

# Funzioni di più variabili



# Indice

Funzioni di più variabili

Gradiente, matrice Hessiana e insiemi di livello

Esempi di funzioni non quadratiche



# Funzioni di più variabili



# Introduzione: Funzioni di più variabili

- ▶ In questa sezione definiamo le **funzioni di  $n$  variabili reali**: prendono un vettore di  $\mathbb{R}^n$  e restituiscono un numero reale.
- ▶ In ottimizzazione la quantità da minimizzare o da massimizzare (un costo, un profitto, una distanza) dipende quasi sempre da **molte** decisioni contemporaneamente.
- ▶ Fissiamo la notazione (vettori in grassetto, vettori colonna, trasposto) che useremo in tutto il corso.



# Funzione di più variabili reali

## Definizione 1: funzione di più variabili reali

*La funzione:*

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \mapsto f(\mathbf{x})$$

*si chiama **funzione (scalare) di  $n$  variabili reali** e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  è il suo **dominio**.*

# Ingresso, uscita e notazione

- ▶ Una funzione, indicata di solito con  $f$ , di  $n$  variabili reali prende in **ingresso** un vettore di  $n$  numeri reali, rappresentato di solito dal vettore (colonna) delle variabili  $\mathbf{x}$ .
- ▶ Restituisce in **uscita** un numero reale, il valore della funzione, indicato di solito con  $f(\mathbf{x})$ .
- ▶ I vettori si scrivono in grassetto e sono vettori colonna; il trasposto di un vettore  $\mathbf{x}$  è il vettore riga:

$$\mathbf{x}' = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$$

## Esempio: una funzione di tre variabili

Consideriamo la funzione:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2 + x_3^2$$

Nel punto  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  il valore della funzione è:

$$f \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot (-1) + 3^2 = -2 + 9 = 7$$

# Riepilogo

## Funzioni di più variabili:

- ▶  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  associa a un vettore  $\mathbf{x} \in D$  un numero reale  $f(\mathbf{x})$
- ▶  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  è il **dominio** della funzione

## Notazione:

- ▶ I vettori sono in grassetto e sono vettori colonna
- ▶  $\mathbf{x}'$  è il trasposto di  $\mathbf{x}$ , un vettore riga

# Gradiente, matrice Hessiana e insiemi di livello

# Introduzione: Gradiente, matrice Hessiana e insiemi di livello

- ▶ In questa sezione definiamo tre strumenti per studiare una funzione di più variabili: il **gradiente**, la **matrice Hessiana** e gli **insiemi di livello**.
- ▶ Il gradiente ci dice in quale direzione la funzione cresce più rapidamente, la matrice Hessiana ne descrive la **curvatura**, gli insiemi di livello ci permettono di disegnare la funzione nel piano.
- ▶ Questi strumenti si usano in tutto il corso per riconoscere le funzioni convesse e per trovare le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione.

## Definizione 2: gradiente

Data  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il **gradiente**  $\nabla f(\mathbf{x})$  di  $f$  in  $\mathbf{x}$  è il vettore (colonna) delle derivate parziali prime:

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

# Massima crescita e massima decrescita

- ▶ Il gradiente  $\nabla f(\mathbf{x})$  (se non è nullo) fornisce la direzione di **massima crescita** (massima derivata direzionale fra le direzioni unitarie).
- ▶  $-\nabla f(\mathbf{x})$  fornisce la direzione di **massima decrescita**.

# Dalle derivate prime alle derivate seconde

Il gradiente raccoglie le derivate parziali prime.  
Raccogliendo le derivate parziali seconde otteniamo una matrice: la **matrice Hessiana**.

## Definizione 3: matrice Hessiana

Data una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la **matrice Hessiana**  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  di  $f$  in  $\mathbf{x}$  è la matrice delle derivate parziali seconde:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

# Elementi della matrice Hessiana e simmetria

- ▶ L'elemento di riga  $i$  e colonna  $j$  della matrice Hessiana si ottiene derivando  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$  rispetto a  $x_i$ .
- ▶ Se le derivate parziali seconde di  $f$  sono continue (come per tutte le funzioni di questo corso), l'ordine di derivazione non conta:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

e la matrice Hessiana è una matrice **simmetrica**.

# Curvatura locale

La matrice Hessiana  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  descrive la **curvatura locale** di  $f$  attorno a  $\mathbf{x}$ , cioè come varia il gradiente allontanandosi da  $\mathbf{x}$ .

## Definizione 4: insieme di livello

*Data una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e una costante  $k \in \mathbb{R}$ , l'insieme di livello  $L(k)$  di  $f$  al livello  $k$  è:*

$$L(k) := \{ \mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = k \}$$

# Insiemi di livello e gradiente

- ▶ Un insieme di livello  $L(k)$  è l'insieme dei punti in cui la funzione assume il valore costante  $k$ .
- ▶ Il gradiente  $\nabla f(\mathbf{x})$  (se non è nullo) è **perpendicolare** all'insieme di livello passante per  $\mathbf{x}$ .
- ▶ Il gradiente punta verso i valori **crescenti** di  $f$ .

