

Funzioni convesse e concave



Indice

Funzioni convesse

Funzioni concave

Esempi di funzioni convesse e concave

Funzioni convesse definite da norme

Proprietà delle funzioni convesse e concave

Funzioni convesse



Introduzione: Funzioni convesse

- ▶ In questa sezione definiamo le **funzioni convesse** di n variabili reali.
- ▶ La definizione confronta il valore della funzione in una **combinazione convessa** di due punti con la combinazione convessa dei valori in quei due punti.
- ▶ Le funzioni convesse sono i mattoni dell'**ottimizzazione convessa**: con esse costruiremo insiemi convessi e problemi di ottimizzazione convessi.

Definizione 1: funzione convessa

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **convessa** nel suo dominio D se:

$\forall \mathbf{p}, \mathbf{w} \in D$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ abbiamo

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

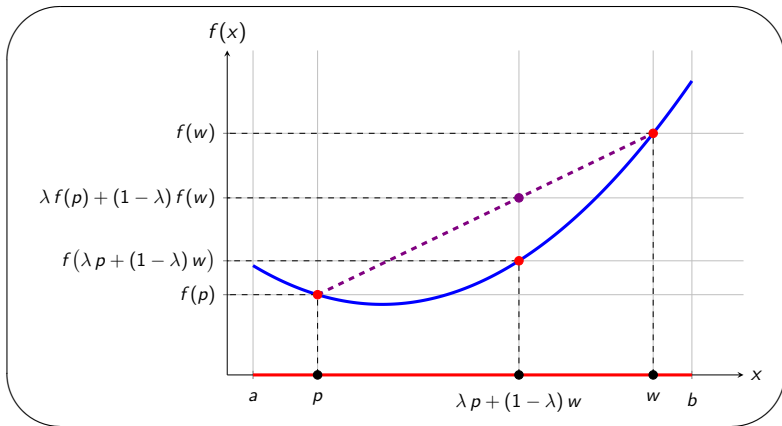
e il dominio D della funzione f è un insieme convesso.

Funzione convessa: interpretazione

- ▶ Una funzione è convessa nel suo dominio se, per ogni coppia di punti del suo dominio convesso, il valore in una qualsiasi combinazione convessa dei due punti è **minore o uguale** alla combinazione convessa dei valori in quei due punti.
- ▶ Vediamo ora che cosa significa per una funzione di una variabile.

Grafico di una funzione convessa

Se $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (un intervallo, che per natura è un insieme convesso), il grafico di una funzione convessa è dato dalla seguente figura:



Come leggere la figura

- ▶ Per ogni coppia di punti $p, w \in [a, b]$, il segmento viola che congiunge $(p, f(p))$ e $(w, f(w))$ rappresenta tutte le combinazioni convesse di questi due punti del grafico.
- ▶ Per una funzione convessa, il segmento viola si trova **sopra** il grafico della funzione (in blu) fra p e w .
- ▶ Nel punto $\lambda p + (1 - \lambda) w$ il valore della funzione, $f(\lambda p + (1 - \lambda) w)$, è minore o uguale al valore sul segmento, $\lambda f(p) + (1 - \lambda) f(w)$.

Funzione convessa:

- ▶ $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con D insieme convesso
- ▶ $f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$

Grafico (una variabile):

- ▶ Il segmento che congiunge due punti del grafico si trova sopra il grafico

Funzioni concave

Introduzione: Funzioni concave

- ▶ In questa sezione definiamo le **funzioni concave**, la controparte delle funzioni convesse.
- ▶ La definizione è la stessa delle funzioni convesse, con la disuguaglianza **rovesciata**.
- ▶ Le funzioni concave compaiono in modo naturale quando si massimizza: per la massimizzazione hanno il ruolo che le funzioni convesse hanno per la minimizzazione.

Definizione 2: funzione concava

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **concava** nel suo dominio D se:

$\forall \mathbf{p}, \mathbf{w} \in D$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ abbiamo

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \geq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

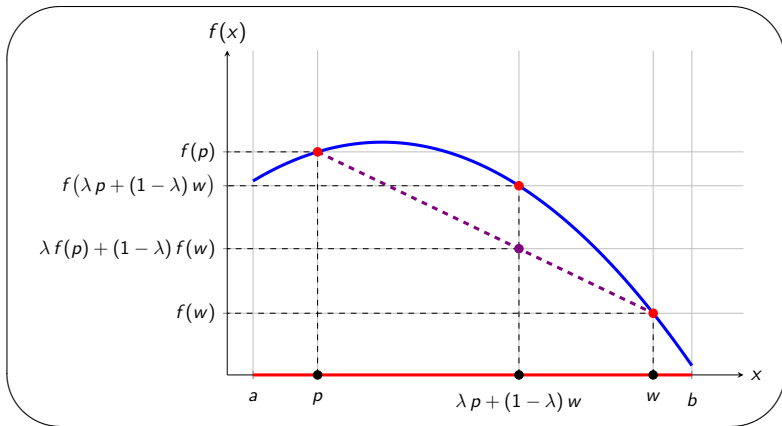
e il dominio D della funzione f è un insieme convesso.

