



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione convessa

Volume 2 — Problemi di ottimizzazione

Problemi di ottimizzazione con le loro soluzioni ottime, ottimi locali e globali, problemi convessi e concavi, in cui ogni ottimo locale è globale. Con esempi svolti.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-convessa/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-convessa

Anno accademico 2026–2027

Indice

5	Problemi di ottimizzazione	2
5.1	Problemi di ottimizzazione	2
5.2	Proprietà dei problemi di ottimizzazione	10
5.3	Soluzioni ottime locali e globali	14
6	Problemi di ottimizzazione convessi e concavi	20
6.1	Problemi di ottimizzazione convessi e concavi	20
6.2	Ottimi locali dei problemi convessi e concavi	21
6.3	Esempi di problemi di ottimizzazione convessi e concavi	23



Problemi di ottimizzazione

5.1 Problemi di ottimizzazione

Definizione 5.1: problema di ottimizzazione in forma di minimo e in forma di massimo

Dati un insieme $F \subseteq \mathbb{R}^n$ e una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $F \subseteq D$, il **problema di ottimizzazione** associato P consiste:

- nella **forma di minimo**, nel trovare un punto $\tilde{x}(P) \in F$ tale che

$$f(\tilde{x}(P)) \leq f(x), \quad \forall x \in F;$$

- nella **forma di massimo**, nel trovare un punto $\tilde{x}(P) \in F$ tale che

$$f(\tilde{x}(P)) \geq f(x), \quad \forall x \in F.$$

5.1.1 Regione ammissibile e funzione obiettivo

- L'insieme F si chiama **regione ammissibile** del problema di ottimizzazione; i suoi punti $x \in F$ si chiamano **soluzioni ammissibili** del problema di ottimizzazione.
- La funzione f è la **funzione obiettivo** del problema di ottimizzazione; essa assegna un valore obiettivo a ogni soluzione ammissibile.

Definizione 5.2: soluzione ottima e valore ottimo

- Un punto $\tilde{x}(P) \in F$ si chiama **soluzione ottima** del problema di ottimizzazione.

1. Nella forma di minimo,

$$\tilde{x}(P) \in \arg \min \{ f(x) \text{ soggetto a } x \in F \}.$$

2. Nella forma di massimo,

$$\tilde{x}(P) \in \arg \max \{ f(x) \text{ soggetto a } x \in F \}.$$

- Il valore $f(\tilde{x}(P))$ si chiama **valore ottimo** del problema di ottimizzazione e si indica con $z(P)$.

1. Nella forma di minimo,

$$z(P) = \underbrace{\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}}_{=f(\tilde{\mathbf{x}}(P))}.$$

2. Nella forma di massimo,

$$z(P) = \underbrace{\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}}_{=f(\tilde{\mathbf{x}}(P))}.$$

- Un problema di ottimizzazione può ammettere più soluzioni ottime (anche infinite) oppure nessuna. In questi casi, gli operatori $\arg \min$ e $\arg \max$ restituiscono l'intero insieme delle soluzioni ottime, quando esistono, e l'insieme vuoto altrimenti.
- Con un leggero abuso di notazione:

1. nella **forma di minimo**, scriviamo il problema di ottimizzazione come

$$\min\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}.$$

2. nella **forma di massimo**, scriviamo il problema di ottimizzazione come

$$\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}.$$

Sebbene si usino i simboli “min” e “max”, l'obiettivo di un problema di ottimizzazione è **trovare una soluzione ottima** $\tilde{\mathbf{x}}(P)$, quando esiste, e non soltanto determinare il valore ottimo $z(P)$.

- Nelle figure di questo capitolo, il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso, la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono blu. Un cerchio vuoto indica un estremo che non appartiene alla regione ammissibile.

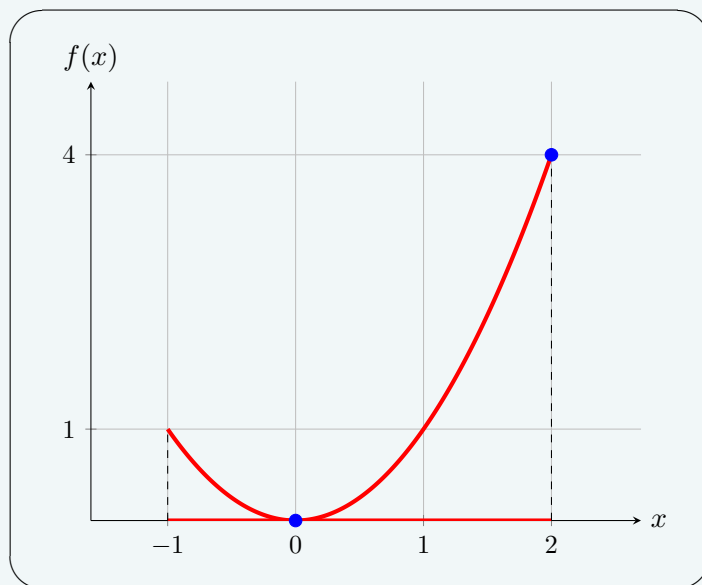
Esempio 5.1: un problema di ottimizzazione con funzione obiettivo quadratica

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2].$$

I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ x^2 \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 2 \right\} \quad \text{e} \quad \max \left\{ x^2 \text{ soggetto a } -1 \leq x \leq 2 \right\}$$



- Per la forma di minimo, poiché $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$ per ogni x ammissibile, e $x^2 = 0$ solo per $x = 0$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (0) \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $|x| \leq 2$ e quindi $f(x) = |x|^2 \leq 4 = f(2)$, con $x^2 = 4$ solo per $x = -2$ e $x = 2$; poiché $-2 \notin F$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = 4.$$

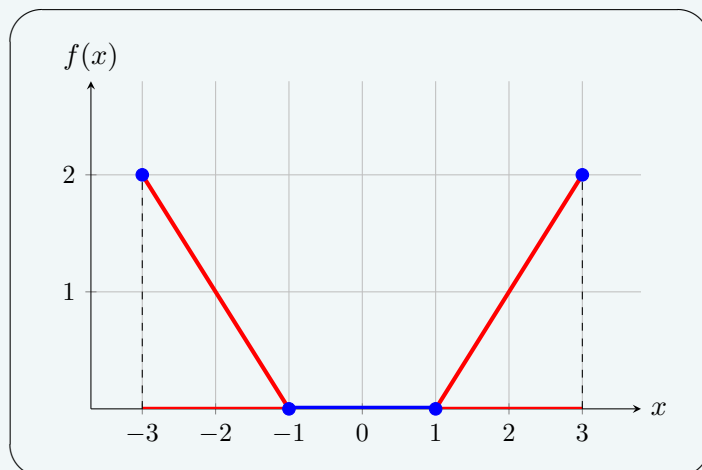
Le soluzioni ottime si trovano direttamente dalla definizione: confrontiamo il valore della funzione obiettivo in un punto candidato con il suo valore in ogni soluzione ammissibile.

Esempio 5.2: un problema di ottimizzazione con infinite soluzioni ottime

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \max\{0, |x| - 1\} \quad \text{e} \quad F = [-3, 3].$$

La funzione obiettivo vale $f(x) = 0$ per $-1 \leq x \leq 1$ e $f(x) = |x| - 1$ altrimenti: il suo grafico è formato da tre segmenti.



- Per la forma di minimo, $f(x) \geq 0$ per ogni x ammissibile, e $f(x) = 0$ esattamente per $-1 \leq x \leq 1$. Il problema ha **infinite** soluzioni ottime (il segmento blu) e il valore ottimo è:

$$\arg \min \{ \max\{0, |x| - 1\} \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 3 \} = [-1, 1] \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $|x| \leq 3$ e quindi $f(x) \leq \max\{0, 3 - 1\} = 2$, con $f(x) = 2$ solo per $x = -3$ e $x = 3$. Il problema ha **due** soluzioni ottime e il valore ottimo è:

$$\arg \max \{ \max\{0, |x| - 1\} \text{ soggetto a } -3 \leq x \leq 3 \} = \{-3, 3\} \quad \text{e} \quad z(P) = 2.$$

- Una soluzione ottima di un problema di ottimizzazione può non esistere per uno dei tre motivi seguenti:
 1. Se la funzione obiettivo decresce indefinitamente in un problema di minimo o cresce indefinitamente in un problema di massimo, il problema di ottimizzazione si dice **illimitato**. In questi casi si ha, rispettivamente, $z(P) = -\infty$ e $z(P) = +\infty$.
 2. Se la regione ammissibile è vuota, cioè non esistono soluzioni, il problema di ottimizzazione si dice **inammissibile**. In questi casi $z(P)$ non è definito.
 3. Se l'estremo inferiore (o superiore) della funzione obiettivo esiste ma non è raggiunto nella regione ammissibile, si dice che il problema di ottimizzazione ha un **estremo inferiore (o superiore) non raggiunto**, come negli Esempi 5.5 e 5.6. In questi casi $z(P)$ non è definito.

- Nella **forma di minimo**, una soluzione ottima è un **punto di minimo** e il corrispondente valore ottimo è il **minimo** della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.

