



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione convessa

Esercizi 1 — Preliminari

Esercizi svolti su insiemi convessi, funzioni di più variabili, funzioni convesse e concave e funzioni quadratiche: la convessità si dimostra sempre con la definizione.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-convessa/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-convessa

Anno accademico 2026–2027

Indice

1	Insiemi convessi	2
2	Funzioni di più variabili	14
3	Funzioni convesse e concave	20
4	Funzioni quadratiche	33



Insiemi convessi

Esercizio 1.1 — Insiemi convessi (E1)

Consideriamo i seguenti due punti di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e i seguenti tre punti di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Domande

1. Calcolare le combinazioni convesse di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ con $\lambda = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{2}{3}$.
2. Disegnare i punti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$, le tre combinazioni convesse e l'insieme di tutte le combinazioni convesse di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$.
3. Determinare quali dei punti $\mathbf{q}^{(1)}$, $\mathbf{q}^{(2)}$ e $\mathbf{q}^{(3)}$ sono combinazioni convesse di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$.

Soluzione

1. Per ogni $\lambda \in [0, 1]$, la combinazione convessa di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ con lo scalare λ è il punto:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 7 - 7\lambda \\ 4\lambda + 1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 6\lambda \\ 1 + 3\lambda \end{pmatrix}.$$

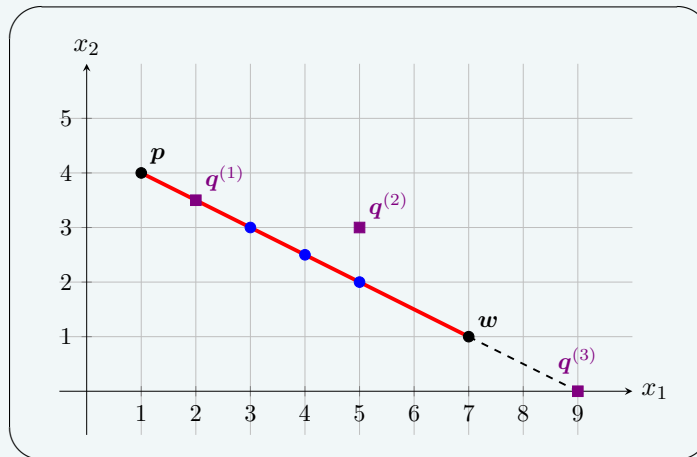
Quindi, abbiamo:

$$\lambda = \frac{1}{3} : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 7 \\ \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{2}{3} : \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. L'insieme di tutte le combinazioni convesse di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ è il segmento che congiunge i due punti (in rosso). Le tre combinazioni convesse della domanda precedente sono i punti blu: con $\lambda = \frac{1}{3}$ il punto è più vicino a $\mathbf{w}$, con $\lambda = \frac{2}{3}$ è più vicino a $\mathbf{p}$.



3. Un punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ è combinazione convessa di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ se e solo se esiste $\lambda \in [0, 1]$ tale che

$$\begin{pmatrix} 7 - 6\lambda \\ 1 + 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

La prima equazione dà $\lambda = \frac{7-q_1}{6}$; poi verifichiamo la seconda equazione e la condizione $\lambda \in [0, 1]$.

- Per $\mathbf{q}^{(1)}$, la prima equazione dà $\lambda = \frac{7-2}{6} = \frac{5}{6}$ e la seconda equazione è soddisfatta: $1 + 3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{2}$. Poiché $\frac{5}{6} \in [0, 1]$, il punto $\mathbf{q}^{(1)}$ è la combinazione convessa di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ con $\lambda = \frac{5}{6}$.
- Per $\mathbf{q}^{(2)}$, la prima equazione dà $\lambda = \frac{7-3}{6} = \frac{2}{3}$, ma $1 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \neq 3$. Il punto $\mathbf{q}^{(2)}$ non si trova nemmeno sulla retta passante per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$: non è combinazione convessa di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$.
- Per $\mathbf{q}^{(3)}$, la prima equazione dà $\lambda = \frac{7-4}{6} = \frac{1}{2}$ e la seconda equazione è soddisfatta: $1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Il punto $\mathbf{q}^{(3)}$ si trova sulla retta passante per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ (tratteggiata in figura), ma $-\frac{1}{2} \notin [0, 1]$: non è combinazione convessa di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$.

Esercizio 1.2 — Insiemi convessi (E2)

Consideriamo i seguenti tre punti di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e i seguenti due punti di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Domande

1. Calcolare la combinazione convessa di $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ e $\mathbf{p}^{(3)}$ con $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_3 = \frac{1}{4}$.
2. Calcolare la combinazione convessa di $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ e $\mathbf{p}^{(3)}$ con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$.
3. Mostrare che $\mathbf{q}^{(1)}$ è combinazione convessa di $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ e $\mathbf{p}^{(3)}$, e trovare gli scalari.
4. Mostrare che $\mathbf{q}^{(2)}$ non è combinazione convessa di $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ e $\mathbf{p}^{(3)}$.
5. Disegnare l'involucro convesso di $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ e $\mathbf{p}^{(3)}$ e tutti i punti delle domande precedenti.

Soluzione

1. La combinazione convessa con $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_3 = \frac{1}{4}$ (scalari non negativi con somma 1) è il punto:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

2. La combinazione convessa con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ (scalari non negativi con somma 1) è il punto:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+7+3}{3} \\ \frac{1+2+6}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Un punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ è combinazione convessa dei tre punti se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tali che

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 &= q_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 &= q_2 \end{cases}$$

Sostituendo $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$ nelle ultime due equazioni, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 6\lambda_2 + 2\lambda_3 = q_1 - 1 \\ \lambda_2 + 5\lambda_3 = q_2 - 1 \end{cases}$$

il cui determinante è $6 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 28 \neq 0$: gli scalari sono unici. Per $\mathbf{q}^{(1)}$ abbiamo $q_1 - 1 = 2$ e $q_2 - 1 = 3$, da cui

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 5 - 2 \cdot 3}{28} = \frac{1}{7}, \quad \lambda_3 = \frac{6 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{28} = \frac{4}{7}, \quad \lambda_1 = 1 - \frac{1}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}.$$

I tre scalari sono non negativi e la loro somma è 1, quindi $\mathbf{q}^{(1)}$ è combinazione convessa dei tre punti:

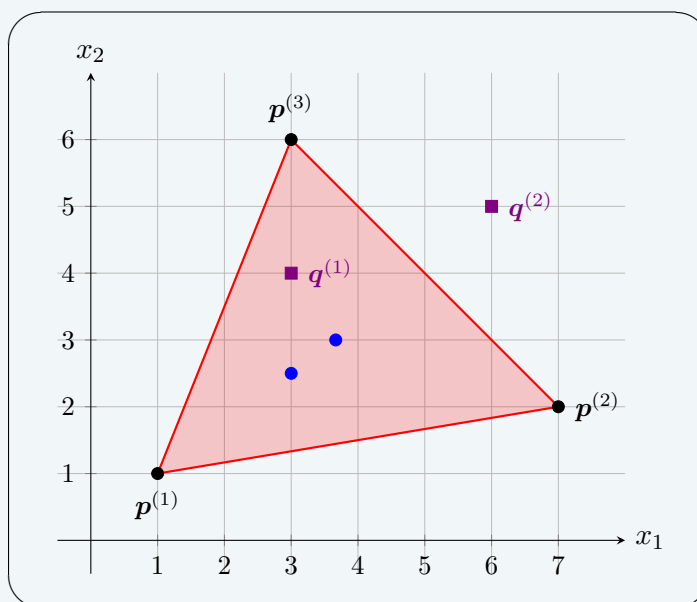
$$\frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+7+12}{7} \\ \frac{2+2+24}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Per $\mathbf{q}^{(2)}$ abbiamo $q_1 - 1 = 5$ e $q_2 - 1 = 4$, da cui

$$\lambda_2 = \frac{5 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{28} = \frac{17}{28}, \quad \lambda_3 = \frac{6 \cdot 4 - 5 \cdot 1}{28} = \frac{19}{28}, \quad \lambda_1 = 1 - \frac{17}{28} - \frac{19}{28} = -\frac{2}{7}.$$

Questi sono gli unici scalari con somma 1 che danno $\mathbf{q}^{(2)}$, e $\lambda_1 < 0$: il punto $\mathbf{q}^{(2)}$ non è combinazione convessa dei tre punti.

5. L'involucro convesso dei tre punti è il triangolo di vertici $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ e $\mathbf{p}^{(3)}$ (in rosso). I punti delle prime due domande sono in blu, $\mathbf{q}^{(1)}$ (interno al triangolo) e $\mathbf{q}^{(2)}$ (esterno al triangolo) sono in viola.



