F$, e quindi:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\hat{\mathbf{x}})$$

Dimostrazione (continua)

Poiché f è convessa, vale anche:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{\mathbf{x}})$$

Combinando le due disuguaglianze, otteniamo:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{\mathbf{x}})$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x})$$

$$\Downarrow$$

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad (\text{poiché } \lambda \in (0, 1])$$

Quindi,

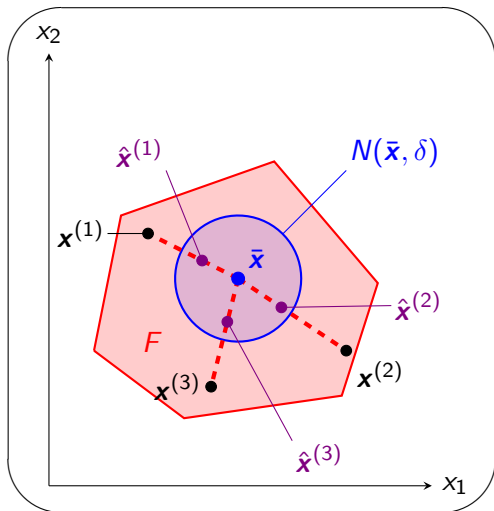
$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

e $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di minimo. □

L'idea della dimostrazione in $\mathbb{R}^2$

- ▶ In $\mathbb{R}^2$, l'idea della dimostrazione è data dalla figura della prossima slide, con:
 - ▶ tre punti $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ in F ;
 - ▶ tre punti $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}^{(2)}, \hat{\mathbf{x}}^{(3)}$ in $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap F$.
- ▶ Ciascun punto $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ sta sul segmento che unisce $\bar{\mathbf{x}}$ al corrispondente $\mathbf{x}^{(i)}$.

L'idea della dimostrazione in $\mathbb{R}^2$



Minimo locale e minimo

- ▶ In un problema di minimizzazione convesso abbiamo dimostrato che:

punto di minimo locale $\implies$ punto di minimo

- ▶ L'implicazione vale anche nell'altro verso, perché un punto di minimo soddisfa la condizione della definizione in ogni punto di F , e quindi in particolare in ogni punto di un intorno.
- ▶ Le due nozioni sono equivalenti.

Per i problemi di massimizzazione concavi otteniamo la stessa proprietà, applicando la proposizione alla funzione convessa $-f$.

Massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi

Corollario 1: massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi

In un problema di massimizzazione concavo, con funzione obiettivo f concava sulla regione ammissibile convessa F , un punto $\bar{x} \in F$ è un punto di massimo locale di f in F se e solo se è un punto di massimo di f in F , cioè una soluzione ottima.

Dimostrazione

Se f è concava su F , allora $-f$ è convessa su F , e $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di massimo locale di f se e solo se è un punto di minimo locale di $-f$.

Per la proposizione precedente, è un punto di minimo di $-f$ in F , cioè un punto di massimo di f in F , poiché

$$\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\} = -\min\{-f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}$$



Gli ottimi locali sono soluzioni ottime

- ▶ In un problema di minimizzazione convesso, ogni **punto di minimo locale** è anche un **punto di minimo**: ogni punto di minimo locale nella regione ammissibile è una soluzione ottima.
- ▶ In un problema di massimizzazione concavo, ogni **punto di massimo locale** è anche un **punto di massimo**: ogni punto di massimo locale nella regione ammissibile è una soluzione ottima.

Problemi di minimizzazione convessi:

- ▶ Punto di minimo locale $\iff$ punto di minimo.
- ▶ Dimostrazione: il segmento da $\bar{x}$ a un qualsiasi $x \in F$ sta in F , i suoi punti vicini a $\bar{x}$ stanno nell'intorno, e f è convessa lungo il segmento.

Problemi di massimizzazione concavi:

- ▶ Punto di massimo locale $\iff$ punto di massimo.
- ▶ Dimostrazione: $-f$ è convessa, e un massimo di f è un minimo di $-f$.

Esempi di problemi di ottimizzazione convessi e concavi



Introduzione: Esempi di problemi di ottimizzazione convessi e concavi

- ▶ In questa sezione risolviamo quattro problemi: due con funzione obiettivo quadratica e due con funzione obiettivo cubica.
- ▶ Gli esempi mostrano come riconoscere un problema convesso (concavo) e come usare gli ottimi locali per trovare una soluzione ottima.
- ▶ Gli esempi cubici mostrano che la stessa funzione obiettivo può dare un problema convesso o un problema concavo, a seconda della regione ammissibile.