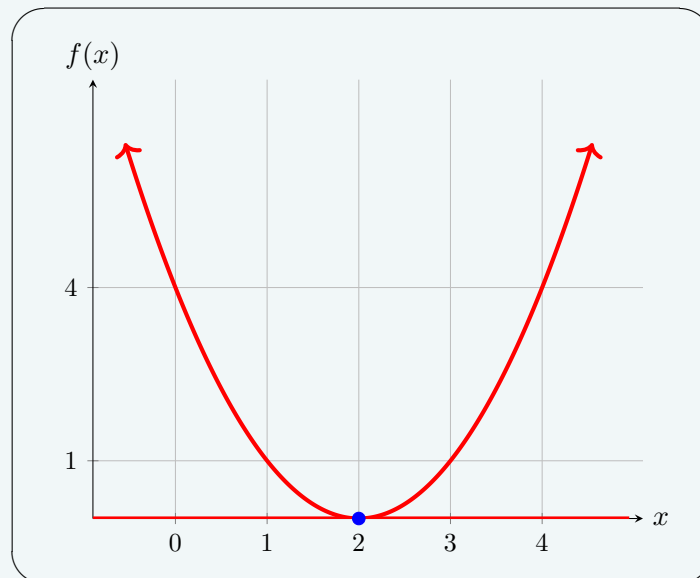
Analogamente, nella **forma di massimo**, una soluzione ottima è un **punto di massimo** e il corrispondente valore ottimo è il **massimo** della funzione obiettivo sulla regione ammissibile.

Esempio 5.3: un problema di ottimizzazione illimitato

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto (x - 2)^2 \quad \text{e} \quad F = \mathbb{R}.$$

La regione ammissibile è l'intera retta reale: il grafico prosegue verso l'alto su entrambi i lati della figura.



- Per la forma di minimo, poiché $f(x) = (x - 2)^2 \geq 0 = f(2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $(x - 2)^2 = 0$ solo per $x = 2$, l'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = 0.$$

- Per la forma di massimo, la funzione obiettivo cresce indefinitamente: per ogni valore $M \geq 0$, la soluzione ammissibile $x = M + 3$ ha

$$f(M + 3) = (M + 1)^2 \geq M + 1 > M.$$

Nessuna soluzione ammissibile può essere ottima e il problema è **illimitato**: $z(P) = +\infty$.

Esempio 5.4: un problema di ottimizzazione inammissibile

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq -1\}.$$

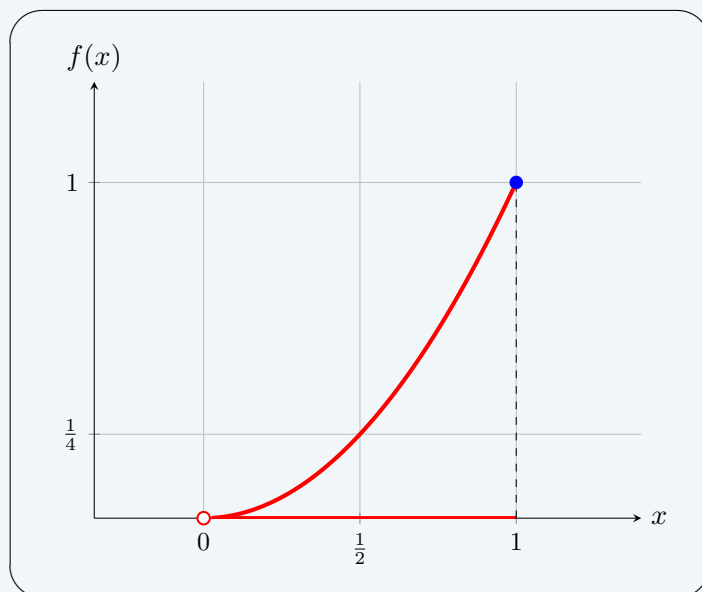
Poiché $x^2 \geq 0 > -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, nessun punto soddisfa il vincolo e la regione ammissibile è vuota: $F = \emptyset$. Sia la forma di minimo sia la forma di massimo sono **inammissibili**: non hanno soluzioni ammissibili, quindi nemmeno soluzioni ottime, e $z(P)$ non è definito.

Esempio 5.5: un problema di ottimizzazione con estremo inferiore non raggiunto

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2 \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\} = (0, 1].$$

Il punto $x = 0$ non appartiene alla regione ammissibile (cerchio vuoto nella figura).



- Per la forma di minimo, $f(x) = x^2 > 0$ per ogni x ammissibile, e i valori di f si avvicinano a 0 quanto vogliamo: l'estremo inferiore di f su F è 0. Tuttavia, nessuna soluzione ammissibile è ottima: per ogni $x \in F$, il punto $\frac{x}{2}$ è ammissibile e

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{4} < x^2 = f(x).$$

Il problema ha un **estremo inferiore non raggiunto**: non esiste una soluzione ottima e $z(P)$ non è definito.

- Per la forma di massimo, per ogni x ammissibile abbiamo $0 < x \leq 1$ e quindi $f(x) = x^2 \leq 1 = f(1)$, con $x^2 = 1$ solo per $x = 1$ in F . L'unica soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (1) \quad \text{e} \quad z(P) = 1.$$

Esempio 5.6: un estremo inferiore non raggiunto all'infinito

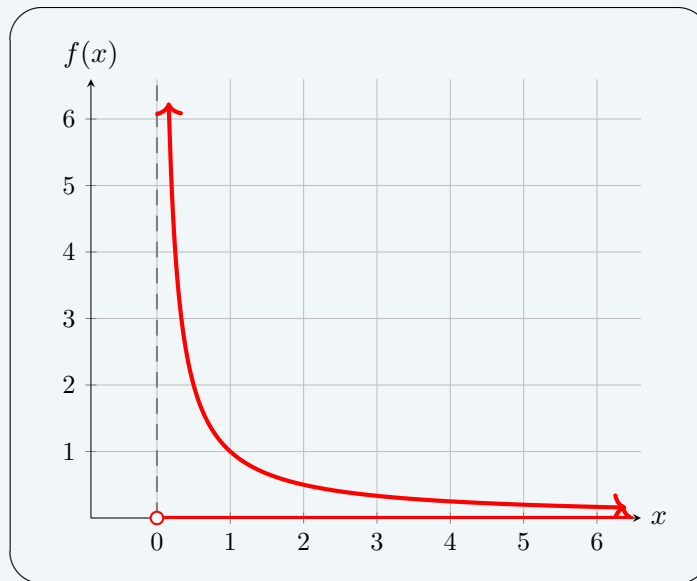
Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty).$$

I problemi di ottimizzazione associati, in forma di minimo e in forma di massimo, sono:

$$\min \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\} \quad \text{e} \quad \max \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\}$$

Il punto $x = 0$ non appartiene alla regione ammissibile (cerchio vuoto nella figura). Il grafico prosegue verso destra, avvicinandosi all'asse x , e verso l'alto, avvicinandosi alla retta tratteggiata $x = 0$.



- Per la forma di minimo, $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ per ogni x ammissibile, e i valori di f si avvicinano a 0 quanto vogliamo per $x \rightarrow +\infty$: l'estremo inferiore di f su F è 0. Tuttavia, nessuna soluzione ammissibile è ottima: per ogni $x \in F$, il punto $2x$ è ammissibile e

$$f(2x) = \frac{1}{2x} < \frac{1}{x} = f(x).$$

Il problema ha un **estremo inferiore non raggiunto**: non esiste una soluzione ottima e

$$\inf \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\} = 0, \quad z(P) \text{ non è definito.}$$

- Per la forma di massimo, la funzione obiettivo cresce indefinitamente per $x \rightarrow 0^+$: per ogni valore $M > 0$, la soluzione ammissibile $x = \frac{1}{M+1}$ ha

$$f\left(\frac{1}{M+1}\right) = M+1 > M.$$

Nessuna soluzione ammissibile può essere ottima e il problema è **illimitato**:

$$\sup \left\{ \frac{1}{x} \text{ soggetto a } x > 0 \right\} = +\infty \quad \text{e} \quad z(P) = +\infty.$$

5.1.2 Soluzioni ammissibili e limitazioni sul valore ottimo

- Data

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}(P)} \in F$$

una **soluzione ammissibile** di un problema di ottimizzazione, abbiamo

1. in forma di **minimo**, il seguente **upper bound**:

$$z(P) \leq \underbrace{f(\bar{\mathbf{x}}(P))}_{UB(\bar{\mathbf{x}})}.$$

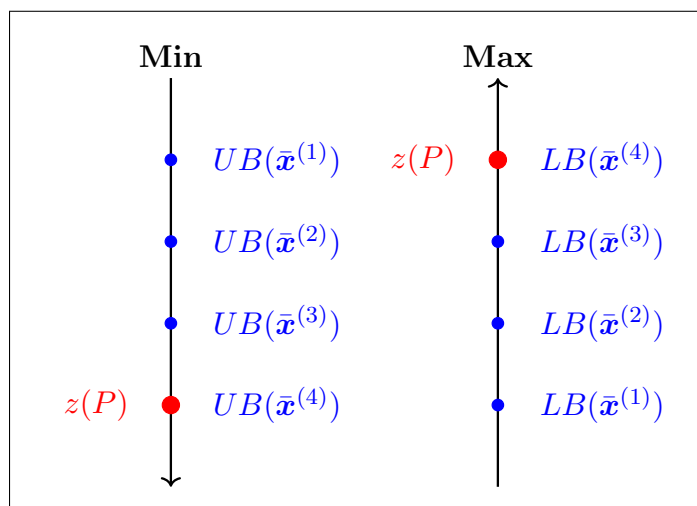
2. in forma di **massimo**, il seguente **lower bound**:

$$\underbrace{f(\bar{\mathbf{x}}(P))}_{LB(\bar{\mathbf{x}})} \leq z(P).$$

A titolo illustrativo, la figura seguente considera quattro soluzioni ammissibili

$$\bar{\mathbf{x}}^{(1)}, \bar{\mathbf{x}}^{(2)}, \bar{\mathbf{x}}^{(3)}, \bar{\mathbf{x}}^{(4)} \in F$$

e mostra come esse forniscano lower bound nel caso di massimo e upper bound nel caso di minimo per il valore ottimo $z(P)$ (la quarta raggiunge il valore ottimo).