Esercizio 1.3 — Insiemi convessi (E3)

Consideriamo il seguente insieme:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 8, \quad 3x_1 + x_2 \leq 9, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}$$

e i seguenti due punti di F e il seguente scalare:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

Domande

1. Dimostrare che F è un insieme convesso.
2. Trovare i vertici di F e disegnare l'insieme.
3. Calcolare la combinazione convessa di $\mathbf{q}^{(1)}$ e $\mathbf{q}^{(2)}$ con lo scalare λ e verificare che appartiene a F .

Soluzione

1. Ciascuna delle quattro disuguaglianze che definiscono F ha la forma $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$, con

$$(a_1, a_2, b) \in \{ (1, 2, 8), (3, 1, 9), (-1, 0, 0), (0, -1, 0) \}$$

(le ultime due sono $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$). Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in F$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, per ciascuna delle quattro disuguaglianze abbiamo:

$$\begin{aligned} & a_1 (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1) + a_2 (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2) \\ &= \lambda (a_1 p_1 + a_2 p_2) + (1 - \lambda) (a_1 w_1 + a_2 w_2) \\ &\leq \lambda b + (1 - \lambda) b \\ &\quad (\text{poiché } \mathbf{p}, \mathbf{w} \in F, \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\ &= b \end{aligned}$$

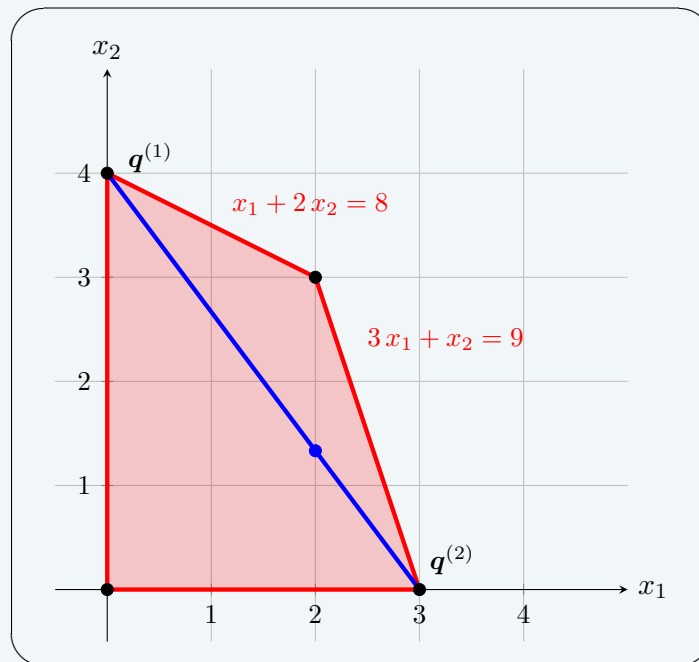
Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in F$ e l'insieme è convesso.

Lo stesso calcolo mostra che ciascuno dei quattro insiemi definiti da una sola disuguaglianza (un semipiano) è convesso: F è la loro intersezione, che è convessa poiché l'intersezione di insiemi convessi è convessa (capitolo «Insiemi convessi»).

2. I vertici di F sono l'origine, i punti in cui le rette $x_1 + 2x_2 = 8$ e $3x_1 + x_2 = 9$ incontrano gli assi all'interno di F , cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, e il punto di intersezione delle due rette:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8 \cdot 1 - 2 \cdot 9}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 3} \\ \frac{1 \cdot 9 - 8 \cdot 3}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'insieme F è il quadrilatero di vertici $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (in rosso). La figura mostra anche il segmento che congiunge $\mathbf{q}^{(1)}$ e $\mathbf{q}^{(2)}$ (in blu) e la combinazione convessa della domanda successiva.



3. La combinazione convessa di $\mathbf{q}^{(1)}$ e $\mathbf{q}^{(2)}$ con $\lambda = \frac{1}{3}$ è il punto:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Appartiene a F , come garantito dalla prima domanda:

$$2 + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \leq 8, \quad 3 \cdot 2 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3} \leq 9, \quad 2 \geq 0, \quad \frac{4}{3} \geq 0.$$

Esercizio 1.4 — Insiemi convessi (E4)

Consideriamo la seguente matrice simmetrica

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e il seguente insieme:

$$F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q_{ij} x_i x_j}}_{\sqrt{\mathbf{x}' Q \mathbf{x}}} \leq 1 \right\}.$$

Domande

1. Mostrare che $\mathbf{x}' Q \mathbf{x} = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
2. Dimostrare che F è un insieme convesso.
3. Stabilire se i punti $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ appartengono a F .
4. Disegnare l'insieme F .

Soluzione

1. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ abbiamo:

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2)x_2 \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, il numero $\sqrt{\mathbf{x}' Q \mathbf{x}}$ è la norma euclidea di un vettore di $\mathbb{R}^3$:

$$\sqrt{\mathbf{x}' Q \mathbf{x}} = \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_2, \quad \text{dove} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Il vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ dipende linearmente da $\mathbf{x}$: per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo $\mathbf{u}(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) \mathbf{u}(\mathbf{w})$.

2. Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in F$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w})' \mathbf{Q} (\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w})} \\
 &= \|\lambda \mathbf{u}(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) \mathbf{u}(\mathbf{w})\|_2 \\
 &\quad \text{(per la prima domanda)} \\
 &\leq \|\lambda \mathbf{u}(\mathbf{p})\|_2 + \|(1 - \lambda) \mathbf{u}(\mathbf{w})\|_2 \\
 &\quad \text{(per la disuguaglianza triangolare)} \\
 &= |\lambda| \|\mathbf{u}(\mathbf{p})\|_2 + |1 - \lambda| \|\mathbf{u}(\mathbf{w})\|_2 \\
 &\quad \text{(per l'omogeneità assoluta)} \\
 &= \lambda \|\mathbf{u}(\mathbf{p})\|_2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{u}(\mathbf{w})\|_2 \\
 &\quad \text{(poiché } \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\
 &= \lambda \sqrt{\mathbf{p}' \mathbf{Q} \mathbf{p}} + (1 - \lambda) \sqrt{\mathbf{w}' \mathbf{Q} \mathbf{w}} \\
 &\quad \text{(per la prima domanda)} \\
 &\leq \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 \\
 &\quad \text{(poiché } \mathbf{p}, \mathbf{w} \in F, \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in F$ e l'insieme è convesso.

3. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} : \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \leq 1 \implies \text{appartiene a } F, \\
 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} > 1 \implies \text{non appartiene a } F.
 \end{aligned}$$

(Poiché la radice quadrata è crescente, $\sqrt{\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x}} \leq 1$ se e solo se $\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq 1$.)

4. Il bordo di F è dato dai punti tali che

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1.$$

Esprimiamo x_2 in funzione di x_1 . Scrivendo l'equazione precedente come

$$2x_2^2 - 2x_1x_2 + (2x_1^2 - 1) = 0,$$

con $a = 2$, $b = -2x_1$ e $c = 2x_1^2 - 1$ abbiamo $x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, da cui:

$$x_2 = \frac{2x_1 \pm \sqrt{4x_1^2 - 8(2x_1^2 - 1)}}{4} = \frac{2x_1 \pm \sqrt{8 - 12x_1^2}}{4} = \frac{x_1 \pm \sqrt{2 - 3x_1^2}}{2}.$$

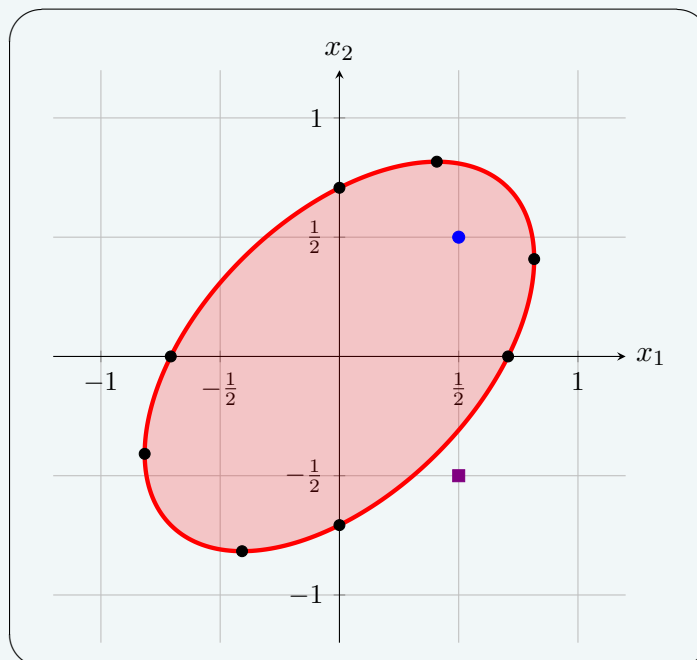
Questi valori esistono se e solo se

$$2 - 3x_1^2 \geq 0 \iff x_1 \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right].$$

Alcuni punti di riferimento del bordo:

- se $x_2 = 0$, allora $2x_1^2 = 1$, quindi $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; se $x_1 = 0$, allora $2x_2^2 = 1$, quindi $x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- se $x_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$, allora $2 - 3x_1^2 = 0$ e $x_2 = \frac{x_1}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$; allo stesso modo, se $x_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$, allora $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$.

