

Insiemi convessi



Indice

Combinazione convessa

Insiemi convessi

Esempi di insiemi convessi

Proprietà degli insiemi convessi



Combinazione convessa



Introduzione: Combinazione convessa

- ▶ Prima di studiare gli insiemi convessi ci serve un modo per **combinare punti**: la **combinazione convessa**.
- ▶ Una combinazione convessa di due punti è un punto del **segmento** che li congiunge; con m punti otteniamo i punti del loro **involucro convesso**.
- ▶ È lo strumento di base di tutto il corso: gli insiemi convessi, e più avanti le funzioni convesse, si definiscono mediante le combinazioni convesse.

Definizione 1: combinazione convessa

Dati due punti

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n \quad e \quad \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$$

*la loro **combinazione convessa** con uno scalare $\lambda \in [0, 1]$ è il punto*

$$\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$$

Combinazione convessa: componenti

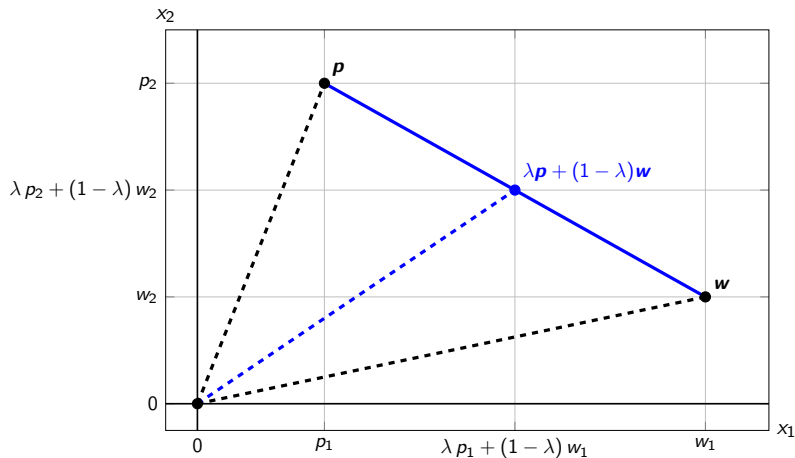
Componente per componente, la combinazione convessa di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ è il punto

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda p_1 + (1 - \lambda)w_1 \\ \lambda p_2 + (1 - \lambda)w_2 \\ \vdots \\ \lambda p_n + (1 - \lambda)w_n \end{pmatrix}}_{\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}}$$

Combinazioni convesse e segmenti

- ▶ Le combinazioni convesse per tutti i valori $\lambda \in [0, 1]$ sono i punti del segmento che congiunge i due punti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$.
- ▶ Per $\lambda = 1$ otteniamo $\mathbf{p}$, per $\lambda = 0$ otteniamo $\mathbf{w}$ e per $\lambda = \frac{1}{2}$ il punto medio del segmento.
- ▶ In $\mathbb{R}^2$, le combinazioni convesse sono i punti del segmento blu della figura seguente.

Il segmento fra p e w



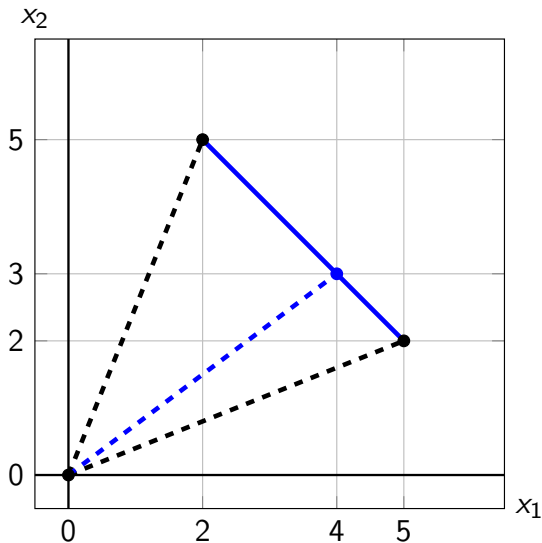
Esempio (1/2)

Consideriamo i punti $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.