## I tre strumenti insieme

Calcoliamo ora il gradiente, la matrice Hessiana e gli insiemi di livello di una semplice funzione quadratica di due variabili, e li disegniamo.

## Esempio: una funzione quadratica (1/4)

Consideriamo la funzione quadratica:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + 1$$

Il **gradiente** della funzione è:

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix}$$

## Esempio: una funzione quadratica (2/4)

Per esempio:

- ▶ nel punto  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  abbiamo

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(3-2) \\ 2(2-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ nel punto  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  abbiamo

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2(2-2) \\ 2(3-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Esempio: una funzione quadratica (3/4)

La **matrice Hessiana** della funzione è:

$$\nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si noti che la matrice Hessiana è **costante** (non dipende dal punto).

## Esempio: una funzione quadratica (4/4)

Gli **insiemi di livello** della funzione sono:

$$L(k) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + 1 = k \right\}$$

con  $k \in \mathbb{R}$ , e quindi:

- ▶ per  $k > 1$  sono circonferenze di centro  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  e raggio  $\sqrt{k-1}$ ;
- ▶ l'insieme di livello  $L(1)$  è il solo punto  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;
- ▶ gli insiemi di livello con  $k < 1$  sono vuoti.

# Disegnare la funzione

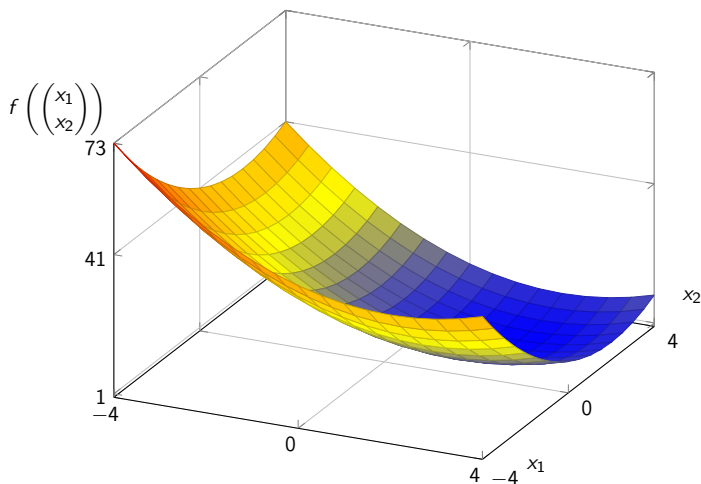
- ▶ Disegniamo ora la stessa funzione in due modi.
- ▶ Prima il suo **grafico**, una superficie in tre dimensioni.
- ▶ Poi due dei suoi **insiemi di livello** nel piano, insieme ai due gradienti appena calcolati.

## Esempio: grafico della funzione quadratica (1/2)

La figura seguente mostra il grafico della funzione nel dominio  $[-4, 4] \times [-4, 4]$ :

- ▶ il suo punto più basso è in  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , dove  $f = 1$ ;
- ▶ il suo punto più alto è in  $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ , dove  $f = 73$ .

## Esempio: grafico della funzione quadratica (2/2)

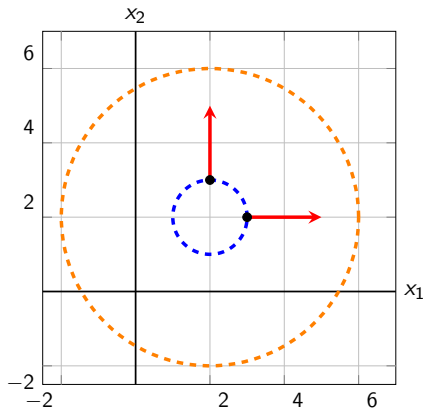


## Esempio: insiemi di livello e gradienti (1/2)

La figura seguente mostra:

- ▶ l'insieme di livello  $L(2)$ , circonferenza di raggio 1, in **blu**;
- ▶ l'insieme di livello  $L(17)$ , circonferenza di raggio 4, in **arancione**;
- ▶ i due gradienti dell'esempio precedente, in **rosso**, tracciati a partire dai punti  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  dell'insieme di livello  $L(2)$ .

## Esempio: insiemi di livello e gradienti (2/2)



I vettori gradiente sono perpendicolari agli insiemi di livello e puntano nella direzione di massima crescita della funzione (allontanandosi dal centro).

# Riepilogo (1/2)

## Gradiente:

- ▶  $\nabla f(\mathbf{x})$  è il vettore colonna delle derivate parziali prime
- ▶ Fornisce la direzione di massima crescita;  $-\nabla f(\mathbf{x})$  quella di massima decrescita

## Matrice Hessiana:

- ▶  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  è la matrice delle derivate parziali seconde
- ▶ È simmetrica e descrive la curvatura locale di  $f$

## Riepilogo (2/2)

### Insiemi di livello:

- ▶  $L(k) = \{ \mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = k \}$ : i punti in cui  $f$  assume il valore  $k$
- ▶ Il gradiente è perpendicolare all'insieme di livello passante per  $\mathbf{x}$  e punta verso i valori crescenti di  $f$

### Esempio quadratico:

- ▶ Per  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + 1$  gli insiemi di livello sono circonferenze di centro  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  e la matrice Hessiana è costante

# Esempi di funzioni non quadratiche



# Introduzione: Esempi di funzioni non quadratiche

- ▶ Per una funzione quadratica la matrice Hessiana è costante (capitolo «Funzioni quadratiche»).
- ▶ In generale, la matrice Hessiana **dipende dal punto**: in questa sezione lo vediamo su due esempi, una funzione cubica e una funzione esponenziale.
- ▶ Verifichiamo anche che il gradiente è perpendicolare all'insieme di livello anche quando l'insieme di livello non è una circonferenza.

