



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione convessa

Esercizi 2 — Problemi di ottimizzazione

Esercizi svolti su problemi di ottimizzazione, ottimi locali e globali, problemi convessi e concavi.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-convessa/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-convessa

Anno accademico 2026–2027

Indice

5	Problemi di ottimizzazione	2
5.1	Problemi in una variabile	2
5.2	Problemi in due variabili	25
6	Problemi di ottimizzazione convessi e concavi	46
6.1	Problemi in una variabile	46
6.2	Problemi in due variabili	51



Problemi di ottimizzazione

5.1 Problemi in una variabile

Esercizio 5.1 — Problema di ottimizzazione (E1)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto |x - 1| \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\} = [-1, 3].$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

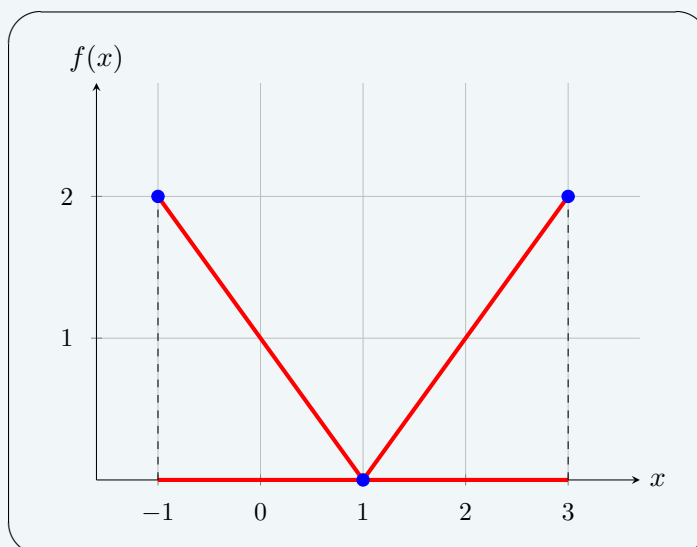
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ |x - 1| \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 3 \right\}$$

$$\max \left\{ |x - 1| \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 3 \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. Il grafico è formato da due segmenti, che si incontrano nel punto $(1, 0)$.



3. La regione ammissibile è l'intervallo $F = [-1, 3]$. La funzione obiettivo vale $f(x) = 1 - x$ per $x \leq 1$ e $f(x) = x - 1$ per $x \geq 1$: non è lineare, il suo grafico è formato da due segmenti.

- Per la forma di minimo, poiché $f(x) = |x - 1| \geq 0 = f(1)$ per ogni x ammissibile, e $|x - 1| = 0$ solo per $x = 1$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (1) \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $-2 \leq x - 1 \leq 2$ e quindi $f(x) = |x - 1| \leq 2$, con $|x - 1| = 2$ solo per $x = -1$ e $x = 3$. Il problema ha **due** soluzioni ottime e il valore ottimo è:

$$\arg \max \{ |x - 1| \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 3 \} = \{-1, 3\} \quad \text{e} \quad z(P) = 2.$$

Esercizio 5.2 — Problema di ottimizzazione (E2)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: x \mapsto -x^2 + 4x + 1 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5].$$

Domande

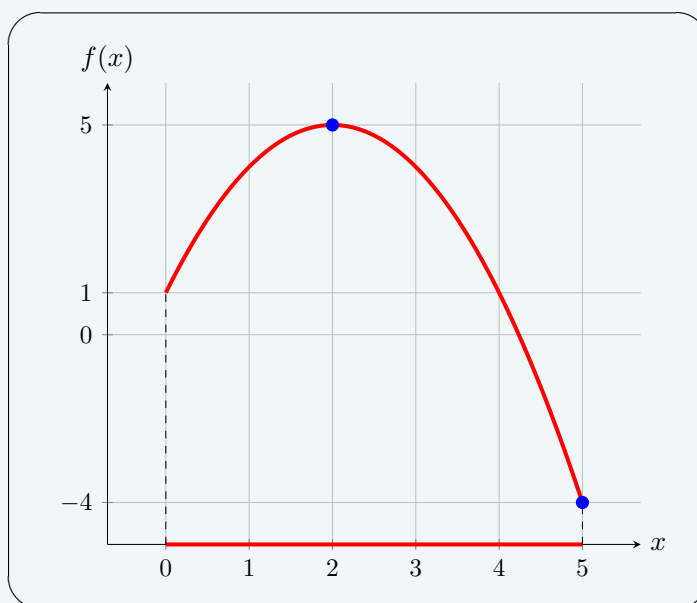
1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ -x^2 + 4x + 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5 \right\} \\ \max & \left\{ -x^2 + 4x + 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5 \right\} \end{aligned}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. Poiché f assume valori negativi, l'asse x è disegnato in basso nella figura; la linea orizzontale della griglia ad altezza 0 è la retta $f(x) = 0$.



3. Completando il quadrato, la funzione obiettivo si può scrivere come

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1 = 5 - (x^2 - 4x + 4) = 5 - (x - 2)^2.$$

- Per la forma di minimo, per ogni x ammissibile abbiamo $-2 \leq x - 2 \leq 3$ e quindi $(x - 2)^2 \leq 9$, con $(x - 2)^2 = 9$ solo per $x = 5$ (l'altra soluzione $x = -1$ non è ammissibile). Quindi $f(x) = 5 - (x - 2)^2 \geq -4 = f(5)$ e l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (5) \quad \text{e} \quad z(P) = -4.$$

- Per la forma di massimo, poiché $(x - 2)^2 \geq 0$, abbiamo $f(x) = 5 - (x - 2)^2 \leq 5 = f(2)$ per ogni x ammissibile, con l'uguaglianza solo per $x = 2$. L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = 5.$$

Il valore nell'altro estremo della regione ammissibile, $f(0) = 1$, non è né il minimo né il massimo.

Esercizio 5.3 — Problema di ottimizzazione (E3)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto |x - 1| + |x + 1| \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 2\} = [-3, 2].$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

Soluzione

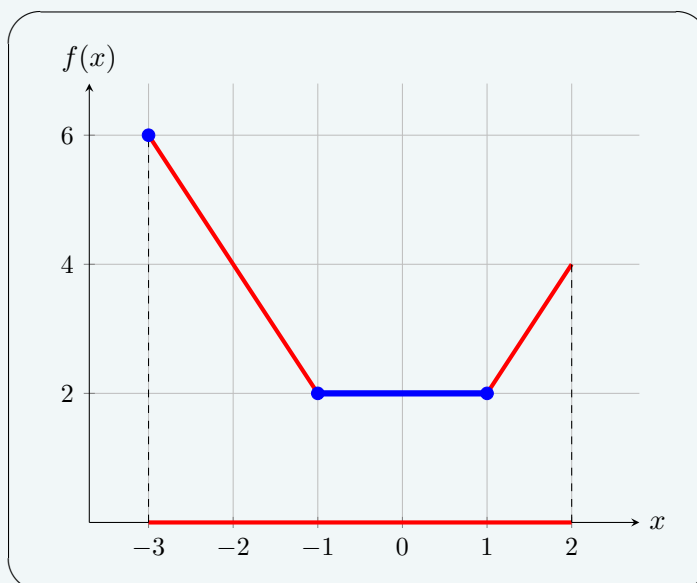
1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\begin{aligned} \min \left\{ |x - 1| + |x + 1| \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 2 \right\} \\ \max \left\{ |x - 1| + |x + 1| \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 2 \right\} \end{aligned}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. Eliminando i valori assoluti su ciascun intervallo, la funzione obiettivo è

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq -1, \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

e il suo grafico è formato da tre segmenti.



3. La regione ammissibile è l'intervallo $F = [-3, 2]$.

- Per la forma di minimo, per la disuguaglianza triangolare,

$$f(x) = |1 - x| + |x + 1| \geq |(1 - x) + (x + 1)| = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per $-1 \leq x \leq 1$ abbiamo $f(x) = (1 - x) + (x + 1) = 2$, mentre $f(x) = -2x > 2$ per $x < -1$ e $f(x) = 2x > 2$ per $x > 1$. Il problema ha **infinite** soluzioni ottime (il segmento blu) e il valore ottimo è:

$$\arg \min \{ |x - 1| + |x + 1| \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 2 \} = [-1, 1] \quad \text{e} \quad z(P) = 2.$$

- Per la forma di massimo, confrontiamo i tre tratti: per $-3 \leq x \leq -1$ abbiamo $f(x) = -2x \leq 6$, con l'uguaglianza solo per $x = -3$; per $-1 \leq x \leq 1$ abbiamo $f(x) = 2$; per $1 \leq x \leq 2$ abbiamo $f(x) = 2x \leq 4$. L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (-3) \quad \text{e} \quad z(P) = 6.$$

Esercizio 5.4 — Problema di ottimizzazione (E4)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^2 - 4x + 5 \quad \text{e} \quad F = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \} = [0, +\infty).$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.

2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme, oppure spiegare perché non esistono.

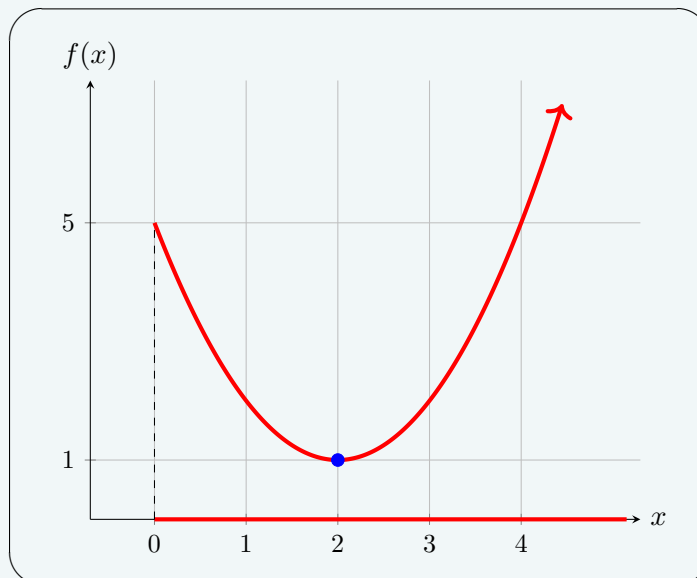
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ x^2 - 4x + 5 \text{ soggetto a } x \geq 0 \right\}$$

$$\max \left\{ x^2 - 4x + 5 \text{ soggetto a } x \geq 0 \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. La regione ammissibile è una semiretta: il grafico prosegue verso l'alto a destra della figura.



3. Completando il quadrato, la funzione obiettivo si può scrivere come

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1.$$

- Per la forma di minimo, poiché $(x - 2)^2 \geq 0$, abbiamo $f(x) \geq 1 = f(2)$ per ogni x ammissibile, con l'uguaglianza solo per $x = 2$. L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = 1.$$

- Per la forma di massimo, la funzione obiettivo cresce indefinitamente: per ogni valore $M \geq 0$, il punto $x = M + 3$ è ammissibile e

$$f(M + 3) = (M + 1)^2 + 1 > M.$$

Quindi nessuna soluzione ammissibile può essere ottima: il problema è **illimitato** e

$$z(P) = +\infty.$$

Esercizio 5.5 — Problema di ottimizzazione (E5)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 + 1 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3, x^2 \leq 4\}.$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare sull'asse x l'insieme dei punti che soddisfano ciascun vincolo.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme, oppure spiegare perché non esistono.

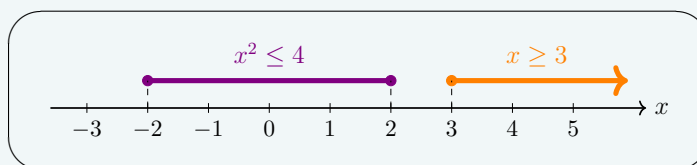
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ x^2 + 1 \text{ soggetto a } x \geq 3, x^2 \leq 4 \right\}$$

$$\max \left\{ x^2 + 1 \text{ soggetto a } x \geq 3, x^2 \leq 4 \right\}$$

2. Il vincolo $x^2 \leq 4$ è soddisfatto esattamente dai punti dell'intervallo $[-2, 2]$ (viola), poiché $x^2 \leq 4$ se e solo se $|x| \leq 2$. Il vincolo $x \geq 3$ è soddisfatto dai punti della semiretta $[3, +\infty)$ (arancione). I due insiemi non hanno punti in comune.



3. Ogni punto con $x \geq 3$ ha $x^2 \geq 9 > 4$, quindi viola il secondo vincolo: nessun punto soddisfa entrambi i vincoli e la regione ammissibile è vuota,

$$F = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} \cap [-2, 2] = \emptyset.$$

Sia la forma di minimo sia la forma di massimo sono **inammissibili**: non hanno soluzioni ammissibili, quindi nemmeno soluzioni ottime, e $z(P)$ non è definito. La funzione obiettivo non ha alcun ruolo: lo stesso vale per ogni funzione obiettivo con questa regione ammissibile.

Esercizio 5.6 — Problema di ottimizzazione (E6)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 - 2x + 2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\} = [-1, 1).$$

Domande

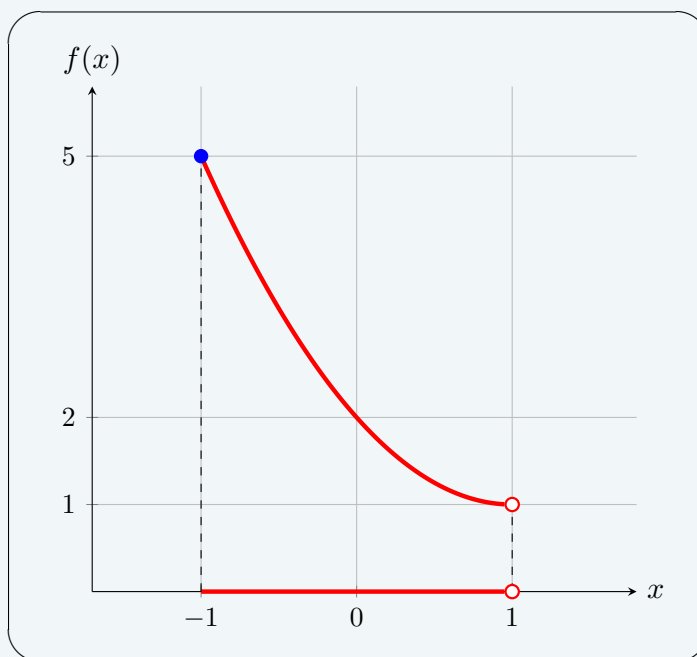
1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme, oppure spiegare perché non esistono.

Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ x^2 - 2x + 2 \text{ soggetto a } -1 \leq x < 1 \right\} \\ \max & \left\{ x^2 - 2x + 2 \text{ soggetto a } -1 \leq x < 1 \right\} \end{aligned}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. Il punto $x = 1$ non appartiene alla regione ammissibile (cerchi vuoti).



3. Completando il quadrato, la funzione obiettivo si può scrivere come

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1.$$

- Per la forma di minimo, poiché $x \neq 1$ per ogni x ammissibile, abbiamo $f(x) = (x - 1)^2 + 1 > 1$; d'altra parte, i valori di f si avvicinano a 1 quanto vogliamo: per esempio $f(1 - \frac{1}{k}) = 1 + \frac{1}{k^2}$ per ogni intero $k \geq 1$. L'estremo inferiore di f su F è 1, ma nessuna soluzione ammissibile è ottima: per ogni $x \in F$, il punto $\frac{x+1}{2}$ è ammissibile (si trova tra x e 1) e

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{(x-1)^2}{4} + 1 < (x-1)^2 + 1 = f(x).$$

Il problema ha un **estremo inferiore non raggiunto**: non esiste una soluzione ottima e $z(P)$ non è definito.

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $-2 \leq x - 1 < 0$ e quindi $(x - 1)^2 \leq 4$, con l'uguaglianza solo per $x = -1$. Quindi $f(x) \leq 5 = f(-1)$ e l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (-1) \quad \text{e} \quad z(P) = 5.$$

Esercizio 5.7 — Problema di ottimizzazione (E7)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 5\} = [-2, 5].$$

Domande

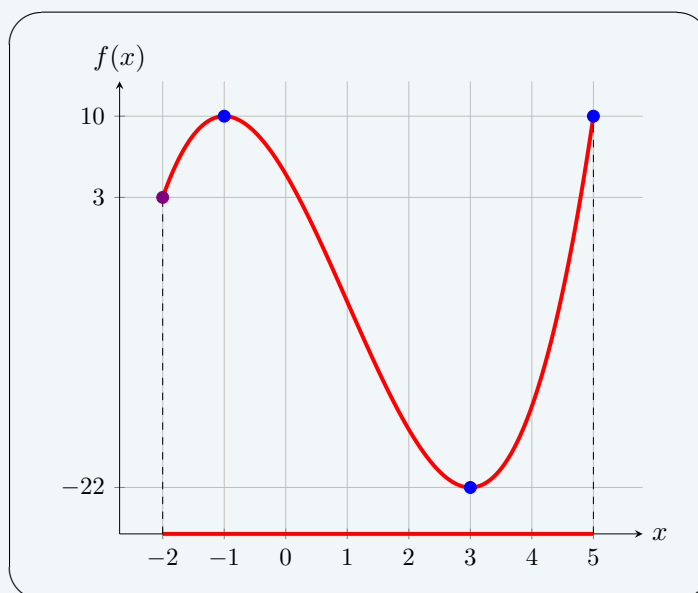
1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.
4. Dimostrare che $x = -2$ è un punto di minimo locale di f in F , ma non un punto di minimo (globale).

Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 5 \right\} \\ \max & \left\{ x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 5 \right\} \end{aligned}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. Il punto di minimo locale che non è un punto di minimo globale è viola. Poiché f assume valori negativi, l'asse x è disegnato in basso nella figura.



3. Confrontiamo f con i valori ottimi candidati usando le seguenti fattorizzazioni, che si verificano sviluppando i prodotti:

$$\begin{aligned} f(x) + 22 &= x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x - 3)^2 (x + 3), \\ f(x) - 10 &= x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x + 1)^2 (x - 5). \end{aligned}$$

- Per la forma di minimo, per ogni x ammissibile abbiamo $x + 3 \geq 1 > 0$ e $(x - 3)^2 \geq 0$, quindi $f(x) + 22 \geq 0$, cioè $f(x) \geq -22 = f(3)$, con l'uguaglianza solo per $x = 3$. L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (3) \quad \text{e} \quad z(P) = -22.$$

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $x - 5 \leq 0$ e $(x + 1)^2 \geq 0$, quindi $f(x) - 10 \leq 0$, cioè $f(x) \leq 10$, con l'uguaglianza solo per $x = -1$ e $x = 5$. Il problema ha **due** soluzioni ottime e il valore ottimo è:

$$\arg \max \{ x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 5 \} = \{-1, 5\}$$

e

$$z(P) = 10.$$

4. Abbiamo $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$ e

$$f(x) - 3 = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = (x + 2)(x^2 - 5x + 1).$$

Per l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((-2), 1)$ abbiamo $N((-2), 1) \cap [-2, 5] = [-2, -1)$. Per ogni $x \in [-2, -1)$ abbiamo $x + 2 \geq 0$ e, poiché $x^2 \geq 1$ e $-5x > 5$, $x^2 - 5x + 1 > 7 > 0$. Quindi

$$f(-2) = 3 \leq f(x), \quad \forall x \in N((-2), 1) \cap [-2, 5] = [-2, -1),$$

e $x = -2$ è un punto di minimo locale di f in F , con minimo locale 3. Non è un punto di minimo (globale), poiché $f(3) = -22 < 3 = f(-2)$: un metodo di ottimizzazione che guardasse solo i punti vicini a $x = -2$ non troverebbe la soluzione ottima della forma di minimo.

Esercizio 5.8 — Problema di ottimizzazione (E9)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo lineare e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x - 1 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\} = [0, 3).$$

Domande

1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

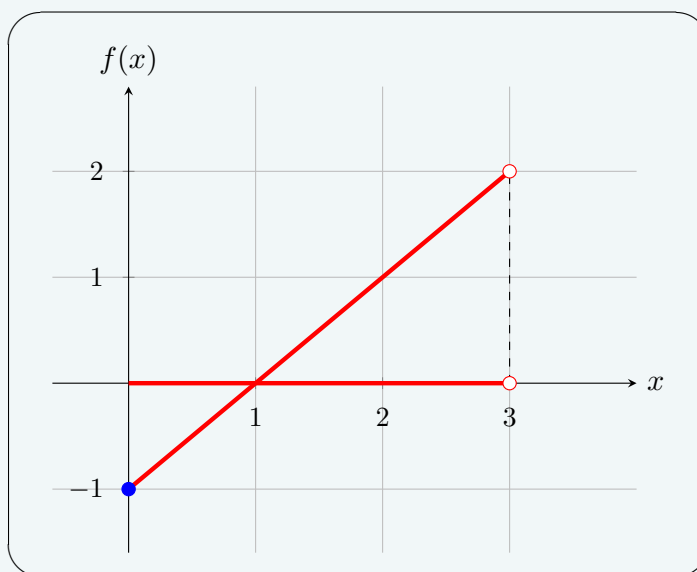
Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ x - 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x < 3 \right\}$$

$$\max \left\{ x - 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x < 3 \right\}$$

2. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso; la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono indicate in blu. Il punto $x = 3$ non appartiene alla regione ammissibile: i cerchi vuoti indicano l'estremo escluso della regione ammissibile e del grafico.



3. La regione ammissibile è l'intervallo $F = [0, 3)$, che contiene 0 ma non 3, e la funzione lineare f è strettamente crescente.

- Per la forma di minimo, poiché per ogni x ammissibile abbiamo $x \geq 0$ e quindi $f(x) = x - 1 \geq -1 = f(0)$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (0) \quad \text{e} \quad z(P) = -1.$$

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $x < 3$ e quindi $f(x) = x - 1 < 2$; inoltre, per ogni x ammissibile il punto $\frac{x+3}{2}$ è ammissibile e

$$f\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{x+1}{2} > x - 1 = f(x),$$

quindi nessun punto ammissibile è ottimo, mentre $f(x)$ si avvicina a 2 quanto vogliamo quando x si avvicina a 3. Il problema ha un **estremo superiore non raggiunto**: $\sup\{f(x) : x \in F\} = 2$ non è raggiunto, non esiste una soluzione ottima e

$$\arg \max \{ x - 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x < 3 \} = \emptyset \quad \text{e} \quad z(P) \text{ non è definito.}$$

Esercizio 5.9 — Problema di ottimizzazione (E10)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3.$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (3) è un punto di minimo locale di f in $[-1, 4]$.
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (1) è un punto di massimo locale di f in $[-1, 4]$.
3. Trovare tutti i punti di minimo e di massimo (globale) di f in $[-1, 4]$, cioè le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 4\}$ e $\max\{f(x) \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 4\}$.
4. Disegnare il grafico della funzione.

Soluzione

1. Abbiamo $f(3) = 2 + 27 - 54 + 27 = 2$ e

$$f(x) - f(3) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2.$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((3), \frac{1}{2})$, per il quale $N((3), \frac{1}{2}) \cap [-1, 4] = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x > 0$ e $(x-3)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(3) \geq 0$. Quindi,

$$f(3) = 2 \leq f(x), \quad \forall x \in N((3), \frac{1}{2}) \cap [-1, 4] = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}),$$

e $x = 3$ è un punto di minimo locale di f in $[-1, 4]$, con minimo locale 2.

2. Abbiamo $f(1) = 2 + 9 - 6 + 1 = 6$ e

$$f(x) - f(1) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-4)(x-1)^2.$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((1), \frac{1}{2})$, per il quale $N((1), \frac{1}{2}) \cap [-1, 4] = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x - 4 < 0$ e $(x-1)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(1) \leq 0$. Quindi,

$$f(1) = 6 \geq f(x), \quad \forall x \in N((1), \frac{1}{2}) \cap [-1, 4] = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}),$$

e $x = 1$ è un punto di massimo locale di f in $[-1, 4]$, con massimo locale 6.

3. Studiamo separatamente il minimo e il massimo.

- **Minimo.** Abbiamo $f(-1) = 2 - 9 - 6 - 1 = -14$ e

$$f(x) + 14 = x^3 - 6x^2 + 9x + 16 = (x+1)(x^2 - 7x + 16) = (x+1) \left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \right).$$

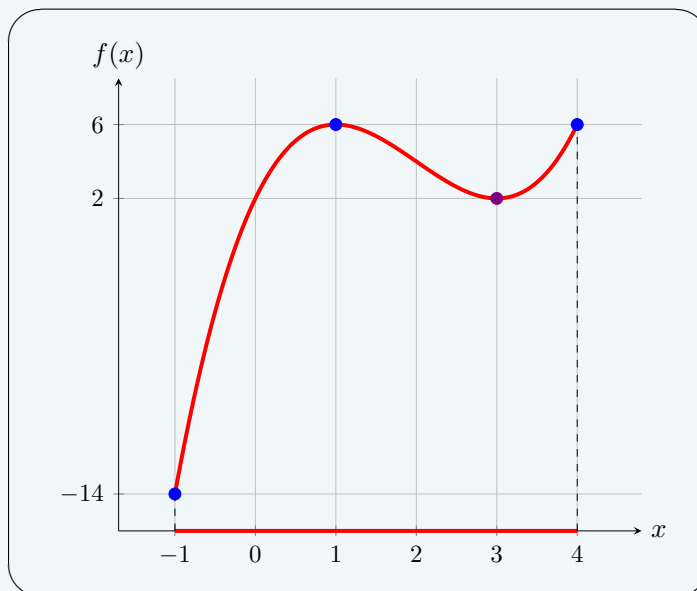
Per ogni $x \in [-1, 4]$ abbiamo $x + 1 \geq 0$, e il secondo fattore è positivo, quindi $f(x) \geq -14 = f(-1)$, con l'uguaglianza solo per $x = -1$. L'unico punto di minimo è $x = -1$ e il minimo è -14 . Il punto di minimo locale $x = 3$ non è un punto di minimo (globale), poiché $f(-1) = -14 < 2 = f(3)$.

- **Massimo.** La fattorizzazione della seconda domanda vale per ogni x : per ogni $x \in [-1, 4]$ abbiamo $x - 4 \leq 0$, quindi $f(x) - 6 = (x - 4)(x - 1)^2 \leq 0$, con l'uguaglianza solo per $x = 1$ e $x = 4$. La funzione ha **due** punti di massimo e il massimo è 6:

$$\arg \max \{ f(x) \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 4 \} = \{1, 4\}.$$

Il punto di massimo locale $x = 1$ è anche un punto di massimo (globale).

4. Il grafico della funzione è rosso; il dominio è la parte rossa dell'asse x , i punti di minimo e di massimo (globale) sono blu e i punti di minimo o di massimo locale che non sono globali sono viola. Poiché f assume valori negativi, l'asse x è disegnato in basso nella figura.



Esercizio 5.10 — Problema di ottimizzazione (E11)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 5 + 54x - 2x^3.$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (3) è un punto di massimo locale di f in $[0, 4]$.
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (4) è un punto di minimo locale di f in $[0, 4]$.
3. Trovare tutti i punti di minimo e di massimo (globale) di f in $[0, 4]$, cioè le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 4\}$ e $\max\{f(x) \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 4\}$.
4. Disegnare il grafico della funzione.

Soluzione

1. Abbiamo $f(3) = 5 + 162 - 54 = 113$ e

$$f(3) - f(x) = 2x^3 - 54x + 108 = 2(x - 3)^2(x + 6).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((3), 1)$, per il quale $N((3), 1) \cap [0, 4] = (2, 4)$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x + 6 > 0$ e $(x - 3)^2 \geq 0$, per cui $f(3) - f(x) \geq 0$. Quindi,

$$f(3) = 113 \geq f(x), \quad \forall x \in N((3), 1) \cap [0, 4] = (2, 4),$$

e $x = 3$ è un punto di massimo locale di f in $[0, 4]$, con massimo locale 113.