La loro combinazione convessa con $\lambda = \frac{1}{3}$ è il punto:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 2 + (1 - \frac{1}{3})5 \\ \frac{1}{3} \cdot 5 + (1 - \frac{1}{3})2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esempio (2/2)



Da due punti a m punti

- ▶ Con due punti, la combinazione convessa usa i due pesi λ e $1 - \lambda$: sono entrambi non negativi e la loro somma è 1.
- ▶ La stessa idea vale per un numero qualsiasi m di punti: usiamo m pesi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, non negativi e con somma 1.
- ▶ Per $m = 2$, con $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_2 = 1 - \lambda$, ritroviamo la definizione precedente.



Definizione 2: combinazione convessa di m punti

Dati m punti

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ \vdots \\ p_n^{(1)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}^{(1)}} \in \mathbb{R}^n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ \vdots \\ p_n^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}^{(2)}} \in \mathbb{R}^n \quad \dots \quad \underbrace{\begin{pmatrix} p_1^{(m)} \\ p_2^{(m)} \\ \vdots \\ p_n^{(m)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}^{(m)}} \in \mathbb{R}^n$$

*la loro **combinazione convessa** con scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ tali che $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ è il punto*

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{p}^{(k)}$$

Combinazione convessa di m punti: componenti

Componente per componente, la combinazione convessa degli m punti è il punto

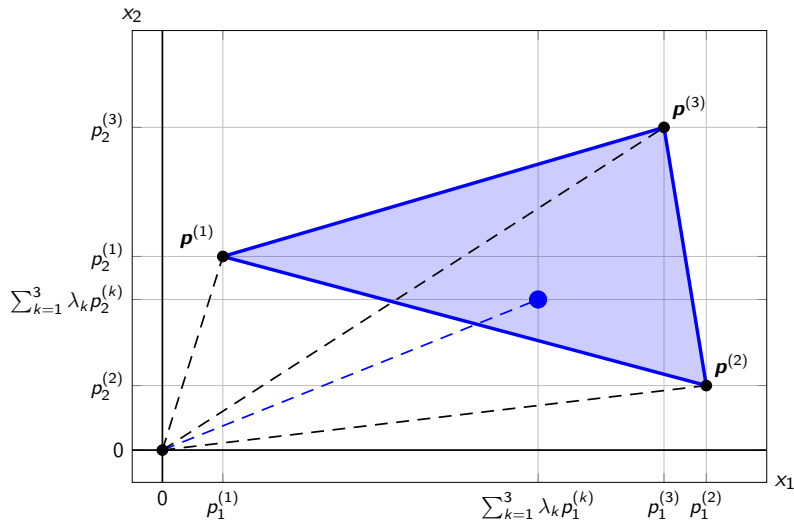
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 p_1^{(1)} + \lambda_2 p_1^{(2)} + \cdots + \lambda_m p_1^{(m)} \\ \lambda_1 p_2^{(1)} + \lambda_2 p_2^{(2)} + \cdots + \lambda_m p_2^{(m)} \\ \vdots \\ \lambda_1 p_n^{(1)} + \lambda_2 p_n^{(2)} + \cdots + \lambda_m p_n^{(m)} \end{pmatrix}}_{\sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{p}^{(k)}}$$

Involucro convesso

- ▶ Le combinazioni convesse che si ottengono con tutti gli scalari ammessi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ sono i punti dell'**involucro convesso** degli m punti.
- ▶ In $\mathbb{R}^2$ con $m = 3$ punti, l'involucro convesso è formato da tutti i punti interni (e sul bordo) del triangolo che ha per vertici i tre punti.
- ▶ Nella figura seguente l'involucro convesso è la regione blu, e il punto blu è la combinazione convessa con $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1}{6}$.