Funzione concava: interpretazione

- ▶ Una funzione è concava nel suo dominio se, per ogni coppia di punti del suo dominio convesso, il valore in una qualsiasi combinazione convessa dei due punti è **maggiore o uguale** alla combinazione convessa dei valori in quei due punti.
- ▶ Vediamo ora che cosa significa per una funzione di una variabile.

Grafico di una funzione concava

Se $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (un intervallo, che per natura è un insieme convesso), il grafico di una funzione concava è dato dalla seguente figura:



Come leggere la figura

- ▶ Per ogni coppia di punti $p, w \in [a, b]$, il segmento viola che congiunge $(p, f(p))$ e $(w, f(w))$ rappresenta tutte le combinazioni convesse di questi due punti del grafico.
- ▶ Per una funzione concava, il segmento viola si trova **sotto** il grafico della funzione (in blu) fra p e w .
- ▶ Nel punto $\lambda p + (1 - \lambda) w$ il valore della funzione, $f(\lambda p + (1 - \lambda) w)$, è maggiore o uguale al valore sul segmento, $\lambda f(p) + (1 - \lambda) f(w)$.

Funzione concava:

- ▶ $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con D insieme convesso
- ▶ $f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \geq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$

Grafico (una variabile):

- ▶ Il segmento che congiunge due punti del grafico si trova sotto il grafico

Esempi di funzioni convesse e concave



Introduzione: Esempi di funzioni convesse e concave

- ▶ In questa sezione dimostriamo che alcune funzioni di una e di due variabili sono convesse o concave.
- ▶ Usiamo sempre la **definizione**: è il metodo che useremo in tutti gli esercizi.
- ▶ Vediamo funzioni quadratiche, una funzione lineare, il valore assoluto e il minimo di due funzioni lineari.

Come si dimostra la convessità

- ▶ In questo capitolo consideriamo anche funzioni non lineari.
- ▶ La convessità di una funzione si dimostra sempre verificando la definizione: per punti arbitrari $\mathbf{p}, \mathbf{w}$ del dominio e un arbitrario $\lambda \in [0, 1]$, verifichiamo la disuguaglianza della definizione.
- ▶ Per le funzioni quadratiche dei primi esempi, usiamo la seguente disuguaglianza.

Una disuguaglianza per i quadrati

Osservazione 1

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2.$$

Dimostrazione

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

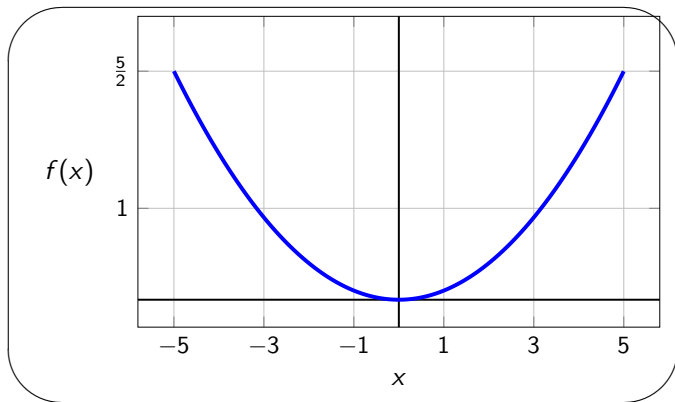
$$\begin{aligned}(\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 &= \lambda^2 a^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab + (1 - \lambda)^2 b^2 \\&= \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 \\&\quad - \lambda(1 - \lambda)a^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab - \lambda(1 - \lambda)b^2 \\&= \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - \lambda(1 - \lambda)(a^2 - 2ab + b^2) \\&= \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - \underbrace{\lambda(1 - \lambda)(a - b)^2}_{\geq 0} \\&\leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 \\&\quad (\text{poiché } \lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0 \text{ e } (a - b)^2 \geq 0)\end{aligned}$$



Esempio: una funzione quadratica convessa (1/3)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \frac{x^2}{10}$$



Esempio: una funzione quadratica convessa (2/3)

Per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) = \frac{1}{10}(\lambda p + (1 - \lambda)w)^2$$

$$\leq \frac{1}{10}(\lambda p^2 + (1 - \lambda)w^2)$$

(per la disuguaglianza dei quadrati)

$$= \lambda \frac{p^2}{10} + (1 - \lambda) \frac{w^2}{10}$$

$$= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Esempio: una funzione quadratica convessa (3/3)

Quindi,

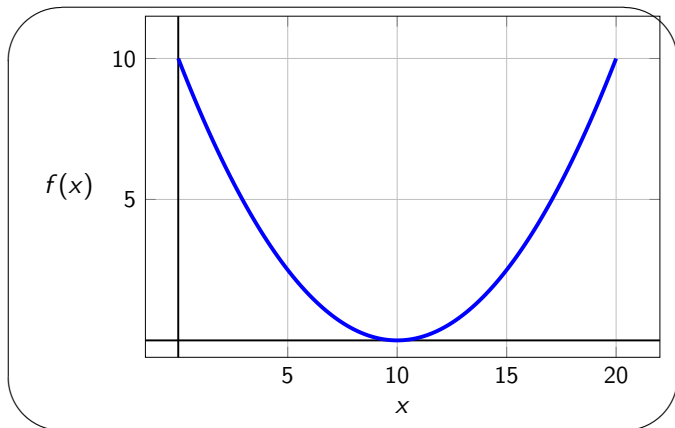
$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Esempio: una funzione quadratica convessa traslata (1/3)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \frac{1}{10}(x - 10)^2$$