L'insieme F è la regione interna a un'ellisse (bordo compreso) i cui assi sono le rette $x_2 = x_1$ e $x_2 = -x_1$ (in rosso). La figura mostra i punti di riferimento (in nero), il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ che appartiene a F (in blu) e il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ che non appartiene a F (in viola).



Esercizio 1.5 — Insiemi convessi (E5)

Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \right\},$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\},$$

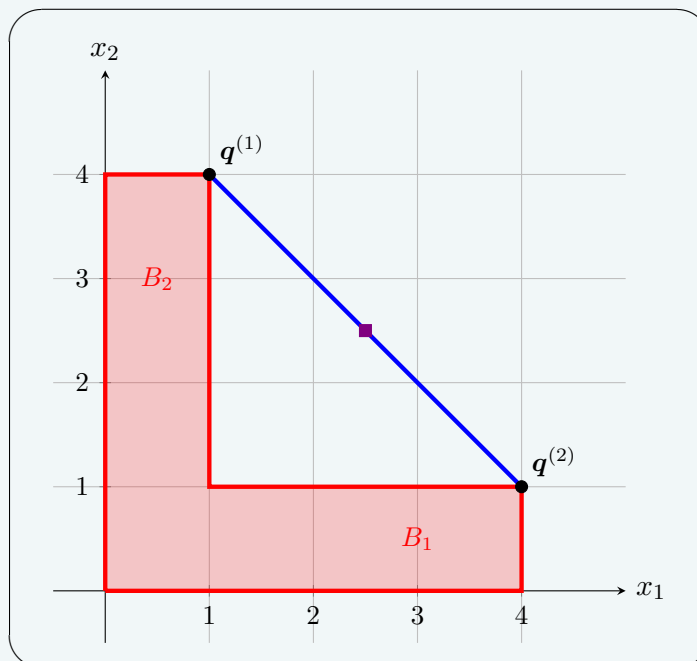
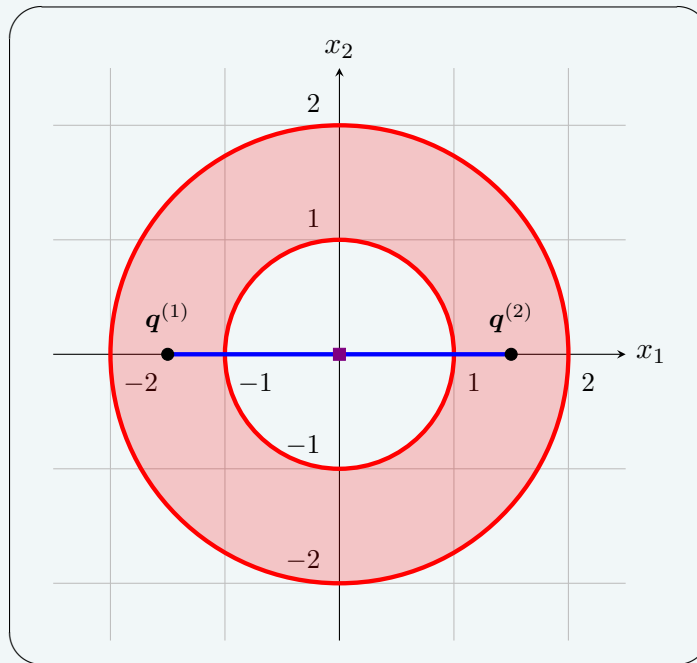
$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 4 \right\} \quad \text{e} \quad B = B_1 \cup B_2.$$

Domande

1. Disegnare gli insiemi A e B .
2. Mostrare che A non è un insieme convesso.
3. Dimostrare che B_1 e B_2 sono insiemi convessi.
4. Mostrare che B non è un insieme convesso.

Soluzione

1. L'insieme A è la corona circolare compresa fra la circonferenza di raggio 1 e la circonferenza di raggio 2 con centro nell'origine (in rosso, a sinistra). L'insieme B è l'unione a forma di L dei rettangoli B_1 e B_2 (in rosso, a destra). Le figure mostrano anche i segmenti usati nelle domande successive (in blu), il cui punto medio (in viola) non appartiene all'insieme.



2. Per mostrare che un insieme non è convesso, basta trovare due punti dell'insieme e uno scalare $\lambda \in [0, 1]$ la cui combinazione convessa non appartiene all'insieme. Prendiamo

$$q^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Entrambi i punti appartengono ad A , poiché $(\pm \frac{3}{2})^2 + 0^2 = \frac{9}{4} \in [1, 4]$. La loro combinazione convessa è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad 0^2 + 0^2 = 0 < 1.$$

La combinazione convessa non appartiene ad A : l'insieme A non è convesso.

3. Sia $k \in \{1, 2\}$. L'insieme B_k è definito dai limiti $0 \leq x_1 \leq u_1$ e $0 \leq x_2 \leq u_2$, con $(u_1, u_2) = (4, 1)$ per B_1 e $(u_1, u_2) = (1, 4)$ per B_2 . Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in B_k$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, per ciascuna coordinata $i \in \{1, 2\}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \lambda p_i + (1 - \lambda) w_i &\in [\lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0, \lambda u_i + (1 - \lambda) u_i] \\ &\quad (\text{poiché } p_i, w_i \in [0, u_i], \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\ &= [0, u_i] \end{aligned}$$

Quindi, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in B_k$ e l'insieme B_k è convesso.

4. Prendiamo

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in B_2, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in B_1 \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Entrambi i punti appartengono a B . La loro combinazione convessa è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

che non appartiene né a B_1 (poiché $x_2 = \frac{5}{2} > 1$) né a B_2 (poiché $x_1 = \frac{5}{2} > 1$), quindi non appartiene a B : l'insieme B non è convesso.

L'intersezione di insiemi convessi è sempre convessa (capitolo «Insiemi convessi»), mentre l'unione di due insiemi convessi, come $B = B_1 \cup B_2$, può non essere convessa.

Funzioni di più variabili

Esercizio 2.1 — Funzioni di più variabili (E1)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 3x_2$$

Domande

1. Calcolare il valore della funzione nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Calcolare il gradiente della funzione e valutarlo nei due punti.
3. Calcolare la matrice Hessiana della funzione e valutarla nei due punti.

Soluzione

1. Sostituendo le coordinate dei punti:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1^3 + 2 \cdot 1 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -1 - 8 - 6 = -15$$

2. Le derivate parziali sono $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_2^2$ e $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 4x_1x_2 - 3$, quindi il gradiente è:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_2^2 \\ 4x_1x_2 - 3 \end{pmatrix}$$

Nei due punti:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3+8 \\ -8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3. Derivando ancora una volta le due derivate parziali:

$$\nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 4x_2 \\ 4x_2 & 4x_1 \end{pmatrix}$$

che è una matrice simmetrica dipendente dal punto. Nei due punti:

$$\nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.2 — Funzioni di più variabili (E2)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_2^2$$

Domande

1. Mostrare che $f(\mathbf{x}) = (x_1^2 - x_2)^2$.
2. Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione.
3. Valutare il gradiente e la matrice Hessiana nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Trovare tutti i punti in cui il gradiente è il vettore nullo, e il valore della funzione in questi punti.

Soluzione

1. Sviluppando il quadrato:

$$(x_1^2 - x_2)^2 = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_2^2 = f(\mathbf{x})$$

2. Le derivate parziali sono $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 4x_1x_2$ e $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = -2x_1^2 + 2x_2$, quindi:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 4x_1x_2 \\ -2x_1^2 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2 - x_2) \\ -2(x_1^2 - x_2) \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla^2 f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbiamo $x_1^2 - x_2 = 0$, e:

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 12 - 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbiamo $x_1^2 - x_2 = 1$, e:

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. La seconda componente del gradiente è nulla se e solo se $x_2 = x_1^2$, e in questo caso è nulla anche la prima componente $4x_1(x_1^2 - x_2)$. Quindi, il gradiente è il vettore nullo in tutti i punti della parabola:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2 \right\}$$

(per esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$), che è un insieme infinito di punti. In tutti questi punti il valore della funzione è $f(\mathbf{x}) = (x_1^2 - x_2)^2 = 0$: questa parabola è l'insieme di livello $L(0)$ della funzione.

Esercizio 2.3 — Funzioni di più variabili (E3)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali di tre variabili:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 x_3 + x_2 x_3^2 - 2x_1 x_2 + x_3$$

Domande

1. Calcolare il valore della funzione nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Calcolare il gradiente della funzione e valutarlo nei due punti.
3. Calcolare la matrice Hessiana della funzione e valutarla nei due punti.

