

Problemi di ottimizzazione



Indice

Problemi di ottimizzazione

Proprietà dei problemi di ottimizzazione

Soluzioni ottime locali e globali

Problemi di ottimizzazione



Introduzione: Problemi di ottimizzazione

- ▶ In questa sezione definiamo un **problema di ottimizzazione**, in forma di minimo e in forma di massimo, con la sua **regione ammissibile** e la sua **funzione obiettivo**.
- ▶ Definiamo che cosa sono una **soluzione ottima** e il **valore ottimo**, e vediamo che una soluzione ottima può non esistere: problemi **illimitati**, **inammissibili** ed estremi inferiori **non raggiunti**.
- ▶ Infine vediamo come ogni soluzione ammissibile fornisca una **limitazione** sul valore ottimo: un'idea semplice che useremo in tutto il corso.

Definizione 1: problema di ottimizzazione in forma di minimo e in forma di massimo

Dati un insieme $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $F \subseteq D$, il **problema di ottimizzazione** associato P consiste:

- ▶ nella **forma di minimo**, nel trovare un punto $\tilde{\mathbf{x}}(P) \in F$ tale che

$$f(\tilde{\mathbf{x}}(P)) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in F;$$

- ▶ nella **forma di massimo**, nel trovare un punto $\tilde{\mathbf{x}}(P) \in F$ tale che

$$f(\tilde{\mathbf{x}}(P)) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in F.$$

Regione ammissibile e funzione obiettivo

- ▶ L'insieme F si chiama **regione ammissibile** del problema di ottimizzazione; i suoi punti $\mathbf{x} \in F$ si chiamano **soluzioni ammissibili** del problema di ottimizzazione.
- ▶ La funzione f è la **funzione obiettivo** del problema di ottimizzazione; essa assegna un valore obiettivo a ogni soluzione ammissibile.

Tra le soluzioni ammissibili cerchiamo le migliori:
le **soluzioni ottime**.

Definizione 2: soluzione ottima e valore ottimo (1/2)

► Un punto $\tilde{\mathbf{x}}(P) \in F$ si chiama **soluzione ottima** del problema di ottimizzazione.

1. Nella forma di minimo,

$$\tilde{\mathbf{x}}(P) \in \arg \min \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}.$$

2. Nella forma di massimo,

$$\tilde{\mathbf{x}}(P) \in \arg \max \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}.$$

Definizione 2: soluzione ottima e valore ottimo (2/2)

- Il valore $f(\tilde{\mathbf{x}}(P))$ si chiama **valore ottimo** del problema di ottimizzazione e si indica con $z(P)$.

1. Nella forma di minimo,

$$z(P) = \underbrace{\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}}_{=f(\tilde{\mathbf{x}}(P))}.$$

2. Nella forma di massimo,

$$z(P) = \underbrace{\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}}_{=f(\tilde{\mathbf{x}}(P))}.$$

Notazione

- ▶ Un problema di ottimizzazione può ammettere più soluzioni ottime (anche infinite) oppure nessuna. In questi casi, gli operatori $\arg \min$ e $\arg \max$ restituiscono l'intero insieme delle soluzioni ottime, quando esistono, e l'insieme vuoto altrimenti.
- ▶ Con un leggero abuso di notazione:
 1. nella **forma di minimo**, scriviamo il problema di ottimizzazione come

$$\min\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \};$$

2. nella **forma di massimo**, scriviamo il problema di ottimizzazione come

$$\max\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \}.$$

L'obiettivo di un problema di ottimizzazione

Sebbene si usino i simboli “min” e “max”, l'obiettivo di un problema di ottimizzazione è **trovare una soluzione ottima** $\tilde{x}(P)$, quando esiste, e non soltanto determinare il valore ottimo $z(P)$.

Come leggere le figure

- ▶ Nelle figure di questo capitolo:
 - ▶ il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è **rosso**;
 - ▶ la regione ammissibile è la parte **rossa** dell'asse x ;
 - ▶ le soluzioni ottime sono **blu**;
 - ▶ un cerchio vuoto indica un estremo che non appartiene alla regione ammissibile.
- ▶ Vediamo ora alcuni esempi: le soluzioni ottime si trovano direttamente dalla definizione.

Esempio: una funzione obiettivo quadratica (1/3)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}.$$

La regione ammissibile è l'intervallo chiuso $F = [-1, 2]$.

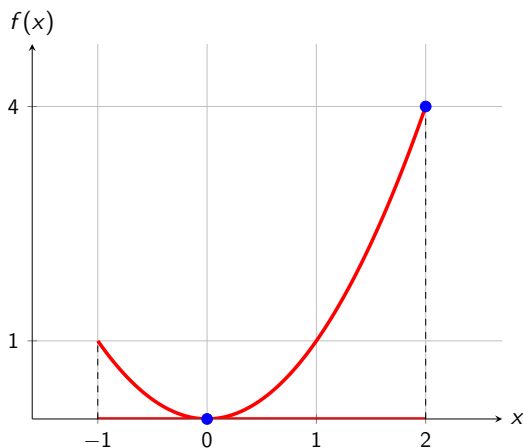
I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ x^2 \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 2 \right\}$$

e

$$\max \left\{ x^2 \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 2 \right\}$$

Esempio: una funzione obiettivo quadratica (2/3)



Esempio: una funzione obiettivo quadratica (3/3)

- ▶ Per la forma di minimo, poiché $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$ per ogni x ammissibile, e $x^2 = 0$ solo per $x = 0$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (0) \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- ▶ Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $|x| \leq 2$ e quindi $f(x) = |x|^2 \leq 4 = f(2)$, con $x^2 = 4$ solo per $x = -2$ e $x = 2$; poiché $-2 \notin F$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = 4.$$

Le soluzioni ottime si trovano direttamente dalla definizione: confrontiamo il valore della funzione obiettivo in un punto candidato con il suo valore in ogni soluzione ammissibile.

