

Problemi di routing

Indice

Perché il problema del commesso viaggiatore?

Panoramica della famiglia

Il problema del commesso viaggiatore

Contare i giri

Un primo giro a mano

Un lower bound combinatorio

Varianti: TSP metrico e TSP asimmetrico

Osservazioni

Errori tipici

In sintesi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ enunciare il TSP, il TSP asimmetrico e il TSP metrico, e descrivere un'istanza e un giro;
- ▶ calcolare la lunghezza di un giro e contare i giri di un'istanza;
- ▶ spiegare perché elencare tutti i giri è senza speranza già con 20 città;
- ▶ costruire a mano un primo giro con la nearest neighbour rule;
- ▶ calcolare un lower bound sulla lunghezza ottima a partire dai due archi più corti di ogni città, e misurare il gap rispetto a un giro.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo [«Problemi di ottimizzazione combinatoria»](#): che cos'è un problema di ottimizzazione combinatoria, come esplode il numero delle soluzioni, e le nozioni di bound primale, bound duale e gap.
- ▶ Dallo stesso capitolo, l'istanza di riferimento del TSP con 5 città, che questo capitolo studia in dettaglio.

Perché il problema del commesso viaggiatore?

Introduzione: Perché il problema del commesso viaggiatore?

- ▶ Partiamo da una domanda concreta: in quale ordine un corriere deve visitare le città del suo percorso?
- ▶ Questa domanda è il problema del commesso viaggiatore, uno dei problemi più studiati dell'ottimizzazione combinatoria
- ▶ Vediamo una sfida da provare a mano, i record degli algoritmi esatti e il motivo per cui il problema è difficile

Un corriere e il suo percorso

- ▶ Un corriere parte dal deposito, deve consegnare un pacco in ciascuna delle altre città e ritornare al deposito.
- ▶ In quale ordine deve visitare le città, perché la distanza totale percorsa sia la più piccola possibile?
- ▶ Questo è il **problema del commesso viaggiatore**.

Una sfida

- ▶ Prima di proseguire, guardiamo le distanze dell'istanza di riferimento con 5 città e proviamo a trovare un giro corto delle 5 città.

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	2	2	9
2	5	—	4	3	4
3	2	4	—	4	7
4	2	3	4	—	7
5	9	4	7	7	—

- ▶ Poi chiediamoci come potremmo dimostrare che non esiste un giro più corto.
- ▶ Il capitolo risponde a entrambe le domande.

Il banco di prova degli algoritmi esatti

- ▶ Il TSP è uno dei problemi più studiati dell'ottimizzazione combinatoria, ed è stato a lungo il banco di prova degli algoritmi esatti.
- ▶ L'istanza più grande risolta all'ottimo, chiamata pla85900, ha 85 900 punti, che vengono da un problema di progettazione di chip.
- ▶ È stata risolta nel 2005–2006 con il codice Concorde, e il giro ottimo, di lunghezza 142 382 641, è stato certificato in un articolo del 2009 da Applegate, Bixby, Chvátal, Cook, Espinoza, Goycoolea e Helsgaun.

Quanto è difficile il TSP?

- ▶ Sulle mappe stradali di paesi reali, il record del 2025 è l'istanza korea81998, con 81 998 bar della Corea del Sud.
- ▶ Questi risultati richiedono calcoli enormi; le istanze di questo capitolo sono piccolissime.
- ▶ Il TSP è fortemente NP-difficile (si veda il capitolo «Problemi di ottimizzazione combinatoria»), quindi non ci si aspetta un algoritmo esatto efficiente.
- ▶ Gli algoritmi di approssimazione, come quello di Christofides (1976), si studiano più avanti nel modulo.

Il problema del commesso viaggiatore:

- ▶ visitare tutte le città e tornare alla partenza, percorrendo la minima distanza totale
- ▶ due domande: trovare un giro corto, e dimostrare che non esiste un giro più corto

Un problema famoso e difficile:

- ▶ le istanze record (pla85900, korea81998) richiedono calcoli enormi
- ▶ fortemente NP-difficile: non ci si aspetta un algoritmo esatto efficiente

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ I problemi di routing di questo capitolo hanno gli stessi dati e lo stesso tipo di soluzione
- ▶ Descriviamo che cosa hanno in comune: città, distanze, giri e lunghezza di un giro
- ▶ Poi elenchiamo i membri della famiglia, che differiscono nelle proprietà delle distanze

Dati, soluzione e obiettivo

- ▶ I **problemi di routing** di questo capitolo hanno gli stessi dati: un insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n città e, per ogni coppia di città distinte $i, j \in \mathcal{V}$, una *distanza* $d_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
- ▶ Una soluzione è un **giro**, una permutazione σ delle città letta come un percorso chiuso che visita ogni città esattamente una volta; la sua **lunghezza** $L(\sigma)$ è la somma delle distanze percorse.
- ▶ L'obiettivo è minimizzare la lunghezza del giro.