Esempio: una funzione quadratica convessa traslata (2/3)

Per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= \frac{1}{10}(\lambda p + (1 - \lambda)w - 10)^2 \\&= \frac{1}{10}(\lambda(p - 10) + (1 - \lambda)(w - 10))^2 \\&\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\&\leq \frac{1}{10}(\lambda(p - 10)^2 + (1 - \lambda)(w - 10)^2) \\&\quad (\text{per la disuguaglianza dei quadrati}) \\&= \lambda \frac{(p - 10)^2}{10} + (1 - \lambda) \frac{(w - 10)^2}{10} \\&= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)\end{aligned}$$

Esempio: una funzione quadratica convessa traslata (3/3)

Quindi,

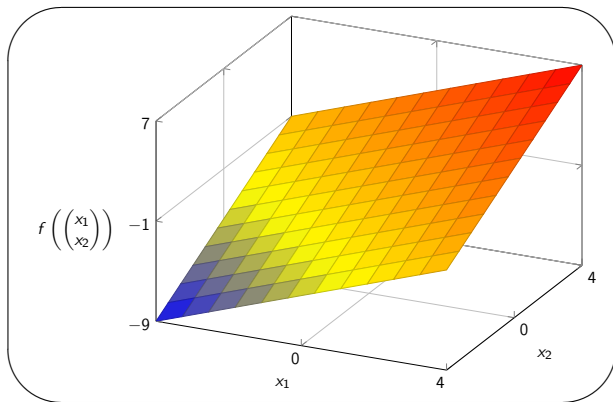
$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Esempio: una funzione lineare di due variabili (1/3)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 - 1$$



Esempio: una funzione lineare di due variabili (2/3)

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1) \\ &\quad + (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda(p_1 + p_2) + (1 - \lambda)(w_1 + w_2) \\ &\quad - \lambda - (1 - \lambda) \end{aligned}$$

$$(\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1)$$

$$= \lambda(p_1 + p_2 - 1) + (1 - \lambda)(w_1 + w_2 - 1)$$

$$= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Esempio: una funzione lineare di due variabili (3/3)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

(con l'uguaglianza).

- ▶ Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.
- ▶ Poiché vale l'uguaglianza, vale anche la disuguaglianza con $\geq$:

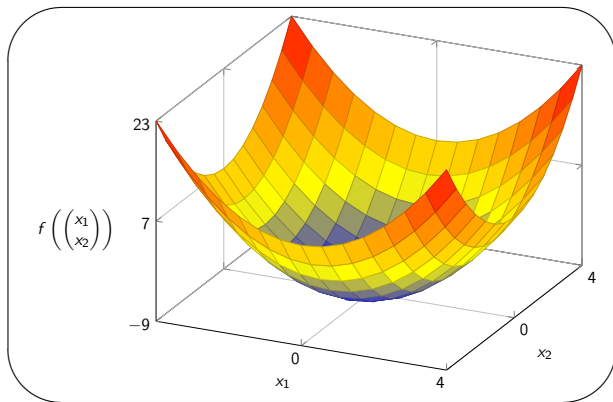
$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \geq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

la funzione è anche **concava** nel suo dominio.

Esempio: quadratica convessa di due variabili (1/3)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 9$$



Esempio: quadratica convessa di due variabili (2/3)

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1)^2 \\ &\quad + (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2)^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda p_1^2 + (1 - \lambda) w_1^2 + \lambda p_2^2 + (1 - \lambda) w_2^2 - 9 \\ &\quad \text{(per la disuguaglianza dei quadrati,} \\ &\quad \text{due volte)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda(p_1^2 + p_2^2 - 9) + (1 - \lambda)(w_1^2 + w_2^2 - 9) \\ &\quad \text{(poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \end{aligned}$$

$$= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Esempio: quadratica convessa di due variabili (3/3)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Due funzioni il cui grafico è formato da due segmenti

- ▶ I due esempi seguenti sono funzioni di una variabile il cui grafico è formato da due segmenti.
- ▶ La prima, il valore assoluto, è convessa.
- ▶ La seconda, il minimo di due funzioni lineari, è concava.