Nel prossimo esempio le soluzioni ottime sono infinite.

Esempio: infinite soluzioni ottime (1/3)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

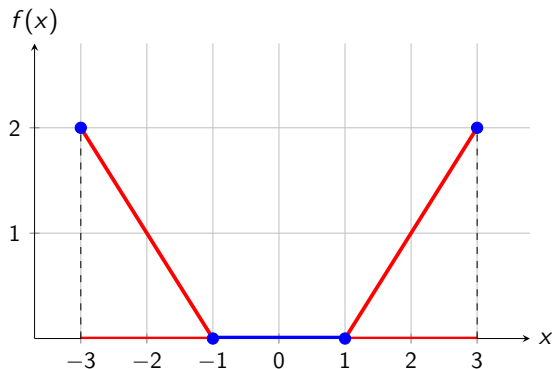
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \max\{0, |x| - 1\} \quad \text{e} \quad F = [-3, 3].$$

La funzione obiettivo vale

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad f(x) = |x| - 1 \quad \text{altrimenti} :$$

il suo grafico è formato da tre segmenti.

Esempio: infinite soluzioni ottime (2/3)



Esempio: infinite soluzioni ottime (3/3)

- ▶ Per la forma di minimo, $f(x) \geq 0$ per ogni x ammissibile, e $f(x) = 0$ esattamente per $-1 \leq x \leq 1$. Il problema ha **infinite** soluzioni ottime (il segmento blu) e il valore ottimo è:

$$\arg \min \{ \max\{0, |x| - 1\} \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 3 \} = [-1, 1]$$

$$\text{e } z(P) = 0.$$

- ▶ Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $|x| \leq 3$ e quindi $f(x) \leq \max\{0, 3 - 1\} = 2$, con $f(x) = 2$ solo per $x = -3$ e $x = 3$. Il problema ha **due** soluzioni ottime e il valore ottimo è:

$$\arg \max \{ \max\{0, |x| - 1\} \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 3 \} = \{-3, 3\}$$

$$\text{e } z(P) = 2.$$

Quando una soluzione ottima non esiste (1/2)

Una soluzione ottima di un problema di ottimizzazione può non esistere per uno dei tre motivi seguenti:

1. Se la funzione obiettivo decresce indefinitamente in un problema di minimo o cresce indefinitamente in un problema di massimo, il problema di ottimizzazione si dice **illimitato**. In questi casi si ha, rispettivamente, $z(P) = -\infty$ e $z(P) = +\infty$.
2. Se la regione ammissibile è vuota, cioè non esistono soluzioni, il problema di ottimizzazione si dice **inammissibile**. In questi casi $z(P)$ non è definito.

Quando una soluzione ottima non esiste (2/2)

3. Se l'estremo inferiore (o superiore) della funzione obiettivo esiste ma non è raggiunto nella regione ammissibile, si dice che il problema di ottimizzazione ha un **estremo inferiore (o superiore) non raggiunto**. In questi casi $z(P)$ non è definito.
- ▶ Nella **forma di minimo**, una soluzione ottima è un **punto di minimo** e il corrispondente valore ottimo è il **minimo** della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
 - ▶ Analogamente, nella **forma di massimo**, una soluzione ottima è un **punto di massimo** e il corrispondente valore ottimo è il **massimo** della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.

Vediamo ora un esempio per ogni caso:
un problema **illimitato**, un problema **inammissibile**
e due problemi con **estremo inferiore non raggiunto**.

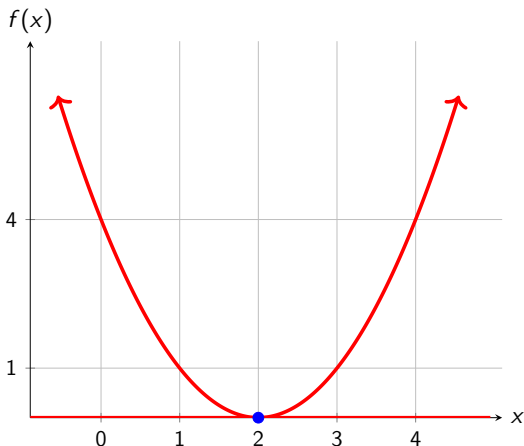
Esempio: un problema illimitato (1/3)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto (x - 2)^2 \quad \text{e} \quad F = \mathbb{R}.$$

La regione ammissibile è l'intera retta reale: il grafico prosegue verso l'alto su entrambi i lati della figura.