I problemi di routing in una frase

Un problema di routing trova un giro più corto attraverso tutte le città.

I membri della famiglia differiscono nelle proprietà delle distanze: simmetriche, metriche o asimmetriche.

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con la sezione che definisce ciascuno di essi.

Problema	Sigla	Distanze	Sezione
commesso viaggiatore	TSP	simmetriche, $d_{ij} = d_{ji}$	Il problema del commesso viaggiatore
commesso viaggiatore metrico	TSP metrico	simmetriche, con la disuguaglianza triangolare	Varianti: TSP metrico e TSP asimmetrico
commesso viaggiatore asimmetrico	ATSP	d_{ij} può differire da d_{ji}	Varianti: TSP metrico e TSP asimmetrico

Che cosa hanno in comune i problemi di routing:

- ▶ dati: n città e le distanze d_{ij} fra di esse
- ▶ soluzione: un giro, un percorso chiuso che visita ogni città esattamente una volta
- ▶ obiettivo: minimizzare la lunghezza $L(\sigma)$ del giro

Che cosa li distingue:

- ▶ le distanze: simmetriche (TSP), con la disuguaglianza triangolare (TSP metrico), asimmetriche (ATSP)

Il problema del commesso viaggiatore



Introduzione: Il problema del commesso viaggiatore

- ▶ In questa sezione definiamo il TSP: i dati, un'istanza, un giro e la lunghezza di un giro
- ▶ Il TSP è il problema di riferimento della famiglia: il TSP metrico e il TSP asimmetrico si definiscono a partire da esso
- ▶ Enunciamo le ipotesi, e incontriamo l'istanza con 5 città che seguiamo in tutto il capitolo

Definizione 1: Problema del commesso viaggiatore

Dati:

1. *un insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n città,*
2. *per ogni coppia di città distinte $i, j \in \mathcal{V}$, una distanza $d_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, con $d_{ij} = d_{ji}$,*

*il **problema del commesso viaggiatore** (TSP) chiede di trovare un percorso chiuso che parte da una città, visita ogni altra città esattamente una volta e ritorna alla città di partenza, in modo che la distanza totale percorsa sia minima.*

Istanza del TSP

► Un'istanza del TSP è specificata da:

1. un numero intero:

il numero di città $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$,

2. una matrice simmetrica di numeri interi di dimensione $n \times n$:
 $D = (d_{ij})$, che contiene le distanze; gli elementi diagonali non si usano.

Soluzione ammissibile del TSP: il giro

- Una **soluzione ammissibile del TSP**, detta **giro**, è una permutazione delle città

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

letta come il percorso chiuso $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \sigma_1$.

- La sua **lunghezza** è

$$L(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} d_{\sigma_k \sigma_{k+1}} + d_{\sigma_n \sigma_1},$$

dove l'ultimo termine è la distanza percorsa per ritornare alla città di partenza.

Molte permutazioni, un solo giro

- ▶ Permutazioni diverse possono descrivere lo stesso giro:
 - ▶ la città di partenza può essere una qualunque delle n città;
 - ▶ poiché le distanze sono simmetriche, il giro può essere percorso in entrambi i versi.

Possiamo ora enunciare il TSP formalmente, come un problema di ottimizzazione sulle permutazioni.

Il TSP in forma matematica

Data un'istanza del TSP, il TSP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{\sigma} \in \arg \min_{\sigma} \left\{ L(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} d_{\sigma_k \sigma_{k+1}} + d_{\sigma_n \sigma_1} : \right. \\ \left. \sigma \text{ è una permutazione di } \mathcal{V} \right\}.$$

- Indichiamo con $z(I)$ la lunghezza di un giro ottimo $\tilde{\sigma}$ dell'istanza I .

Ipotesi

► Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Ci sono almeno tre città (con una o due città c'è un solo percorso). Formalmente:

$$n \geq 3$$

2. Le distanze sono simmetriche (andare da i a j costa quanto andare da j a i). Formalmente:

$$d_{ij} = d_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathcal{V}, \quad i \neq j$$

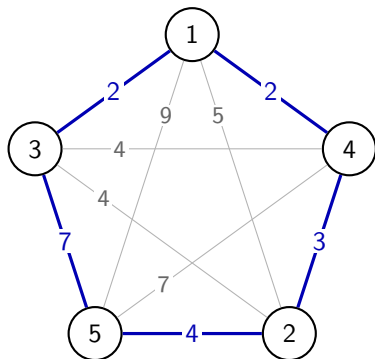
Vediamo ora un'istanza del TSP con 5 città:
è l'istanza di riferimento di tutto il capitolo.