Esempio: il valore assoluto è una funzione convessa (1/3)

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) = |\lambda p + (1 - \lambda)w|$$

$$\leq |\lambda p| + |(1 - \lambda)w|$$

(per la disuguaglianza triangolare)

$$= |\lambda| |p| + |1 - \lambda| |w|$$

(per l'omogeneità assoluta)

$$= \lambda |p| + (1 - \lambda) |w|$$

(poiché $\lambda \geq 0$ e $1 - \lambda \geq 0$)

$$= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Esempio: il valore assoluto è una funzione convessa (2/3)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

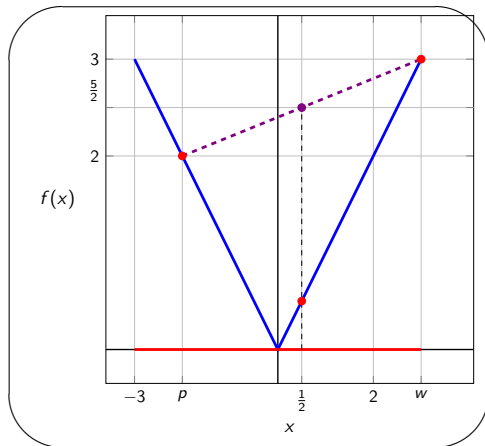
Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Ad esempio, con $p = -2$, $w = 3$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ otteniamo $\lambda p + (1 - \lambda)w = \frac{1}{2}$ e

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} f(-2) + \frac{1}{2} f(3) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}.$$

Esempio: il valore assoluto è una funzione convessa (3/3)

In figura, il segmento che congiunge $(p, f(p))$ e $(w, f(w))$ (in viola) si trova sopra il grafico di f (in blu).



Esempio: il minimo di due funzioni lineari (1/4)

Consideriamo la funzione $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \min\{x + 2, 4 - \frac{1}{2}x\}$. Per ogni coppia di punti
 $p, w \in [-2, 4]$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= \min \left\{ \lambda p + (1 - \lambda)w + 2, \right. \\ &\quad \left. 4 - \frac{1}{2}(\lambda p + (1 - \lambda)w) \right\} \\ &= \min \left\{ \lambda(p + 2) + (1 - \lambda)(w + 2), \right. \\ &\quad \left. \lambda(4 - \frac{1}{2}p) + (1 - \lambda)(4 - \frac{1}{2}w) \right\} \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \end{aligned}$$

Esempio: il minimo di due funzioni lineari (2/4)

$$\geq \min \left\{ \begin{aligned} &\lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w), \\ &\lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) \end{aligned} \right\}$$

$$(\text{poich\'e } f(p) \leq p + 2, \quad f(p) \leq 4 - \tfrac{1}{2}p,$$

$$f(w) \leq w + 2, \quad f(w) \leq 4 - \tfrac{1}{2}w,$$

$$\lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0)$$

$$= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Esempio: il minimo di due funzioni lineari (3/4)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Il dominio $[-2, 4]$ è un intervallo, quindi un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è concava nel suo dominio.

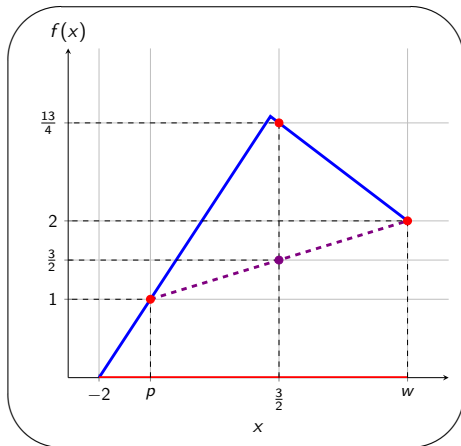
Le due rette si incontrano in $x = \frac{4}{3}$, dove $f(\frac{4}{3}) = \frac{10}{3}$.

Ad esempio, con $p = -1$, $w = 4$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ otteniamo $\lambda p + (1 - \lambda)w = \frac{3}{2}$ e

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \min\left\{\frac{7}{2}, \frac{13}{4}\right\} = \frac{13}{4} \\ &\geq \frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(4) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Esempio: il minimo di due funzioni lineari (4/4)

In figura, il segmento che congiunge $(p, f(p))$ e $(w, f(w))$ (in viola) si trova sotto il grafico di f (in blu).



Dimostrare la convessità:

- ▶ Sempre con la definizione, per $\mathbf{p}$, $\mathbf{w}$ e $\lambda \in [0, 1]$ arbitrari
- ▶ Per i quadrati: $(\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2$

Esempi:

- ▶ $\frac{x^2}{10}$, $\frac{1}{10}(x - 10)^2$, $x_1^2 + x_2^2 - 9$ e $|x|$ sono convesse
- ▶ $x_1 + x_2 - 1$ è sia convessa sia concava (vale l'uguaglianza)
- ▶ $\min\{x + 2, 4 - \frac{1}{2}x\}$ è concava in $[-2, 4]$

Funzioni convesse definite da norme

Introduzione: Funzioni convesse definite da norme

- ▶ In questa sezione introduciamo le **norme**, che misurano la lunghezza di un vettore, e le norme 1, 2, q e ∞ .
- ▶ Dimostriamo che **ogni norma** è una funzione convessa, e che il quadrato della norma euclidea è convesso.
- ▶ Le norme servono a misurare le **distanze**: la distanza da un punto e il quadrato della distanza da un punto sono funzioni convesse.

Definizione 3: norma

Una **norma** su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

- ▶ $\|\mathbf{p}\| \geq 0$, e $\|\mathbf{p}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{p} = 0$ (positività);
- ▶ $\|\alpha \mathbf{p}\| = |\alpha| \|\mathbf{p}\|$ (omogeneità assoluta);
- ▶ $\|\mathbf{p} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{w}\|$ (disuguaglianza triangolare).