Come risolviamo gli esempi

- ▶ Verifichiamo prima che la regione ammissibile sia un insieme convesso e che la funzione obiettivo sia convessa (o concava) su di essa, con la definizione del capitolo «Funzioni convesse e concave».
- ▶ Poi troviamo un punto di minimo (o di massimo) locale, confrontando il valore della funzione obiettivo in un punto candidato con i suoi valori nei punti ammissibili di un intorno.
- ▶ Per la proposizione e il corollario della sezione precedente, questo punto è una soluzione ottima.

Il punto candidato

- ▶ Il punto candidato è il punto in cui si annulla la derivata della funzione obiettivo.
- ▶ La derivata suggerisce soltanto il candidato: l'ottimalità locale si verifica direttamente con la definizione del capitolo «Problemi di ottimizzazione».

Esempio: un problema di minimizzazione convesso (1/6)

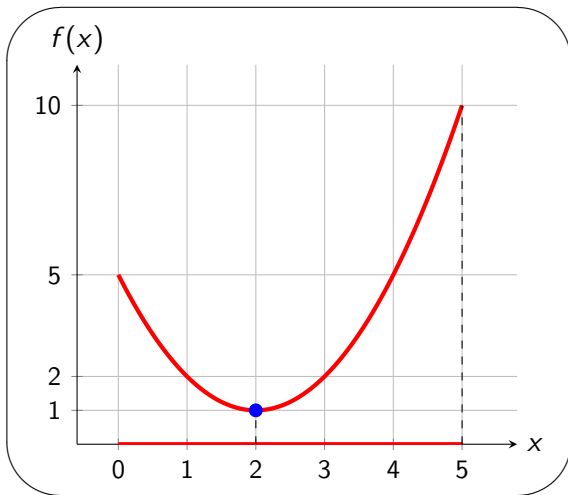
Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto (x - 2)^2 + 1 \quad \text{e} \quad F = [0, 5].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di minimo è:

$$\min \left\{ (x - 2)^2 + 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5 \right\}$$

Esempio: un problema di minimizzazione convesso (2/6)



Esempio: un problema di minimizzazione convesso (3/6)

Regione ammissibile. La regione ammissibile $F = [0, 5]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.

Funzione obiettivo. Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= (\lambda p + (1 - \lambda)w - 2)^2 + 1 \\ &= (\lambda(p - 2) + (1 - \lambda)(w - 2))^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\leq \lambda(p - 2)^2 + (1 - \lambda)(w - 2)^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\ &\quad \text{capitolo «Funzioni convesse e concave»}) \end{aligned}$$

Esempio: un problema di minimizzazione convesso (4/6)

$$\begin{aligned}f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= \dots \\&\leq \lambda(p - 2)^2 + (1 - \lambda)(w - 2)^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\&= \lambda((p - 2)^2 + 1) + (1 - \lambda)((w - 2)^2 + 1) \\&= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)\end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è convessa sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di minimizzazione convesso**.

Esempio: un problema di minimizzazione convesso (5/6)

Punto di minimo locale. La derivata

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

si annulla in $x = 2$. Nell'intorno $N((2), 1) = (1, 3)$, tutti i punti sono ammissibili e

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 = f(2),$$

$$\forall x \in N((2), 1) \cap F = (1, 3).$$

Il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale.

Esempio: un problema di minimizzazione convesso (6/6)

Soluzione ottima. Per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi», il punto $x = 2$ è anche un punto di minimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = f(2) = 1.$$

Esempio: un problema di massimizzazione concavo (1/6)

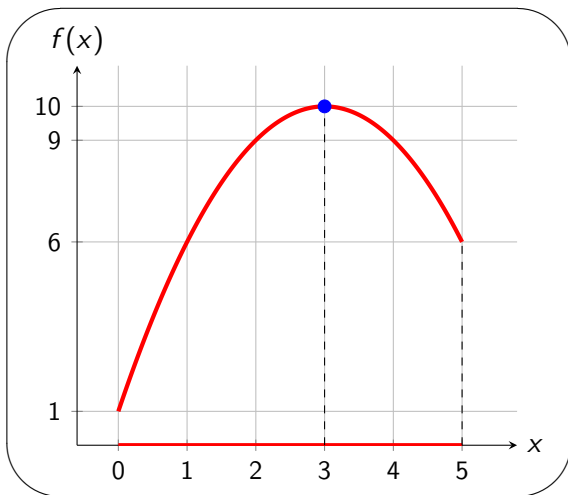
Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto -(x - 3)^2 + 10 \quad \text{e} \quad F = [0, 5].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di massimo è:

$$\max \left\{ -(x - 3)^2 + 10 \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5 \right\}$$

Esempio: un problema di massimizzazione concavo (2/6)



Esempio: un problema di massimizzazione concavo (3/6)

Regione ammissibile. La regione ammissibile $F = [0, 5]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.