Esempio: istanza del TSP (1/2)

Consideriamo un insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 città ($n = 5$), con le seguenti distanze:

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	2	2	9
2	5	—	4	3	4
3	2	4	—	4	7
4	2	3	4	—	7
5	9	4	7	7	—

Esempio: istanza del TSP (2/2)



L'istanza si può disegnare come un grafo completo:

- ▶ un nodo per ogni città
- ▶ un arco per ogni coppia di città, etichettato con la distanza
- ▶ gli archi in grassetto formano il giro $\sigma = (1, 3, 5, 2, 4)$
- ▶ le città sono disegnate nell'ordine del giro

La sua lunghezza è

$$L(\sigma) = d_{13} + d_{35} + d_{52} + d_{24} + d_{41} = 2 + 7 + 4 + 3 + 2 = 18.$$

II TSP:

- ▶ $n \geq 3$ città e distanze intere simmetriche $d_{ij} = d_{ji}$
- ▶ un giro è una permutazione σ delle città, letta come un percorso chiuso
- ▶ la sua lunghezza $L(\sigma)$ comprende la distanza di ritorno $d_{\sigma_n \sigma_1}$
- ▶ $z(I)$ è la lunghezza di un giro ottimo dell'istanza I

L'istanza di riferimento:

- ▶ 5 città; il giro $(1, 3, 5, 2, 4)$ ha lunghezza 18

Contare i giri

Introduzione: Contare i giri

- ▶ Quanti giri ha un'istanza del TSP? In questa sezione li contiamo esattamente
- ▶ Il conteggio ci dice se elencare tutti i giri è un modo realistico di risolvere il TSP
- ▶ Sull'istanza di riferimento l'enumerazione trova il giro ottimo; con 20 città è già senza speranza

Proposizione 1

Un'istanza del TSP con $n \geq 3$ città ha

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

giri distinti.

Da dove viene il conteggio

- ▶ Le permutazioni delle città sono $n!$.
- ▶ Ogni giro è descritto da n permutazioni, una per ogni possibile città di partenza, quindi ci sono $n!/n = (n - 1)!$ ordinamenti ciclici delle città.
- ▶ Le distanze sono simmetriche, quindi il giro percorso all'indietro ha la stessa lunghezza e non è una nuova soluzione: ogni giro è contato due volte, e dividiamo per 2.

Esempio: enumerazione dei giri

L'istanza di riferimento ha $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ giri distinti, che si possono enumerare:

giro	L	giro	L	giro	L
(1, 3, 5, 2, 4)	18	(1, 3, 4, 2, 5)	22	(1, 2, 3, 5, 4)	25
(1, 3, 2, 5, 4)	19	(1, 4, 3, 2, 5)	23	(1, 3, 2, 4, 5)	25
(1, 2, 5, 3, 4)	22	(1, 2, 4, 5, 3)	24	(1, 4, 2, 3, 5)	25
(1, 2, 5, 4, 3)	22			(1, 2, 4, 3, 5)	28
				(1, 2, 3, 4, 5)	29

Quindi il giro $\sigma = (1, 3, 5, 2, 4)$ è l'unico giro ottimo, e $z(I) = 18$.

Il numero di giri esplode

- Il numero di giri cresce più velocemente di qualunque funzione esponenziale:

n	5	10	15	20
$\frac{(n-1)!}{2}$	12	181 440	$\approx 4.4 \cdot 10^{10}$	$\approx 6.1 \cdot 10^{16}$

- Un calcolatore che valuta 10^9 giri al secondo impiega circa $6.1 \cdot 10^7$ secondi, ossia circa due anni, per elencare i giri di 20 città.
- L'enumerazione è quindi utile solo come verifica su istanze piccolissime, e gli algoritmi di questo corso devono fare di meglio.

Contare i giri:

- ▶ un'istanza simmetrica con n città ha $(n - 1)!/2$ giri
- ▶ $n!$ permutazioni, divise per n (città di partenza) e per 2 (verso)

Enumerazione:

- ▶ sull'istanza di riferimento: 12 giri, unico giro ottimo $(1, 3, 5, 2, 4)$, $z(I) = 18$
- ▶ con 20 città: circa $6.1 \cdot 10^{16}$ giri, circa due anni di calcolo

Un primo giro a mano



Introduzione: Un primo giro a mano

- ▶ L'enumerazione è senza speranza oltre le istanze piccolissime: serve un modo rapido per costruire un giro
- ▶ Vediamo il più semplice, la nearest neighbour rule, e lo applichiamo a mano all'istanza di riferimento
- ▶ Confrontiamo il giro con quello ottimo, e vediamo perché un giro da solo non basta

La nearest neighbour rule

- ▶ Il modo più semplice per costruire un giro è la **nearest neighbour rule**:
 - ▶ si parte da una città;
 - ▶ finché ci sono città non visitate, ci si sposta nella città non visitata più vicina;
 - ▶ alla fine si ritorna alla città di partenza.
- ▶ In caso di pareggio prendiamo la città di indice minimo.