2. Abbiamo $f(4) = 5 + 216 - 128 = 93$ e

$$f(x) - f(4) = -2x^3 + 54x - 88 = -2(x - 4)(x^2 + 4x - 11).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((4), \frac{1}{2})$, per il quale $N((4), \frac{1}{2}) \cap [0, 4] = (\frac{7}{2}, 4]$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x - 4 \leq 0$ e, poiché $x > \frac{7}{2}$,

$$x^2 + 4x - 11 > \frac{49}{4} + 14 - 11 = \frac{61}{4} > 0,$$

quindi $f(x) - f(4) = -2(x - 4)(x^2 + 4x - 11) \geq 0$. Quindi,

$$f(4) = 93 \leq f(x), \quad \forall x \in N((4), \frac{1}{2}) \cap [0, 4] = (\frac{7}{2}, 4],$$

e $x = 4$ è un punto di minimo locale di f in $[0, 4]$, con minimo locale 93.

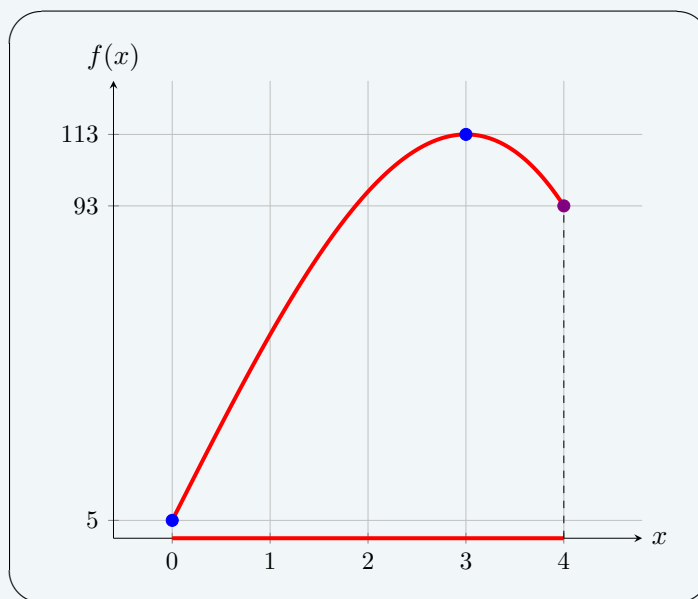
3. Studiamo separatamente il minimo e il massimo.

- **Massimo.** La fattorizzazione della prima domanda vale per ogni x : per ogni $x \in [0, 4]$ abbiamo $x + 6 > 0$, quindi $f(3) - f(x) = 2(x - 3)^2(x + 6) \geq 0$, con l'uguaglianza solo per $x = 3$. L'unico punto di massimo è $x = 3$ e il massimo è 113: il punto di massimo locale è anche un punto di massimo (globale).
- **Minimo.** Abbiamo $f(0) = 5$ e

$$f(x) - 5 = 54x - 2x^3 = 2x(27 - x^2).$$

Per ogni $x \in [0, 4]$ abbiamo $x \geq 0$ e $x^2 \leq 16 < 27$, quindi $f(x) \geq 5 = f(0)$, con l'uguaglianza solo per $x = 0$. L'unico punto di minimo è $x = 0$ e il minimo è 5. Il punto di minimo locale $x = 4$ non è un punto di minimo (globale), poiché $f(0) = 5 < 93 = f(4)$.

4. Il grafico della funzione è rosso; il dominio è la parte rossa dell'asse x , i punti di minimo e di massimo (globale) sono blu e i punti di minimo o di massimo locale che non sono globali sono viola.



Esercizio 5.11 — Problema di ottimizzazione (E12)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 1 - 12x - 3x^2 + 2x^3.$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (-1) è un punto di massimo locale di f in $[-2, 3]$.
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (2) è un punto di minimo locale di f in $[-2, 3]$.
3. Trovare tutti i punti di minimo e di massimo (globale) di f in $[-2, 3]$, cioè le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3\}$ e $\max\{f(x) \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3\}$.
4. Disegnare il grafico della funzione.

Soluzione

1. Abbiamo $f(-1) = 1 + 12 - 3 - 2 = 8$ e

$$f(x) - f(-1) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = (x+1)^2(2x-7).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((-1), 1)$, per il quale $N((-1), 1) \cap [-2, 3] = (-2, 0)$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $2x - 7 < 0$ e $(x+1)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(-1) \leq 0$. Quindi,

$$f(-1) = 8 \geq f(x), \quad \forall x \in N((-1), 1) \cap [-2, 3] = (-2, 0),$$

e $x = -1$ è un punto di massimo locale di f in $[-2, 3]$, con massimo locale 8.

2. Abbiamo $f(2) = 1 - 24 - 12 + 16 = -19$ e

$$f(x) - f(2) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20 = (x-2)^2(2x+5).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((2), 1)$, per il quale $N((2), 1) \cap [-2, 3] = (1, 3)$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $2x + 5 > 0$ e $(x-2)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(2) \geq 0$. Quindi,

$$f(2) = -19 \leq f(x), \quad \forall x \in N((2), 1) \cap [-2, 3] = (1, 3),$$

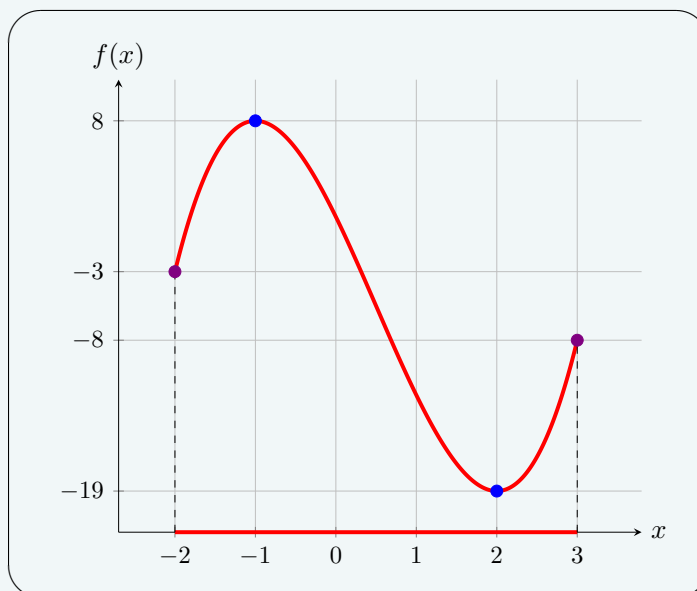
e $x = 2$ è un punto di minimo locale di f in $[-2, 3]$, con minimo locale -19 .

3. Le due fattorizzazioni valgono per ogni x , e ogni $x \in [-2, 3]$ soddisfa $2x - 7 \leq -1 < 0$ e $2x + 5 \geq 1 > 0$. Allora, per ogni $x \in [-2, 3]$,

$$f(x) - 8 = (x+1)^2(2x-7) \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x) + 19 = (x-2)^2(2x+5) \geq 0,$$

con l'uguaglianza, rispettivamente, solo per $x = -1$ e solo per $x = 2$. L'unico punto di massimo è $x = -1$, con massimo 8, e l'unico punto di minimo è $x = 2$, con minimo -19 : entrambi i punti delle prime due domande sono ottimi globali.

4. Il grafico della funzione è rosso; il dominio è la parte rossa dell'asse x , i punti di minimo e di massimo (globale) sono blu. Poiché f assume valori negativi, l'asse x è disegnato in basso nella figura. Negli estremi abbiamo $f(-2) = -3$ e $f(3) = -8$: poiché f è crescente vicino a entrambi gli estremi, $x = -2$ è un punto di minimo locale e $x = 3$ è un punto di massimo locale, che non sono globali, e sono viola.



Esercizio 5.12 — Problema di ottimizzazione (E13)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 3 - 2x^2 + x^4.$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (-1) è un punto di minimo locale di f in $[-2, 3]$.
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (0) è un punto di massimo locale di f in $[-2, 3]$.
3. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (1) è un punto di minimo locale di f in $[-2, 3]$.
4. Trovare tutti i punti di minimo e di massimo (globale) di f in $[-2, 3]$, cioè le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3\}$ e $\max\{f(x) \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3\}$.
5. Disegnare il grafico della funzione nell'intervallo $[-2, 2]$.

Soluzione

1. Abbiamo $f(-1) = 3 - 2 + 1 = 2$ e

$$f(x) - f(-1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, per l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((-1), \frac{1}{2})$ abbiamo

$$f(-1) = 2 \leq f(x), \quad \forall x \in N((-1), \frac{1}{2}) \cap [-2, 3] = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

e $x = -1$ è un punto di minimo locale di f in $[-2, 3]$, con minimo locale 2.

2. Abbiamo $f(0) = 3$ e

$$f(x) - f(0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((0), \frac{1}{2})$, per il quale $N((0), \frac{1}{2}) \cap [-2, 3] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x^2 < \frac{1}{4} < 2$, per cui $f(x) - f(0) \leq 0$. Quindi,

$$f(0) = 3 \geq f(x), \quad \forall x \in N((0), \frac{1}{2}) \cap [-2, 3] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

e $x = 0$ è un punto di massimo locale di f in $[-2, 3]$, con massimo locale 3.

3. Abbiamo $f(1) = 2$ e, come nella prima domanda, $f(x) - f(1) = (x^2 - 1)^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare,

$$f(1) = 2 \leq f(x), \quad \forall x \in N((1), \frac{1}{2}) \cap [-2, 3] = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

e $x = 1$ è un punto di minimo locale di f in $[-2, 3]$, con minimo locale 2.

4. Studiamo separatamente il minimo e il massimo.

- **Minimo.** Per ogni $x \in [-2, 3]$ abbiamo $f(x) - 2 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$, con l'uguaglianza solo per $x = -1$ e $x = 1$. La funzione ha **due** punti di minimo e il minimo è 2:

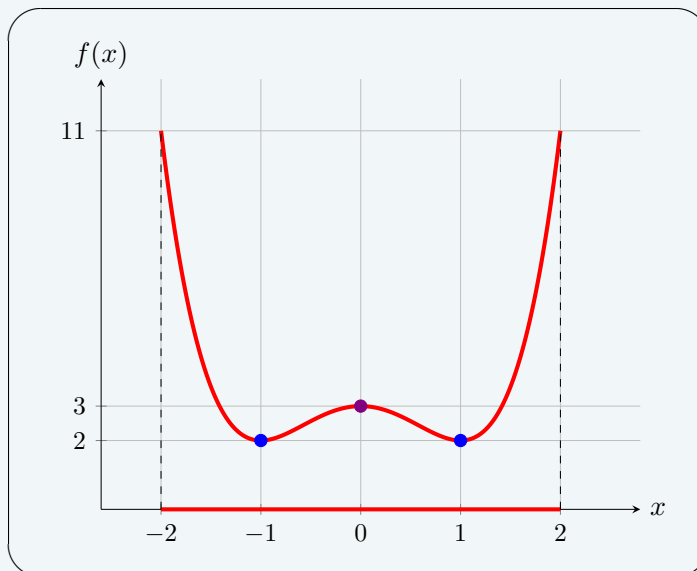
$$\arg \min \{ f(x) \text{ soggetto a } -2 \leq x \leq 3 \} = \{-1, 1\}.$$

- **Massimo.** Abbiamo $f(3) = 3 - 18 + 81 = 66$ e

$$66 - f(x) = 63 + 2x^2 - x^4 = (9 - x^2)(x^2 + 7).$$

Per ogni $x \in [-2, 3]$ abbiamo $x^2 \leq 9$, quindi $f(x) \leq 66 = f(3)$, con l'uguaglianza solo per $x = 3$ (il valore $x = -3$ non appartiene al dominio). L'unico punto di massimo è $x = 3$ e il massimo è 66. Il punto di massimo locale $x = 0$ non è un punto di massimo (globale), poiché $f(0) = 3 < 66 = f(3)$.

5. Il grafico della funzione nell'intervallo $[-2, 2]$ è rosso e l'intervallo $[-2, 2]$, che è una parte del dominio, è la parte rossa dell'asse x ; i punti di minimo (globale) sono blu e il punto di massimo locale che non è globale è viola. Il punto di massimo $x = 3$, con $f(3) = 66$, è fuori dalla figura.



Esercizio 5.13 — Problema di ottimizzazione (E14)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^3 - 9x^2 + 24x - 10.$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (2) è un punto di massimo locale di f in $[0, 5]$.
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (4) è un punto di minimo locale di f in $[0, 5]$.
3. Trovare tutti i punti di minimo e di massimo (globale) di f in $[0, 5]$, cioè le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5\}$ e $\max\{f(x) \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5\}$.
4. Disegnare il grafico della funzione.

Soluzione

1. Abbiamo $f(2) = 8 - 36 + 48 - 10 = 10$ e

$$f(x) - f(2) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = (x - 2)^2 (x - 5).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((2), 1)$, per il quale $N((2), 1) \cap [0, 5] = (1, 3)$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x - 5 < 0$ e $(x - 2)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(2) \leq 0$. Quindi,

$$f(2) = 10 \geq f(x), \quad \forall x \in N((2), 1) \cap [0, 5] = (1, 3),$$

e $x = 2$ è un punto di massimo locale di f in $[0, 5]$, con massimo locale 10.

2. Abbiamo $f(4) = 64 - 144 + 96 - 10 = 6$ e

$$f(x) - f(4) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x - 4)^2 (x - 1).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((4), 1)$, per il quale $N((4), 1) \cap [0, 5] = (3, 5)$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $x - 1 > 0$ e $(x - 4)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(4) \geq 0$. Quindi,

$$f(4) = 6 \leq f(x), \quad \forall x \in N((4), 1) \cap [0, 5] = (3, 5),$$

e $x = 4$ è un punto di minimo locale di f in $[0, 5]$, con minimo locale 6.