L'involucro convesso di tre punti



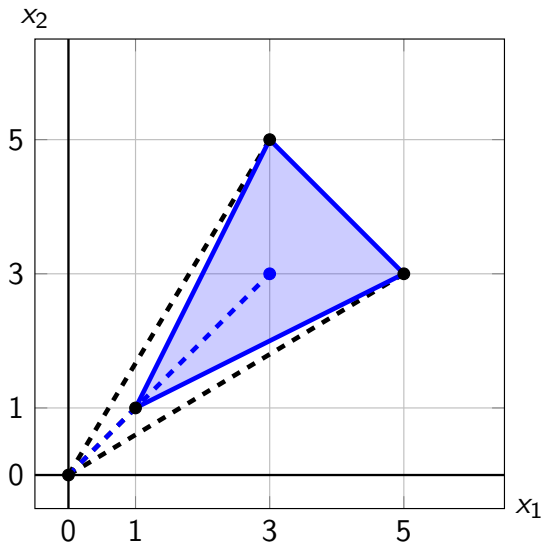
Esempio (1/2)

Consideriamo i tre punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.

La loro combinazione convessa con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ è il punto:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esempio (2/2)



Combinazione convessa di due punti:

- ▶ $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ con $\lambda \in [0, 1]$
- ▶ Al variare di λ otteniamo il segmento che congiunge $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$

Combinazione convessa di m punti:

- ▶ $\sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{p}^{(k)}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ e $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$
- ▶ Al variare degli scalari ammessi otteniamo l'involucro convesso degli m punti

Insiemi convessi



Introduzione: Insiemi convessi

- ▶ In questa sezione definiamo gli **insiemi convessi**: gli insiemi che contengono tutto il segmento fra due qualsiasi dei loro punti.
- ▶ Confrontiamo insiemi convessi e non convessi in $\mathbb{R}^2$, sia con bordi curvi sia con lati rettilinei.
- ▶ Gli insiemi convessi sono il terreno dell'ottimizzazione convessa: le regioni ammissibili dei problemi che studieremo in questo corso sono insiemi convessi.

Definizione 3: insieme convesso

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se

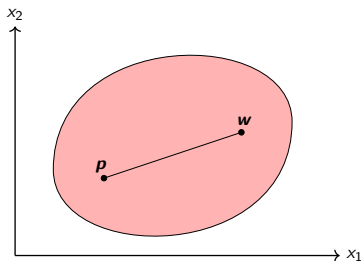
$\forall \mathbf{p}, \mathbf{w} \in A$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$ abbiamo $\underbrace{\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}}_{\text{combinazione convessa}} \in A$

Insiemi convessi a parole

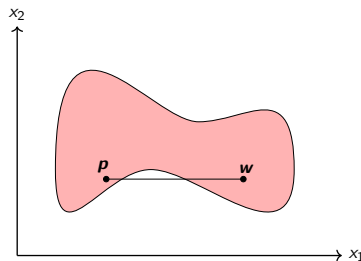
- ▶ Un sottoinsieme dello spazio n -dimensionale è convesso se, per ogni coppia di suoi punti, ogni combinazione convessa dei due punti appartiene al sottoinsieme.
- ▶ In altre parole, se tutti i punti del segmento che congiunge due punti qualsiasi del sottoinsieme appartengono al sottoinsieme.
- ▶ Per mostrare che un insieme **non** è convesso basta una coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w}$ il cui segmento esce dall'insieme.

Insiemi convessi e non convessi (1/2)

In $\mathbb{R}^2$ (lo spazio a 2 dimensioni), un esempio di insieme convesso e un esempio di insieme non convesso sono dati dalla figura seguente, prima con bordi curvi:



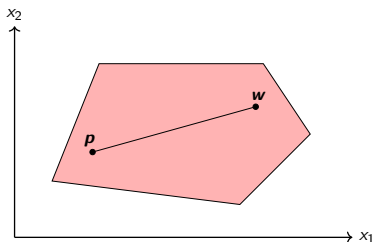
Insieme convesso



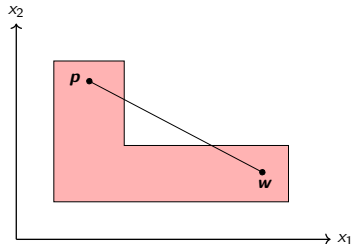
Insieme non convesso

Insiemi convessi e non convessi (2/2)

Lo stesso con insiemi a lati rettilinei: a sinistra un poligono convesso, a destra uno non convesso.