Esempio 5.7: limitazioni fornite da soluzioni ammissibili

Consideriamo di nuovo la funzione obiettivo $f(x) = x^2$ e la regione ammissibile $F = [-1, 2]$ dell'esempio con funzione obiettivo quadratica, dove $z(P) = 0$ in forma di minimo e $z(P) =$

4 in forma di massimo. Le soluzioni ammissibili

$$\bar{x}^{(1)} = (-1), \quad \bar{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right), \quad \bar{x}^{(3)} = (1)$$

hanno valori obiettivo 1, $\frac{1}{4}$ e 1. Quindi:

- in forma di minimo, forniscono gli upper bound $UB(\bar{x}^{(1)}) = 1$, $UB(\bar{x}^{(2)}) = \frac{1}{4}$ e $UB(\bar{x}^{(3)}) = 1$ su $z(P) = 0$; il migliore è $\frac{1}{4}$, il più piccolo;
- in forma di massimo, forniscono i lower bound $LB(\bar{x}^{(1)}) = 1$, $LB(\bar{x}^{(2)}) = \frac{1}{4}$ e $LB(\bar{x}^{(3)}) = 1$ su $z(P) = 4$; il migliore è 1, il più grande.

Nessuna di queste limitazioni è uguale al valore ottimo: una limitazione ci dice quanto il valore ottimo può distare dal valore di una soluzione ammissibile nota, senza calcolarlo.

5.2 Proprietà dei problemi di ottimizzazione

- Le seguenti proprietà valgono per ogni problema di ottimizzazione.
- Nel seguito enunciamo le proprietà usando min e max solo nel caso in cui il minimo e il massimo esistono (cioè sono raggiunti sulla regione ammissibile); altrimenti, gli enunciati analoghi valgono sostituendo min / max con inf / sup.
- Per ogni funzione obiettivo f e ogni regione ammissibile F , abbiamo:

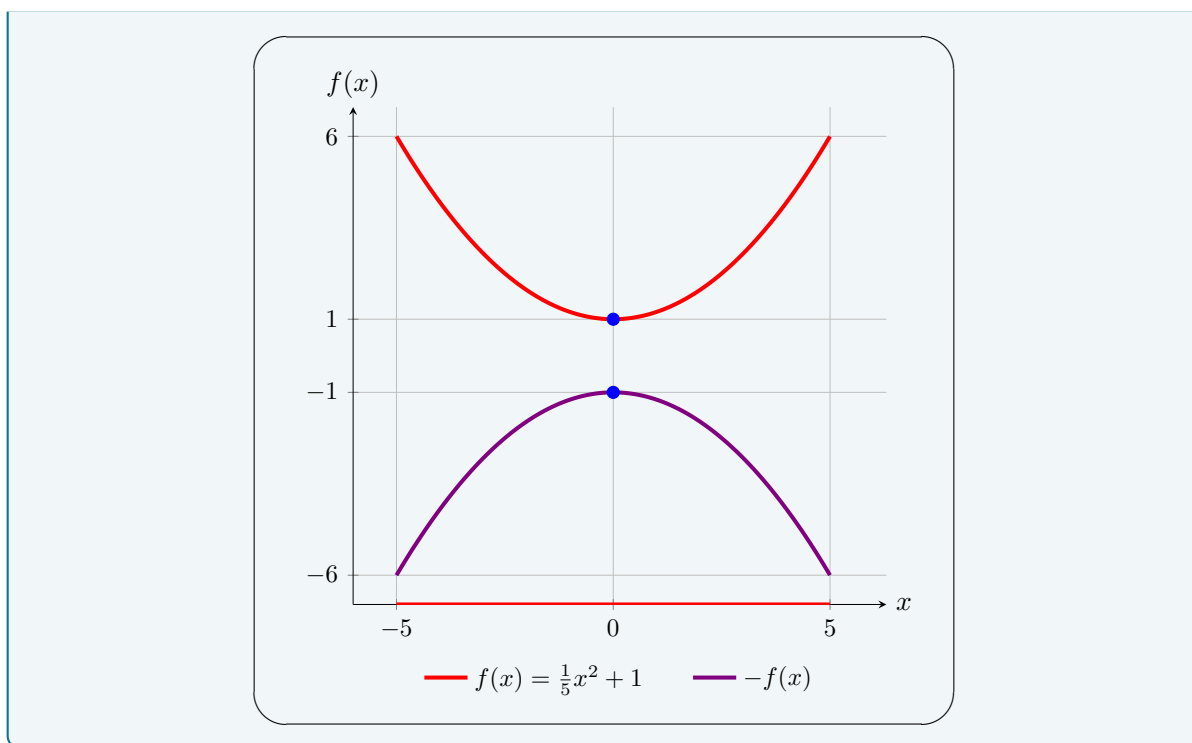
$$\min \left\{ f(x) \text{ soggetto a } x \in F \right\} = - \max \left\{ -f(x) \text{ soggetto a } x \in F \right\} \quad (5.1)$$

- Le soluzioni ottime non cambiano: un punto minimizza f su F se e solo se massimizza $-f$ su F . Nelle figure di questa sezione, la funzione obiettivo originale è rossa, quella trasformata è viola, la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono blu.

Esempio 5.8: proprietà: minimo e massimo

$$\begin{aligned} & \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 + 1 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=1} \\ &= - \underbrace{\max \left\{ -\left(\frac{1}{5}x^2 + 1\right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-1} \end{aligned}$$

Infatti, $\frac{1}{5}x^2 + 1 \geq 1$ e $-\left(\frac{1}{5}x^2 + 1\right) \leq -1$ per ogni x , con l'uguaglianza solo per $x = 0$: entrambi gli ottimi sono raggiunti in $x = 0$.



- Per ogni funzione obiettivo, ogni regione ammissibile e ogni $a \in \mathbb{R}$, abbiamo:

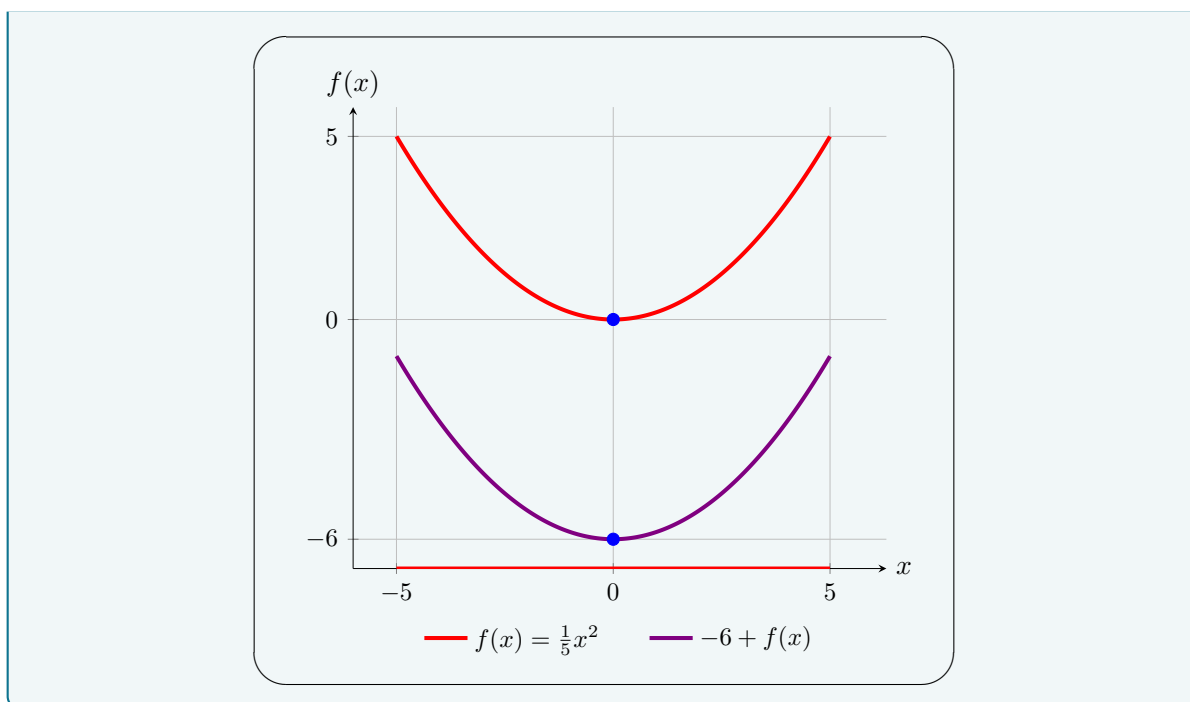
$$\min \left\{ a + f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} = a + \min \left\{ f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F \right\} \quad (5.2)$$

- Aggiungere una costante sposta il grafico della funzione obiettivo verso l'alto o verso il basso: le soluzioni ottime non cambiano.