Esempio: un problema illimitato (2/3)



Esempio: un problema illimitato (3/3)

- Per la forma di minimo, poiché $f(x) = (x - 2)^2 \geq 0 = f(2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $(x - 2)^2 = 0$ solo per $x = 2$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- Per la forma di massimo, la funzione obiettivo cresce indefinitamente: per ogni valore $M \geq 0$, la soluzione ammissibile $x = M + 3$ ha

$$f(M + 3) = (M + 1)^2 \geq M + 1 > M.$$

Nessuna soluzione ammissibile può essere ottima e il problema è **illimitato**: $z(P) = +\infty$.

Esempio: un problema inammissibile

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad F = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \leq -1 \}.$$

- ▶ Poiché $x^2 \geq 0 > -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, nessun punto soddisfa il vincolo e la regione ammissibile è vuota: $F = \emptyset$.
- ▶ Sia la forma di minimo sia la forma di massimo sono **inammissibili**: non hanno soluzioni ammissibili, quindi nemmeno soluzioni ottime, e $z(P)$ non è definito.

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto (1/4)

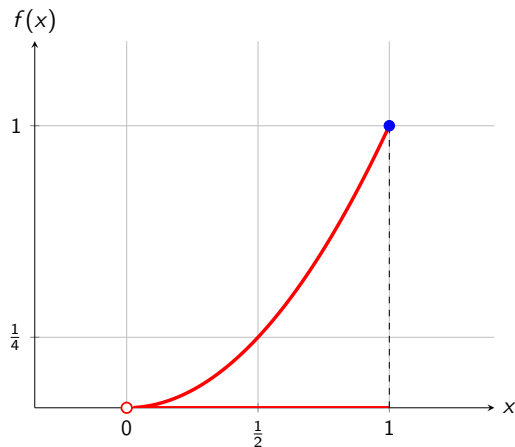
Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}.$$

La regione ammissibile è l'intervallo $F = (0, 1]$, aperto a sinistra.

Il punto $x = 0$ non appartiene alla regione ammissibile (cerchio vuoto nella figura).

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto (2/4)



Esempio: un estremo inferiore non raggiunto (3/4)

- Per la forma di minimo, $f(x) = x^2 > 0$ per ogni x ammissibile, e i valori di f si avvicinano a 0 quanto vogliamo: l'estremo inferiore di f su F è 0. Tuttavia, nessuna soluzione ammissibile è ottima: per ogni $x \in F$, il punto $\frac{x}{2}$ è ammissibile e

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{4} < x^2 = f(x).$$

Il problema ha un **estremo inferiore non raggiunto**: non esiste una soluzione ottima e $z(P)$ non è definito.

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto (4/4)

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $0 < x \leq 1$ e quindi $f(x) = x^2 \leq 1 = f(1)$, con $x^2 = 1$ solo per $x = 1$ in F . L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (1) \quad \text{e} \quad z(P) = 1.$$

Nell'esempio precedente l'estremo inferiore è avvicinato in un estremo della regione ammissibile che non le appartiene.

Nel prossimo esempio l'estremo inferiore è avvicinato
all'infinito.

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto all'infinito (1/4)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

La regione ammissibile è l'intervallo aperto $F = (0, +\infty)$.

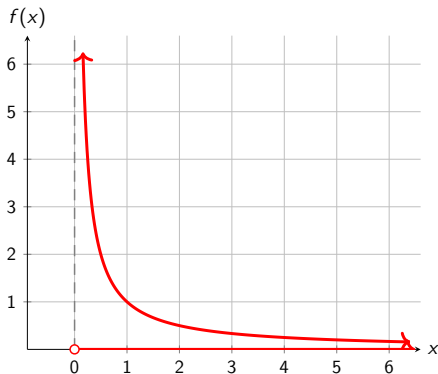
I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\}$$

e

$$\max \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\}$$

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto all'infinito (2/4)



Il punto $x = 0$ non appartiene alla regione ammissibile (cerchio vuoto). Il grafico prosegue verso destra, avvicinandosi all'asse x , e verso l'alto, avvicinandosi alla retta tratteggiata $x = 0$.

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto all'infinito (3/4)

Per la forma di minimo, $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ per ogni x ammissibile, e i valori di f si avvicinano a 0 quanto vogliamo per $x \rightarrow +\infty$: l'estremo inferiore di f su F è 0.

Tuttavia, nessuna soluzione ammissibile è ottima: per ogni $x \in F$, il punto $2x$ è ammissibile e

$$f(2x) = \frac{1}{2x} < \frac{1}{x} = f(x).$$

Il problema ha un **estremo inferiore non raggiunto**: non esiste una soluzione ottima e

$$\inf \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\} = 0, \quad z(P) \text{ non è definito.}$$

Esempio: un estremo inferiore non raggiunto all'infinito (4/4)

Per la forma di massimo, la funzione obiettivo cresce indefinitamente per $x \rightarrow 0^+$: per ogni valore $M > 0$, la soluzione ammissibile $x = \frac{1}{M+1}$ ha

$$f\left(\frac{1}{M+1}\right) = M + 1 > M.$$

Nessuna soluzione ammissibile può essere ottima e il problema è **illimitato**:

$$\sup \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\} = +\infty \quad \text{e} \quad z(P) = +\infty.$$

Anche senza conoscere una soluzione ottima,
ogni **soluzione ammissibile** ci dice qualcosa
sul valore ottimo $z(P)$.