Funzione obiettivo. Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \\ &= -(\lambda(p - 3) + (1 - \lambda)(w - 3))^2 + \lambda 10 + (1 - \lambda) 10 \\ & \quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\geq -\lambda(p - 3)^2 - (1 - \lambda)(w - 3)^2 + \lambda 10 + (1 - \lambda) 10 \\ & \quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\ & \quad \text{e il fattore } -1 \text{ inverte la disuguaglianza}) \end{aligned}$$

Esempio: un problema di massimizzazione concavo (4/6)

$$\begin{aligned} & f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \\ &= \dots \\ &\geq -\lambda(p - 3)^2 - (1 - \lambda)(w - 3)^2 + \lambda 10 + (1 - \lambda) 10 \\ &= \lambda(- (p - 3)^2 + 10) + (1 - \lambda)(- (w - 3)^2 + 10) \\ &= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di massimizzazione concavo**.

Esempio: un problema di massimizzazione concavo (5/6)

Punto di massimo locale. La derivata

$$f'(x) = -2x + 6 = -2(x - 3)$$

si annulla in $x = 3$. Nell'intorno $N((3), 1) = (2, 4)$, tutti i punti sono ammissibili e

$$f(x) = -(x - 3)^2 + 10 \leq 10 = f(3),$$

$$\forall x \in N((3), 1) \cap F = (2, 4).$$

Il punto $x = 3$ è un punto di massimo locale.

Esempio: un problema di massimizzazione concavo (6/6)

Soluzione ottima. Per il corollario «massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi», il punto $x = 3$ è anche un punto di massimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (3) \quad \text{e} \quad z(P) = f(3) = 10.$$

Negli ultimi due esempi, la funzione obiettivo è lo stesso polinomio di terzo grado, con due regioni ammissibili diverse.



Una funzione obiettivo cubica (1/2)

- La funzione obiettivo degli ultimi due esempi è

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \\ = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 4\end{aligned}$$

- Non è né convessa né concava in $\mathbb{R}$:

- con $p = 0$, $w = 2$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$f(1) = 6 > 3 = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(2)$$

- con $p = 2$, $w = 4$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$f(3) = 2 < 5 = \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{2} f(4)$$

Una funzione obiettivo cubica (2/2)

- ▶ È convessa su $[2, 4]$ e concava su $[0, 2]$.
- ▶ La definizione di problema di ottimizzazione convesso (concavo) riguarda soltanto i valori della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
- ▶ Per dimostrarlo, usiamo la disuguaglianza dell'osservazione seguente.

Una disuguaglianza per i cubi

Osservazione 1

Per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e ogni $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 \\ = \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2((1 + \lambda)a + (2 - \lambda)b)\end{aligned}$$

e, quindi,

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 \leq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 \quad \text{se } a, b \geq 0,$$

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 \geq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 \quad \text{se } a, b \leq 0.$$

Dimostrazione

Sia $\mu = 1 - \lambda$, così che $1 - \lambda^2 = (1 - \lambda)(1 + \lambda) = \mu(1 + \lambda)$ e $1 - \mu^2 = \lambda(1 + \mu)$. Sviluppando il cubo, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \lambda a^3 + \mu b^3 - (\lambda a + \mu b)^3 \\ &= \lambda(1 - \lambda^2) a^3 + \mu(1 - \mu^2) b^3 - 3\lambda^2 \mu a^2 b - 3\lambda \mu^2 a b^2 \\ &= \lambda \mu ((1 + \lambda) a^3 + (1 + \mu) b^3 - 3\lambda a^2 b - 3\mu a b^2) \\ &= \lambda \mu (a^2 - 2ab + b^2) ((1 + \lambda) a + (1 + \mu) b) \\ & \quad (\text{poiché } (1 + \mu) - 2(1 + \lambda) = -3\lambda \\ & \quad \text{e } (1 + \lambda) - 2(1 + \mu) = -3\mu) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2((1 + \lambda) a + (2 - \lambda) b) \end{aligned}$$

Dimostrazione (continua)

Abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned}\lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 \\ = \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2((1 + \lambda)a + (2 - \lambda)b)\end{aligned}$$

Poiché $\lambda(1 - \lambda)(a - b)^2 \geq 0$, $1 + \lambda > 0$ e $2 - \lambda > 0$, il membro di destra è:

- ▶ non negativo se $a, b \geq 0$;
- ▶ non positivo se $a, b \leq 0$.



Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (1/7)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

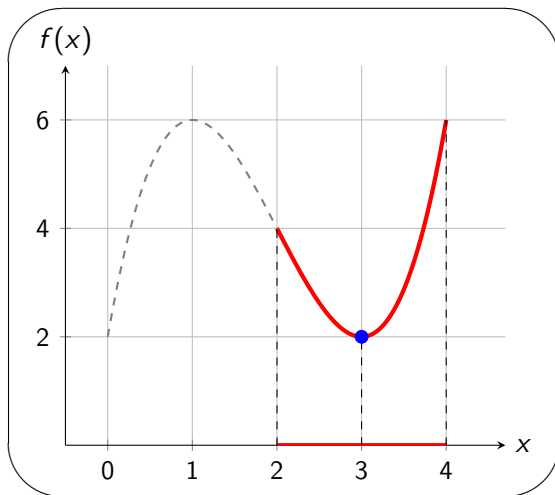
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad F = [2, 4].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di minimo è:

$$\min \left\{ 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \quad \text{soggetto a} \quad 2 \leq x \leq 4 \right\}$$

Nella figura, il grafico della funzione obiettivo fuori dalla regione ammissibile è tratteggiato.

Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (2/7)



Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (3/7)

Regione ammissibile. La regione ammissibile $F = [2, 4]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.

Funzione obiettivo. Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $a = p - 2 \geq 0$ e $b = w - 2 \geq 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \\ &= (\lambda p + (1 - \lambda)w - 2)^3 - 3(\lambda p + (1 - \lambda)w - 2) + 4 \\ & \quad (\text{poiché } f(x) = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 4) \\ &= (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4 \\ & \quad (\text{poiché } \lambda p + (1 - \lambda)w - 2 = \lambda a + (1 - \lambda)b, \\ & \quad \text{e } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \end{aligned}$$

Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (4/7)

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w)$$

$$= \dots$$

$$= (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4$$

$$\leq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4$$

(per l'osservazione precedente, poiché $a \geq 0$ e $b \geq 0$)

$$= \lambda(a^3 - 3a + 4) + (1 - \lambda)(b^3 - 3b + 4)$$

$$= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

(poiché $f(p) = a^3 - 3a + 4$ e $f(w) = b^3 - 3b + 4$)

Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (5/7)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è convessa sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di minimizzazione convesso**.

Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (6/7)

Punto di minimo locale. La derivata

$$f'(x) = 9 - 12x + 3x^2 = 3(x - 1)(x - 3)$$

si annulla in $x = 1$ e in $x = 3$, e solo $x = 3$ è ammissibile.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $f(x) - 2 = x(x - 3)^2$. Nell'intorno $N((3), 1) = (2, 4)$, tutti i punti sono ammissibili e positivi, e quindi

$$f(x) = 2 + x(x - 3)^2 \geq 2 = f(3),$$

$$\forall x \in N((3), 1) \cap F = (2, 4).$$

Il punto $x = 3$ è un punto di minimo locale.

Esempio: minimizzazione convessa di una cubica (7/7)

Soluzione ottima. Per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi», il punto $x = 3$ è anche un punto di minimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (3) \quad \text{e} \quad z(P) = f(3) = 2.$$

Esempio: massimizzazione concava di una cubica (1/7)

Consideriamo la stessa funzione obiettivo con una regione ammissibile diversa:

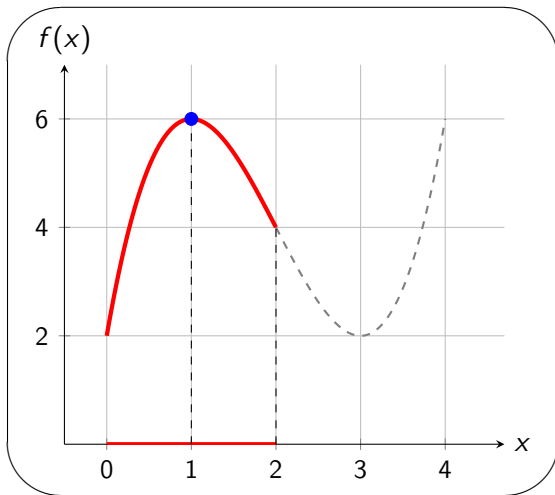
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad F = [0, 2].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di massimo è:

$$\max \left\{ 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \quad \text{soggetto a} \quad 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

Nella figura, il grafico della funzione obiettivo fuori dalla regione ammissibile è tratteggiato.