Esempio 5.9: proprietà: somma di una costante

$$\begin{aligned} & \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 - 6 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-6} \\ &= -6 + \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{5}x^2 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=0} \end{aligned}$$

Entrambi i minimi sono raggiunti in $x = 0$, poiché $\frac{1}{5}x^2 \geq 0$ per ogni x , con l'uguaglianza solo per $x = 0$.



- Per ogni funzione obiettivo, ogni regione ammissibile e ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$, abbiamo:

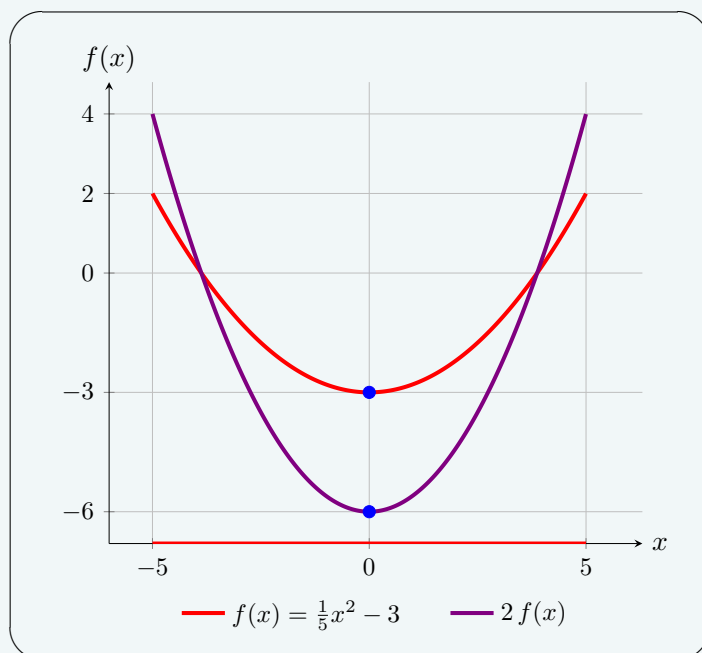
$$\min \left\{ a f(x) \text{ soggetto a } x \in F \right\} = a \min \left\{ f(x) \text{ soggetto a } x \in F \right\} \quad (5.3)$$

- Moltiplicare per una costante positiva dilata (o comprime) il grafico in verticale: le soluzioni ottime non cambiano.

Esempio 5.10: proprietà: moltiplicazione per una costante positiva

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \underbrace{2 \left(\frac{1}{5}x^2 - 3 \right)}_{=-6} \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\} \\ &= 2 \min \left\{ \underbrace{\frac{1}{5}x^2 - 3}_{=-3} \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\} \end{aligned}$$

Entrambi i minimi sono raggiunti in $x = 0$, poiché $\frac{1}{5}x^2 - 3 \geq -3$ per ogni x , con l'uguaglianza solo per $x = 0$.



- Per ogni funzione obiettivo, ogni regione ammissibile e ogni $a \in \mathbb{R}_{<0}$, abbiamo:

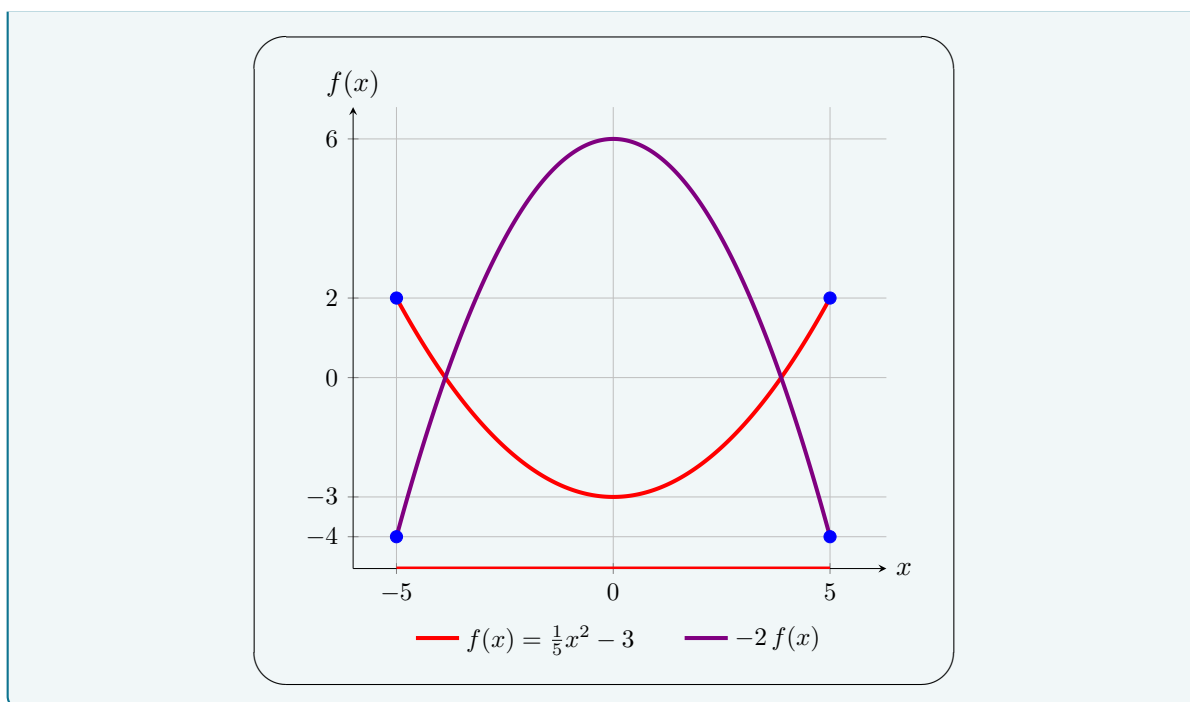
$$\min \left\{ a f(x) \text{ soggetto a } x \in F \right\} = a \max \left\{ f(x) \text{ soggetto a } x \in F \right\} \quad (5.4)$$

- Moltiplicare per una costante negativa capovolge il grafico: i punti di minimo di $a f$ sono i punti di massimo di f .

Esempio 5.11: proprietà: moltiplicazione per una costante negativa

$$\begin{aligned} & \underbrace{\min \left\{ -2 \left(\frac{1}{5}x^2 - 3 \right) \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=-4} \\ &= -2 \underbrace{\max \left\{ \frac{1}{5}x^2 - 3 \text{ soggetto a } -5 \leq x \leq 5 \right\}}_{=2} \end{aligned}$$

Per ogni x ammissibile abbiamo $|x| \leq 5$ e quindi $\frac{1}{5}x^2 - 3 \leq \frac{25}{5} - 3 = 2$, con l'uguaglianza solo per $x = -5$ e $x = 5$: entrambi i problemi hanno le **due** soluzioni ottime $x = -5$ e $x = 5$.



5.3 Soluzioni ottime locali e globali

Definizione 5.3: punto di minimo/massimo e minimo/massimo

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $\tilde{x} \in D$ è

- un **punto di minimo** (**punto di minimo globale**) di f in D se

$$f(\tilde{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in D$$

e $f(\tilde{x})$ è il **minimo** di f in D ;

- un **punto di massimo** (**punto di massimo globale**) di f in D se

$$f(\tilde{x}) \geq f(x), \quad \forall x \in D$$

e $f(\tilde{x})$ è il **massimo** di f in D .

- Un punto di minimo (massimo) si chiama anche **minimizzatore** (**massimizzatore**) di f in D .
- Possono esistere più punti di minimo (massimo), anche infiniti, come nell'Esempio 5.2.
- Le soluzioni ottime di un problema di minimo (massimo) con funzione obiettivo f e regione ammissibile F sono i punti di minimo (massimo) di f in F : sono i suoi **ottimi globali**.

Definizione 5.4: intorno sferico di raggio δ

Dati un punto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ e un valore $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, l'**intorno sferico di raggio δ** associato è:

$$N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \delta \right\}$$

- Il valore $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$ è la **distanza euclidea** tra un generico punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e il punto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, il **centro** dell'intorno:

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - x_j)^2}.$$

L'intorno $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$ contiene i punti la cui distanza dal centro è minore del **raggio δ** : in $\mathbb{R}$ è l'intervallo aperto $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, in $\mathbb{R}^2$ è il disco aperto di centro $\bar{\mathbf{x}}$ e raggio δ , privo della circonferenza che lo delimita.