Soluzioni ammissibili e limitazioni sul valore ottimo (1/2)

Data

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}(P)} \in F$$

una **soluzione ammissibile** di un problema di ottimizzazione, abbiamo

1. in forma di **minimo**, il seguente **upper bound**:

$$z(P) \leq \underbrace{f(\bar{\mathbf{x}}(P))}_{UB(\bar{\mathbf{x}})};$$

Soluzioni ammissibili e limitazioni sul valore ottimo (2/2)

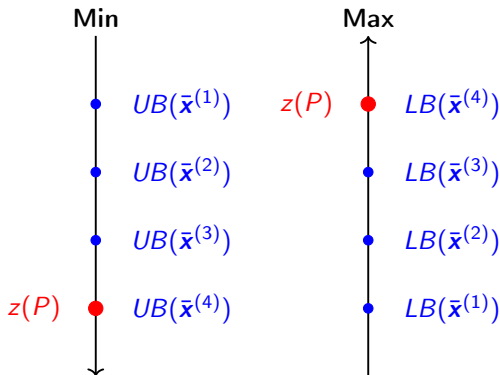
Data una **soluzione ammissibile** $\bar{\mathbf{x}}(P) \in F$ di un problema di ottimizzazione, abbiamo

2. in forma di **massimo**, il seguente **lower bound**:

$$\underbrace{f(\bar{\mathbf{x}}(P))}_{LB(\bar{\mathbf{x}})} \leq z(P).$$

Upper bound e lower bound

Quattro soluzioni ammissibili $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \bar{x}^{(4)} \in F$ forniscono upper bound nel caso di minimo e lower bound nel caso di massimo per il valore ottimo $z(P)$ (la quarta raggiunge il valore ottimo).



Esempio: limitazioni fornite da soluzioni ammissibili (1/2)

Consideriamo di nuovo la funzione obiettivo $f(x) = x^2$ e la regione ammissibile $F = [-1, 2]$ dell'esempio con funzione obiettivo quadratica, dove $z(P) = 0$ in forma di minimo e $z(P) = 4$ in forma di massimo.

Le soluzioni ammissibili

$$\bar{x}^{(1)} = (-1), \quad \bar{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right), \quad \bar{x}^{(3)} = (1)$$

hanno valori obiettivo 1, $\frac{1}{4}$ e 1.

Esempio: limitazioni fornite da soluzioni ammissibili (2/2)

- In forma di minimo, forniscono gli upper bound

$$UB(\bar{\mathbf{x}}^{(1)}) = 1, \quad UB(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) = \frac{1}{4}, \quad UB(\bar{\mathbf{x}}^{(3)}) = 1$$

su $z(P) = 0$; il migliore è $\frac{1}{4}$, il più piccolo.

- In forma di massimo, forniscono i lower bound

$$LB(\bar{\mathbf{x}}^{(1)}) = 1, \quad LB(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}) = \frac{1}{4}, \quad LB(\bar{\mathbf{x}}^{(3)}) = 1$$

su $z(P) = 4$; il migliore è 1, il più grande.

Nessuna di queste limitazioni è uguale al valore ottimo: una limitazione ci dice quanto il valore ottimo può distare dal valore di una soluzione ammissibile nota, senza calcolarlo.

Riepilogo (1/2)

Problema di ottimizzazione:

- ▶ Regione ammissibile F , funzione obiettivo f , forma di minimo o di massimo
- ▶ Soluzione ottima $\tilde{x}(P)$ e valore ottimo $z(P) = f(\tilde{x}(P))$
- ▶ Le soluzioni ottime possono essere una, più di una, infinite oppure nessuna

L'obiettivo:

- ▶ Trovare una soluzione ottima, non soltanto il valore ottimo

Riepilogo (2/2)

Quando una soluzione ottima non esiste:

- ▶ **Illimitato:** $z(P) = -\infty$ (min) oppure $z(P) = +\infty$ (max)
- ▶ **Inammissibile:** $F = \emptyset$, $z(P)$ non definito
- ▶ **Estremo inferiore (superiore) non raggiunto:** in un estremo aperto, come per x^2 su $(0, 1]$, oppure all'infinito, come per $\frac{1}{x}$ su $(0, +\infty)$

Limitazioni:

- ▶ Ogni soluzione ammissibile fornisce un upper bound (min) o un lower bound (max) su $z(P)$

Proprietà dei problemi di ottimizzazione

Introduzione: Proprietà dei problemi di ottimizzazione

- ▶ In questa sezione vediamo quattro semplici proprietà che valgono per **ogni** problema di ottimizzazione.
- ▶ Ci dicono come cambia il valore ottimo quando cambiamo il segno della funzione obiettivo, le aggiungiamo una costante o la moltiplichiamo per una costante positiva o negativa.
- ▶ Ci permettono di riscrivere un problema nella forma più comoda: per esempio, ogni problema di massimo si può scrivere come un problema di minimo.