Soluzione

1. Sostituendo le coordinate dei punti:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1^2 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 = 2 + 0 - 0 + 2 = 4$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$$

2. Le tre derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2x_1x_3 - 2x_2, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = x_3^2 - 2x_1, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_3} = x_1^2 + 2x_2x_3 + 1$$

quindi il gradiente è:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3 - 2x_2 \\ x_3^2 - 2x_1 \\ x_1^2 + 2x_2x_3 + 1 \end{pmatrix}$$

Nei due punti:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 4 - 2 \\ 1 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 - 0 \\ 0 - 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Derivando ciascuna derivata parziale rispetto a x_1 , x_2 e x_3 :

$$\nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_3 & -2 & 2x_1 \\ -2 & 0 & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_3 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

che è una matrice simmetrica dipendente dal punto. Nei due punti:

$$\nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.4 — Funzioni di più variabili (E4)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_2 - x_1^2$$

Domande

1. Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione.
2. Descrivere gli insiemi di livello $L(k)$ della funzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. Valutare il gradiente nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dell'insieme di livello $L(0)$ e nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ dell'insieme di livello $L(2)$.
4. Disegnare gli insiemi di livello $L(0)$ e $L(2)$ e i due gradienti della domanda precedente, e verificare che ciascun gradiente è perpendicolare all'insieme di livello passante per il suo punto.

Soluzione

1. Le derivate parziali sono $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = -2x_1$ e $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 1$, quindi:

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è costante. La seconda componente del gradiente vale sempre 1, quindi il gradiente non è mai il vettore nullo.

2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$:

$$L(k) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1^2 = k \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2 + k \right\}$$

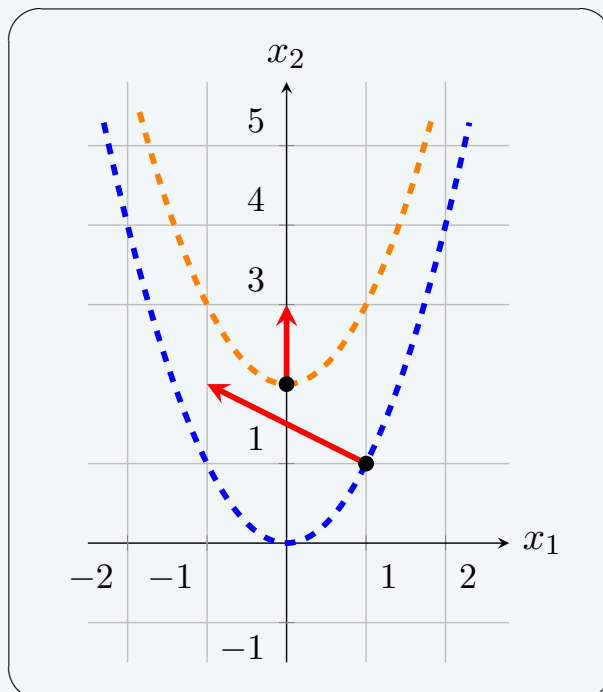
Ogni insieme di livello è una parabola di vertice $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$, ottenuta traslando la parabola $x_2 = x_1^2$ verticalmente di k .

3. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $L(0)$ poiché $1 - 1^2 = 0$, e il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a $L(2)$ poiché $2 - 0^2 = 2$. I gradienti sono:

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Disegniamo i due insiemi di livello con i gradienti, e poi verifichiamo la perpendicolarità con le direzioni tangenti.

Soluzione grafica: la figura mostra gli insiemi di livello $L(0)$ (in blu) e $L(2)$ (in arancione) e i due gradienti (in rosso), tracciati a partire dai loro punti:



La direzione tangente a un insieme di livello $x_2 = x_1^2 + k$ in un punto di prima coordinata x_1 è $\begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ (la derivata di $x_1^2 + k$ è $2x_1$):

- in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la direzione tangente è $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$;
- in $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ la direzione tangente è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Quindi, entrambi i gradienti sono perpendicolari all'insieme di livello passante per il loro punto, e puntano verso gli insiemi di livello con valori di k più grandi.

Funzioni convesse e concave

Negli esercizi di questo capitolo la convessità e la concavità si dimostrano solo con le definizioni del capitolo «Funzioni convesse e concave», usando le due disuguaglianze seguenti.

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 &= \lambda^2 a^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab + (1 - \lambda)^2 b^2 \\ &= \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - \lambda(1 - \lambda)a^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ab - \lambda(1 - \lambda)b^2 \\ &= \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - \lambda(1 - \lambda)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 - \underbrace{\lambda(1 - \lambda)(a - b)^2}_{\geq 0} \\ &\leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 \quad (\text{poiché } \lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0 \text{ e } (a - b)^2 \geq 0) \end{aligned}$$

Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la norma euclidea $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ soddisfa:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2 \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

$$\|\alpha \mathbf{u}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{u}\|_2 \quad (\text{omogeneità assoluta})$$

Esercizio 3.1 — Funzioni convesse e concave (E1)

Consideriamo le seguenti funzioni a valori reali:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x^2 - 4x + 5 \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : x \mapsto -x^2 + 4x - 5$$

e i seguenti due punti di $\mathbb{R}$ e scalare:

$$p = -1, \quad w = 4 \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{2}{5}.$$

Domande

1. Dimostrare che la funzione f è convessa nel suo dominio.
2. Calcolare i due membri della disuguaglianza della definizione di funzione convessa per f con i p , w e λ dati.
3. Disegnare il grafico di f , i punti $(p, f(p))$ e $(w, f(w))$ e il segmento che li congiunge.
4. Dimostrare che la funzione g è concava nel suo dominio.

Soluzione

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda p + (1-\lambda)w) &= (\lambda p + (1-\lambda)w - 2)^2 + 1 \\
 &= (\lambda(p-2) + (1-\lambda)(w-2))^2 + 1 \\
 &\leq \lambda(p-2)^2 + (1-\lambda)(w-2)^2 + 1 \\
 &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2) \\
 &= \lambda((p-2)^2 + 1) + (1-\lambda)((w-2)^2 + 1) \\
 &= \lambda f(p) + (1-\lambda)f(w)
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1-\lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1-\lambda)f(w)$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

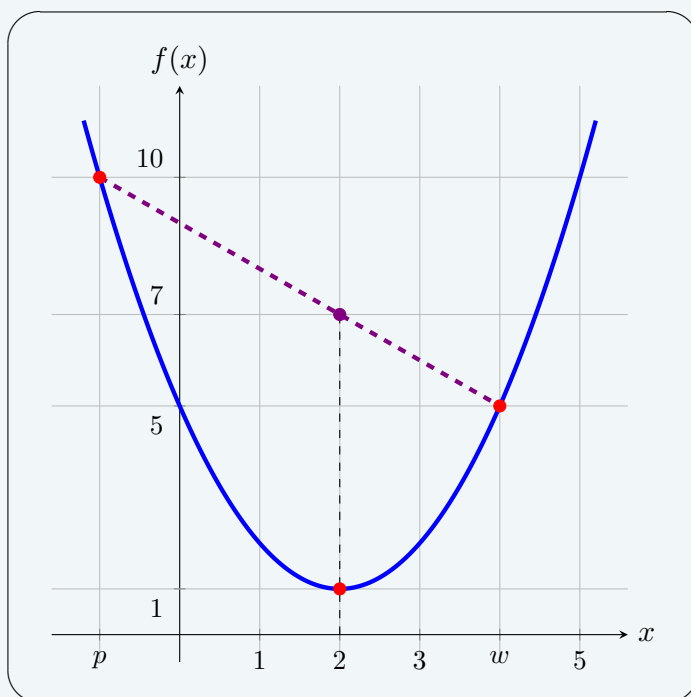
2. Con $p = -1$, $w = 4$ e $\lambda = \frac{2}{5}$ abbiamo

$$\lambda p + (1-\lambda)w = \frac{2}{5} \cdot (-1) + \frac{3}{5} \cdot 4 = 2, \quad f(-1) = 10, \quad f(4) = 5,$$

e i due membri della disuguaglianza sono:

$$f(2) = 1 \leq \frac{2}{5} f(-1) + \frac{3}{5} f(4) = \frac{2}{5} \cdot 10 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 7.$$

3. In figura, il segmento che congiunge $(p, f(p))$ e $(w, f(w))$ (in viola) si trova sopra il grafico di f (in blu). Il punto rosso è $(2, f(2))$ e il punto viola è $(2, \frac{2}{5}f(p) + \frac{3}{5}f(w))$.



4. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $g(x) = -(x - 2)^2 - 1$. Per ogni coppia di punti $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} g(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= -(\lambda(p - 2) + (1 - \lambda)(w - 2))^2 - 1 \\ &\geq -\lambda(p - 2)^2 - (1 - \lambda)(w - 2)^2 - 1 \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2) \\ &= \lambda(-(p - 2)^2 - 1) + (1 - \lambda)(-(w - 2)^2 - 1) \\ &= \lambda g(p) + (1 - \lambda)g(w) \end{aligned}$$

Quindi,

$$g(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda g(p) + (1 - \lambda)g(w)$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è concava nel suo dominio.

La stessa conclusione segue dalla prima domanda, poiché $g = -f$ (capitolo «Funzioni convesse e concave»: f è convessa se e solo se $-f$ è concava).

Esercizio 3.2 — Funzioni convesse e concave (E2)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \max \left\{ 1 - x, \frac{1}{2}x, 2x - 3 \right\}$$

e i seguenti due punti di $[-1, 4]$ e scalare:

$$p = -1, \quad w = 4 \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{3}{5}.$$

Domande

1. Calcolare $f(-1)$, $f(\frac{2}{3})$, $f(2)$ e $f(4)$, e disegnare il grafico della funzione.
2. Dimostrare che la funzione è convessa nel suo dominio.
3. Calcolare i due membri della disuguaglianza della definizione di funzione convessa con i p , w e λ dati.
4. Mostrare che la funzione non è concava nel suo dominio.

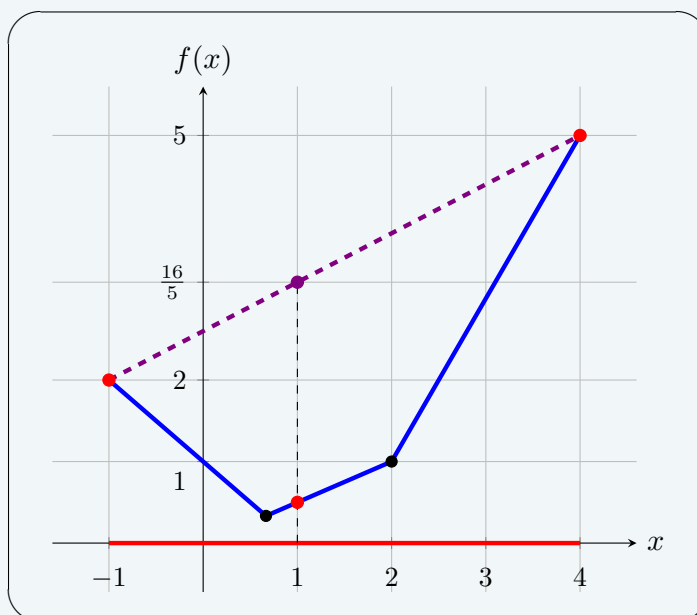
Soluzione

1. Abbiamo:

$$f(-1) = \max \left\{ 2, -\frac{1}{2}, -5 \right\} = 2, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3} \right\} = \frac{1}{3},$$

$$f(2) = \max \left\{ -1, 1, 1 \right\} = 1, \quad f(4) = \max \left\{ -3, 2, 5 \right\} = 5.$$

Le rette $1 - x$ e $\frac{1}{2}x$ si incontrano in $x = \frac{2}{3}$, e le rette $\frac{1}{2}x$ e $2x - 3$ si incontrano in $x = 2$. Il grafico di f (in blu) è formato da tre segmenti: $f(x) = 1 - x$ su $[-1, \frac{2}{3}]$, $f(x) = \frac{1}{2}x$ su $[\frac{2}{3}, 2]$ e $f(x) = 2x - 3$ su $[2, 4]$. Il dominio è in rosso; il segmento viola e i punti sono quelli della terza domanda.



2. Per ogni $x \in [-1, 4]$, $f(x)$ è il più grande dei tre valori $h_1(x) = 1 - x$, $h_2(x) = \frac{1}{2}x$ e $h_3(x) = 2x - 3$, e ciascuno di essi ha la forma $h_k(x) = a_k x + b_k$. Per ogni coppia di punti $p, w \in [-1, 4]$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) = h_k(\lambda p + (1 - \lambda)w)$$

(per un indice $k \in \{1, 2, 3\}$ che realizza il massimo)

$$= a_k (\lambda p + (1 - \lambda)w) + b_k$$

$$= \lambda (a_k p + b_k) + (1 - \lambda) (a_k w + b_k)$$

(poiché $\lambda + (1 - \lambda) = 1$)

$$\leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

(poiché $a_k p + b_k \leq f(p)$, $a_k w + b_k \leq f(w)$, $\lambda, 1 - \lambda \geq 0$)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Il dominio $[-1, 4]$ è un intervallo, quindi un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

La stessa conclusione segue dalla proprietà «il massimo di funzioni convesse è convesso» (capitolo «Funzioni convesse e concave»), poiché h_1 , h_2 e h_3 sono lineari.

3. Con $p = -1$, $w = 4$ e $\lambda = \frac{3}{5}$ abbiamo

$$\lambda p + (1 - \lambda)w = \frac{3}{5} \cdot (-1) + \frac{2}{5} \cdot 4 = 1, \quad f(1) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2}, -1 \right\} = \frac{1}{2},$$

e i due membri della disuguaglianza sono:

$$f(1) = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{5} f(-1) + \frac{2}{5} f(4) = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 5 = \frac{16}{5}.$$

4. La funzione è concava se $f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$ per ogni p, w del dominio e ogni $\lambda \in [0, 1]$. Con i punti e lo scalare della domanda precedente abbiamo

$$f(1) = \frac{1}{2} < \frac{16}{5} = \frac{3}{5} f(-1) + \frac{2}{5} f(4) :$$

la disuguaglianza della definizione di funzione concava non vale, quindi la funzione non è concava nel suo dominio.

Esercizio 3.3 — Funzioni convesse e concave (E3)

Consideriamo le seguenti funzioni a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 9}_{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 - 9}$$

e

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 + 1.$$

Domande

1. Dimostrare che la funzione f è convessa nel suo dominio.
2. Dimostrare che la funzione g è convessa nel suo dominio.
3. Dimostrare che l'insieme $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \}$ è convesso.
4. Disegnare il grafico della funzione f .

Soluzione

1. Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) &= (\lambda p_1 + (1 - \lambda)w_1)^2 + (\lambda p_2 + (1 - \lambda)w_2)^2 - 9 \\ &\leq \lambda p_1^2 + (1 - \lambda)w_1^2 + \lambda p_2^2 + (1 - \lambda)w_2^2 - 9 \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda (p_1^2 + p_2^2 - 9) + (1 - \lambda) (w_1^2 + w_2^2 - 9) \\
 &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

2. Sia $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= \|\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1 \\
 &= \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c}) + (1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_2 + 1 \\
 &\leq \|\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{c})\|_2 + \|(1 - \lambda)(\mathbf{w} - \mathbf{c})\|_2 + 1 \\
 &\quad (\text{per la disuguaglianza triangolare}) \\
 &= |\lambda| \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + |1 - \lambda| \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1 \\
 &\quad (\text{per l'omogeneità assoluta}) \\
 &= \lambda \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + (1 - \lambda) \|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1 \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\
 &= \lambda (\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|_2 + 1) + (1 - \lambda) (\|\mathbf{w} - \mathbf{c}\|_2 + 1) \\
 &= \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

3. L'insieme è $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{x}) \leq 0\}$. Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{w}$ dell'insieme e per ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

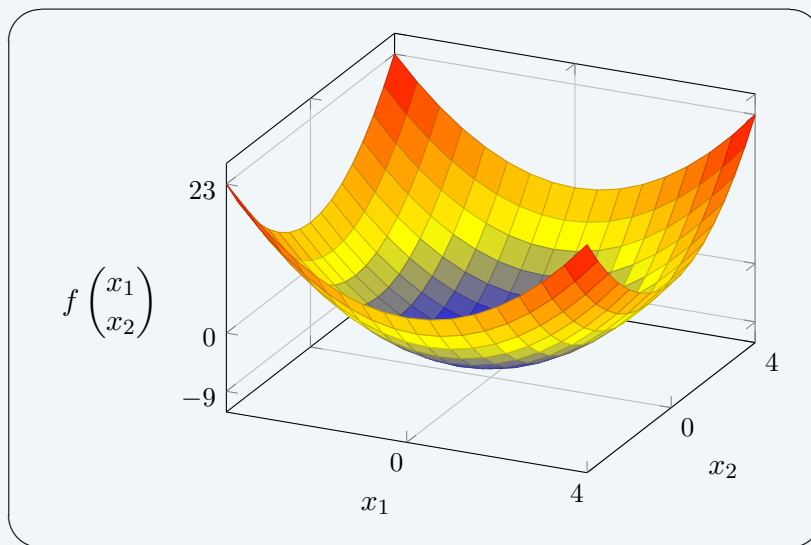
$$\begin{aligned}
 f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &\leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \\
 &\quad (\text{per la prima domanda}) \\
 &\leq \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 \\
 &\quad (\text{poiché } f(\mathbf{p}) \leq 0, f(\mathbf{w}) \leq 0, \lambda \geq 0 \text{ e } 1 - \lambda \geq 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq 0$$

Di conseguenza, $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ appartiene all'insieme e l'insieme è convesso. È il disco di raggio 3 centrato nell'origine.