## Esempio: una funzione cubica (1/3)

Consideriamo la funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 x_2$$

Il **gradiente** e la **matrice Hessiana** della funzione sono:

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 x_2 & 2 x_1 \\ 2 x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Esempio: una funzione cubica (2/3)

Nel punto  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  abbiamo:

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## Esempio: una funzione cubica (3/3)

Nel punto  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  abbiamo:

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \cdot 3 \\ (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana cambia da punto a punto e, come previsto, è simmetrica in ogni punto.

# Dalla funzione cubica alla funzione esponenziale

Nel prossimo esempio disegniamo anche un insieme di livello e verifichiamo, con un calcolo, che il gradiente è perpendicolare a esso.

## Esempio: una funzione esponenziale (1/5)

Consideriamo la funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{x_1} + x_2^2$$

Il **gradiente** e la **matrice Hessiana** della funzione sono:

$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Esempio: una funzione esponenziale (2/5)

- L'insieme di livello  $L(2)$  è la curva  $e^{x_1} + x_2^2 = 2$ , cioè:

$$x_1 = \ln(2 - x_2^2) \quad \text{per } |x_2| < \sqrt{2}$$

- Contiene i punti  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \ln 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , poiché:

$$e^0 + 1^2 = 2 \quad \text{e} \quad e^{\ln 2} + 0^2 = 2$$

## Esempio: una funzione esponenziale (3/5)

In questi punti:

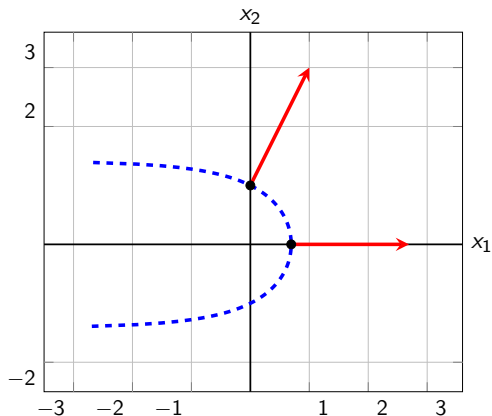
$$\nabla f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f \left( \begin{pmatrix} \ln 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} \ln 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Esempio: una funzione esponenziale (4/5)

L'insieme di livello  $L(2)$  (in blu) e i due vettori gradiente (in rosso):



## Esempio: una funzione esponenziale (5/5)

- ▶ La direzione tangente all'insieme di livello in  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  è  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ : la derivata di  $x_1 = \ln(2 - x_2^2)$  rispetto a  $x_2$  è  $\frac{-2x_2}{2-x_2^2}$ , uguale a  $-2$  per  $x_2 = 1$ .

- ▶ E infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

- ▶ Quindi il gradiente è perpendicolare all'insieme di livello anche quando l'insieme di livello non è una circonferenza.

# Gradiente e matrice Hessiana: che cosa ricordare

- ▶ Il gradiente  $\nabla f(\mathbf{x})$  è il vettore colonna delle derivate parziali prime: punta nella direzione di massima crescita ed è perpendicolare all'insieme di livello passante per  $\mathbf{x}$ .
- ▶ La matrice Hessiana  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  è la matrice (simmetrica) delle derivate parziali seconde e descrive la curvatura locale di  $f$ .

## Funzioni non quadratiche:

- ▶ La matrice Hessiana dipende dal punto: per  $x_1^2 x_2$  è

$$\nabla^2 f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ La matrice Hessiana è simmetrica in ogni punto

## Gradiente e insiemi di livello:

- ▶ Per  $e^{x_1} + x_2^2$  l'insieme di livello  $L(2)$  non è una circonferenza, ma il gradiente è comunque perpendicolare a esso

# Messaggi chiave

# Riepilogo (1/2)

## 1. Funzioni di più variabili:

- ▶  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  associa a un vettore colonna  $\mathbf{x}$  un numero reale  $f(\mathbf{x})$

## 2. Gradiente:

- ▶  $\nabla f(\mathbf{x})$ : vettore colonna delle derivate parziali prime
- ▶ Direzione di massima crescita, perpendicolare agli insiemi di livello

## Riepilogo (2/2)

### 3. Matrice Hessiana:

- ▶  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ : matrice simmetrica delle derivate parziali seconde
- ▶ Descrive la curvatura locale; è costante per le funzioni quadratiche e in generale dipende dal punto

### 4. Insiemi di livello:

- ▶  $L(k) = \{ \mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = k \}$ , i punti in cui  $f$  vale  $k$