Prima di cominciare

- ▶ Le seguenti proprietà valgono per ogni problema di ottimizzazione.
- ▶ Enunciamo le proprietà usando $\min$ e $\max$ solo nel caso in cui il minimo e il massimo esistono (cioè sono raggiunti sulla regione ammissibile); altrimenti, gli enunciati analoghi valgono sostituendo $\min$ / $\max$ con $\inf$ / $\sup$.
- ▶ Nelle figure di questa sezione:
 - ▶ la funzione obiettivo originale è **rossa**, quella trasformata è **viola**;
 - ▶ la regione ammissibile è la parte **rossa** dell'asse x ;
 - ▶ le soluzioni ottime sono **blu**.

Proprietà: minimo e massimo

- Per ogni funzione obiettivo f e ogni regione ammissibile F , abbiamo:

$$\begin{aligned} \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \\ = - \max \left\{ -f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

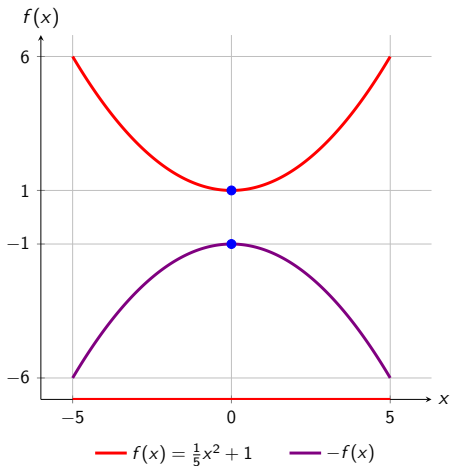
- Le soluzioni ottime non cambiano: un punto minimizza f su F se e solo se massimizza $-f$ su F .

Esempio: minimo e massimo (1/2)

$$\underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 + 1 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=1}$$
$$= - \underbrace{\max \left\{ - \left(\frac{1}{5}x^2 + 1 \right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-1}$$

Infatti, $\frac{1}{5}x^2 + 1 \geq 1$ e $-\left(\frac{1}{5}x^2 + 1\right) \leq -1$ per ogni x , con l'uguaglianza solo per $x = 0$: entrambi gli ottimi sono raggiunti in $x = 0$.

Esempio: minimo e massimo (2/2)



Proprietà: somma di una costante

- Per ogni funzione obiettivo, ogni regione ammissibile e ogni $a \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \min \left\{ a + f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \\ = a + \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

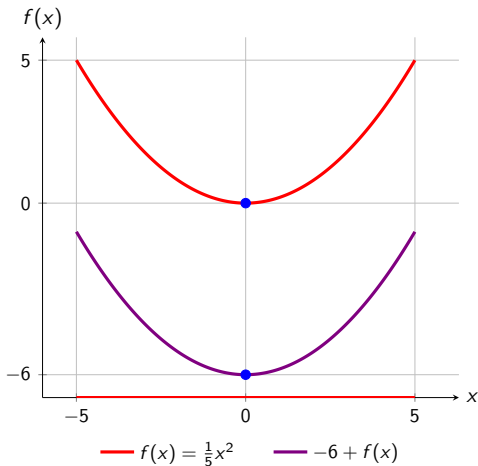
- Aggiungere una costante sposta il grafico della funzione obiettivo verso l'alto o verso il basso: le soluzioni ottime non cambiano.

Esempio: somma di una costante (1/2)

$$\underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 - 6 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-6}$$
$$= -6 + \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=0}$$

Entrambi i minimi sono raggiunti in $x = 0$, poiché $\frac{1}{5}x^2 \geq 0$ per ogni x , con l'uguaglianza solo per $x = 0$.

Esempio: somma di una costante (2/2)



Proprietà: moltiplicazione per una costante positiva

- Per ogni funzione obiettivo, ogni regione ammissibile e ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \min \left\{ a f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \\ = a \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

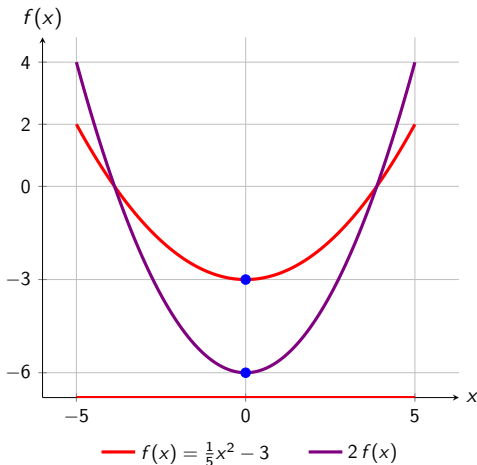
- Moltiplicare per una costante positiva dilata (o comprime) il grafico in verticale: le soluzioni ottime non cambiano.

Esempio: moltiplicazione per una costante positiva (1/2)

$$\underbrace{\min \left\{ 2 \left(\frac{1}{5}x^2 - 3 \right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-6}$$
$$= 2 \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 - 3 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-3}$$

Entrambi i minimi sono raggiunti in $x = 0$, poiché $\frac{1}{5}x^2 - 3 \geq -3$ per ogni x , con l'uguaglianza solo per $x = 0$.

Esempio: moltiplicazione per una costante positiva (2/2)



Proprietà: moltiplicazione per una costante negativa

- Per ogni funzione obiettivo, ogni regione ammissibile e ogni $a \in \mathbb{R}_{<0}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \min \left\{ a f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \\ = a \max \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

- Moltiplicare per una costante negativa capovolge il grafico: i punti di minimo di $a f$ sono i punti di massimo di f .