Esempio 5.12: intorni sferici

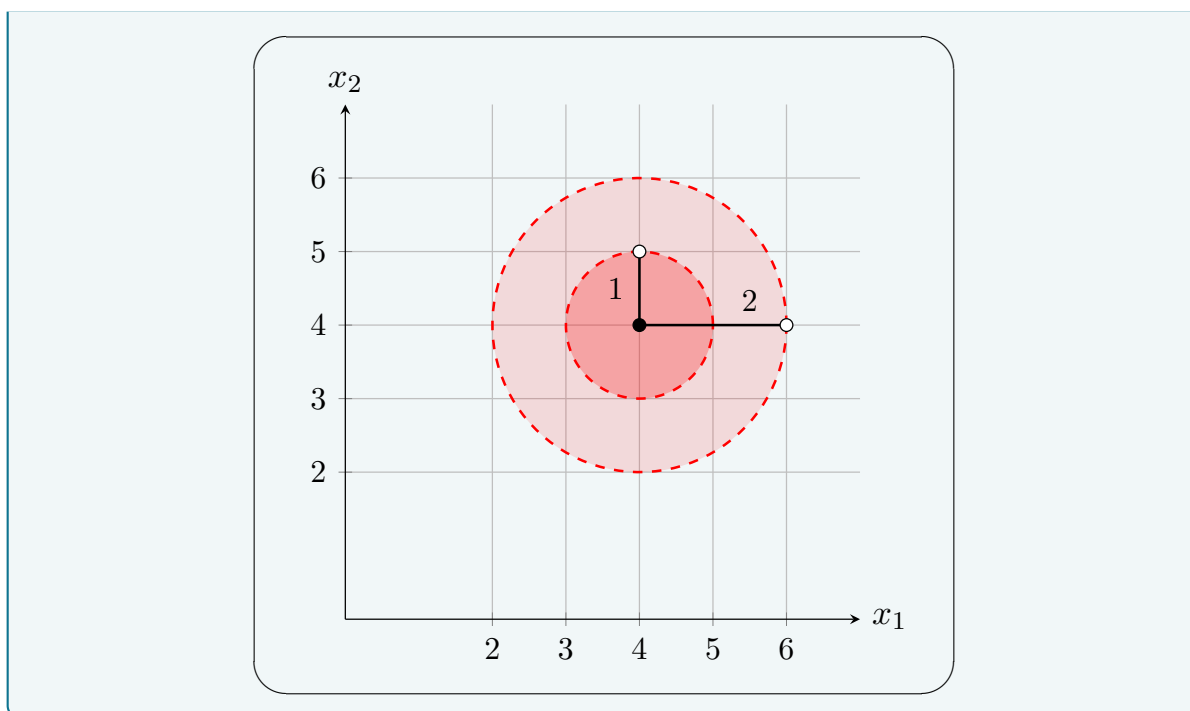
Consideriamo il punto $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e i raggi $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$. Gli intorni sferici di raggio δ associati

$$N\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, 1\right) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(4 - x_1)^2 + (4 - x_2)^2} < 1 \right\}$$

e

$$N\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, 2\right) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(4 - x_1)^2 + (4 - x_2)^2} < 2 \right\}$$

sono i dischi rossi nella figura: il disco più scuro è $N(\bar{\mathbf{x}}, 1)$, che è contenuto in $N(\bar{\mathbf{x}}, 2)$. Le circonferenze che li delimitano sono tratteggiate perché non appartengono agli intorni: per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ (cerchi vuoti) hanno distanza dal centro esattamente 1 e 2, rispettivamente.


Definizione 5.5: punto di minimo/massimo locale e minimo/massimo locale

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $\bar{x} \in D$ è

- un **punto di minimo locale** di f in D se esiste un intorno sferico $N(\bar{x}, \delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che:

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in N(\bar{x}, \delta) \cap D$$

e $f(\bar{x})$ è un **minimo locale** di f in D ;

- un **punto di massimo locale** di f in D se esiste un intorno sferico $N(\bar{x}, \delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che:

$$f(\bar{x}) \geq f(x), \quad \forall x \in N(\bar{x}, \delta) \cap D$$

e $f(\bar{x})$ è un **massimo locale** di f in D .

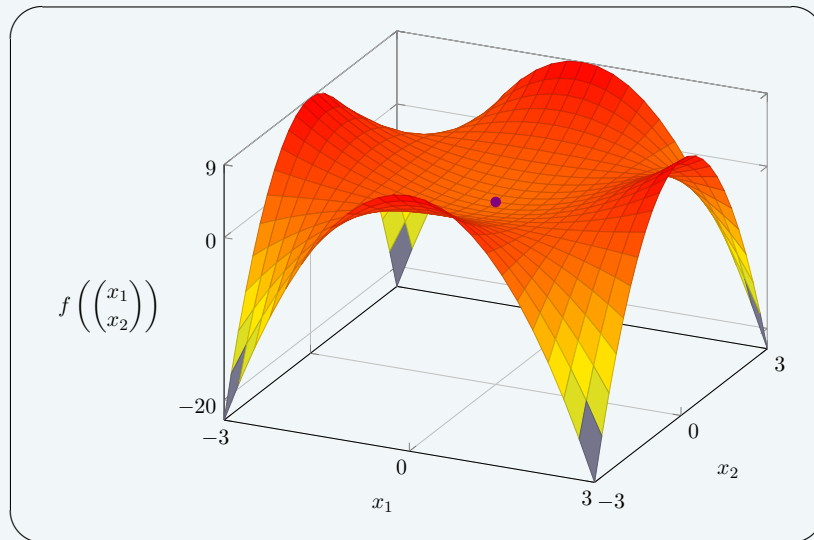
- Possono esistere più punti di minimo (massimo) locale, anche infiniti.
- Per dimostrare con la definizione che un punto è un punto di minimo (massimo) locale, basta esibire **un** raggio δ per cui la disuguaglianza vale in $N(\bar{x}, \delta) \cap D$; anche ogni raggio più piccolo va bene.

Esempio 5.13: punti di minimo locale

Consideriamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2.$$

Questo è il grafico della funzione in $[-3, 3] \times [-3, 3]$; il punto viola è $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$.



Per dimostrare che il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale, usiamo l'intorno sferico di raggio δ dato da $N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$. Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$ abbiamo $x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 < 1$, da cui $1 - \frac{x_2^2}{2} > \frac{1}{2}$, e quindi:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2x_2^2 = x_1^2\left(1 - \frac{x_2^2}{2}\right) + x_2^2 \geq \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \geq 0,$$

con l'uguaglianza solo per $x_1 = x_2 = 0$. Ne segue che

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right), \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right),$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$, con minimo locale 0. Non è un punto di minimo (globale), poiché

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 9 + 9 - \frac{81}{2} = -\frac{45}{2} < 0 = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

- Ogni punto di minimo (globale) è un punto di minimo locale (con qualsiasi δ), e ogni punto di massimo (globale) è un punto di massimo locale. Il viceversa è falso: un punto di minimo locale può non essere un punto di minimo, come mostrano l'esempio precedente e il seguente.

Esempio 5.14: un minimo locale che non è un minimo globale

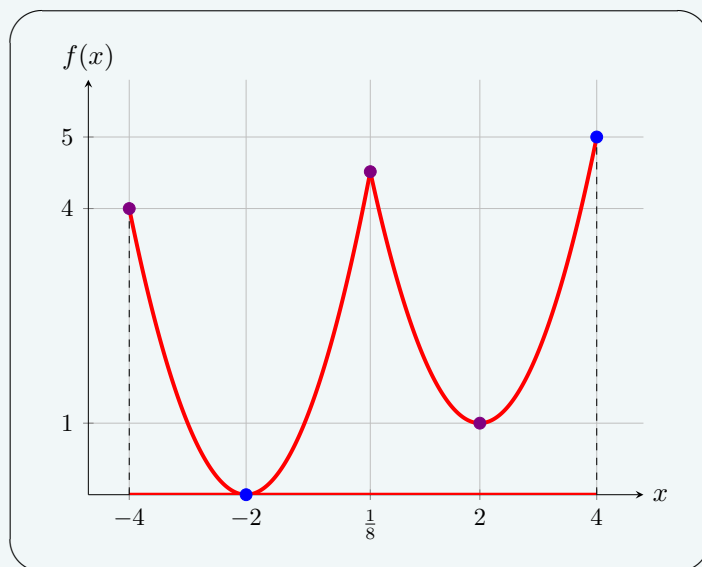
Consideriamo la seguente funzione:

$$f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \min \{ (x+2)^2, (x-2)^2 + 1 \}.$$

Poiché $(x+2)^2 \leq (x-2)^2 + 1$ se e solo se $8x \leq 1$, abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } -4 \leq x \leq \frac{1}{8}, \\ (x-2)^2 + 1 & \text{se } \frac{1}{8} \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Nella figura, i punti di minimo e di massimo globale sono blu e gli altri punti di minimo e di massimo locale sono viola.