4. Questo è il grafico della funzione f nel dominio $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in [-4, 4] \times [-4, 4]$; il suo punto più basso è $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, -9)$.



Esercizio 3.4 — Funzioni convesse e concave (E4)

Consideriamo le seguenti funzioni a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{x_1 + x_2 - 1}_{(1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1}$$

e

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \min \{ x_1 + x_2 - 1, 2 - x_1 \}$$

e i seguenti due punti di $\mathbb{R}^2$ e scalare:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Domande

1. Dimostrare che la funzione f è sia convessa sia concava nel suo dominio.
2. Disegnare il grafico della funzione f .
3. Dimostrare che la funzione g è concava nel suo dominio.
4. Calcolare i due membri della disuguaglianza della definizione di funzione concava per g con i $\mathbf{p}$, $\mathbf{w}$ e λ dati, e mostrare che g non è convessa nel suo dominio.

Soluzione

1. Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1) + (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2) - (\lambda + (1 - \lambda)) \\ &= \lambda (p_1 + p_2 - 1) + (1 - \lambda) (w_1 + w_2 - 1) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Quindi, valgono le disuguaglianze di entrambe le definizioni (con l'uguaglianza):

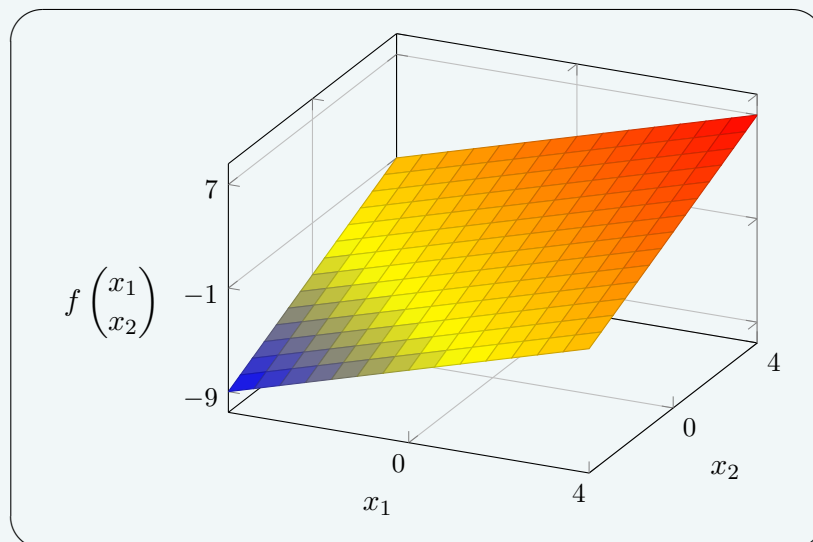
$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

e

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \geq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è sia convessa sia concava nel suo dominio.

2. Questo è il grafico della funzione f nel dominio $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in [-4, 4] \times [-4, 4]$: un piano.



3. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $g(\mathbf{x})$ è il più piccolo dei due valori $h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 1$ e $h_2(\mathbf{x}) = 2 - x_1$; come mostrato per f nella prima domanda, ciascuno di essi soddisfa $h_k(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) = \lambda h_k(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)h_k(\mathbf{w})$. Per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) &= h_k(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) \\ &\quad (\text{per un indice } k \in \{1, 2\} \text{ che realizza il minimo}) \\ &= \lambda h_k(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) h_k(\mathbf{w}) \\ &\quad (\text{come mostrato per } f \text{ nella prima domanda}) \\ &\geq \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)g(\mathbf{w}) \\ &\quad (\text{poiché } h_k(\mathbf{p}) \geq g(\mathbf{p}), h_k(\mathbf{w}) \geq g(\mathbf{w}), \lambda, 1 - \lambda \geq 0) \end{aligned}$$

Quindi,

$$g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w}) \geq \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)g(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è concava nel suo dominio.

La stessa conclusione segue dalla proprietà «il minimo di funzioni concave è concavo» (capitolo «Funzioni convesse e concave»), poiché h_1 e h_2 sono lineari.

4. Con $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{p}) = \min\{-1, 2\} = -1, \quad g(\mathbf{w}) = \min\{5, -2\} = -2,$$

e i due membri della disuguaglianza sono:

$$g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \min\{2, 0\} = 0 \geq \frac{1}{2} g(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} g(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -\frac{3}{2}.$$

Poiché $0 > -\frac{3}{2}$, la disuguaglianza della definizione di funzione convessa non vale per questi punti e questo scalare: la funzione g non è convessa nel suo dominio.

Esercizio 3.5 — Funzioni convesse e concave (E5)

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3$$

il cui dominio è l'intervallo $[a, b]$.

Domande

1. Dimostrare che per ogni $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $m = \lambda p + (1 - \lambda)w$, abbiamo

$$\lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) - f(m) = \lambda(1 - \lambda)(p - w)^2 (p + w + m - 6).$$

2. Dimostrare che con $a = 2$ e $b = 4$ la funzione è convessa.
3. Dimostrare che con $a = -1$ e $b = 2$ la funzione è concava.
4. Mostrare che con $a = -1$ e $b = 4$ la funzione non è né convessa né concava.
5. Disegnare il grafico della funzione con $a = -1$ e $b = 4$.

Soluzione

1. Per ogni $p, w \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, sia $d = p - w$, così che $p = w + d$ e $m = w + \lambda d$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) - f(m) &= 2(\lambda + (1 - \lambda) - 1) + 9(\lambda p + (1 - \lambda)w - m) \\ &\quad - 6(\lambda p^2 + (1 - \lambda)w^2 - m^2) \\ &\quad + \lambda p^3 + (1 - \lambda)w^3 - m^3 \\ &= -6(\lambda p^2 + (1 - \lambda)w^2 - m^2) \\ &\quad + \lambda p^3 + (1 - \lambda)w^3 - m^3 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1 \\ &\quad \text{e } m = \lambda p + (1 - \lambda)w) \\ &= -6(\lambda w^2 + 2\lambda w d + \lambda d^2 + (1 - \lambda)w^2 \\ &\quad - w^2 - 2\lambda w d - \lambda^2 d^2) \\ &\quad + \lambda(w^3 + 3w^2 d + 3w d^2 + d^3) + (1 - \lambda)w^3 \\ &\quad - (w^3 + 3\lambda w^2 d + 3\lambda^2 w d^2 + \lambda^3 d^3) \\ &\quad (\text{sviluppando le potenze, poiché } p = w + d \\ &\quad \text{e } m = w + \lambda d) \\ &= -6(\lambda - \lambda^2)d^2 + 3(\lambda - \lambda^2)w d^2 + (\lambda - \lambda^3)d^3 \\ &= \lambda(1 - \lambda)d^2(3w + (1 + \lambda)d - 6) \\ &= \lambda(1 - \lambda)d^2(p + w + m - 6) \\ &\quad (\text{poiché } 3w + (1 + \lambda)d = (w + d) + w + (w + \lambda d) \\ &\quad = p + w + m) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(p - w)^2(p + w + m - 6) \end{aligned}$$

2. Per ogni coppia di punti $p, w \in [2, 4]$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $m = \lambda p + (1 - \lambda)w \in [2, 4]$, abbiamo:

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) = \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) - \lambda(1 - \lambda)(p - w)^2(p + w + m - 6)$$

(per la domanda 1)

$$\leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

(poiché $\lambda(1 - \lambda)(p - w)^2 \geq 0$, $p, w, m \geq 2$)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Il dominio $[2, 4]$ è un intervallo, quindi un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

3. Per ogni coppia di punti $p, w \in [-1, 2]$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $m = \lambda p + (1 - \lambda)w \in [-1, 2]$, abbiamo:

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) = \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) - \lambda(1 - \lambda)(p - w)^2(p + w + m - 6)$$

(per la domanda 1)

$$\geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

(poiché $\lambda(1 - \lambda)(p - w)^2 \geq 0$, $p, w, m \leq 2$)

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Il dominio $[-1, 2]$ è un intervallo, quindi un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è concava nel suo dominio.

4. Abbiamo $f(0) = 2$, $f(1) = 6$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$ e $f(4) = 6$.

- Con $p = 0$, $w = 2$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo $\lambda p + (1 - \lambda)w = 1$ e

$$f(1) = 6 > \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3 :$$

la disuguaglianza della definizione di funzione convessa non vale, quindi la funzione non è convessa in $[-1, 4]$.