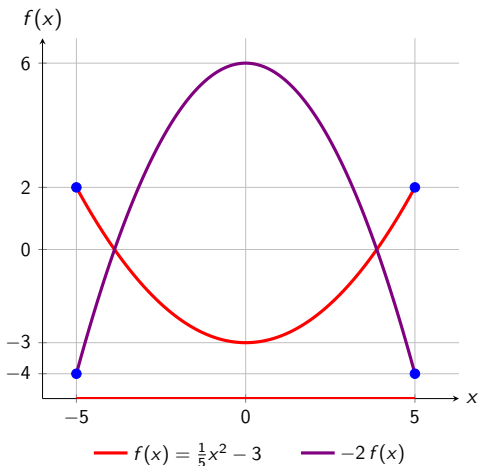
Esempio: moltiplicazione per una costante negativa (1/2)

$$\underbrace{\min \left\{ -2 \left(\frac{1}{5}x^2 - 3 \right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-4}$$
$$= -2 \underbrace{\max \left\{ \frac{1}{5}x^2 - 3 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=2}$$

Per ogni x ammissibile abbiamo $|x| \leq 5$ e quindi

$\frac{1}{5}x^2 - 3 \leq \frac{25}{5} - 3 = 2$, con l'uguaglianza solo per $x = -5$ e $x = 5$:
entrambi i problemi hanno le **due** soluzioni ottime $x = -5$ e $x = 5$.

Esempio: moltiplicazione per una costante negativa (2/2)



Riepilogo

Proprietà di ogni problema di ottimizzazione (con inf / sup quando l'ottimo non è raggiunto):

- ▶ $\min\{f\} = -\max\{-f\}$: un punto minimizza f se e solo se massimizza $-f$
- ▶ $\min\{a + f\} = a + \min\{f\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
- ▶ $\min\{af\} = a \min\{f\}$ per ogni $a > 0$
- ▶ $\min\{af\} = a \max\{f\}$ per ogni $a < 0$

Soluzioni ottime:

- ▶ Sommare una costante o moltiplicare per una costante positiva non le cambia
- ▶ Moltiplicare per una costante negativa scambia i punti di minimo con i punti di massimo

Soluzioni ottime locali e globali

Introduzione: Soluzioni ottime locali e globali

- ▶ In questa sezione definiamo i punti di **minimo** e di **massimo** di una funzione: le soluzioni ottime sono gli **ottimi globali**.
- ▶ Introduciamo gli **intorni sferici di raggio δ** e, con essi, i punti di minimo e di massimo **locale**.
- ▶ Molti metodi guardano solo i punti vicini a un punto dato: possono fermarsi in un ottimo locale che non è globale. Conoscere la differenza è fondamentale.

Definizione 3: punto di minimo/massimo e minimo/massimo

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $\tilde{\mathbf{x}} \in D$ è

- ▶ un **punto di minimo** (**punto di minimo globale**) di f in D se

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

e $f(\tilde{\mathbf{x}})$ è il **minimo** di f in D ;

- ▶ un **punto di massimo** (**punto di massimo globale**) di f in D se

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

e $f(\tilde{\mathbf{x}})$ è il **massimo** di f in D .

Ottimi globali

- ▶ Un punto di minimo (massimo) si chiama anche **minimizzatore (massimizzatore)** di f in D .
- ▶ Possono esistere più punti di minimo (massimo), anche infiniti, come nell'esempio con infinite soluzioni ottime.
- ▶ Le soluzioni ottime di un problema di minimo (massimo) con funzione obiettivo f e regione ammissibile F sono i punti di minimo (massimo) di f in F : sono i suoi **ottimi globali**.

Per definire gli ottimi **locali** ci serve prima la nozione di intorno di un punto.

Definizione 4: intorno sferico di raggio δ

Dati un punto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ e un valore $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, l'intorno sferico di raggio δ associato è:

$$N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \delta \right\}$$

- Il valore $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$ è la **distanza euclidea** tra un generico punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e il punto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, il **centro** dell'intorno:

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - x_j)^2}.$$

Intorni sferici in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$

- ▶ L'intorno $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$ contiene i punti la cui distanza dal centro è minore del **raggio** δ .
- ▶ In $\mathbb{R}$ è l'intervallo aperto $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.
- ▶ In $\mathbb{R}^2$ è il disco aperto di centro $\bar{\mathbf{x}}$ e raggio δ , privo della circonferenza che lo delimita.