Insieme convesso



Insieme non convesso

Insieme convesso:

- ▶ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in A$ per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in A$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$
- ▶ In modo equivalente: il segmento che congiunge due punti qualsiasi dell'insieme appartiene all'insieme

Insieme non convesso:

- ▶ Esistono due punti dell'insieme il cui segmento esce dall'insieme

Esempi di insiemi convessi



Introduzione: Esempi di insiemi convessi

- ▶ In questa sezione dimostriamo che tre importanti famiglie di insiemi sono convesse: gli insiemi dei punti a distanza al più r da un centro $\mathbf{c}$, misurata con le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.
- ▶ In $\mathbb{R}^2$ sono un rombo, un disco e un quadrato.
- ▶ Le tre dimostrazioni usano solo la **definizione** di insieme convesso: è il metodo che useremo negli esercizi.



Come si dimostra la convessità

- ▶ Prendiamo due punti qualsiasi $\mathbf{p}$, $\mathbf{w}$ dell'insieme e un qualsiasi $\lambda \in [0, 1]$.
- ▶ Valutiamo la condizione dell'insieme nella combinazione convessa $\lambda\mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}$ e, con un'unica catena di passaggi, mostriamo che la condizione è soddisfatta.
- ▶ I passaggi usano due proprietà di ogni norma: la **disuguaglianza triangolare** e l'**omogeneità assoluta**.

La norma $\|\cdot\|_1$: un rombo

Osservazione 1

Per ogni vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e ogni scalare $r \in \mathbb{R}_{>0}$, l'insieme

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_1 \leq r \}$$

è convesso.

È l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ la cui somma degli scarti assoluti da $\mathbf{c}$ è al più r . In $\mathbb{R}^2$ è un rombo (un quadrato ruotato di 45°), e in $\mathbb{R}^3$ è un ottaedro regolare.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}$, $\mathbf{w}$ dell'insieme e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} - \mathbf{c}\|_1 &= \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c}) + (1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_1 \\ &\leq \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c})\|_1 + \|(1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_1 \\ &\quad \text{(per la disuguaglianza triangolare)} \\ &= |\lambda| \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_1 + |1 - \lambda| \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_1 \\ &\quad \text{(per l'omogeneità assoluta)} \\ &= \lambda \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_1 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_1 \\ &\quad \text{(poiché } \lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0) \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r \\ &\quad \text{(poiché } \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_1 \leq r \text{ e } \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_1 \leq r)\end{aligned}$$

Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ appartiene all'insieme e l'insieme è convesso. □

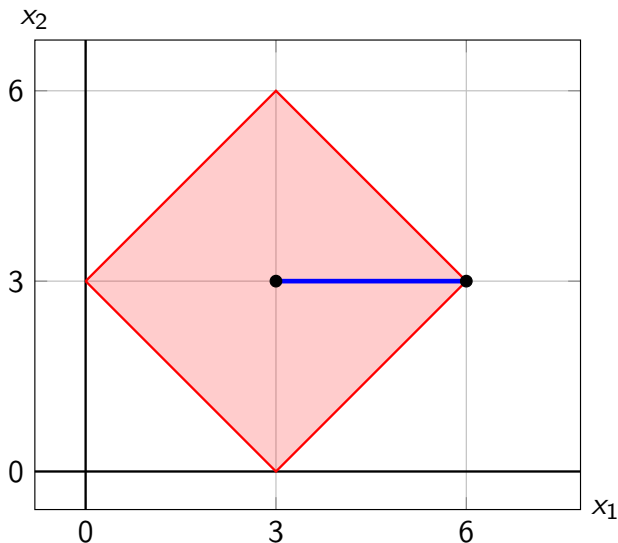
Esempio (1/2)

Per esempio, in $\mathbb{R}^2$, con $r = 3$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, abbiamo il seguente insieme convesso:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 3| + |x_2 - 3| \leq 3 \right\}$$

I punti di questo insieme sono tutti quelli interni al rombo (quadrato ruotato) o sul suo bordo, con centro in $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, con vertici in $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, rappresentati dalla regione ombreggiata in rosso nella figura seguente.

Esempio (2/2)



La stessa dimostrazione vale per la norma $\|\cdot\|_2$:
cambia solo la norma, i passaggi sono gli stessi.