Definizione 4: le norme 1, 2, q e ∞

Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad (\text{norma 1, o norma di Manhattan})$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \quad (\text{norma 2, o norma euclidea})$$

$$\|\mathbf{x}\|_q = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{norma } q, \text{ con } q \geq 1)$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \quad (\text{norma } \infty, \text{ o norma del massimo})$$

Le norme 1 e 2 sono la norma q con $q = 1$ e $q = 2$, e $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_q$.

Esempio: le quattro norme di un vettore

Per $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ abbiamo:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |3| + |-4| = 7, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$\|\mathbf{x}\|_3 = (|3|^3 + |-4|^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{91}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|3|, |-4|\} = 4.$$



Dimostriamo ora che le norme definiscono funzioni convesse,
a partire dalla norma euclidea.

Convessità della norma euclidea

Osservazione 2: convessità della norma euclidea

La funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2$$

è convessa nel suo dominio.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = \|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}\|_2$$

$$\leq \|\lambda \mathbf{p}\|_2 + \|(1 - \lambda) \mathbf{w}\|_2$$

(per la disuguaglianza triangolare)

$$= |\lambda| \|\mathbf{p}\|_2 + |1 - \lambda| \|\mathbf{w}\|_2$$

(per l'omogeneità assoluta)

$$= \lambda \|\mathbf{p}\|_2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2$$

(poiché $\lambda \geq 0$ e $1 - \lambda \geq 0$)

$$= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Dimostrazione (continua)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.



- ▶ La dimostrazione usa soltanto la disuguaglianza triangolare e l'omogeneità assoluta, che valgono per **ogni** norma.
- ▶ Quindi la stessa dimostrazione prova che ogni norma è una funzione convessa.

Convessità di ogni norma

Osservazione 3: convessità di ogni norma

Per ogni norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ (in particolare $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_q$ con $q \geq 1$, e $\|\cdot\|_\infty$), la funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$$

è convessa nel suo dominio.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = \|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}\|$$

$$\leq \|\lambda \mathbf{p}\| + \|(1 - \lambda) \mathbf{w}\|$$

(per la disuguaglianza triangolare)

$$= |\lambda| \|\mathbf{p}\| + |1 - \lambda| \|\mathbf{w}\|$$

(per l'omogeneità assoluta)

$$= \lambda \|\mathbf{p}\| + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|$$

(poiché $\lambda \geq 0$ e $1 - \lambda \geq 0$)

$$= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Dimostrazione (continua)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.



Corollario 1

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo

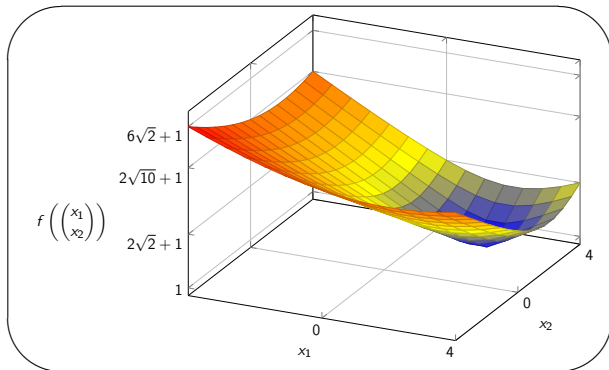
$$\|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}\|_2 \leq \lambda \|\mathbf{p}\|_2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2$$

- Usiamo questa disuguaglianza per dimostrare che la distanza da un punto è una funzione convessa.

Esempio: la distanza da un punto (1/3)

Consideriamo il vettore $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 + 1$$



Esempio: la distanza da un punto (2/3)

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= \|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1 \\ &= \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c}) + (1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_2 + 1 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\leq \lambda \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1 \\ &\quad (\text{per la disuguaglianza del corollario}) \\ &= \lambda(\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + 1) + (1 - \lambda)(\|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Esempio: la distanza da un punto (3/3)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Convessità del quadrato della norma euclidea

Osservazione 4: convessità del quadrato della norma euclidea

La funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2^2$$

è convessa nel suo dominio.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= \|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}\|_2^2 \\ &= (\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w})' (\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\ &= \lambda^2 \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda) (\mathbf{p}' \mathbf{w}) \\ &\leq \lambda^2 \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{p}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2 \\ &\quad \text{(per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

Dimostrazione (continua)

$$\begin{aligned}&\leq \lambda^2 \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 \\&\quad + \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{p}\|_2^2 + \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2^2 \\&\quad (\text{poiché } 2ab \leq a^2 + b^2 \text{ per ogni } a, b \in \mathbb{R}, \\&\quad \text{con } a = \|\mathbf{p}\|_2 \text{ e } b = \|\mathbf{w}\|_2) \\&= (\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda)) \|\mathbf{p}\|_2^2 \\&\quad + ((1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda)) \|\mathbf{w}\|_2^2 \\&= \lambda \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2^2 \\&= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})\end{aligned}$$

Dimostrazione (continua)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.