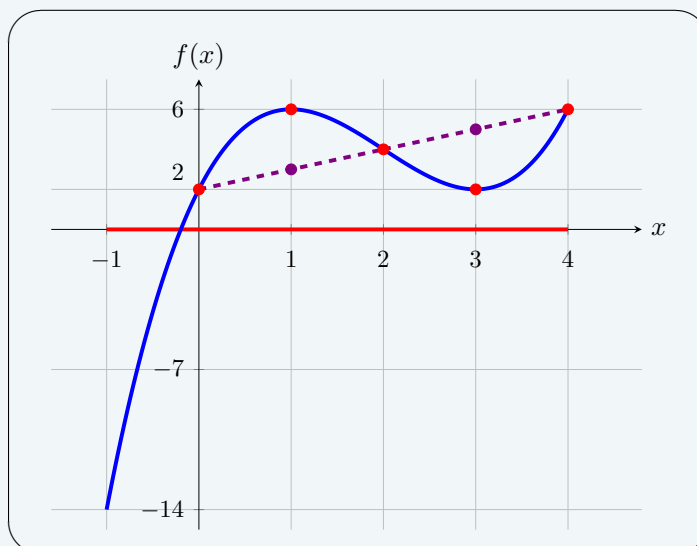
- Con $p = 2$, $w = 4$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo $\lambda p + (1 - \lambda)w = 3$ e

$$f(3) = 2 < \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 5 :$$

la disuguaglianza della definizione di funzione concava non vale, quindi la funzione non è concava in $[-1, 4]$.

Le due differenze concordano con la prima domanda: $\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (0 + 2 + 1 - 6) = -3 = 3 - 6$ e $\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (2 + 4 + 3 - 6) = 3 = 5 - 2$.

5. Questo è il grafico della funzione (in blu) nel dominio $[-1, 4]$ (in rosso), con $f(-1) = -14$. I segmenti viola congiungono i punti della domanda precedente: il primo si trova sotto il grafico (su $[-1, 2]$ la funzione è concava), il secondo si trova sopra il grafico (su $[2, 4]$ la funzione è convessa).



Funzioni quadratiche

Negli esercizi di questo capitolo la convessità si dimostra solo con la definizione di funzione convessa del capitolo «Funzioni convesse e concave»: la funzione quadratica si scrive come somma di quadrati di funzioni lineari, e la disuguaglianza

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$$

dello stesso capitolo si applica a ciascun quadrato.

Esercizio 4.1 — Funzioni quadratiche (E1)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

Domande

1. Scrivere la funzione nella forma matriciale $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$ con una matrice simmetrica $\mathbf{Q}$.
2. Mostrare che la matrice non simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ definisce la stessa funzione, e che sostituendo ogni coppia di elementi fuori diagonale con la loro media si ottiene la matrice $\mathbf{Q}$ della prima domanda.
3. Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana della funzione, e il gradiente nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. Mostrare che $f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2$ e dimostrare, a partire dalla definizione, che la funzione è convessa nel suo dominio.
5. Disegnare il grafico della funzione.

Soluzione

1. Il coefficiente 2 di x_1x_2 si ripartisce in parti uguali fra i due elementi fuori diagonale:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

2. Con la matrice non simmetrica abbiamo:

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

che è la stessa funzione. Sostituendo la coppia di elementi fuori diagonale con la loro media:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{6+(-4)}{2} \\ \frac{6+(-4)}{2} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$$

3. Il gradiente è $2\mathbf{Q}\mathbf{x}$ e la matrice Hessiana è $2\mathbf{Q}$:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Nei due punti:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \nabla f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 + 4 \\ -2 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

4. Sviluppando il quadrato:

$$(x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = f(\mathbf{x})$$

Per dimostrare che la funzione è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

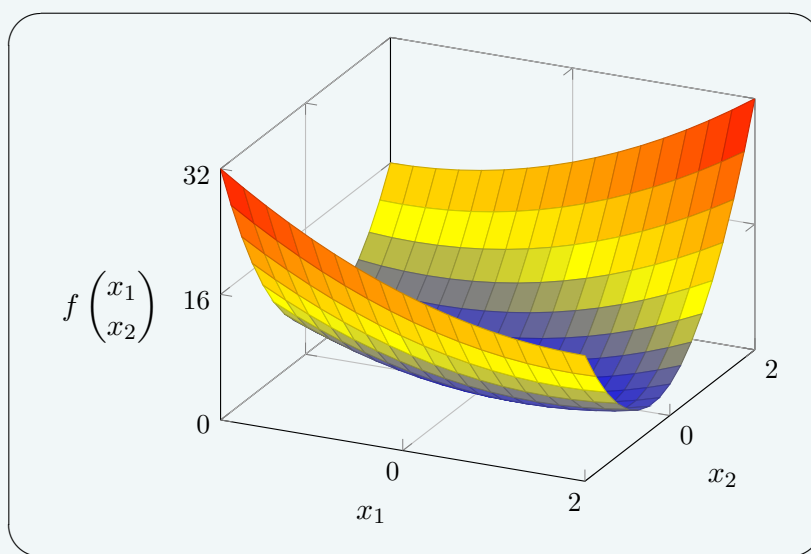
$$\begin{aligned} & f(\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{w}) \\ &= (\lambda p_1 + (1-\lambda)w_1 + \lambda p_2 + (1-\lambda)w_2)^2 + 4(\lambda p_2 + (1-\lambda)w_2)^2 \\ &= (\lambda(p_1 + p_2) + (1-\lambda)(w_1 + w_2))^2 + 4(\lambda p_2 + (1-\lambda)w_2)^2 \\ &\leq \lambda(p_1 + p_2)^2 + (1-\lambda)(w_1 + w_2)^2 + 4(\lambda p_2^2 + (1-\lambda)w_2^2) \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2, \text{ due volte}) \\ &= \lambda((p_1 + p_2)^2 + 4p_2^2) + (1-\lambda)((w_1 + w_2)^2 + 4w_2^2) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1-\lambda)f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

5. Questo è il grafico della funzione nel dominio $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in [-2, 2] \times [-2, 2]$; il suo punto più basso è $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$ e i suoi punti più alti sono in $(2, 2)$ e $(-2, -2)$, dove $f = 32$.



Esercizio 4.2 — Funzioni quadratiche (E2)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 2x_2^2$$

Domande

1. Scrivere la funzione nella forma matriciale $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x}$ con una matrice simmetrica $\mathbf{Q}$.
2. Calcolare il gradiente della funzione e il suo valore nei quattro punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Descrivere gli insiemi di livello della funzione per $k = 3$ e $k = 12$ (con le loro intersezioni con gli assi) e disegnarli, insieme ai gradienti della domanda precedente applicati nei rispettivi punti.

4. Dimostrare, a partire dalla definizione, che la funzione è convessa nel suo dominio.

Soluzione

1. La funzione non ha il termine x_1x_2 , quindi gli elementi fuori diagonale sono nulli:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2$$

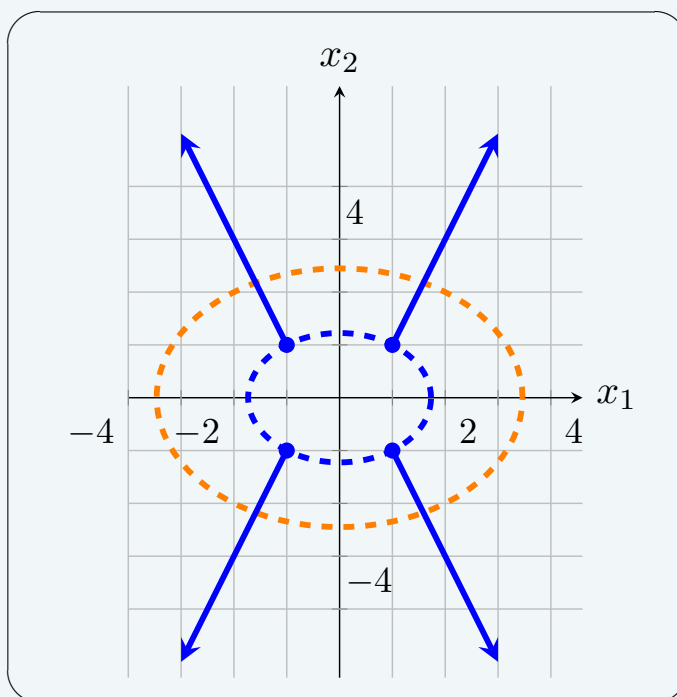
2. Il gradiente è $2\mathbf{Q}\mathbf{x}$:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

Nei quattro punti:

$$\begin{aligned} \nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, & \nabla f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \nabla f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, & \nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. L'insieme di livello per $k = 3$ è l'ellisse $x_1^2 + 2x_2^2 = 3$, che interseca l'asse x_1 in $x_1 = \pm\sqrt{3}$ e l'asse x_2 in $x_2 = \pm\sqrt{3/2}$; contiene i quattro punti della domanda precedente, poiché $1 + 2 = 3$. L'insieme di livello per $k = 12$ è l'ellisse $x_1^2 + 2x_2^2 = 12$, che interseca l'asse x_1 in $x_1 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ e l'asse x_2 in $x_2 = \pm\sqrt{6}$; contiene i quattro punti $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$, poiché $4 + 8 = 12$. Nella figura, l'insieme di livello $k = 3$ è in blu, l'insieme di livello $k = 12$ è in arancione e i gradienti nei quattro punti dell'insieme di livello $k = 3$ sono le frecce blu: ogni gradiente è perpendicolare all'insieme di livello.