- **Minimo globale.** Sia $(x+2)^2$ sia $(x-2)^2 + 1$ sono non negativi, quindi $f(x) \geq 0 = f(-2)$ per ogni $x \in [-4, 4]$; poiché $(x-2)^2 + 1 \geq 1$, $f(x) = 0$ solo per $x = -2$. Il punto $x = -2$ è l'unico punto di minimo e il minimo è 0.
- **Minimo locale che non è globale.** Nell'intorno $N((2), 1) = (1, 3)$ abbiamo $x \geq \frac{1}{8}$, e quindi

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 \geq 1 = f(2), \quad \forall x \in N((2), 1) \cap [-4, 4] = (1, 3).$$

Il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale e 1 è un minimo locale; non è un punto di minimo (globale), poiché $f(-2) = 0 < 1 = f(2)$.

- **Massimo globale.** Per $-4 \leq x \leq \frac{1}{8}$ abbiamo $-2 \leq x+2 \leq \frac{17}{8}$ e quindi $f(x) = (x+2)^2 \leq (\frac{17}{8})^2 = \frac{289}{64} < 5$. Per $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$ abbiamo $-\frac{15}{8} \leq x-2 \leq 2$ e quindi $f(x) = (x-2)^2 + 1 \leq 4 + 1 = 5$, con l'uguaglianza solo per $x = 4$. Il punto $x = 4$ è l'unico punto di massimo e il massimo è 5.
- **Massimi locali che non sono globali.** In $N((-4), 1) \cap [-4, 4] = [-4, -3)$ abbiamo $-2 \leq x+2 < -1$ e quindi $f(x) = (x+2)^2 \leq 4 = f(-4)$: il punto $x = -4$ è un punto di massimo locale. In $N((\frac{1}{8}), 1) = (-\frac{7}{8}, \frac{9}{8})$ abbiamo $0 < x+2 \leq \frac{17}{8}$ quando $x \leq \frac{1}{8}$, per cui $f(x) = (x+2)^2 \leq \frac{289}{64}$, e $-\frac{15}{8} \leq x-2 < 0$ quando $x \geq \frac{1}{8}$, per cui $f(x) = (x-2)^2 + 1 \leq \frac{225}{64} + 1 = \frac{289}{64}$; in entrambi i casi $f(x) \leq f(\frac{1}{8})$: il punto $x = \frac{1}{8}$ è un punto di massimo locale. Nessuno dei due è un punto di massimo (globale), poiché $f(-4) = 4 < 5$ e $f(\frac{1}{8}) = \frac{289}{64} < 5$.

Consideriamo il problema di ottimizzazione $\min\{f(x) \text{ soggetto a } -4 \leq x \leq 4\}$: un metodo che guarda solo i punti vicini a $x = 2$ trova il minimo locale 1, ma il valore ottimo è $z(P) = 0$, raggiunto in $\tilde{x}(P) = (-2)$.

Problemi di ottimizzazione convessi e concavi

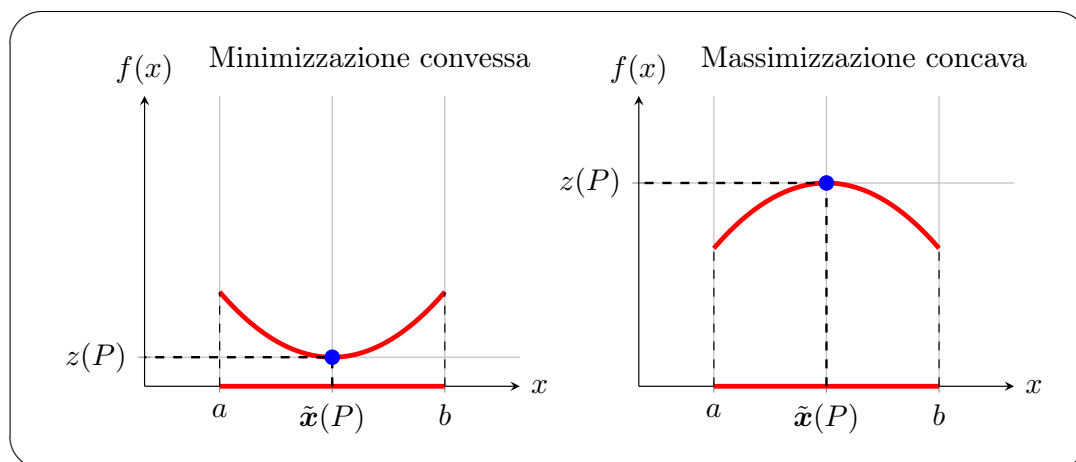
6.1 Problemi di ottimizzazione convessi e concavi

Definizione 6.1: problemi di ottimizzazione convessi e concavi

Dato un problema di ottimizzazione con una **regione ammissibile convessa**,

- se la funzione obiettivo è convessa sulla regione ammissibile, il problema si chiama **problema di ottimizzazione convesso**;
- se la funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile, il problema si chiama **problema di ottimizzazione concavo**.

- Nelle figure di questo capitolo, come nel capitolo «Problemi di ottimizzazione», il grafico della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è rosso, la regione ammissibile è la parte rossa dell'asse x e le soluzioni ottime sono blu. Esempi di un problema di minimizzazione convessa e di un problema di massimizzazione concavo con regione ammissibile $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$:



- Le definizioni di funzione convessa e di funzione concava del capitolo «Funzioni convesse e concave» richiedono un dominio convesso: se la funzione obiettivo è convessa o concava sulla regione ammissibile, la regione ammissibile è un insieme convesso.

- La regione ammissibile è spesso descritta da un numero finito di vincoli, $F = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$. Se ogni funzione g_i è convessa, F è un insieme convesso, per la proprietà degli insiemi definiti da funzioni convesse del capitolo «Funzioni convesse e concave». Per esempio, l'intervallo $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a - x \leq 0, x - b \leq 0 \}$ è definito da due funzioni lineari, e quindi convesse.

6.2 Ottimi locali dei problemi convessi e concavi

- Ogni punto di minimo è anche un punto di minimo locale. La proposizione seguente afferma che, in un problema di minimizzazione convesso, vale anche il viceversa.

Proposizione 6.2: minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi

In un problema di minimizzazione convesso, con funzione obiettivo f convessa sulla regione ammissibile convessa F , se un punto $\bar{\mathbf{x}} \in F$ è un punto di minimo locale di f in F , allora è un punto di minimo di f in F , cioè una soluzione ottima.

Dimostrazione. Se $\bar{\mathbf{x}} \in F$ è un punto di minimo locale, esiste un intorno sferico $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$ con $\delta > 0$ tale che:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap F$$

Per ogni $\mathbf{x} \in F \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$, poiché F è convesso, tutti i punti della forma $\hat{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \bar{\mathbf{x}}$ con $\lambda \in (0, 1]$ appartengono anch'essi a F . Inoltre, per λ sufficientemente piccolo, abbiamo $\hat{\mathbf{x}} \in N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap F$, e quindi:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\hat{\mathbf{x}})$$

Poiché f è convessa, vale anche:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{\mathbf{x}})$$

Combinando le due disuguaglianze, otteniamo:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{\mathbf{x}})$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda f(\bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x})$$

$$\Downarrow$$

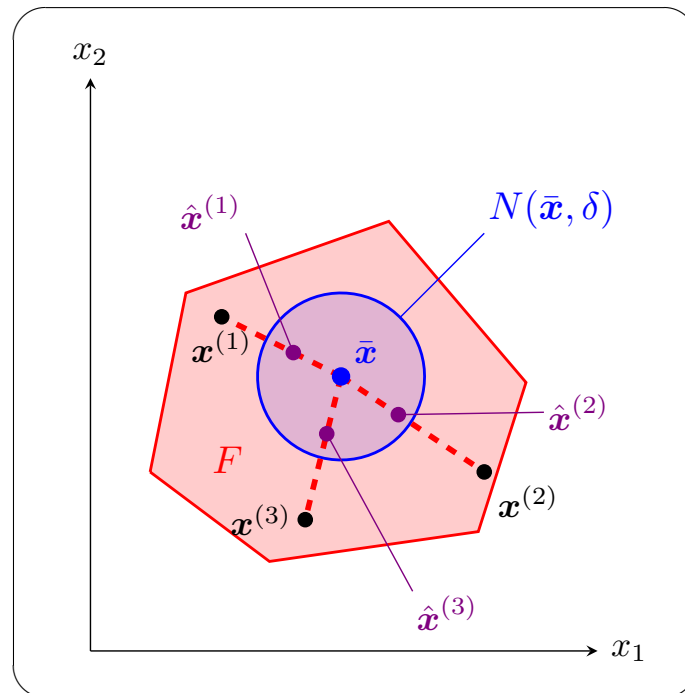
$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad (\text{poiché } \lambda \in (0, 1])$$

Quindi,

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in F$$

e $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di minimo. □

- In $\mathbb{R}^2$, l'idea della dimostrazione è data dalla figura seguente, con tre punti $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ in F e tre punti $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}^{(2)}, \hat{\mathbf{x}}^{(3)}$ in $N(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap F$, ciascuno sul segmento che unisce $\bar{\mathbf{x}}$ al corrispondente $\mathbf{x}^{(i)}$.