- La dimostrazione seguente è più diretta e non richiede l'uso della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz né della disuguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione alternativa

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= (\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w})' (\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\ &= \lambda^2 \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda) (\mathbf{p}' \mathbf{w}) \\ &= \lambda^2 \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad + \lambda(1 - \lambda) (\|\mathbf{p}\|_2^2 + \|\mathbf{w}\|_2^2 - \|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_2^2) \\ &\quad (\text{poiché } \|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{p}\|_2^2 + \|\mathbf{w}\|_2^2 - 2\mathbf{p}' \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Dimostrazione alternativa (continua)

$$\begin{aligned} &= (\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda)) \|\mathbf{p}\|_2^2 \\ &\quad + ((1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda)) \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_2^2 \\ &= \lambda \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_2^2 \\ &\leq \lambda \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2^2 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_2^2 \geq 0) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Dimostrazione alternativa (continua)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.



Corollario 2

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo

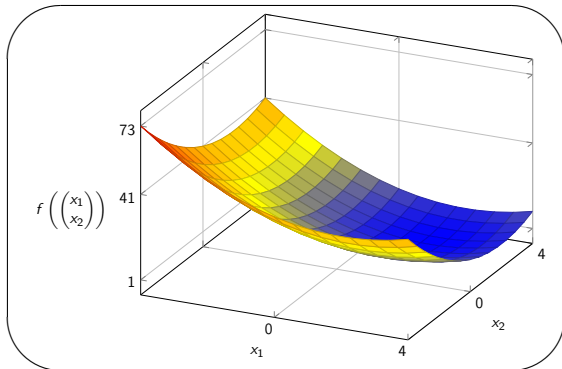
$$\|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}\|_2^2 \leq \lambda \|\mathbf{p}\|_2^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w}\|_2^2$$

- Usiamo questa disuguaglianza per dimostrare che il quadrato della distanza da un punto è una funzione convessa.

Esempio: il quadrato della distanza da un punto (1/3)

Consideriamo il vettore $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 + 1$$



Esempio: il quadrato della distanza da un punto (2/3)

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= \|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2^2 + 1 \\ &= \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c}) + (1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_2^2 + 1 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\leq \lambda \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2^2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2^2 + 1 \\ &\quad (\text{per la disuguaglianza del corollario}) \\ &= \lambda(\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2^2 + 1) + (1 - \lambda)(\|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2^2 + 1) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Esempio: il quadrato della distanza da un punto (3/3)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Norme:

- ▶ Positività, omogeneità assoluta e disuguaglianza triangolare
- ▶ $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_q$ ($q \geq 1$) e $\|\mathbf{x}\|_\infty$

Convessità:

- ▶ Ogni norma è una funzione convessa (disuguaglianza triangolare + omogeneità)
- ▶ Il quadrato della norma euclidea $\|\mathbf{x}\|_2^2$ è convesso
- ▶ La distanza e il quadrato della distanza da un punto $\mathbf{c}$ sono convessi

Proprietà delle funzioni convesse e concave

Introduzione: Proprietà delle funzioni convesse e concave

- ▶ In questa sezione vediamo come **costruire** nuove funzioni convesse a partire da funzioni note: l'opposta, la somma con coefficienti non negativi e il massimo.
- ▶ Queste proprietà permettono di dimostrare la convessità senza tornare ogni volta alla definizione.
- ▶ Infine, vediamo che i punti che soddisfano vincoli $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ con f_i convesse formano un **insieme convesso**: la base dei problemi di ottimizzazione convessi.

Convessa e concava: la funzione opposta

Osservazione 5

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in D se e solo se la funzione $-f$ è concava in D .

Dimostrazione

Sia f convessa in D . Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in D$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}(-f)(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= -f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\ &\geq -(\lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})) \\ &\quad \text{(poiché } f \text{ è convessa,} \\ &\quad \text{e } -1 \text{ inverte la disuguaglianza)} \\ &= \lambda (-f)(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) (-f)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

Quindi,

$$(-f)(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \geq \lambda (-f)(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) (-f)(\mathbf{w})$$

Dimostrazione (continua)

- ▶ Il dominio D è un insieme convesso, poiché f è convessa in D . Di conseguenza, la funzione $-f$ è concava nel suo dominio.
- ▶ Il viceversa si dimostra allo stesso modo, partendo dalla disuguaglianza della funzione concava $-f$ e moltiplicandola per -1 .



Somma con coefficienti non negativi

Osservazione 6

Siano $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convesse in D e siano $\alpha, \beta \geq 0$. Allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è convessa in D . Lo stesso vale per le funzioni concave.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in D$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= \alpha f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\ &\quad + \beta g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\ &\leq \alpha(\lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{w})) \\ &\quad + \beta(\lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)g(\mathbf{w})) \\ &\quad \text{(poiché } f \text{ e } g \text{ sono convesse,} \\ &\quad \text{e } \alpha \geq 0, \beta \geq 0) \\ &= \lambda(\alpha f(\mathbf{p}) + \beta g(\mathbf{p})) \\ &\quad + (1 - \lambda)(\alpha f(\mathbf{w}) + \beta g(\mathbf{w})) \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(\mathbf{p}) \\ &\quad + (1 - \lambda)(\alpha f + \beta g)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

Dimostrazione (continua)

Quindi,

$$\begin{aligned} & (\alpha f + \beta g)(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\ & \leq \lambda (\alpha f + \beta g)(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) (\alpha f + \beta g)(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Il dominio D è un insieme convesso, poiché f è convessa in D . Di conseguenza, la funzione $\alpha f + \beta g$ è convessa nel suo dominio. Per le funzioni concave vale lo stesso ragionamento con $\geq$.