4. Per dimostrare che la funzione è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) &= (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1)^2 + 2 (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2)^2 \\ &\leq \lambda p_1^2 + (1 - \lambda) w_1^2 + 2 (\lambda p_2^2 + (1 - \lambda) w_2^2) \\ &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda) b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda) b^2, \text{ due volte}) \\ &= \lambda (p_1^2 + 2 p_2^2) + (1 - \lambda) (w_1^2 + 2 w_2^2) \\ &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Esercizio 4.3 — Funzioni quadratiche (E3)

Consideriamo la seguente funzione a valori reali:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 2 x_2^2 - 2 x_1 + 4$$

Domande

1. Scrivere la funzione nella forma $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}'\mathbf{x} + d$ con una matrice simmetrica $\mathbf{Q}$, un vettore $\mathbf{c}$ e uno scalare d .
2. Calcolare il gradiente della funzione e il punto in cui il gradiente è il vettore nullo.
3. Mostrare che $g(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2$ e dedurre che $g(\mathbf{x}) \geq 2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, con l'uguaglianza solo nel punto della domanda precedente.
4. Descrivere gli insiemi di livello della funzione per $k = 3$ e $k = 6$ e disegnarli.
5. Dimostrare, a partire dalla definizione, che la funzione è convessa nel suo dominio.

Soluzione

1. Il coefficiente -2 di x_1x_2 si ripartisce in parti uguali fra i due elementi fuori diagonale, e la parte lineare è $-2x_1 + 0x_2$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = 4$$

Infatti:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 4 = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 4$$

2. Il gradiente è $2\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}$:

$$\nabla g \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Il gradiente è il vettore nullo quando:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $x_1 = 2x_2$; sostituendo nella prima, $4x_2 - 2x_2 - 2 = 0$, cioè $x_2 = 1$ e $x_1 = 2$. Il punto è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Sviluppando i quadrati:

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 1 - 2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 + x_2^2 - 2x_2 + 1 + 2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 4 = g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Poiché i due quadrati sono non negativi, $g(\mathbf{x}) \geq 2$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. L'uguaglianza vale solo se entrambi i quadrati sono nulli, cioè $x_2 = 1$ e $x_1 = x_2 + 1 = 2$: il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ della domanda precedente, in cui $g = 2$.

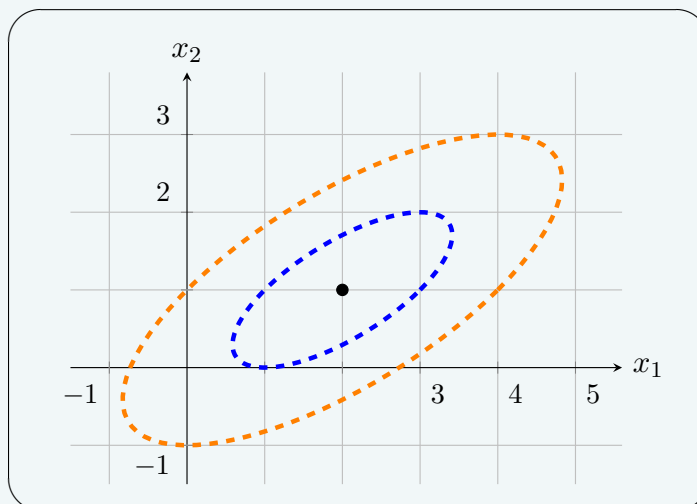
4. Per la domanda precedente, l'insieme di livello per $k = 3$ è

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}$$

un'ellisse di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ che contiene, per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme di livello per $k = 6$ è

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4\}$$

un'ellisse con lo stesso centro che contiene, per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nella figura, l'insieme di livello $k = 3$ è in blu, l'insieme di livello $k = 6$ è in arancione e il centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è in nero.



5. Per dimostrare che la funzione è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni

coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 & g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\
 &= (\lambda p_1 + (1 - \lambda) w_1 - \lambda p_2 - (1 - \lambda) w_2 - 1)^2 + (\lambda p_2 + (1 - \lambda) w_2 - 1)^2 + 2 \\
 &= (\lambda(p_1 - p_2 - 1) + (1 - \lambda)(w_1 - w_2 - 1))^2 + (\lambda(p_2 - 1) + (1 - \lambda)(w_2 - 1))^2 + 2 \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 &\leq \lambda(p_1 - p_2 - 1)^2 + (1 - \lambda)(w_1 - w_2 - 1)^2 + \lambda(p_2 - 1)^2 + (1 - \lambda)(w_2 - 1)^2 + 2 \\
 &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \text{ due volte}) \\
 &= \lambda((p_1 - p_2 - 1)^2 + (p_2 - 1)^2 + 2) + (1 - \lambda)((w_1 - w_2 - 1)^2 + (w_2 - 1)^2 + 2) \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 &= \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$g(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda g(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) g(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

Esercizio 4.4 — Funzioni quadratiche (E4)

Consideriamo le seguenti funzioni a valori reali:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Domande

1. Trovare la matrice simmetrica $\mathbf{Q}$ che definisce la stessa funzione f , e scrivere f come polinomio in x_1, x_2, x_3 .
2. Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f , e il gradiente nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Mostrare che $f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2$ e dimostrare, a partire dalla definizione, che f è convessa nel suo dominio.

4. Scrivere h in forma matriciale con una matrice simmetrica e mostrare che h non è convessa nel suo dominio, trovando due punti e un valore di λ per cui la disuguaglianza della definizione di funzione convessa non è verificata.

Soluzione

1. Sostituendo ogni coppia di elementi fuori diagonale con la loro media:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4+(-2)}{2} & 0 \\ \frac{4+(-2)}{2} & 2 & \frac{-6+4}{2} \\ 0 & \frac{-6+4}{2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e la funzione è:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_3x_2 + 3x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \end{aligned}$$

2. Il gradiente è $2\mathbf{Q}\mathbf{x}$ e la matrice Hessiana è $2\mathbf{Q}$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ -2x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Nel punto:

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-4-2 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3. Sviluppando i quadrati:

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Per dimostrare che la funzione è convessa nel suo dominio, osserviamo che per ogni coppia di punti $\mathbf{p}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 & f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \\
 &= (\lambda(p_1 + p_2) + (1 - \lambda)(w_1 + w_2))^2 + (\lambda(p_2 - p_3) + (1 - \lambda)(w_2 - w_3))^2 \\
 &\quad + 2(\lambda p_3 + (1 - \lambda)w_3)^2 \\
 &\leq \lambda(p_1 + p_2)^2 + (1 - \lambda)(w_1 + w_2)^2 + \lambda(p_2 - p_3)^2 + (1 - \lambda)(w_2 - w_3)^2 \\
 &\quad + 2(\lambda p_3^2 + (1 - \lambda)w_3^2) \\
 &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \text{ tre volte}) \\
 &= \lambda((p_1 + p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + 2p_3^2) \\
 &\quad + (1 - \lambda)((w_1 + w_2)^2 + (w_2 - w_3)^2 + 2w_3^2) \\
 &= \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{w})
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda f(\mathbf{p}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{w})$$

Per natura, il dominio $\mathbb{R}^3$ è un insieme convesso. Di conseguenza, la funzione è convessa nel suo dominio.

4. Il coefficiente 4 di $x_1 x_2$ si ripartisce in parti uguali fra i due elementi fuori diagonale:

$$h \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Con $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, abbiamo $\frac{1}{2} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e:

$$h(\mathbf{p}) = 1 - 4 + 1 = -2, \quad h(\mathbf{w}) = 1 - 4 + 1 = -2, \quad h \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Quindi,

$$h \left(\frac{1}{2} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \right) = 0 > -2 = \frac{1}{2} h(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} h(\mathbf{w})$$

La disuguaglianza della definizione non è verificata, quindi la funzione h non è convessa nel suo dominio. In accordo con il capitolo, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ non è semidefinita positiva, poiché $h(\mathbf{p}) = -2 < 0$.