3. Studiamo separatamente il minimo e il massimo.

- **Massimo.** La fattorizzazione della prima domanda vale per ogni x : per ogni $x \in [0, 5]$ abbiamo $x - 5 \leq 0$, quindi $f(x) - 10 = (x - 2)^2(x - 5) \leq 0$, con l'uguaglianza solo per $x = 2$ e $x = 5$. La funzione ha **due** punti di massimo e il massimo è 10:

$$\arg \max \{ f(x) \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5 \} = \{2, 5\}.$$

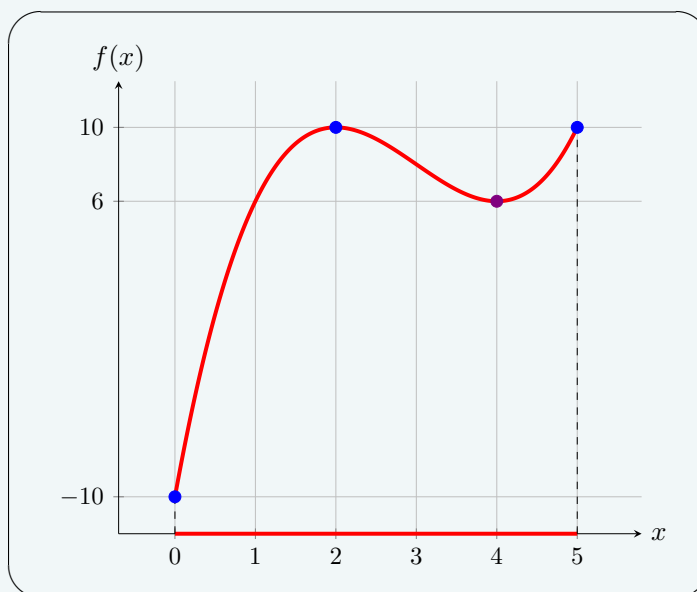
Il punto di massimo locale $x = 2$ è anche un punto di massimo (globale).

- **Minimo.** Abbiamo $f(0) = -10$ e

$$f(x) + 10 = x^3 - 9x^2 + 24x = x(x^2 - 9x + 24) = x \left(\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \right).$$

Per ogni $x \in [0, 5]$ abbiamo $x \geq 0$, e il secondo fattore è positivo, quindi $f(x) \geq -10 = f(0)$, con l'uguaglianza solo per $x = 0$. L'unico punto di minimo è $x = 0$ e il minimo è -10 . Il punto di minimo locale $x = 4$ non è un punto di minimo (globale), poiché $f(0) = -10 < 6 = f(4)$.

4. Il grafico della funzione è rosso; il dominio è la parte rossa dell'asse x , i punti di minimo e di massimo (globale) sono blu e i punti di minimo o di massimo locale che non sono globali sono viola. Poiché f assume valori negativi, l'asse x è disegnato in basso nella figura.



Esercizio 5.14 — Problema di ottimizzazione (E15)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (-1) è un punto di massimo locale di f in $[-1, 3]$.
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto (2) è un punto di minimo locale di f in $[-1, 3]$.
3. Trovare tutti i punti di minimo e di massimo (globale) di f in $[-1, 3]$, cioè le soluzioni ottime dei problemi di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 3\}$ e $\max\{f(x) \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 3\}$.
4. Disegnare il grafico della funzione.

Soluzione

1. Abbiamo $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$ e

$$f(x) - f(-1) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = (x+1)^2(2x-7).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N((-1), \frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Il punto $x = -1$ è l'estremo sinistro del dominio, quindi si considerano solo i punti alla sua destra: $N((-1), \frac{1}{2}) \cap [-1, 3] = [-1, -\frac{1}{2})$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo

$2x - 7 < 0$ e $(x + 1)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(-1) \leq 0$. Quindi,

$$f(-1) = 12 \geq f(x), \quad \forall x \in N\left((-1), \frac{1}{2}\right) \cap [-1, 3] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right),$$

e $x = -1$ è un punto di massimo locale di f in $[-1, 3]$, con massimo locale 12.

2. Abbiamo $f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$ e

$$f(x) - f(2) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20 = (x - 2)^2(2x + 5).$$

Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left((2), \frac{1}{2}\right)$, per il quale $N\left((2), \frac{1}{2}\right) \cap [-1, 3] = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Per ogni x in questo intervallo abbiamo $2x + 5 > 0$ e $(x - 2)^2 \geq 0$, per cui $f(x) - f(2) \geq 0$. Quindi,

$$f(2) = -15 \leq f(x), \quad \forall x \in N\left((2), \frac{1}{2}\right) \cap [-1, 3] = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

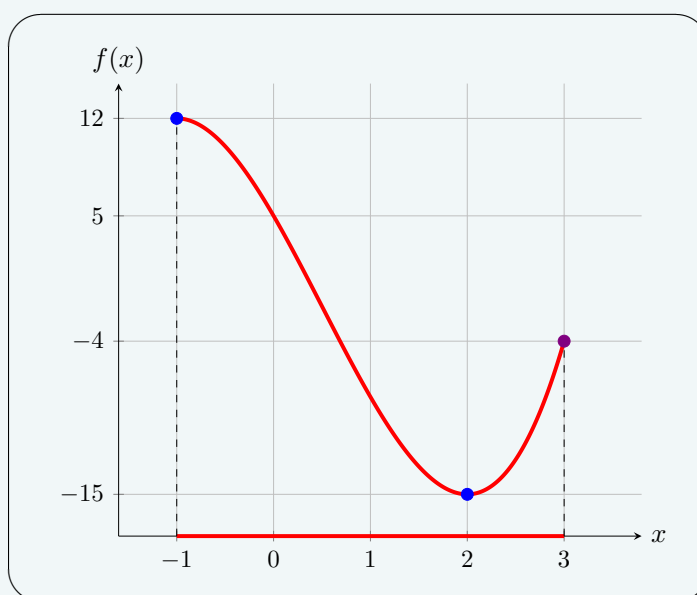
e $x = 2$ è un punto di minimo locale di f in $[-1, 3]$, con minimo locale -15 .

3. Le due fattorizzazioni valgono per ogni x , e ogni $x \in [-1, 3]$ soddisfa $2x - 7 \leq -1 < 0$ e $2x + 5 \geq 3 > 0$. Allora, per ogni $x \in [-1, 3]$,

$$f(x) - 12 = (x + 1)^2(2x - 7) \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x) + 15 = (x - 2)^2(2x + 5) \geq 0,$$

con l'uguaglianza, rispettivamente, solo per $x = -1$ e solo per $x = 2$. L'unico punto di massimo è $x = -1$, con massimo 12, e l'unico punto di minimo è $x = 2$, con minimo -15 : entrambi i punti delle prime due domande sono ottimi globali.

4. Il grafico della funzione è rosso; il dominio è la parte rossa dell'asse x , i punti di minimo e di massimo (globale) sono blu. Poiché f assume valori negativi, l'asse x è disegnato in basso nella figura. Nell'estremo destro abbiamo $f(3) = -4$: poiché f è crescente vicino a $x = 3$, è un punto di massimo locale che non è globale, ed è viola.



5.2 Problemi in due variabili

Esercizio 5.15 — Problema di ottimizzazione (E8)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo di due variabili e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (x_1 - x_2)^2$$

e

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \} = [0, 2] \times [0, 2].$$

Domande

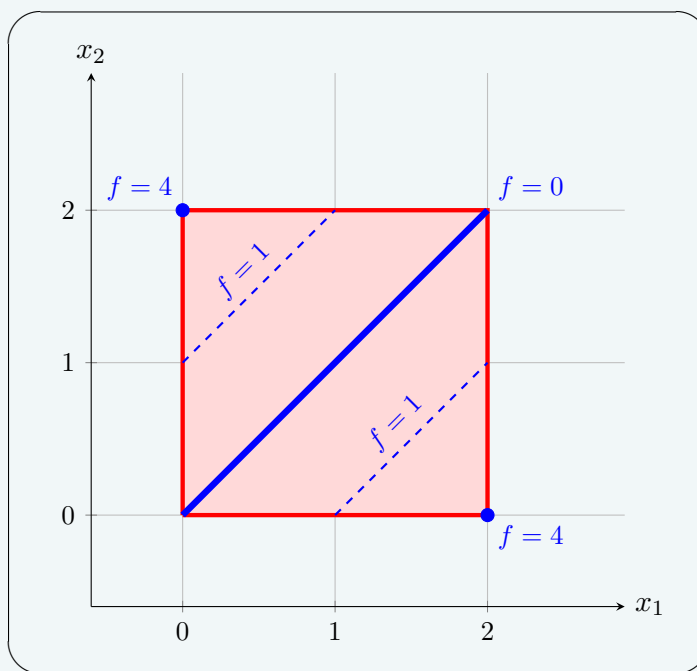
1. Scrivere i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo.
2. Disegnare la regione ammissibile e le curve di livello della funzione obiettivo di valore 0, 1 e 4.
3. Trovare tutte le soluzioni ottime e il valore ottimo per entrambe le forme.

Soluzione

1. I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ (x_1 - x_2)^2 \text{ soggetto a } 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \right\} \\ \max & \left\{ (x_1 - x_2)^2 \text{ soggetto a } 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2 \right\} \end{aligned}$$

2. La regione ammissibile è il quadrato rosso. Poiché $f(\mathbf{x}) = c$ se e solo se $x_1 - x_2 = \sqrt{c}$ oppure $x_1 - x_2 = -\sqrt{c}$, le curve di livello sono rette parallele alla retta $x_1 = x_2$: la curva di livello di valore 0 è la retta $x_1 = x_2$, quella di valore 1 è formata dalle due rette $x_1 - x_2 = \pm 1$ (tratteggiate) e quella di valore 4 è formata dalle due rette $x_1 - x_2 = \pm 2$, che toccano il quadrato solo nei vertici $(2, 0)$ e $(0, 2)$. Le soluzioni ottime sono blu.



3. La regione ammissibile è il quadrato $F = [0, 2] \times [0, 2]$.

- Per la forma di minimo, $f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ per ogni $\mathbf{x}$ ammissibile, con l'uguaglianza esattamente quando $x_1 = x_2$. Il problema ha **infinite** soluzioni ottime (la diagonale blu del quadrato) e il valore ottimo è:

$$\arg \min \{ (x_1 - x_2)^2 \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 2 \right\} \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- Per la forma di massimo, per ogni $\mathbf{x}$ ammissibile abbiamo $0 \leq x_1 \leq 2$ e $-2 \leq -x_2 \leq 0$, quindi $-2 \leq x_1 - x_2 \leq 2$ e $f(\mathbf{x}) \leq 4$. L'uguaglianza $x_1 - x_2 = 2$ vale solo per $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$, e $x_1 - x_2 = -2$ solo per $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Il problema ha **due** soluzioni ottime e il valore ottimo è:

$$\arg \max \{ (x_1 - x_2)^2 \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad z(P) = 4.$$

Esercizio 5.16 — Problema di ottimizzazione (E16)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2, \quad \text{con} \quad D = [-2, 2] \times [-2, 2].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo di f in D .
2. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di massimo di f in D .
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $x_1 \geq -2$ e $x_2 \geq -2$. Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 \geq -2 + (-2) = -4 = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right),$$

con l'uguaglianza solo per $x_1 = x_2 = -2$. Di conseguenza,

$$f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D,$$

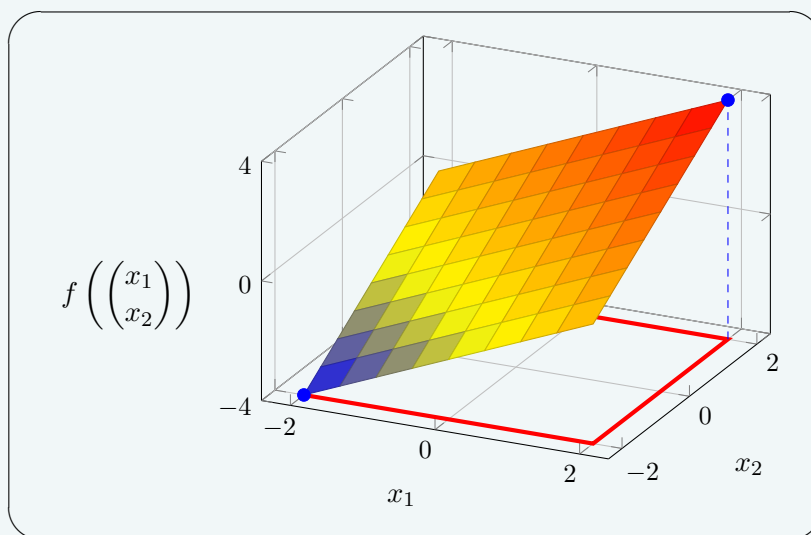
e $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo di f in D , con minimo -4 .

2. Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $x_1 \leq 2$ e $x_2 \leq 2$. Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 \leq 2 + 2 = 4 = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$$

con l'uguaglianza solo per $x_1 = x_2 = 2$, e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di massimo di f in D , con massimo 4 .

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti al punto di minimo e al punto di massimo sono blu, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.17 — Problema di ottimizzazione (E17)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + 1, \quad \text{con} \quad D = [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è anche l'unico punto di minimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di massimo di f in D .
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$:
per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D , con minimo locale 1.

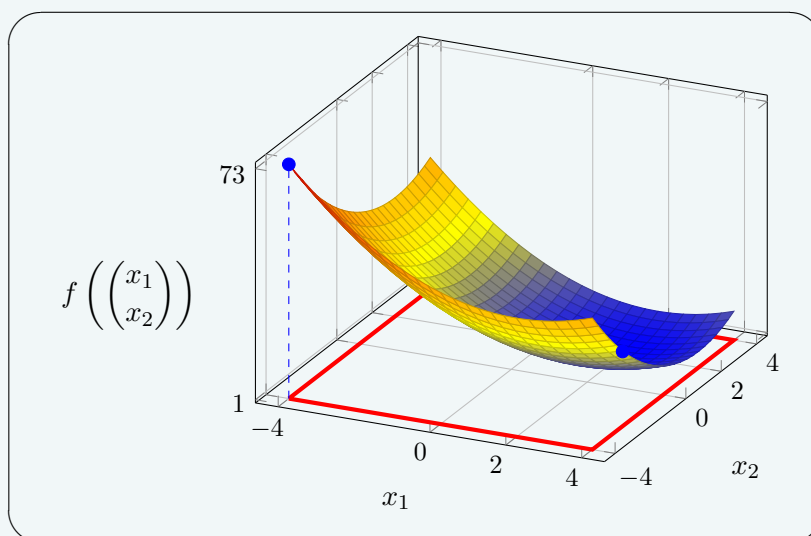
2. Studiamo separatamente il minimo e il massimo.