Esempio: massimizzazione concava di una cubica (2/7)



Esempio: massimizzazione concava di una cubica (3/7)

Regione ammissibile. La regione ammissibile $F = [0, 2]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.

Funzione obiettivo. Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $a = p - 2 \leq 0$ e $b = w - 2 \leq 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \\ &= (\lambda p + (1 - \lambda)w - 2)^3 - 3(\lambda p + (1 - \lambda)w - 2) + 4 \\ & \quad (\text{poiché } f(x) = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 4) \\ &= (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4 \\ & \quad (\text{poiché } \lambda p + (1 - \lambda)w - 2 = \lambda a + (1 - \lambda)b, \\ & \quad \text{e } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \end{aligned}$$

Esempio: massimizzazione concava di una cubica (4/7)

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w)$$

$$= \dots$$

$$= (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4$$

$$\geq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4$$

(per l'osservazione precedente, poiché $a \leq 0$ e $b \leq 0$)

$$= \lambda(a^3 - 3a + 4) + (1 - \lambda)(b^3 - 3b + 4)$$

$$= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

(poiché $f(p) = a^3 - 3a + 4$ e $f(w) = b^3 - 3b + 4$)

Esempio: massimizzazione concava di una cubica (5/7)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di massimizzazione concavo**.

Esempio: massimizzazione concava di una cubica (6/7)

Punto di massimo locale. La derivata

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

si annulla in $x = 1$ e in $x = 3$, e solo $x = 1$ è ammissibile.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $6 - f(x) = (x-1)^2(4-x)$. Nell'intorno $N((1), 1) = (0, 2)$, tutti i punti sono ammissibili e minori di 4, e quindi

$$f(x) = 6 - (x-1)^2(4-x) \leq 6 = f(1),$$

$$\forall x \in N((1), 1) \cap F = (0, 2).$$

Il punto $x = 1$ è un punto di massimo locale.

Esempio: massimizzazione concava di una cubica (7/7)

Soluzione ottima. Per il corollario «massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi», il punto $x = 1$ è anche un punto di massimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (1) \quad \text{e} \quad z(P) = f(1) = 6.$$

Risolvere un problema convesso (concavo):

- ▶ Si verifica con la definizione che la regione ammissibile è convessa e che la funzione obiettivo è convessa (concava) su di essa.
- ▶ Si trova un punto candidato in cui si annulla la derivata, e si verifica con la definizione che è un punto di minimo (massimo) locale.
- ▶ Il punto di ottimo locale è una soluzione ottima.

La regione ammissibile conta:

- ▶ $2 + 9x - 6x^2 + x^3$ è convessa su $[2, 4]$ e concava su $[0, 2]$, ma non è né convessa né concava in $\mathbb{R}$.

Riepilogo (1/2)

Problemi di ottimizzazione convessi e concavi:

- ▶ Regione ammissibile convessa, funzione obiettivo convessa (problema convesso) o concava (problema concavo) su di essa.
- ▶ Le regioni ammissibili definite da funzioni convesse $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ sono insiemi convessi.

Ottimi locali:

- ▶ Minimizzazione convessa: punto di minimo locale $\iff$ punto di minimo.
- ▶ Massimizzazione concava: punto di massimo locale $\iff$ punto di massimo.

Riepilogo (2/2)

Esempi:

- ▶ Due problemi quadratici: $(x - 2)^2 + 1$ minimizzata e $-(x - 3)^2 + 10$ massimizzata su $[0, 5]$.
- ▶ Due problemi cubici: $2 + 9x - 6x^2 + x^3$ minimizzata su $[2, 4]$ (convesso) e massimizzata su $[0, 2]$ (concavo).

Metodo:

- ▶ Convessità (concavità) con la definizione, un punto di ottimo locale con la definizione, e poi la soluzione ottima per la proposizione o per il corollario.