- Il massimo puntuale di funzioni convesse è a sua volta una funzione convessa: questo ci permette di combinare più funzioni convesse in una sola preservando la convessità.

Osservazione 7

Date m funzioni $f_i : D_i \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convesse nei loro domini, con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, la funzione

$$f : \bigcap_{i=1}^m D_i \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \max \{ f_i(\mathbf{x}) : i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

è convessa nel suo dominio. Analogamente, il minimo di m funzioni concave è concavo nel suo dominio.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^m D_i$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = \max \{ f_i(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) : i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

$$= f_k(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w})$$

(per un indice $k \in \{1, 2, \dots, m\}$
che realizza il massimo)

$$\leq \lambda f_k(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f_k(\mathbf{w})$$

(poiché f_k è convessa)

Dimostrazione (continua)

$$\begin{aligned} &\leq \lambda \max \{f_i(\mathbf{p}) : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \\ &\quad + (1 - \lambda) \max \{f_i(\mathbf{w}) : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \\ &\quad \text{(poiché } \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Dimostrazione (continua)

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Il dominio $\bigcap_{i=1}^m D_i$ è un insieme convesso, poiché è l'intersezione di insiemi convessi. Di conseguenza, la funzione f è convessa nel suo dominio.

L'enunciato per il minimo di funzioni concave segue applicando questo a $-f_1, \dots, -f_m$.



Di nuovo i due esempi con due segmenti

- ▶ Il valore assoluto $|x| = \max\{x, -x\}$ è il massimo delle due funzioni x e $-x$, che sono convesse (e concave), poiché la definizione vale con l'uguaglianza:

$$-(\lambda p + (1 - \lambda)w) = \lambda(-p) + (1 - \lambda)(-w)$$

- ▶ La funzione $\min\{x + 2, 4 - \frac{1}{2}x\}$ è il minimo delle due funzioni $x + 2$ e $4 - \frac{1}{2}x$, che sono concave per la stessa ragione:

$$(\lambda p + (1 - \lambda)w) + 2 = \lambda(p + 2) + (1 - \lambda)(w + 2)$$

$$4 - \frac{1}{2}(\lambda p + (1 - \lambda)w) = \lambda(4 - \frac{1}{2}p) + (1 - \lambda)(4 - \frac{1}{2}w)$$

- ▶ Per l'osservazione precedente, ritroviamo che le due funzioni sono, rispettivamente, convessa e concava.

Esempio: massimo di funzioni convesse (1/2)

Consideriamo le seguenti due funzioni convesse (viste negli esempi):

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1 : x \mapsto \frac{1}{10}(x - 10)^2$$

e

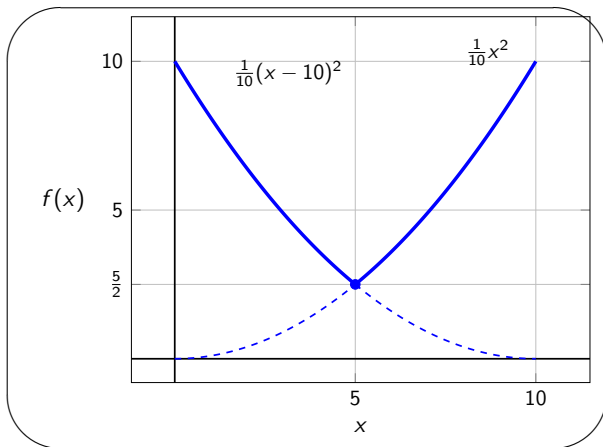
$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{10} x^2$$

Per l'osservazione precedente, la seguente funzione è convessa nel suo dominio:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \max \left\{ \frac{1}{10}(x - 10)^2, \frac{1}{10} x^2 \right\}$$

Esempio: massimo di funzioni convesse (2/2)

In figura, il grafico di f è la linea blu continua; le parti tratteggiate delle due parabole si trovano sotto di essa.



Usiamo ora le funzioni convesse per costruire insiemi convessi.

Osservazione 8

Date m funzioni $f_i : D_i \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convesse nei loro domini, con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, l'insieme

$$\left\{ \mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^m D_i : f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \right\}$$

è convesso.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ dell'insieme e ogni $\lambda \in [0, 1]$, il punto $\lambda\mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}$ appartiene a $\bigcap_{i=1}^m D_i$, poiché $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in D_i$ e ogni dominio D_i è convesso, e per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ abbiamo:

$$f_i(\lambda\mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) \leq \lambda f_i(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f_i(\mathbf{w})$$

(poiché f_i è convessa)

$$\leq \lambda 0 + (1 - \lambda) 0$$

(poiché $f_i(\mathbf{p}) \leq 0$, $f_i(\mathbf{w}) \leq 0$,
 $\lambda \geq 0$ e $1 - \lambda \geq 0$)

$$= 0$$

Dimostrazione (continua)

Quindi,

$$f_i(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Di conseguenza, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ appartiene all'insieme e l'insieme è convesso.