- **Minimo.** La disuguaglianza $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 0$ vale per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$, non solo nell'intorno, con l'uguaglianza solo per $x_1 = x_2 = 2$. Il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo di f in D e il minimo è 1.
- **Massimo.** Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $-6 \leq x_1 - 2 \leq 2$ e $-6 \leq x_2 - 2 \leq 2$, quindi $(x_1 - 2)^2 \leq 36$ e $(x_2 - 2)^2 \leq 36$, con l'uguaglianza, rispettivamente, solo per $x_1 = -4$ e solo per $x_2 = -4$. Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \leq 36 + 36 + 1 = 73 = f\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right),$$

e $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di massimo di f in D , con massimo 73.

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti al punto di minimo e al punto di massimo sono blu, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.18 — Problema di ottimizzazione (E18)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 + 2 - \frac{1}{10}(x_1^4 + x_2^4), \quad \text{con} \quad D = [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di minimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < 4$ e $x_2^2 < 4$, da cui

$$1 - \frac{x_1^2}{10} > 1 - \frac{4}{10} = \frac{3}{5} > 0 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{x_2^2}{10} > \frac{3}{5} > 0,$$

e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{10}\right) + x_2^2 \left(1 - \frac{x_2^2}{10}\right) \geq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D , con minimo locale 2.

2. Scriviamo f come somma di due funzioni di una variabile:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2 + g(x_1) + g(x_2), \quad \text{con} \quad g(t) = t^2 - \frac{t^4}{10}.$$

Abbiamo $g(4) = 16 - \frac{256}{10} = -\frac{48}{5}$ e

$$g(t) + \frac{48}{5} = \frac{-t^4 + 10t^2 + 96}{10} = \frac{(16 - t^2)(t^2 + 6)}{10}.$$

Per ogni $t \in [-4, 4]$ abbiamo $t^2 \leq 16$, quindi $g(t) \geq -\frac{48}{5}$, con l'uguaglianza solo per $t = -4$ e $t = 4$. Quindi, per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$,

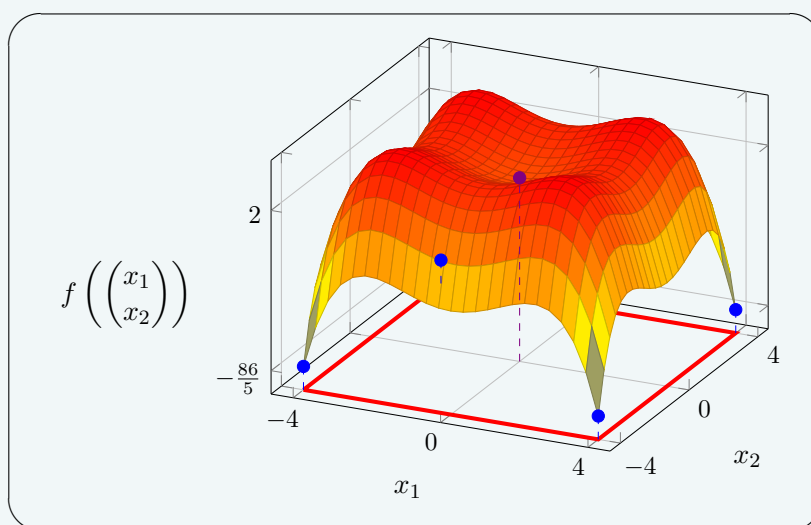
$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \geq 2 - \frac{48}{5} - \frac{48}{5} = -\frac{86}{5},$$

con l'uguaglianza solo quando sia x_1 sia x_2 valgono -4 oppure 4 . La funzione ha **quattro** punti di minimo, i vertici di D , e il minimo è $-\frac{86}{5}$:

$$\arg \min \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D \} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il punto di minimo locale $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale), poiché $-\frac{86}{5} < 2$.

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti ai quattro punti di minimo sono blu e il punto corrispondente al punto di minimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.19 — Problema di ottimizzazione (E19)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2, \quad \text{con} \quad D = [-3, 3] \times [-3, 3].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di minimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < 1$, da cui $1 - \frac{x_2^2}{2} > \frac{1}{2}$, e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 \left(1 - \frac{x_2^2}{2}\right) + x_2^2 \geq \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D , con minimo locale 0.

2. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 9 + 9 - \frac{81}{2} = -\frac{45}{2} < 0$, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale). Per trovare i punti di minimo, scriviamo

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2 - \frac{1}{2}uv, \quad \text{con} \quad u = x_1^2 - 2 \quad \text{e} \quad v = x_2^2 - 2.$$

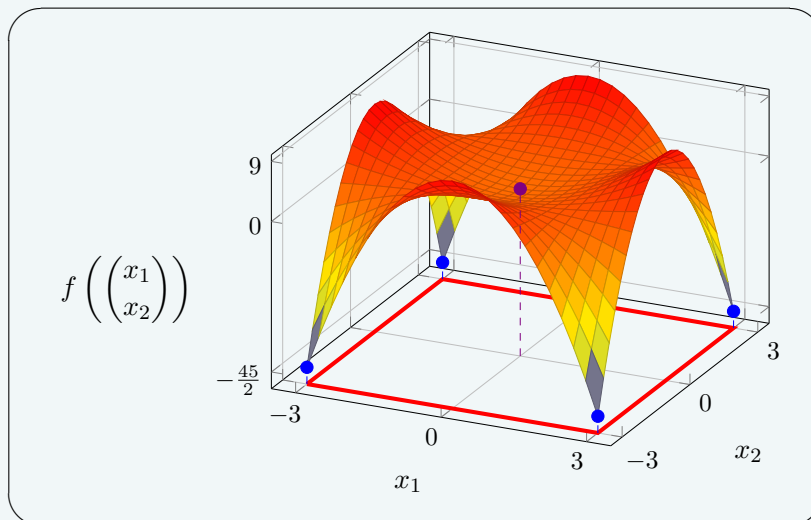
Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $0 \leq x_1^2 \leq 9$ e $0 \leq x_2^2 \leq 9$, quindi $-2 \leq u \leq 7$ e $-2 \leq v \leq 7$. Allora:

- se $u \geq 0$ e $v \geq 0$, abbiamo $uv \leq 7 \cdot 7 = 49$, con l'uguaglianza solo per $u = v = 7$;
- se u e v hanno segni opposti, abbiamo $uv \leq 0$;
- se $u < 0$ e $v < 0$, abbiamo $uv = |u||v| \leq 2 \cdot 2 = 4$.

In tutti i casi $uv \leq 49$, quindi $f(\mathbf{x}) \geq 2 - \frac{49}{2} = -\frac{45}{2}$, con l'uguaglianza solo per $x_1^2 = x_2^2 = 9$. La funzione ha **quattro** punti di minimo, i vertici di D , e il minimo è $-\frac{45}{2}$:

$$\arg \min \{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti ai quattro punti di minimo sono blu e il punto corrispondente al punto di minimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.20 — Problema di ottimizzazione (E20)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_1^3, \quad \text{con} \quad D = [-2, 4] \times [-2, 4].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di minimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right)$:

per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $|x_1| < \frac{1}{2}$, da cui $1 - x_1 > \frac{1}{2}$, e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2(1 - x_1) + x_2^2 \geq \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D , con minimo locale 0.

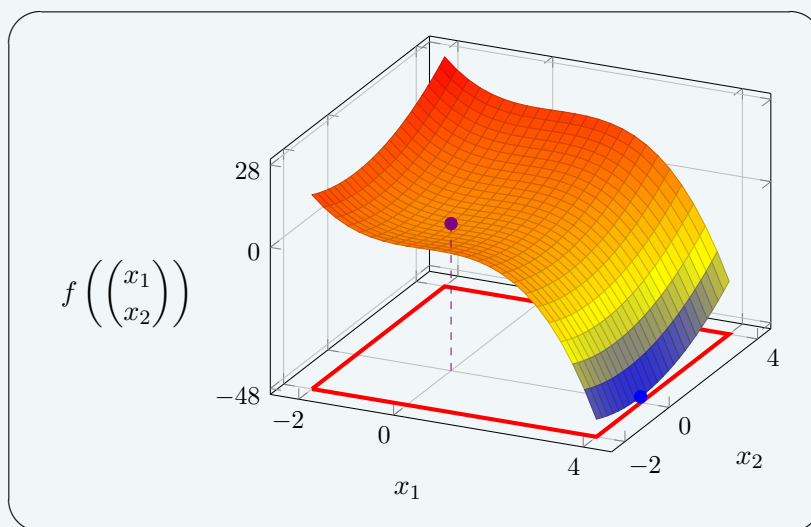
2. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 16 - 64 = -48 < 0$, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale). Inoltre,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + 48 = (48 + x_1^2 - x_1^3) + x_2^2 = (4 - x_1)(x_1^2 + 3x_1 + 12) + x_2^2,$$

dove $x_1^2 + 3x_1 + 12 = (x_1 + \frac{3}{2})^2 + \frac{39}{4} > 0$. Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $4 - x_1 \geq 0$,

quindi $f(\mathbf{x}) \geq -48$, con l'uguaglianza solo per $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$. Il punto $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo di f in D e il minimo è -48 .

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; il punto del grafico corrispondente al punto di minimo è blu e il punto corrispondente al punto di minimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.21 — Problema di ottimizzazione (E21)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 + 1 - x_1 x_2^2, \quad \text{con} \quad D = [-1, 5] \times [-3, 3].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di minimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $|x_1| < \frac{1}{2}$, da cui $1 - x_1 > \frac{1}{2}$, e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2(1 - x_1) \geq x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in D , con minimo locale 1.

2. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 25 + 9 + 1 - 45 = -10 < 1$, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di minimo (globale). Per trovare i punti di minimo, verifichiamo sviluppando i prodotti che

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + \frac{41}{4} = \left(x_1 - \frac{9}{2}\right)^2 + (x_1 - 1)(9 - x_2^2).$$

Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $0 \leq 9 - x_2^2 \leq 9$, e:

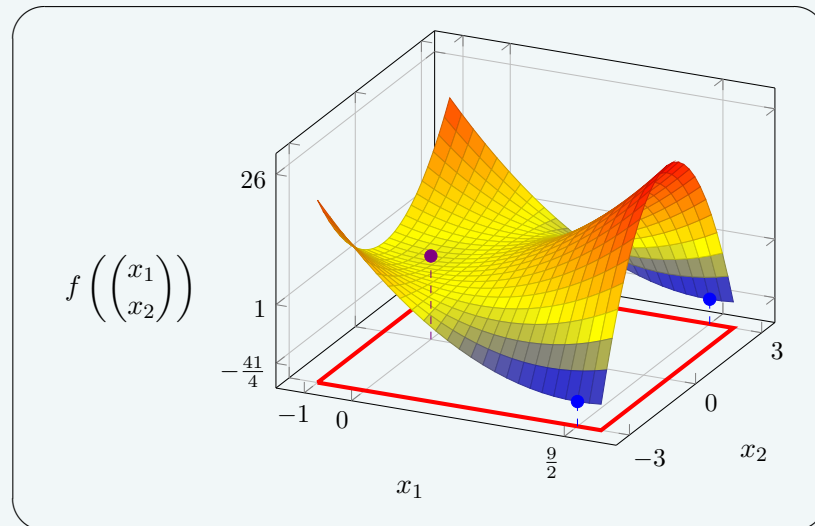
- se $x_1 \geq 1$, entrambi i termini sono non negativi, quindi $f(\mathbf{x}) + \frac{41}{4} \geq 0$, con l'uguaglianza solo per $x_1 = \frac{9}{2}$ e $x_2^2 = 9$;
- se $x_1 < 1$, abbiamo $x_1 - 1 < 0$ e quindi $(x_1 - 1)(9 - x_2^2) \geq 9(x_1 - 1)$, per cui

$$f(\mathbf{x}) + \frac{41}{4} \geq \left(x_1 - \frac{9}{2}\right)^2 + 9(x_1 - 1) = x_1^2 + \frac{45}{4} > 0.$$

La funzione ha **due** punti di minimo e il minimo è $-\frac{41}{4}$:

$$\arg \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti ai due punti di minimo sono blu e il punto corrispondente al punto di minimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.22 — Problema di ottimizzazione (E22)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 + 5, \quad \text{con} \quad D = [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D .

2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è anche l'unico punto di massimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di minimo di f in D .
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 5$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = -((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2) \leq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \geq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D , con massimo locale 5.

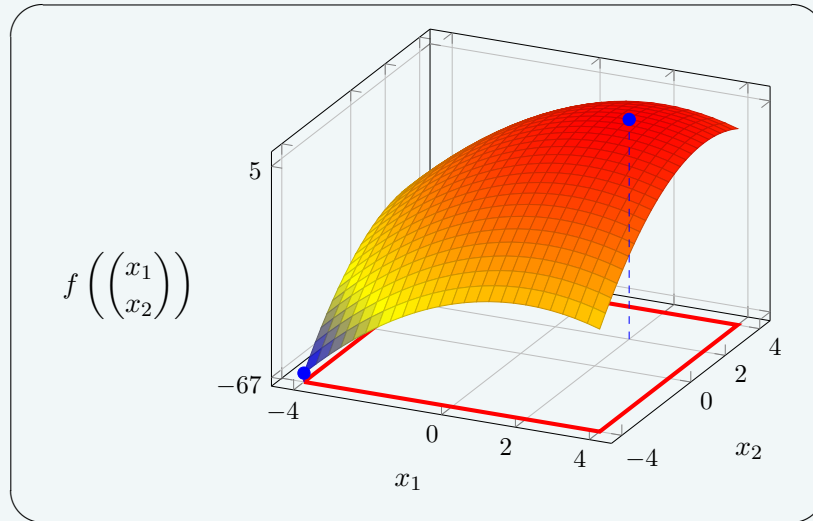
2. Studiamo separatamente il minimo e il massimo.

- **Massimo.** La disuguaglianza $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = -((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2) \leq 0$ vale per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$, non solo nell'intorno, con l'uguaglianza solo per $x_1 = x_2 = 2$. Il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di massimo di f in D e il massimo è 5.
- **Minimo.** Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $-6 \leq x_1 - 2 \leq 2$ e $-6 \leq x_2 - 2 \leq 2$, quindi $(x_1 - 2)^2 \leq 36$ e $(x_2 - 2)^2 \leq 36$, con l'uguaglianza, rispettivamente, solo per $x_1 = -4$ e solo per $x_2 = -4$. Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \geq -36 - 36 + 5 = -67 = f\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right),$$

e $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo di f in D , con minimo -67 .