Esempio: intorni sferici (1/3)

Consideriamo il punto $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e i raggi $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$. Gli intorni sferici di raggio δ associati sono

$$N\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(4 - x_1)^2 + (4 - x_2)^2} < 1 \right\}$$

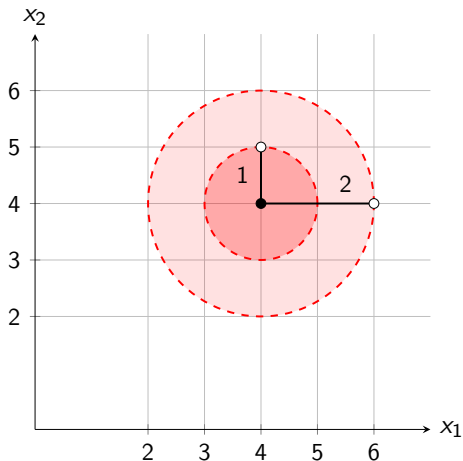
e

$$N\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, 2\right) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(4 - x_1)^2 + (4 - x_2)^2} < 2 \right\}.$$

Esempio: intorni sferici (2/3)

- ▶ I due intorni sono i dischi rossi nella figura della prossima slide: il disco più scuro è $N(\bar{x}, 1)$, che è contenuto in $N(\bar{x}, 2)$.
- ▶ Le circonferenze che li delimitano sono tratteggiate perché non appartengono agli intorni.
- ▶ Per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ (cerchi vuoti) hanno distanza dal centro esattamente 1 e 2, rispettivamente.

Esempio: intorni sferici (3/3)



Con gli intorni sferici possiamo ora confrontare un punto
soltanto con i punti **vicini a esso**:
otteniamo così i punti di minimo e di massimo **locale**.

Definizione 5: punto di minimo/massimo locale e minimo/massimo locale

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $\bar{\mathbf{x}} \in D$ è

- un **punto di minimo locale** di f in D se esiste un intorno sferico $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap D$$

e $f(\bar{\mathbf{x}})$ è un **minimo locale** di f in D ;

- un **punto di massimo locale** di f in D se esiste un intorno sferico $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap D$$

e $f(\bar{\mathbf{x}})$ è un **massimo locale** di f in D .

Ottimi locali

- ▶ Possono esistere più punti di minimo (massimo) locale, anche infiniti.
- ▶ Per dimostrare con la definizione che un punto è un punto di minimo (massimo) locale, basta esibire **un** raggio δ per cui la disuguaglianza vale in $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap D$; anche ogni raggio più piccolo va bene.

Esempio: punti di minimo locale (1/4)

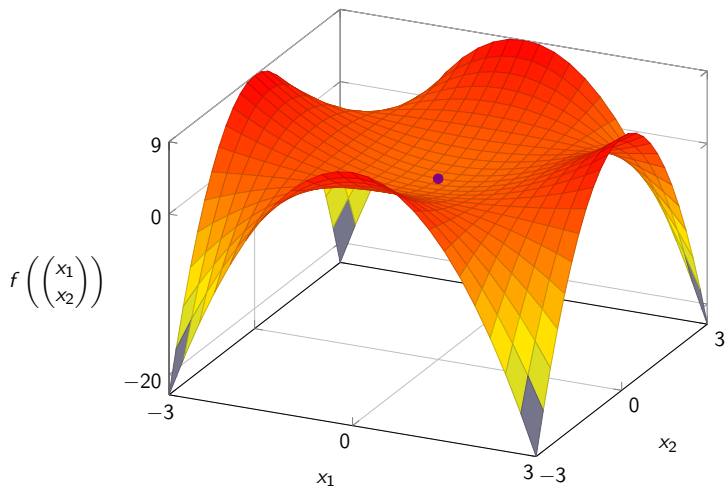
Consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2.$$

Nella prossima slide vediamo il grafico della funzione in $[-3, 3] \times [-3, 3]$; il punto viola è $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$.

Dimostriamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale, ma non un punto di minimo (globale).

Esempio: punti di minimo locale (2/4)



Esempio: punti di minimo locale (3/4)

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$.

Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$ abbiamo $x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < 1$, da cui $1 - \frac{x_2^2}{2} > \frac{1}{2}$, e quindi:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 \\ &= x_1^2\left(1 - \frac{x_2^2}{2}\right) + x_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

con l'uguaglianza solo per $x_1 = x_2 = 0$.

Esempio: punti di minimo locale (4/4)

Ne segue che

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right),$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$, con minimo locale 0.

Non è un punto di minimo (globale), poiché

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 9 + 9 - \frac{81}{2} = -\frac{45}{2} < 0 = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ottimi globali e locali

- ▶ Ogni punto di minimo (globale) è un punto di minimo locale (con qualsiasi δ), e ogni punto di massimo (globale) è un punto di massimo locale.
- ▶ Il viceversa è falso: un punto di minimo locale può non essere un punto di minimo, come mostrano l'esempio precedente e il seguente.

Esempio: un minimo locale che non è globale (1/8)

Consideriamo la seguente funzione:

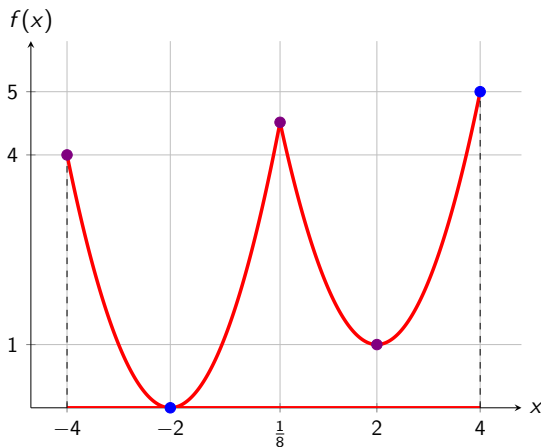
$$f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \min \{ (x+2)^2, (x-2)^2 + 1 \}.$$

Poiché $(x+2)^2 \leq (x-2)^2 + 1$ se e solo se $8x \leq 1$, abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } -4 \leq x \leq \frac{1}{8}, \\ (x-2)^2 + 1 & \text{se } \frac{1}{8} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Nella figura della prossima slide, i punti di minimo e di massimo globale sono **blu** e gli altri punti di minimo e di massimo locale sono **viola**.