Esempio: insieme convesso da funzioni convesse (1/2)

Consideriamo le seguenti due funzioni convesse (viste negli esempi):

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 9$$

e

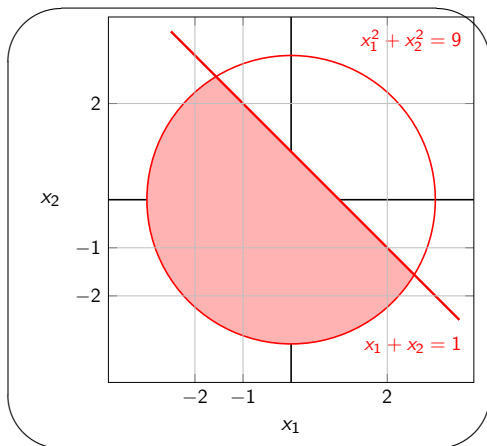
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 - 1$$

Per l'osservazione precedente, il seguente è un insieme convesso:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \right\}$$

Esempio: insieme convesso da funzioni convesse (2/2)

È il disco di raggio 3 centrato nell'origine (circonferenza rossa) tagliato dal semipiano $x_1 + x_2 \leq 1$ (retta rossa), ombreggiato in rosso.



Esempio: altro insieme convesso da funzioni convesse (1/3)

Consideriamo le seguenti due funzioni convesse:

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto |x_1| + |x_2| - 2$$

e

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 - 1.$$

- ▶ La funzione f_1 è convessa perché $|x_1| = \max\{x_1, -x_1\}$ e $|x_2| = \max\{x_2, -x_2\}$ sono massimi di funzioni convesse (come $|x| = \max\{x, -x\}$ sopra), e la somma di funzioni convesse è convessa.
- ▶ La funzione f_2 è convessa per l'esempio della funzione lineare di due variabili.

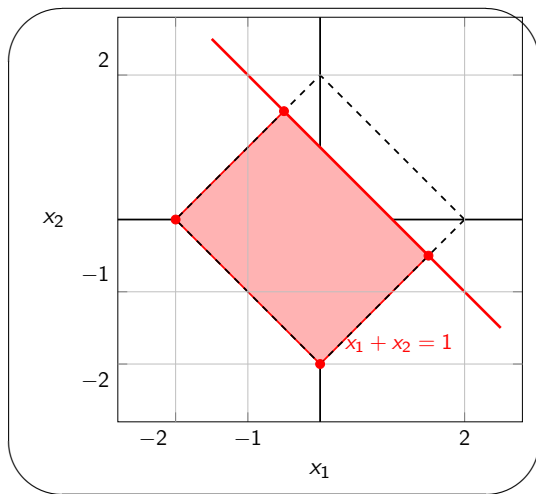
Esempio: altro insieme convesso da funzioni convesse (2/3)

Anche in questo caso, per la stessa osservazione, il seguente è un insieme convesso:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| - 2 \leq 0 \text{ e } x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \right\}.$$

È il quadrato di vertici $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$ (tratteggiato) tagliato dal semipiano $x_1 + x_2 \leq 1$ (retta rossa): il quadrilatero di vertici $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ombreggiato in rosso.

Esempio: altro insieme convesso da funzioni convesse (3/3)



Insiemi convessi definiti da vincoli

- ▶ I punti che soddisfano un numero finito di vincoli $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ con funzioni convesse f_i formano un insieme convesso.
- ▶ Ad esempio, ogni semispazio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}'\mathbf{x} \leq b\}$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$, è un insieme convesso di questo tipo, poiché la funzione lineare $\mathbf{a}'\mathbf{x} - b$ è convessa.
- ▶ Lo è anche ogni intersezione di un numero finito di semispazi, come i poliedri della programmazione lineare.

Costruire funzioni convesse:

- ▶ f è convessa se e solo se $-f$ è concava
- ▶ $\alpha f + \beta g$ con $\alpha, \beta \geq 0$ è convessa se f e g sono convesse
- ▶ Il massimo di funzioni convesse è convesso; il minimo di funzioni concave è concavo

Insiemi convessi:

- ▶ $\{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ è convesso se ogni f_i è convessa
- ▶ Semispazi e poliedri sono insiemi convessi di questo tipo

Messaggi chiave

Riepilogo (1/2)

1. Definizioni:

- ▶ Convessa: $f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$, con dominio convesso
- ▶ Concava: la stessa con $\geq$

2. Come si dimostra la convessità:

- ▶ Verificare la definizione: partire da $f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w})$ e arrivare a $\lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$, giustificando ogni passaggio

3. Funzioni convesse da ricordare:

- ▶ Funzioni lineari (convesse e concave), $|x|$, funzioni quadratiche convesse
- ▶ Ogni norma, il quadrato della norma euclidea, la distanza (e il suo quadrato) da un punto

4. Proprietà:

- ▶ Opposta, somme con coefficienti non negativi, massimo
- ▶ Vincoli $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ con f_i convesse definiscono un insieme convesso