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti al punto di massimo e al punto di minimo sono blu, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.23 — Problema di ottimizzazione (E23)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -x_1^2 - x_2^2 + 2 + \frac{1}{10}(x_1^4 + x_2^4), \quad \text{con} \quad D = [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di massimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $|x_1| < 1$ e $|x_2| < 1$, da cui $x_1^4 \leq x_1^2$ e $x_2^4 \leq x_2^2$, e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \leq 2 - (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2) = 2 - \frac{9}{10}(x_1^2 + x_2^2) \leq 2 = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \geq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D , con massimo locale 2.

2. Scriviamo f come somma di due funzioni di una variabile:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2 - g(x_1) - g(x_2), \quad \text{con} \quad g(t) = t^2 - \frac{t^4}{10}.$$

Abbiamo $g(4) = 16 - \frac{256}{10} = -\frac{48}{5}$ e

$$g(t) + \frac{48}{5} = \frac{-t^4 + 10t^2 + 96}{10} = \frac{(16 - t^2)(t^2 + 6)}{10}.$$

Per ogni $t \in [-4, 4]$ abbiamo $t^2 \leq 16$, quindi $g(t) \geq -\frac{48}{5}$, con l'uguaglianza solo per $t = -4$ e $t = 4$. Quindi, per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$,

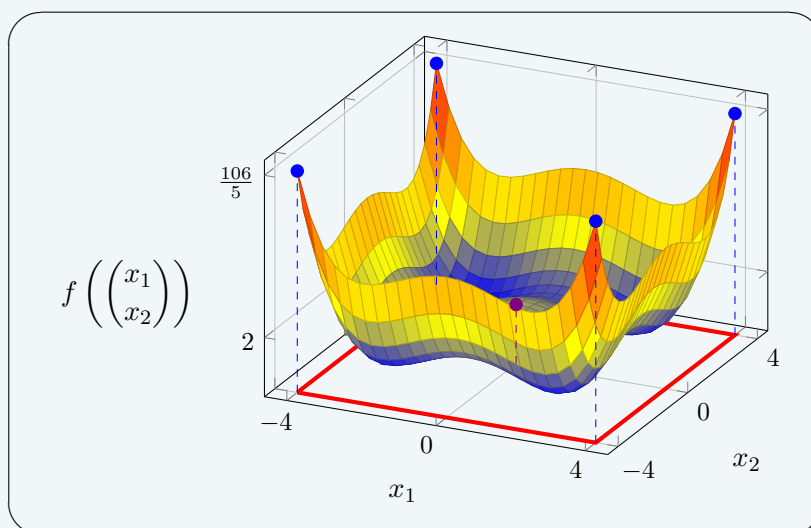
$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \leq 2 + \frac{48}{5} + \frac{48}{5} = \frac{106}{5},$$

con l'uguaglianza solo quando sia x_1 sia x_2 valgono -4 oppure 4 . La funzione ha **quattro** punti di massimo, i vertici di D , e il massimo è $\frac{106}{5}$:

$$\arg \max \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D \} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il punto di massimo locale $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale), poiché $2 < \frac{106}{5}$.

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti ai quattro punti di massimo sono blu e il punto corrispondente al punto di massimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.24 — Problema di ottimizzazione (E24)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2x_2^2, \quad \text{con} \quad D = [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di massimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < 1$, da cui $1 - \frac{x_2^2}{2} > \frac{1}{2}$, e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -x_2^2 - x_1^2 \left(1 - \frac{x_2^2}{2}\right) \leq -x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 \leq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \geq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D , con massimo locale 0.

2. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = -16 - 16 + 128 = 96 > 0$, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale). Per trovare i punti di massimo, scriviamo

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}uv - 2, \quad \text{con} \quad u = x_1^2 - 2 \quad \text{e} \quad v = x_2^2 - 2.$$

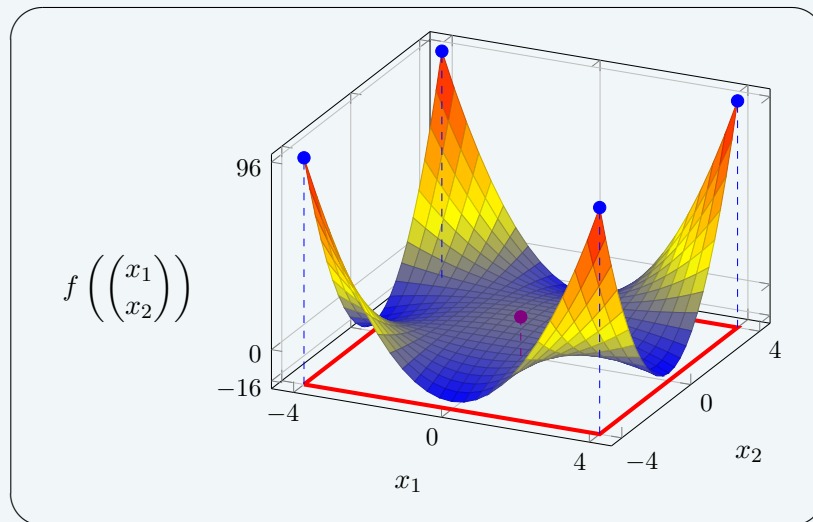
Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $0 \leq x_1^2 \leq 16$ e $0 \leq x_2^2 \leq 16$, quindi $-2 \leq u \leq 14$ e $-2 \leq v \leq 14$. Allora:

- se $u \geq 0$ e $v \geq 0$, abbiamo $uv \leq 14 \cdot 14 = 196$, con l'uguaglianza solo per $u = v = 14$;
- se u e v hanno segni opposti, abbiamo $uv \leq 0$;
- se $u < 0$ e $v < 0$, abbiamo $uv = |u||v| \leq 2 \cdot 2 = 4$.

In tutti i casi $uv \leq 196$, quindi $f(\mathbf{x}) \leq 98 - 2 = 96$, con l'uguaglianza solo per $x_1^2 = x_2^2 = 16$. La funzione ha **quattro** punti di massimo, i vertici di D , e il massimo è 96:

$$\arg \max \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D \} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti ai quattro punti di massimo sono blu e il punto corrispondente al punto di massimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.25 — Problema di ottimizzazione (E25)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -x_1^2 - x_2^2 + x_1^3, \quad \text{con} \quad D = [-3, 3] \times [-3, 3].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D .

2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di massimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $|x_1| < \frac{1}{2}$, da cui

$$x_1^3 = x_1 \cdot x_1^2 \leq |x_1| x_1^2 \leq \frac{1}{2} x_1^2,$$

e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1^3 \leq -x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^2 = -\frac{1}{2} x_1^2 - x_2^2 \leq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \geq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D , con massimo locale 0.

2. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -9 + 27 = 18 > 0$, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale). Inoltre, per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$ abbiamo $-x_2^2 \leq 0$ e

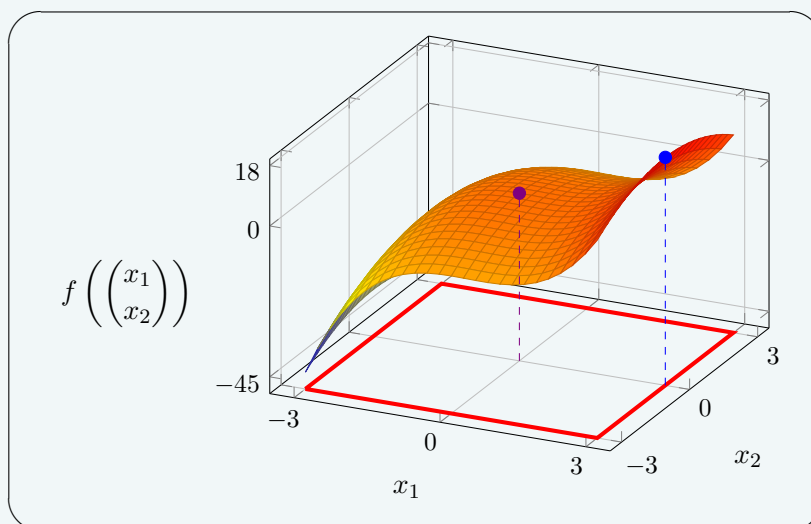
$$18 - (x_1^3 - x_1^2) = (3 - x_1)(x_1^2 + 2x_1 + 6) = (3 - x_1)((x_1 + 1)^2 + 5) \geq 0,$$

poiché $x_1 \leq 3$. Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1^3 - x_1^2) - x_2^2 \leq 18,$$

con l'uguaglianza solo per $x_1 = 3$ e $x_2 = 0$. Il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di massimo di f in D e il massimo è 18.

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; il punto del grafico corrispondente al punto di massimo è blu e il punto corrispondente al punto di massimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Esercizio 5.26 — Problema di ottimizzazione (E26)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -x_1^2 - x_2^2 - 1 + x_1x_2^2, \quad \text{con} \quad D = [-3, 3] \times [-3, 3].$$

Domande

1. Dimostrare, usando la definizione, che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D .
2. Dimostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale) di f in D , e trovare tutti i punti di massimo di f in D , cioè le soluzioni ottime del problema di ottimizzazione $\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D\}$.
3. Disegnare il grafico della funzione nel dominio D .

Soluzione

1. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1$. Usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right)$: per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in esso abbiamo $|x_1| < \frac{1}{2}$, da cui

$$x_1x_2^2 \leq |x_1|x_2^2 \leq \frac{1}{2}x_2^2,$$

e quindi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2^2 \leq -x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = -x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \leq 0.$$

Quindi,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \geq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right) \cap D,$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale di f in D , con massimo locale -1 .

2. Abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -9 - 9 - 1 + 27 = 8 > -1$, quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un punto di massimo (globale). Per trovare i punti di massimo, scriviamo

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -x_1^2 - 1 + (x_1 - 1)x_2^2,$$

e osserviamo che $0 \leq x_2^2 \leq 9$ per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D$:

- se $x_1 \leq 1$, abbiamo $(x_1 - 1)x_2^2 \leq 0$, quindi $f(\mathbf{x}) \leq -x_1^2 - 1 \leq -1 < 8$;
- se $x_1 > 1$, abbiamo $(x_1 - 1)x_2^2 \leq 9(x_1 - 1)$, con l'uguaglianza solo per $x_2^2 = 9$, quindi

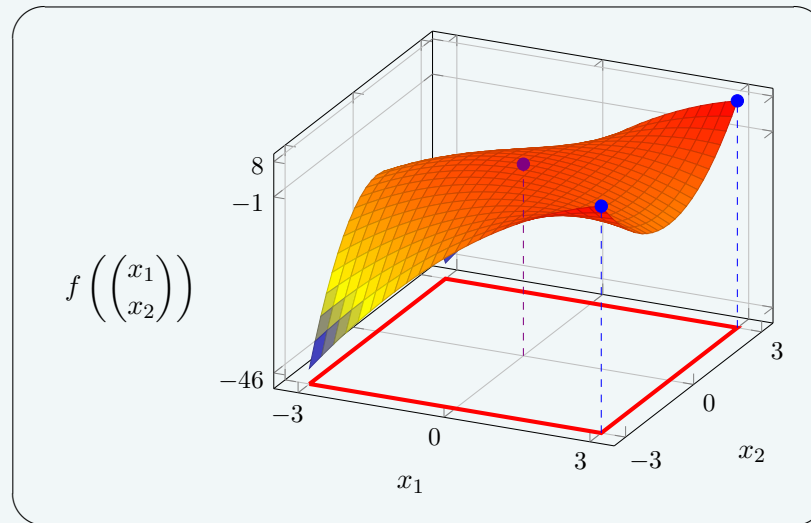
$$f(\mathbf{x}) \leq -x_1^2 + 9x_1 - 10 = 8 - (x_1 - 3)(x_1 - 6) \leq 8,$$

poiché $x_1 \leq 3$ implica $(x_1 - 3)(x_1 - 6) \geq 0$, con l'uguaglianza solo per $x_1 = 3$.

La funzione ha **due** punti di massimo e il massimo è 8:

$$\arg \max \{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in D \} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Il grafico della funzione è la superficie sopra il dominio D , che è il quadrato rosso disegnato sul piano di base; i punti del grafico corrispondenti ai due punti di massimo sono blu e il punto corrispondente al punto di massimo locale che non è globale è viola, con un segmento tratteggiato che li collega al piano di base.



Problemi di ottimizzazione convessi e concavi

6.1 Problemi in una variabile

Negli esercizi di questo capitolo la convessità e la concavità delle funzioni obiettivo si dimostrano solo con le definizioni del capitolo «Funzioni convesse e concave», usando la disuguaglianza

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$$

dello stesso capitolo. Le regioni ammissibili sono descritte da vincoli $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$: quando ogni funzione g_i è convessa, la regione ammissibile è un insieme convesso, per la proprietà degli insiemi definiti da funzioni convesse del capitolo «Funzioni convesse e concave».

Esercizio 6.1 — Problemi di ottimizzazione convessi e concavi (E1)

Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min \left\{ (x - 3)^2 + 1 \text{ soggetto a } x^2 - 4 \leq 0 \right\}$$

con funzione obiettivo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : x \mapsto (x - 3)^2 + 1$ e regione ammissibile $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\}$.

Domande

1. Dimostrare che la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : x \mapsto x^2 - 4$ è convessa nel suo dominio, dedurre che la regione ammissibile è un insieme convesso e descriverla come un intervallo.
2. Dimostrare che la funzione obiettivo è convessa nel suo dominio, e dedurre che il problema è un problema di minimizzazione convesso.
3. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
4. Dimostrare che il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale, e dedurre la soluzione ottima e il valore ottimo del problema.

Soluzione

1. Per dimostrare che la funzione g è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 g(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= (\lambda p + (1 - \lambda)w)^2 - \lambda 4 - (1 - \lambda) 4 \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 &\leq \lambda p^2 + (1 - \lambda)w^2 - \lambda 4 - (1 - \lambda) 4 \\
 &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2) \\
 &= \lambda(p^2 - 4) + (1 - \lambda)(w^2 - 4) \\
 &= \lambda g(p) + (1 - \lambda)g(w)
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$g(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda g(p) + (1 - \lambda)g(w)$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione g è convessa nel suo dominio.