- In un problema di minimizzazione convesso abbiamo dimostrato che:

$$\text{punto di minimo locale} \implies \text{punto di minimo}$$

e l'implicazione vale anche nell'altro verso, perché un punto di minimo soddisfa la condizione della definizione in ogni punto di F , e quindi in particolare in ogni punto di un intorno. Le due nozioni sono equivalenti.

Corollario 6.3: massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi

In un problema di massimizzazione concavo, con funzione obiettivo f concava sulla regione ammissibile convessa F , un punto $\bar{\mathbf{x}} \in F$ è un punto di massimo locale di f in F se e solo se è un punto di massimo di f in F , cioè una soluzione ottima.

Dimostrazione. Se f è concava su F , allora $-f$ è convessa su F , e $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di massimo locale di f se e solo se è un punto di minimo locale di $-f$. Per la proposizione precedente, è un punto di minimo di $-f$ in F , cioè un punto di massimo di f in F , poiché $\max\{f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\} = -\min\{-f(\mathbf{x}) \text{ soggetto a } \mathbf{x} \in F\}$. $\square$

- In un problema di minimizzazione convesso, ogni **punto di minimo locale** è anche un **punto di minimo**: ogni punto di minimo locale nella regione ammissibile è una soluzione ottima.
- In un problema di massimizzazione concavo, ogni **punto di massimo locale** è anche un **punto di massimo**: ogni punto di massimo locale nella regione ammissibile è una soluzione ottima.

6.3 Esempi di problemi di ottimizzazione convessi e concavi

- Negli esempi seguenti, verifichiamo prima che la regione ammissibile sia un insieme convesso e che la funzione obiettivo sia convessa (o concava) su di essa, con la definizione del capitolo «Funzioni convesse e concave». Poi troviamo un punto di minimo (o di massimo) locale, confrontando il valore della funzione obiettivo in un punto candidato con i suoi valori nei punti ammissibili di un intorno. Per la proposizione e il corollario della sezione precedente, questo punto è una soluzione ottima.
- Il punto candidato è il punto in cui si annulla la derivata della funzione obiettivo. La derivata suggerisce soltanto il candidato: l'ottimalità locale si verifica direttamente con la definizione del capitolo «Problemi di ottimizzazione».

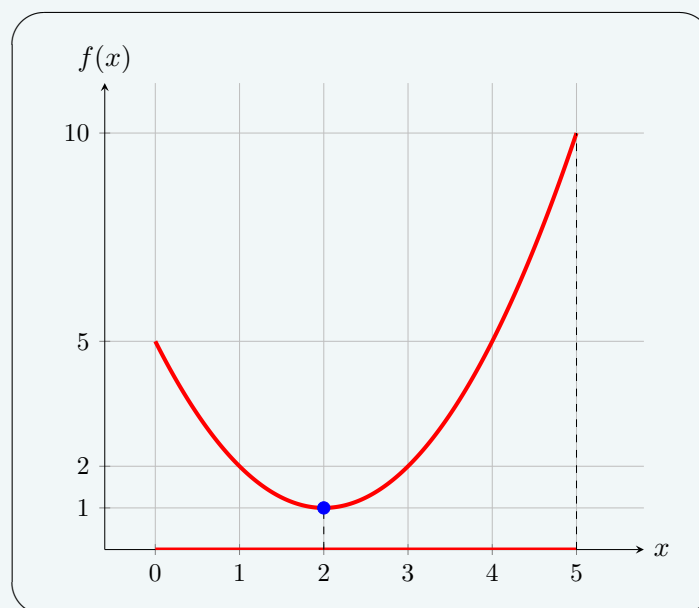
Esempio 6.1: un problema di minimizzazione convesso

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto (x - 2)^2 + 1 \quad \text{e} \quad F = [0, 5].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di minimo è:

$$\min \left\{ (x - 2)^2 + 1 \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 5 \right\}$$



- **Regione ammissibile.** La regione ammissibile $F = [0, 5]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.
- **Funzione obiettivo.** Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= (\lambda p + (1 - \lambda)w - 2)^2 + 1 \\
 &= (\lambda(p - 2) + (1 - \lambda)(w - 2))^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 &\leq \lambda(p - 2)^2 + (1 - \lambda)(w - 2)^2 + \lambda + (1 - \lambda) \\
 &\quad (\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2, \\
 &\quad \text{capitolo «Funzioni convesse e concave»}) \\
 &= \lambda((p - 2)^2 + 1) + (1 - \lambda)((w - 2)^2 + 1) \\
 &= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è convessa sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di minimizzazione convesso**.

- **Punto di minimo locale.** La derivata $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$ si annulla in $x = 2$. Nell'intorno $N((2), 1) = (1, 3)$, tutti i punti sono ammissibili e

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 = f(2), \quad \forall x \in N((2), 1) \cap F = (1, 3).$$

Il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale.

- **Soluzione ottima.** Per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi», il punto $x = 2$ è anche un punto di minimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (2) \quad \text{e} \quad z(P) = f(2) = 1.$$

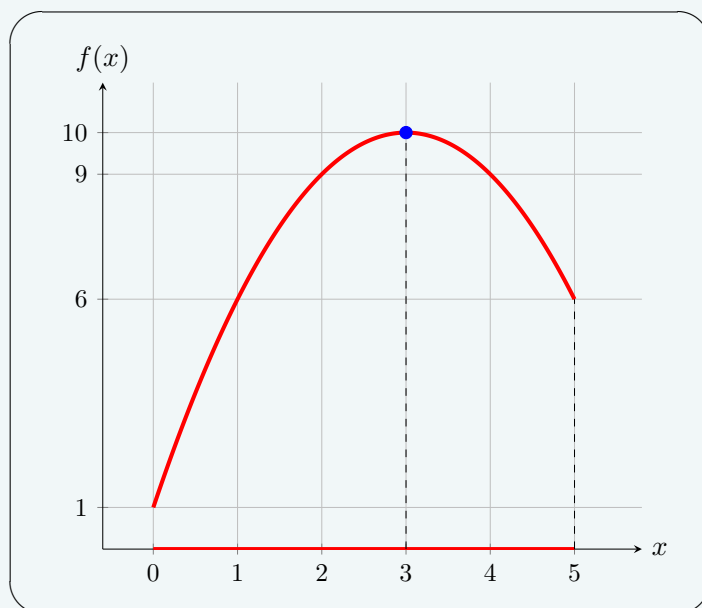
Esempio 6.2: un problema di massimizzazione concavo

Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto -(x - 3)^2 + 10 \quad \text{e} \quad F = [0, 5].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di massimo è:

$$\max \left\{ -(x - 3)^2 + 10 \quad \text{soggetto a} \quad 0 \leq x \leq 5 \right\}$$



- **Regione ammissibile.** La regione ammissibile $F = [0, 5]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.
- **Funzione obiettivo.** Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, abbiamo:

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) = -(\lambda(p - 3) + (1 - \lambda)(w - 3))^2 + \lambda 10 + (1 - \lambda) 10$$

$$(\text{poiché } \lambda + (1 - \lambda) = 1)$$

$$\geq -\lambda(p - 3)^2 - (1 - \lambda)(w - 3)^2 + \lambda 10 + (1 - \lambda) 10$$

$$(\text{poiché } (\lambda a + (1 - \lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2,$$

e il fattore -1 inverte la disuguaglianza)

$$= \lambda(- (p - 3)^2 + 10) + (1 - \lambda)(- (w - 3)^2 + 10)$$

$$= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di massimizzazione concavo**.

- **Punto di massimo locale.** La derivata $f'(x) = -2x + 6 = -2(x - 3)$ si annulla in $x = 3$. Nell'intorno $N((3), 1) = (2, 4)$, tutti i punti sono ammissibili e

$$f(x) = -(x - 3)^2 + 10 \leq 10 = f(3), \quad \forall x \in N((3), 1) \cap F = (2, 4).$$

Il punto $x = 3$ è un punto di massimo locale.

- **Soluzione ottima.** Per il corollario «massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi», il punto $x = 3$ è anche un punto di massimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (3) \quad \text{e} \quad z(P) = f(3) = 10.$$

- Negli ultimi due esempi, la funzione obiettivo è lo stesso polinomio di terzo grado

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3 = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 4,$$

che non è né convesso né concavo in $\mathbb{R}$: con $p = 0$, $w = 2$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo $f(1) = 6 > 3 = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2)$, e con $p = 2$, $w = 4$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ abbiamo $f(3) = 2 < 5 = \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f(4)$. È convesso su $[2, 4]$ e concavo su $[0, 2]$: la definizione di problema di ottimizzazione convesso (concavo) riguarda soltanto i valori della funzione obiettivo sulla regione ammissibile. Per dimostrarlo, usiamo la disuguaglianza seguente.