Esempio: un minimo locale che non è globale (2/8)



Esempio: un minimo locale che non è globale (3/8)

Minimo globale.

- ▶ Sia $(x + 2)^2$ sia $(x - 2)^2 + 1$ sono non negativi, quindi $f(x) \geq 0 = f(-2)$ per ogni $x \in [-4, 4]$.
- ▶ Poiché $(x - 2)^2 + 1 \geq 1$, $f(x) = 0$ solo per $x = -2$.
- ▶ Il punto $x = -2$ è l'unico punto di minimo e il minimo è 0.

Esempio: un minimo locale che non è globale (4/8)

Minimo locale che non è globale.

- ▶ Nell'intorno $N((2), 1) = (1, 3)$ abbiamo $x \geq \frac{1}{8}$, e quindi

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 = f(2)$$

per ogni $x \in N((2), 1) \cap [-4, 4] = (1, 3)$.

- ▶ Il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale e 1 è un minimo locale; non è un punto di minimo (globale), poiché $f(-2) = 0 < 1 = f(2)$.

Esempio: un minimo locale che non è globale (5/8)

Massimo globale.

- ▶ Per $-4 \leq x \leq \frac{1}{8}$ abbiamo $-2 \leq x + 2 \leq \frac{17}{8}$ e quindi

$$f(x) = (x + 2)^2 \leq \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{289}{64} < 5.$$

- ▶ Per $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$ abbiamo $-\frac{15}{8} \leq x - 2 \leq 2$ e quindi

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1 \leq 4 + 1 = 5,$$

con l'uguaglianza solo per $x = 4$.

- ▶ Il punto $x = 4$ è l'unico punto di massimo e il massimo è 5.

Esempio: un minimo locale che non è globale (6/8)

Massimi locali che non sono globali.

- ▶ In $N((-4), 1) \cap [-4, 4] = [-4, -3)$ abbiamo $-2 \leq x + 2 < -1$ e quindi

$$f(x) = (x + 2)^2 \leq 4 = f(-4) :$$

il punto $x = -4$ è un punto di massimo locale.

- ▶ In $N((\frac{1}{8}), 1) = (-\frac{7}{8}, \frac{9}{8})$:
 - ▶ quando $x \leq \frac{1}{8}$, abbiamo $0 < x + 2 \leq \frac{17}{8}$, per cui $f(x) = (x + 2)^2 \leq \frac{289}{64}$;
 - ▶ quando $x \geq \frac{1}{8}$, abbiamo $-\frac{15}{8} \leq x - 2 < 0$, per cui

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1 \leq \frac{225}{64} + 1 = \frac{289}{64}.$$

Esempio: un minimo locale che non è globale (7/8)

- ▶ In entrambi i casi $f(x) \leq f(\frac{1}{8})$: il punto $x = \frac{1}{8}$ è un punto di massimo locale.
- ▶ Né $x = -4$ né $x = \frac{1}{8}$ è un punto di massimo (globale), poiché

$$f(-4) = 4 < 5 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{289}{64} < 5.$$

Esempio: un minimo locale che non è globale (8/8)

Consideriamo il problema di ottimizzazione

$$\min\{ f(x) \text{ soggetto a } -4 \leq x \leq 4 \}.$$

- ▶ Un metodo che guarda solo i punti vicini a $x = 2$ trova il minimo locale 1.
- ▶ Ma il valore ottimo è $z(P) = 0$, raggiunto in $\tilde{x}(P) = (-2)$.

Ottimi globali:

- ▶ Punti di minimo (massimo) di f in D : $f(\tilde{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ ($\geq$) per ogni $\mathbf{x} \in D$
- ▶ Le soluzioni ottime di un problema sono gli ottimi globali di f in F

Ottimi locali:

- ▶ Intorno sferico di raggio δ : $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) = \{\mathbf{x} : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \delta\}$
- ▶ Punto di minimo (massimo) locale: la disuguaglianza vale solo in $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap D$, per un $\delta > 0$
- ▶ Ogni ottimo globale è un ottimo locale; il viceversa è falso

Messaggi chiave



Riepilogo

1. Problemi di ottimizzazione:

- ▶ Trovare $\tilde{x}(P) \in F$ che minimizza (massimizza) f ; $z(P)$ è il valore ottimo
- ▶ Nessuna soluzione ottima: problema illimitato, inammissibile, estremo inferiore (superiore) non raggiunto
- ▶ Ogni soluzione ammissibile fornisce una limitazione su $z(P)$

2. Proprietà:

- ▶ $\min\{f\} = -\max\{-f\}$; sommare costanti e moltiplicare per costanti positive non cambia le soluzioni ottime

3. Ottimi locali e globali:

- ▶ Ogni ottimo globale è locale, ma un ottimo locale può non essere globale