La regione ammissibile $F = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$ è definita da un vincolo con una funzione convessa, quindi è un insieme convesso. Poiché $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \leq 0$ se e solo se $-2 \leq x \leq 2$, la regione ammissibile è l'intervallo $F = [-2, 2]$.

2. Per dimostrare che la funzione obiettivo è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

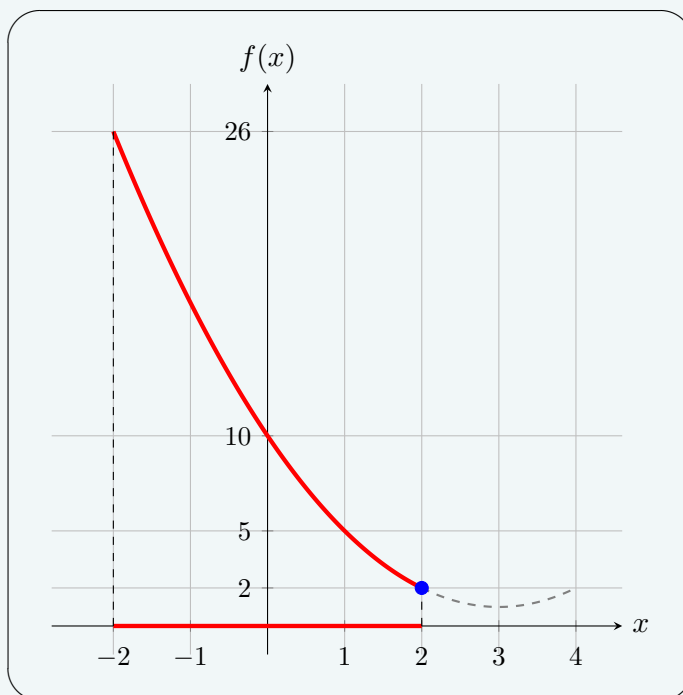
$$\begin{aligned}
 f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= (\lambda(p - 3) + (1 - \lambda)(w - 3))^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 &\leq \lambda(p - 3)^2 + (1 - \lambda)(w - 3)^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\
 &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2) \\
 &= \lambda((p - 3)^2 + 1) + (1 - \lambda)((w - 3)^2 + 1) \\
 &= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio, e in particolare sulla regione ammissibile convessa F : il problema è un problema di minimizzazione convesso.

3. Abbiamo $f(-2) = 26$, $f(0) = 10$, $f(1) = 5$ e $f(2) = 2$. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso, la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e la soluzione ottima dell'ultima domanda è blu; la parte tratteggiata del grafico è fuori dalla regione ammissibile, e il suo punto più basso $x = 3$ non è ammissibile.



4. Nell'intorno $N((2), 1) = (1, 3)$, i punti ammissibili sono quelli di $N((2), 1) \cap F = (1, 2]$. Per ognuno di questi punti abbiamo $-2 < x - 3 \leq -1$, quindi $(x - 3)^2 \geq 1$ e

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1 \geq 2 = f(2), \quad \forall x \in N((2), 1) \cap F = (1, 2].$$

Il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale. Poiché il problema è un problema di minimizzazione convessa, per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi» del capitolo «Problemi di ottimizzazione convessi e concavi», il punto $x = 2$ è anche un punto di minimo. La soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = f(2) = 2.$$

La soluzione ottima si trova sul bordo della regione ammissibile: il punto $x = 3$, in cui la funzione obiettivo raggiunge il suo valore più piccolo 1 su $\mathbb{R}$, non è ammissibile.

Esercizio 6.2 — Problemi di ottimizzazione convessi e concavi (E3)

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 3 - (x - 1)^2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\} = [-1, 4],$$

e i problemi di ottimizzazione associati in forma di minimo e in forma di massimo:

$$\min \left\{ 3 - (x - 1)^2 \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 4 \right\}$$

e

$$\max \left\{ 3 - (x - 1)^2 \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 4 \right\}$$

Domande

1. Dimostrare che la funzione obiettivo è concava nel suo dominio e che non è convessa su F , usando i punti $p = -1$, $w = 3$ e lo scalare $\lambda = \frac{1}{2}$. Il problema di minimo è un problema di minimizzazione convesso?
2. Disegnare il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.
3. Dimostrare che $x = -1$ è un punto di minimo locale, ma non un punto di minimo. Trovare la soluzione ottima e il valore ottimo del problema di minimo.
4. Spiegare perché la domanda precedente non contraddice la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi».
5. Dimostrare che $x = 1$ è un punto di massimo locale, e dedurre la soluzione ottima e il valore ottimo del problema di massimo.

Soluzione

1. Per dimostrare che la funzione è concava nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= \lambda 3 + (1 - \lambda) 3 - (\lambda(p - 1) + (1 - \lambda)(w - 1))^2 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\geq \lambda 3 + (1 - \lambda) 3 - \lambda(p - 1)^2 - (1 - \lambda)(w - 1)^2 \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\ &\quad \text{e il fattore } -1 \text{ inverte la disuguaglianza}) \\ &= \lambda(3 - (p - 1)^2) + (1 - \lambda)(3 - (w - 1)^2) \\ &= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

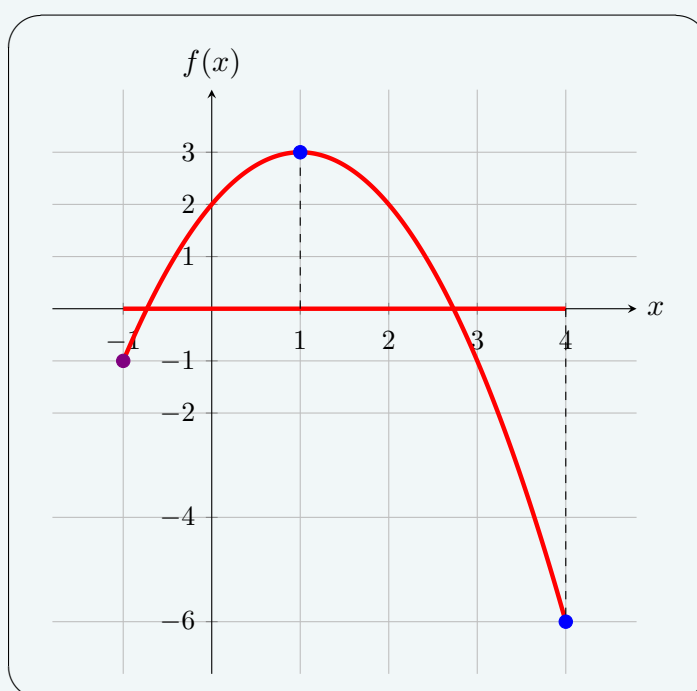
Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è concava nel suo dominio.

Con $p = -1$, $w = 3$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, entrambi i punti appartengono a F , $\lambda p + (1 - \lambda)w = 1$ e

$$f(1) = 3 > -1 = \frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(3) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) :$$

la disuguaglianza della definizione di funzione convessa non vale, e la funzione obiettivo non è convessa su F . Il problema di minimo **non** è un problema di minimizzazione convesso, anche se la sua regione ammissibile è convessa.

2. Abbiamo $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$, $f(3) = -1$ e $f(4) = -6$. Il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso e la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x ; le soluzioni ottime dei due problemi sono blu e il punto di minimo locale che non è un punto di minimo è viola.



3. Nell'intorno $N((-1), 1) = (-2, 0)$, i punti ammissibili sono quelli di $N((-1), 1) \cap F = [-1, 0)$. Per ognuno di questi punti abbiamo $-2 \leq x - 1 < -1$, quindi $(x - 1)^2 \leq 4$ e

$$f(x) = 3 - (x - 1)^2 \geq -1 = f(-1), \quad \forall x \in N((-1), 1) \cap F = [-1, 0).$$

Il punto $x = -1$ è un punto di minimo locale. Non è un punto di minimo, poiché $4 \in F$ e $f(4) = -6 < -1 = f(-1)$.

Per ogni $x \in F$ abbiamo $-2 \leq x - 1 \leq 3$, quindi $(x - 1)^2 \leq 9$ e $f(x) = 3 - (x - 1)^2 \geq -6 = f(4)$, con l'uguaglianza solo se $x - 1 = 3$, cioè $x = 4$ (il valore $x - 1 = -3$ non è ammissibile). L'unica soluzione ottima e il valore ottimo del problema di minimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (4) \quad \text{e} \quad z(P) = -6.$$

4. La proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi» del capitolo «Problemi di ottimizzazione convessi e concavi» richiede una funzione obiettivo convessa sulla regione ammissibile. Per la prima domanda, la funzione obiettivo non è convessa su F : il problema di minimo non è un problema di minimizzazione convesso, e uno dei suoi punti di minimo locale non è un punto di minimo. Un metodo che esplora solo i punti vicini a $x = -1$ si ferma al punto di minimo locale $x = -1$, con minimo locale $f(-1) = -1$, mentre il valore ottimo è -6 .

5. Nell'intorno $N((1), 1) = (0, 2)$, tutti i punti sono ammissibili e

$$f(x) = 3 - (x - 1)^2 \leq 3 = f(1), \quad \forall x \in N((1), 1) \cap F = (0, 2).$$

Il punto $x = 1$ è un punto di massimo locale. Per la prima domanda, la funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile convessa F , e il problema di massimo è un problema di massimizzazione concavo. Per il corollario «massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi» del capitolo «Problemi di ottimizzazione convessi e concavi», il punto $x = 1$ è anche un punto di massimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo del problema di massimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (1) \quad \text{e} \quad z(P) = 3.$$

6.2 Problemi in due variabili

Esercizio 6.3 — Problemi di ottimizzazione convessi e concavi (E2)

Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min \left\{ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \text{ soggetto a } x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

con funzione obiettivo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbf{x} \mapsto (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ e regione ammissibile F .

Domande

1. Dimostrare che la regione ammissibile è un insieme convesso.
2. Dimostrare che la funzione obiettivo è convessa nel suo dominio, e dedurre che il problema è un problema di minimizzazione convesso.
3. Descrivere gli insiemi di livello della funzione obiettivo per $k = 2$ e $k = 8$, e disegnarli insieme alla regione ammissibile.
4. Dimostrare che $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione ottima e calcolare il valore ottimo.
5. Il problema ha un punto di minimo locale diverso da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Soluzione

1. La regione ammissibile è l'insieme dei punti che soddisfano i tre vincoli

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0, \quad g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0.$$

Ogni funzione g_i è lineare, ed è convessa, poiché la definizione vale con l'uguaglianza: per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo

$$g_1(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = \lambda (p_1 + p_2 - 2) + (1 - \lambda) (w_1 + w_2 - 2) = \lambda g_1(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g_1(\mathbf{w}),$$

e allo stesso modo per g_2 e g_3 . La regione ammissibile è definita da vincoli con funzioni convesse, quindi è un insieme convesso: è il triangolo con vertici $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, intersezione di tre semipiani.

2. Per dimostrare che la funzione obiettivo è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= (\lambda(p_1 - 2) + (1 - \lambda)(w_1 - 2))^2 \\ &\quad + (\lambda(p_2 - 2) + (1 - \lambda)(w_2 - 2))^2 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\leq \lambda(p_1 - 2)^2 + (1 - \lambda)(w_1 - 2)^2 + \lambda(p_2 - 2)^2 + (1 - \lambda)(w_2 - 2)^2 \end{aligned}$$

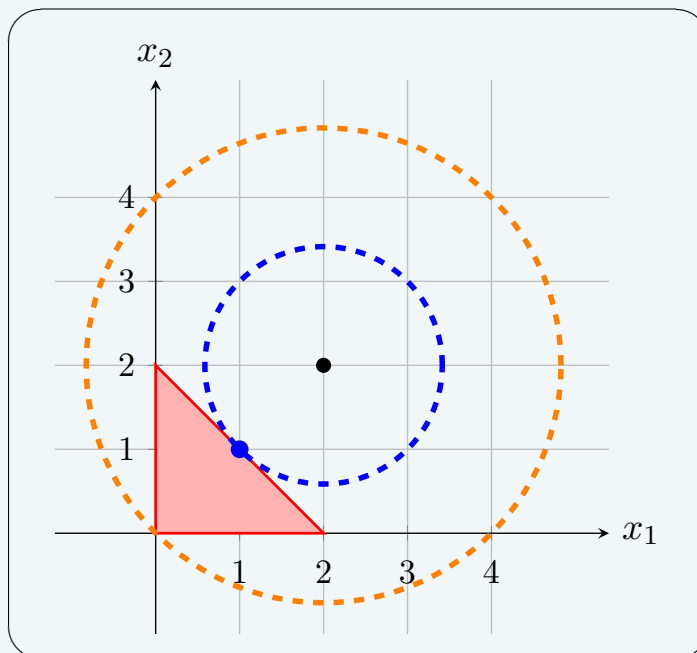
$$\begin{aligned}
 & \text{(poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\
 & \text{due volte)} \\
 & = \lambda((p_1 - 2)^2 + (p_2 - 2)^2) + (1 - \lambda)((w_1 - 2)^2 + (w_2 - 2)^2) \\
 & = \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio, e in particolare sulla regione ammissibile convessa F : il problema è un problema di minimizzazione convessa.

3. L'insieme di livello per k è l'insieme dei punti con $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = k$, cioè la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{k}$. Per $k = 2$, il raggio è $\sqrt{2}$ e la circonferenza passa per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, poiché $1 + 1 = 2$; per $k = 8$, il raggio è $2\sqrt{2}$ e la circonferenza passa per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, poiché $4 + 4 = 8$. Nella figura, la regione ammissibile è rossa, l'insieme di livello $k = 2$ è blu, l'insieme di livello $k = 8$ è arancione e la soluzione ottima della domanda successiva è blu: la circonferenza $k = 2$ tocca la regione ammissibile solo in questo punto.