Osservazione 2

Per ogni vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e ogni scalare $r \in \mathbb{R}_{>0}$, l'insieme

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2 \leq r \}$$

è convesso.

È l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ contenuti nella palla chiusa di raggio r e centro $\mathbf{c}$. In $\mathbb{R}^2$ è un disco, e in $\mathbb{R}^3$ è una sfera piena.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}$, $\mathbf{w}$ dell'insieme e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 &= \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c}) + (1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_2 \\ &\leq \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c})\|_2 + \|(1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_2 \\ &\quad \text{(per la disuguaglianza triangolare)} \\ &= |\lambda| \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + |1 - \lambda| \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 \\ &\quad \text{(per l'omogeneità assoluta)} \\ &= \lambda \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 \\ &\quad \text{(poiché } \lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0) \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r \\ &\quad \text{(poiché } \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 \leq r \text{ e } \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 \leq r)\end{aligned}$$

Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ appartiene all'insieme e l'insieme è convesso. □

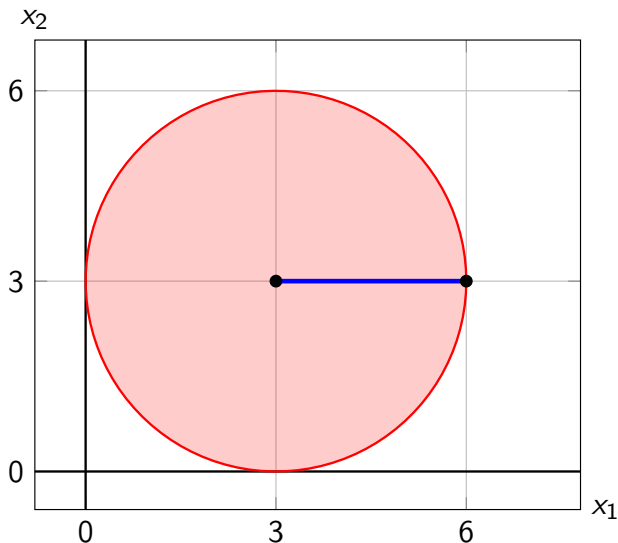
Esempio (1/2)

Per esempio, in $\mathbb{R}^2$, con $r = 3$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, abbiamo il seguente insieme convesso:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2} \leq 3 \right\}$$

I punti di questo insieme sono tutti quelli interni al disco di raggio 3 o sul suo bordo, con centro in $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, rappresentati dalla regione ombreggiata in rosso nella figura seguente.

Esempio (2/2)



E ancora una volta per la norma $\| \cdot \|_\infty$,
con gli stessi passaggi.

La norma $\|\cdot\|_\infty$: un quadrato

Osservazione 3

Per ogni vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e ogni scalare $r \in \mathbb{R}_{>0}$, l'insieme

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_\infty \leq r \}$$

è convesso.

È l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ il cui massimo scarto assoluto da $\mathbf{c}$ è al più r . In $\mathbb{R}^2$ è un quadrato con i lati paralleli agli assi, di lato $2r$ e centro $\mathbf{c}$, e in $\mathbb{R}^3$ è un cubo.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w}$ dell'insieme e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} - \mathbf{c}\|_{\infty} &= \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c}) + (1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_{\infty} \\ &\leq \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c})\|_{\infty} + \|(1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_{\infty} \\ &\quad \text{(per la disuguaglianza triangolare)} \\ &= |\lambda| \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_{\infty} + |1 - \lambda| \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_{\infty} \\ &\quad \text{(per l'omogeneità assoluta)} \\ &= \lambda \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_{\infty} + (1 - \lambda) \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_{\infty} \\ &\quad \text{(poiché } \lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0\text{)} \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r \\ &\quad \text{(poiché } \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_{\infty} \leq r \text{ e } \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_{\infty} \leq r\text{)}\end{aligned}$$

Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ appartiene all'insieme e l'insieme è convesso. □