Osservazione 6.4

Per ogni $\lambda \in [0, 1]$ e ogni $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 = \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2((1 + \lambda)a + (2 - \lambda)b)$$

e, quindi,

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 \leq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 \quad \text{se } a, b \geq 0,$$

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 \geq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 \quad \text{se } a, b \leq 0.$$

Dimostrazione. Sia $\mu = 1 - \lambda$, così che $1 - \lambda^2 = (1 - \lambda)(1 + \lambda) = \mu(1 + \lambda)$ e $1 - \mu^2 = \lambda(1 + \mu)$. Sviluppando il cubo, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \lambda a^3 + \mu b^3 - (\lambda a + \mu b)^3 \\ &= \lambda(1 - \lambda^2)a^3 + \mu(1 - \mu^2)b^3 - 3\lambda^2\mu a^2b - 3\lambda\mu^2 ab^2 \\ &= \lambda\mu((1 + \lambda)a^3 + (1 + \mu)b^3 - 3\lambda a^2b - 3\mu ab^2) \\ &= \lambda\mu(a^2 - 2ab + b^2)((1 + \lambda)a + (1 + \mu)b) \\ & \quad (\text{poiché } (1 + \mu) - 2(1 + \lambda) = -3\lambda \text{ e } (1 + \lambda) - 2(1 + \mu) = -3\mu) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(a - b)^2((1 + \lambda)a + (2 - \lambda)b) \end{aligned}$$

Poiché $\lambda(1 - \lambda)(a - b)^2 \geq 0$, $1 + \lambda > 0$ e $2 - \lambda > 0$, il membro di destra è non negativo se $a, b \geq 0$, e non positivo se $a, b \leq 0$. $\square$

Esempio 6.3: un problema di minimizzazione convesso con funzione obiettivo cubica

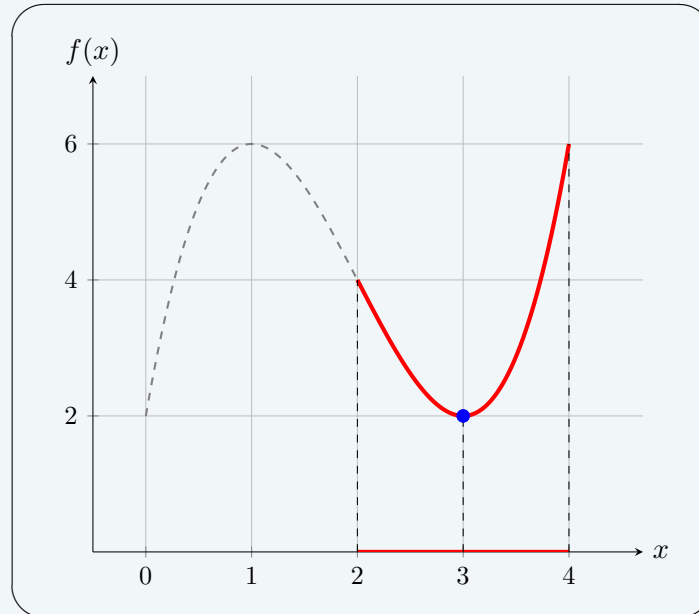
Consideriamo la seguente funzione obiettivo e la seguente regione ammissibile:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad F = [2, 4].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di minimo è:

$$\min \left\{ 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \text{ soggetto a } 2 \leq x \leq 4 \right\}$$

Nella figura, il grafico della funzione obiettivo fuori dalla regione ammissibile è tratteggiato.



- **Regione ammissibile.** La regione ammissibile $F = [2, 4]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.
- **Funzione obiettivo.** Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $a = p - 2 \geq 0$ e $b = w - 2 \geq 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= (\lambda p + (1 - \lambda)w - 2)^3 - 3(\lambda p + (1 - \lambda)w - 2) + 4 \\ &\quad (\text{poiché } f(x) = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 4) \\ &= (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4 \\ &\quad (\text{poiché } \lambda p + (1 - \lambda)w - 2 = \lambda a + (1 - \lambda)b, \\ &\quad \text{e } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\ &\leq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4 \\ &\quad (\text{per l'osservazione precedente, poiché } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0) \\ &= \lambda(a^3 - 3a + 4) + (1 - \lambda)(b^3 - 3b + 4) \\ &= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) \\ &\quad (\text{poiché } f(p) = a^3 - 3a + 4 \text{ e } f(w) = b^3 - 3b + 4) \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è convessa sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di minimizzazione convesso**.

- **Punto di minimo locale.** La derivata $f'(x) = 9 - 12x + 3x^2 = 3(x-1)(x-3)$ si annulla in $x = 1$ e in $x = 3$, e solo $x = 3$ è ammissibile. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $f(x) - 2 = x(x-3)^2$. Nell'intorno $N((3), 1) = (2, 4)$, tutti i punti sono ammissibili e positivi, e quindi

$$f(x) = 2 + x(x-3)^2 \geq 2 = f(3), \quad \forall x \in N((3), 1) \cap F = (2, 4).$$

Il punto $x = 3$ è un punto di minimo locale.

- **Soluzione ottima.** Per la proposizione «minimi locali dei problemi di minimizzazione convessi», il punto $x = 3$ è anche un punto di minimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (3) \quad \text{e} \quad z(P) = f(3) = 2.$$

Esempio 6.4: un problema di massimizzazione concavo con funzione obiettivo cubica

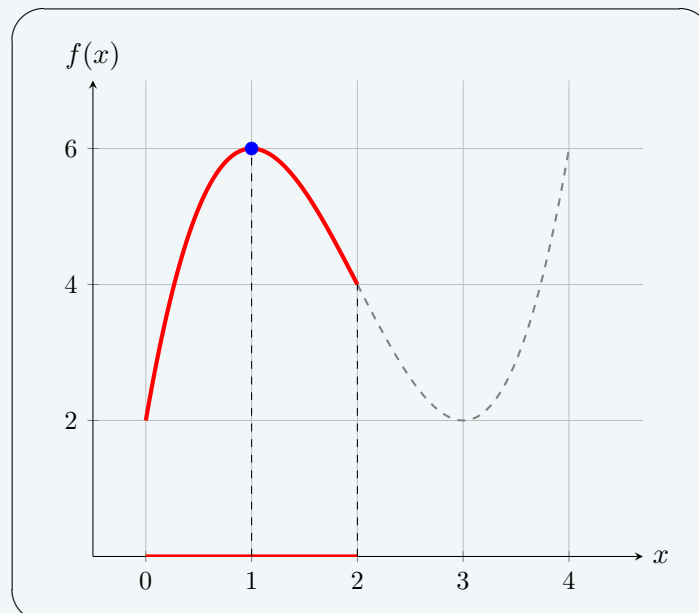
Consideriamo la stessa funzione obiettivo con una regione ammissibile diversa:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad F = [0, 2].$$

Il problema di ottimizzazione associato in forma di massimo è:

$$\max \left\{ 2 + 9x - 6x^2 + x^3 \text{ soggetto a } 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

Nella figura, il grafico della funzione obiettivo fuori dalla regione ammissibile è tratteggiato.



- **Regione ammissibile.** La regione ammissibile $F = [0, 2]$ è un intervallo, e quindi un insieme convesso.

- **Funzione obiettivo.** Per ogni coppia di punti $p, w \in F$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$, con $a = p - 2 \leq 0$ e $b = w - 2 \leq 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda p + (1 - \lambda)w) &= (\lambda p + (1 - \lambda)w - 2)^3 - 3(\lambda p + (1 - \lambda)w - 2) + 4 \\
 &\quad (\text{poiché } f(x) = (x - 2)^3 - 3(x - 2) + 4) \\
 &= (\lambda a + (1 - \lambda)b)^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4 \\
 &\quad (\text{poiché } \lambda p + (1 - \lambda)w - 2 = \lambda a + (1 - \lambda)b, \\
 &\quad \text{e } \lambda + (1 - \lambda) = 1) \\
 &\geq \lambda a^3 + (1 - \lambda)b^3 - 3(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \lambda 4 + (1 - \lambda) 4 \\
 &\quad (\text{per l'osservazione precedente, poiché } a \leq 0 \text{ e } b \leq 0) \\
 &= \lambda(a^3 - 3a + 4) + (1 - \lambda)(b^3 - 3b + 4) \\
 &= \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w) \\
 &\quad (\text{poiché } f(p) = a^3 - 3a + 4 \text{ e } f(w) = b^3 - 3b + 4)
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(w)$$

La funzione obiettivo è concava sulla regione ammissibile convessa F , e il problema è un **problema di massimizzazione concavo**.

- **Punto di massimo locale.** La derivata $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ si annulla in $x = 1$ e in $x = 3$, e solo $x = 1$ è ammissibile. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $6 - f(x) = (x - 1)^2(4 - x)$. Nell'intorno $N((1), 1) = (0, 2)$, tutti i punti sono ammissibili e minori di 4, e quindi

$$f(x) = 6 - (x - 1)^2(4 - x) \leq 6 = f(1), \quad \forall x \in N((1), 1) \cap F = (0, 2).$$

Il punto $x = 1$ è un punto di massimo locale.

- **Soluzione ottima.** Per il corollario «massimi locali dei problemi di massimizzazione concavi», il punto $x = 1$ è anche un punto di massimo, e la soluzione ottima e il valore ottimo sono:

$$\tilde{x}(P) = (1) \quad \text{e} \quad z(P) = f(1) = 6.$$