4. Per ogni punto ammissibile $\mathbf{x}$, poniamo $a = x_1 - 2$ e $b = x_2 - 2$. Poiché $x_1 + x_2 \leq 2$, abbiamo $a + b = x_1 + x_2 - 4 \leq -2$, e quindi $(a + b)^2 \geq 4$. Inoltre, $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2 \geq 0$. Quindi:

$$f(\mathbf{x}) = a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} \geq \frac{4}{2} = 2 = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \mathbf{x} \in F,$$

e il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ammissibile, poiché $1 + 1 = 2$. L'uguaglianza vale solo se $a = b$ e $a + b = -2$, cioè $a = b = -1$ e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{\mathbf{x}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z(P) = 2.$$

5. No. Il problema è un problema di minimizzazione convesso: per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi» del capitolo «Problemi di ottimizzazione convessi e concavi», ogni punto di minimo locale è un punto di minimo, cioè una soluzione ottima, e la soluzione ottima è unica.

Esercizio 6.4 — Problemi di ottimizzazione convessi e concavi (E4)

Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione:

$$\max \left\{ 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \text{ soggetto a } x_1 + 2x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

con funzione obiettivo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbf{x} \mapsto 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2$ e regione ammissibile F .

Domande

1. Completare i quadrati per scrivere la funzione obiettivo come $f(\mathbf{x}) = c - (x_1 - \alpha_1)^2 - (x_2 - \alpha_2)^2$, con $c, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2. Dimostrare che la regione ammissibile è un insieme convesso e che la funzione obiettivo è concava nel suo dominio. Di che tipo di problema si tratta?
3. Descrivere gli insiemi di livello della funzione obiettivo per $k = 2$ e $k = \frac{21}{5}$, e disegnarli insieme alla regione ammissibile.
4. Dimostrare che $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione ottima e calcolare il valore ottimo.
5. Il problema ha un punto di massimo locale diverso da $\begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$?

Soluzione

1. Poiché $x_1^2 - 4x_1 = (x_1 - 2)^2 - 4$ e $x_2^2 - 2x_2 = (x_2 - 1)^2 - 1$, abbiamo:

$$f(\mathbf{x}) = -(x_1^2 - 4x_1) - (x_2^2 - 2x_2) = 5 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2,$$

cioè $c = 5$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 1$. La funzione obiettivo vale al più 5, e vale 5 solo in $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, che non è ammissibile, poiché $2 + 2 \cdot 1 = 4 > 2$.

2. La regione ammissibile è l'insieme dei punti che soddisfano i tre vincoli

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0, \quad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0, \quad g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0.$$

Ogni funzione g_i è lineare, ed è convessa, poiché la definizione vale con l'uguaglianza: per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo

$$g_1(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = \lambda(p_1 + 2p_2 - 2) + (1 - \lambda)(w_1 + 2w_2 - 2) = \lambda g_1(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g_1(\mathbf{w}),$$

e allo stesso modo per g_2 e g_3 . La regione ammissibile è definita da vincoli con funzioni convesse, quindi è un insieme convesso: è il triangolo con vertici $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per dimostrare che la funzione obiettivo è concava nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

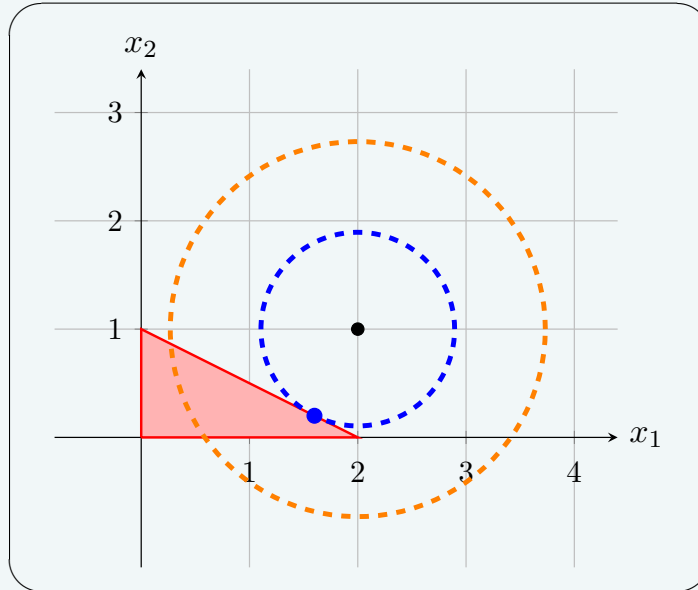
$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= \lambda 5 + (1 - \lambda) 5 - (\lambda(p_1 - 2) + (1 - \lambda)(w_1 - 2))^2 \\ &\quad - (\lambda(p_2 - 1) + (1 - \lambda)(w_2 - 1))^2 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\geq \lambda 5 + (1 - \lambda) 5 - \lambda(p_1 - 2)^2 - (1 - \lambda)(w_1 - 2)^2 \\ &\quad - \lambda(p_2 - 1)^2 - (1 - \lambda)(w_2 - 1)^2 \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \text{ due volte,} \\ &\quad \text{e il fattore } -1 \text{ inverte la disuguaglianza}) \\ &= \lambda(5 - (p_1 - 2)^2 - (p_2 - 1)^2) \\ &\quad + (1 - \lambda)(5 - (w_1 - 2)^2 - (w_2 - 1)^2) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \geq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è concava nel suo dominio, e in particolare sulla regione ammissibile convessa F : il problema è un **problema di massimizzazione concavo**.

3. L'insieme di livello per $k < 5$ è l'insieme dei punti con $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 5 - k$, cioè la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{5 - k}$. Per $k = 2$, il raggio è $\sqrt{3}$; per $k = \frac{21}{5}$, il raggio è $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e la circonferenza passa per $\begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, poiché $(\frac{2}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = \frac{4}{5}$. Nella figura, la regione ammissibile è rossa, l'insieme di livello $k = 2$ è arancione, l'insieme di livello $k = \frac{21}{5}$ è blu e la soluzione ottima della domanda successiva è blu: la circonferenza $k = \frac{21}{5}$ tocca la regione ammissibile solo in questo punto, sul lato $x_1 + 2x_2 = 2$.



4. Per ogni punto ammissibile $\mathbf{x}$, poniamo $a = x_1 - 2$ e $b = x_2 - 1$, così che $f(\mathbf{x}) = 5 - (a^2 + b^2)$. Poiché $x_1 + 2x_2 \leq 2$, abbiamo $a + 2b = x_1 + 2x_2 - 4 \leq -2$, e quindi $(a + 2b)^2 \geq 4$. Inoltre, $5(a^2 + b^2) - (a + 2b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 \geq 0$. Quindi:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a + 2b)^2}{5} \geq \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad f(\mathbf{x}) = 5 - (a^2 + b^2) \leq 5 - \frac{4}{5} = \frac{21}{5}, \quad \forall \mathbf{x} \in F.$$

L'uguaglianza vale solo se $b = 2a$ e $a + 2b = -2$, cioè $5a = -2$, $a = -\frac{2}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$ e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$. Questo punto è ammissibile, poiché $\frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 2$, $\frac{8}{5} \geq 0$ e $\frac{1}{5} \geq 0$, e

$$f\left(\begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}\right) = \frac{32}{5} + \frac{2}{5} - \frac{64}{25} - \frac{1}{25} = \frac{34}{5} - \frac{13}{5} = \frac{21}{5}.$$

L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{\mathbf{x}}(P) = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z(P) = \frac{21}{5}.$$

5. No. Il problema è un problema di massimizzazione concavo: per il corollario «massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi» del capitolo «Problemi di ottimizzazione convessi e concavi», ogni punto di massimo locale è un punto di massimo, cioè una soluzione ottima, e la soluzione ottima è unica.

Esercizio 6.5 — Problemi di ottimizzazione convessi e concavi (E5)

Consideriamo la funzione obiettivo

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f : \mathbf{x} \mapsto (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$$

e i due problemi di ottimizzazione:

$$(P_1) \quad \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \right\}$$

e

$$(P_2) \quad \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } x_1^2 + x_2^2 - 2 \geq 0 \right\}$$

con regioni ammissibili F_1 e F_2 , rispettivamente.

Domande

1. Dimostrare che la funzione $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbf{x} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 2$ è convessa nel suo dominio, e dedurre che F_1 è un insieme convesso.
2. Dimostrare che F_2 non è un insieme convesso, usando i punti $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e lo scalare $\lambda = \frac{1}{2}$.
3. Dimostrare che la funzione obiettivo è convessa nel suo dominio. Quale dei due problemi è un problema di minimizzazione convesso?
4. Descrivere gli insiemi di livello della funzione obiettivo per $k = 8$ e $k = 18$, e disegnarli insieme alla regione ammissibile F_1 .
5. Dimostrare che $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione ottima di (P_1) e calcolare il valore ottimo.

Soluzione

1. Per dimostrare che la funzione g è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1)^2 + (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2)^2 - \lambda 2 - (1 - \lambda) 2$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 & \leq \lambda p_1^2 + (1 - \lambda)w_1^2 + \lambda p_2^2 + (1 - \lambda)w_2^2 - \lambda 2 - (1 - \lambda) 2 \\
 & \quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\
 & \quad \text{due volte}) \\
 & = \lambda(p_1^2 + p_2^2 - 2) + (1 - \lambda)(w_1^2 + w_2^2 - 2) \\
 & = \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione g è convessa nel suo dominio. La regione ammissibile $F_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ è definita da un vincolo con una funzione convessa, quindi è un insieme convesso: è il disco di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

2. I due punti appartengono a F_2 , poiché $2^2 + 0^2 - 2 = 2 \geq 0$ e $(-2)^2 + 0^2 - 2 = 2 \geq 0$. Con $\lambda = \frac{1}{2}$, la loro combinazione convessa è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad 0^2 + 0^2 - 2 = -2 < 0,$$

e non appartiene a F_2 . L'insieme F_2 (i punti fuori dal disco aperto di raggio $\sqrt{2}$) non è convesso.

3. Per dimostrare che la funzione obiettivo è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

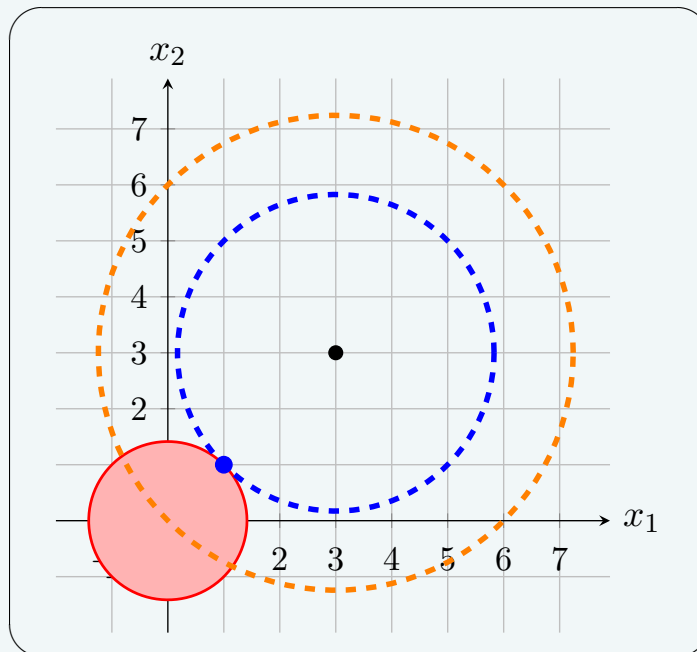
$$\begin{aligned}
 f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) & = (\lambda(p_1 - 3) + (1 - \lambda)(w_1 - 3))^2 \\
 & \quad + (\lambda(p_2 - 3) + (1 - \lambda)(w_2 - 3))^2 \\
 & \quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 & \leq \lambda(p_1 - 3)^2 + (1 - \lambda)(w_1 - 3)^2 + \lambda(p_2 - 3)^2 + (1 - \lambda)(w_2 - 3)^2 \\
 & \quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\
 & \quad \text{due volte}) \\
 & = \lambda((p_1 - 3)^2 + (p_2 - 3)^2) + (1 - \lambda)((w_1 - 3)^2 + (w_2 - 3)^2) \\
 & = \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio. Il problema (P_1) è un problema di minimizzazione convesso, poiché la sua regione ammissibile è convessa e la funzione obiettivo è convessa su di essa. Il problema (P_2) non è un problema di ottimizzazione convesso, poiché la sua regione ammissibile non è convessa: la definizione richiede una regione ammissibile convessa, qualunque sia la funzione obiettivo.

4. L'insieme di livello per k è l'insieme dei punti con $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = k$, cioè la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{k}$. Per $k = 8$, il raggio è $2\sqrt{2}$ e la circonferenza passa per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, poiché $4 + 4 = 8$; per $k = 18$, il raggio è $3\sqrt{2}$ e la circonferenza passa per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, poiché $9 + 9 = 18$. Nella figura, la regione ammissibile F_1 è rossa, l'insieme di livello $k = 8$ è blu, l'insieme di livello $k = 18$ è arancione e la soluzione ottima della domanda successiva è blu: la circonferenza $k = 8$ tocca il disco F_1 solo in questo punto.



5. Scriviamo la funzione obiettivo come

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 6x_2 + 9 = q - 6s + 18, \quad \text{con} \quad q = x_1^2 + x_2^2, \quad s = x_1 + x_2.$$

Poiché $2q - s^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, abbiamo $q \geq \frac{s^2}{2}$. Per ogni $\mathbf{x} \in F_1$ abbiamo $q \leq 2$, quindi $s^2 \leq 2q \leq 4$ e $s \leq 2$. Quindi:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= q - 6s + 18 \geq \frac{s^2}{2} - 6s + 18 = \frac{(s-6)^2}{2} \\ &\geq \frac{(2-6)^2}{2} = 8 = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \mathbf{x} \in F_1, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale poiché $6 - s \geq 4 > 0$. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ammissibile, poiché $1 + 1 - 2 = 0$. L'uguaglianza vale solo se $x_1 = x_2$ e $s = 2$, cioè $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'unica soluzione ottima e il valore ottimo di (P_1) sono:

$$\tilde{\mathbf{x}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z(P_1) = 8.$$

Per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi» del capitolo «Problemi di ottimizzazione convessi e concavi», (P_1) non ha altri punti di minimo locale.