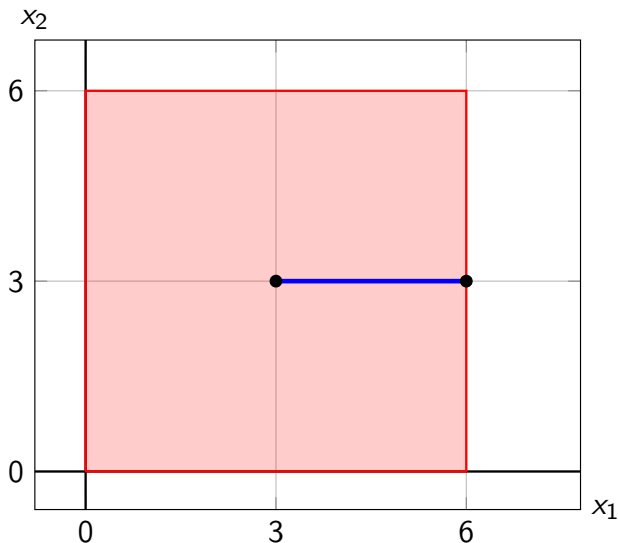
Esempio (1/2)

Per esempio, in $\mathbb{R}^2$, con $r = 3$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, abbiamo il seguente insieme convesso:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x_1 - 3|, |x_2 - 3| \} \leq 3 \right\}$$

I punti di questo insieme sono tutti quelli interni al quadrato con i lati paralleli agli assi, di lato 6, o sul suo bordo, con centro in $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, con vertici in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, rappresentati dalla regione ombreggiata in rosso nella figura seguente.

Esempio (2/2)



Insiemi convessi definiti da una norma:

- ▶ Per ogni $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, gli insiemi $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$ con le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono convessi
- ▶ In $\mathbb{R}^2$: un rombo, un disco e un quadrato; in $\mathbb{R}^3$: un ottaedro, una sfera piena e un cubo

La dimostrazione:

- ▶ Dalla definizione, con la disuguaglianza triangolare e l'omogeneità assoluta della norma

Proprietà degli insiemi convessi

Introduzione: Proprietà degli insiemi convessi

- ▶ In questa sezione dimostriamo che l'**intersezione** di insiemi convessi è un insieme convesso.
- ▶ Questa proprietà permette di costruire nuovi insiemi convessi a partire da insiemi più semplici: un insieme descritto da più condizioni, ciascuna delle quali definisce un insieme convesso, è convesso.
- ▶ Le regioni ammissibili dei problemi di ottimizzazione sono intersezioni di questo tipo: un insieme per ogni vincolo.

Osservazione 4

Per ogni famiglia di m insiemi convessi $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, l'insieme

$$\bigcap_{i=1}^m A_i$$

è convesso.

È l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che appartengono contemporaneamente a tutti gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Dimostrazione

Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^m A_i$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^m A_i \implies \mathbf{p} \in A_i \text{ e } \mathbf{w} \in A_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

(per definizione di intersezione)

$$\implies \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in A_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

(poiché ogni A_i è convesso)

$$\implies \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^m A_i$$

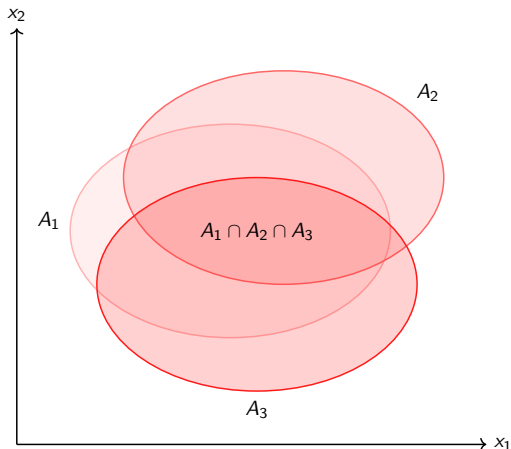
(per definizione di intersezione)

Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^m A_i$ e l'insieme è convesso. □

Vediamo ora alcune figure dell'intersezione di tre insiemi convessi A_1 , A_2 e A_3 in $\mathbb{R}^2$.

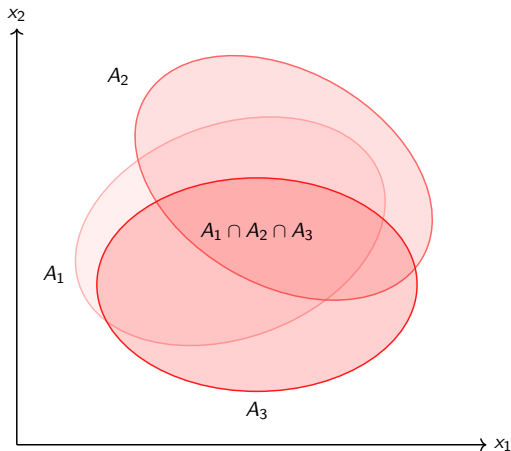
Intersezione di insiemi convessi (1/4)

In $\mathbb{R}^2$ (lo spazio a 2 dimensioni), esempi di intersezione di tre insiemi convessi A_1, A_2 e A_3 sono dati dalle figure seguenti, prima con tre ellissi:



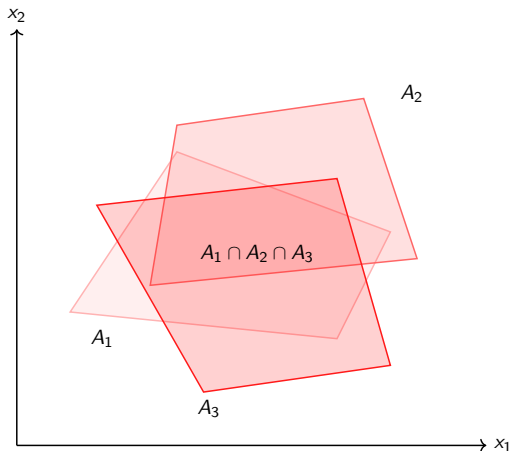
Intersezione di insiemi convessi (2/4)

Ancora tre ellissi, due delle quali ruotate:



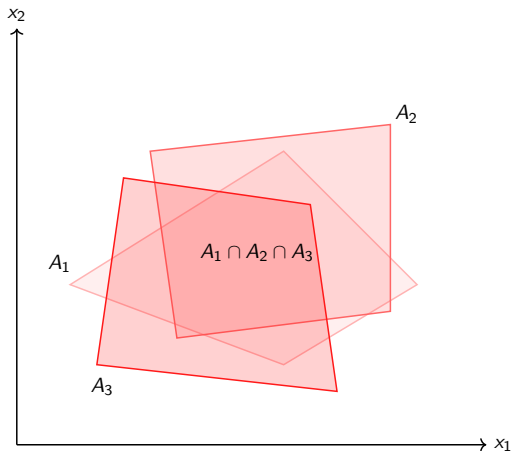
Intersezione di insiemi convessi (3/4)

Lo stesso con tre quadrilateri convessi (a lati rettilinei, come i poliedri della programmazione lineare, che sono tutti convessi):



Intersezione di insiemi convessi (4/4)

Ancora tre quadrilateri convessi, in una posizione diversa:



Intersezione di insiemi convessi:

- ▶ Per ogni famiglia di m insiemi convessi $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$, l'insieme $\bigcap_{i=1}^m A_i$ è convesso
- ▶ La dimostrazione usa solo la definizione di intersezione e la convessità di ogni A_i

Perché è importante:

- ▶ Un insieme descritto da più condizioni, ciascuna delle quali definisce un insieme convesso, è convesso

Messaggi chiave



Riepilogo (1/2)

1. Combinazione convessa:

- ▶ Di due punti: $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ con $\lambda \in [0, 1]$, i punti del segmento
- ▶ Di m punti: $\sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{p}^{(k)}$ con $\lambda_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$, i punti dell'involucro convesso

2. Insieme convesso:

- ▶ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se contiene ogni combinazione convessa di due qualsiasi dei suoi punti

Riepilogo (2/2)

3. Esempi:

- ▶ Gli insiemi $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$ con le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono convessi
- ▶ La convessità si dimostra dalla definizione: disuguaglianza triangolare e omogeneità assoluta

4. Proprietà:

- ▶ L'intersezione di insiemi convessi è convessa