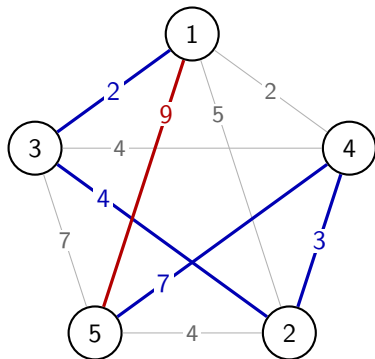
Esempio: nearest neighbour dalla città 1 (1/2)

Sull'istanza di riferimento, partendo dalla città 1:

1. da 1 le città più vicine sono 3 e 4, entrambe a distanza 2: andiamo in 3;
2. da 3 le città non visitate 2 e 4 sono entrambe a distanza 4: andiamo in 2;
3. da 2 la città non visitata più vicina è 4, a distanza 3; poi resta solo 5, a distanza $d_{45} = 7$;
4. ritorniamo da 5 a 1 a distanza $d_{51} = 9$.

Il giro è $\sigma = (1, 3, 2, 4, 5)$, di lunghezza $2 + 4 + 3 + 7 + 9 = 25$.

Esempio: nearest neighbour dalla città 1 (2/2)



- ▶ gli archi in grassetto formano il giro $\sigma = (1, 3, 2, 4, 5)$
- ▶ le città sono nelle posizioni del disegno dell'istanza di riferimento
- ▶ l'ultimo arco $\{5, 1\}$, in rosso, è forzato

La sua lunghezza è

$$L(\sigma) = d_{13} + d_{32} + d_{24} + d_{45} + d_{51} = 2 + 4 + 3 + 7 + 9 = 25.$$

Quanto è buono il giro nearest neighbour?

- ▶ Gli ultimi archi del giro nearest neighbour sono forzati, e possono essere molto lunghi: qui l'arco finale $\{5, 1\}$ costa 9.
- ▶ Il giro di lunghezza 25 è peggiore di quello ottimo, di lunghezza 18, di 7.
- ▶ Dal solo giro nearest neighbour non possiamo dire quanto siamo lontani dall'ottimo: serve un lower bound.

La nearest neighbour rule:

- ▶ ci si sposta sempre nella città non visitata più vicina (pareggi: indice minimo), poi si ritorna alla partenza
- ▶ costruisce rapidamente un giro, senza garanzie

Sull'istanza di riferimento:

- ▶ dalla città 1: il giro (1, 3, 2, 4, 5) di lunghezza 25, peggiore dell'ottimo 18 di 7
- ▶ per sapere quanto un giro è lontano dall'ottimo serve un lower bound

Un lower bound combinatorio



Introduzione: Un lower bound combinatorio

- ▶ Un giro dà un upper bound su $z(I)$; per sapere quanto è lontano dall'ottimo serve un lower bound
- ▶ Costruiamo un lower bound semplice a partire dai due archi più corti di ogni città
- ▶ Sull'istanza di riferimento lo usiamo per misurare il gap del giro nearest neighbour

- Per una città i , siano $a_i \leq b_i$ le due distanze più piccole da i alle altre città.

Osservazione 1

Per ogni istanza simmetrica del TSP, la lunghezza ottima soddisfa

$$z(I) \geq \left\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{V}} (a_i + b_i) \right\rceil.$$

Perché il bound vale

- ▶ In un giro, in ogni città si entra con un arco e se ne esce con un altro, quindi ogni città ha esattamente due archi del giro, lunghi almeno a_i e b_i rispettivamente.
- ▶ Sommando su tutte le città, ogni arco del giro è contato due volte, una per ciascuna delle sue città estreme: quindi $2L(\sigma) \geq \sum_i (a_i + b_i)$ per ogni giro σ .
- ▶ Le distanze sono intere, quindi lo è anche $L(\sigma)$, e possiamo arrotondare il bound per eccesso.

Esempio: il bound sull'istanza di riferimento (1/2)

Per l'istanza di riferimento le due distanze più piccole di ogni città sono:

città i	1	2	3	4	5	somma
a_i	2	3	2	2	4	33
b_i	2	4	4	3	7	
$a_i + b_i$	4	7	6	5	11	

Quindi

$$z(I) \geq \lceil 33/2 \rceil = 17.$$

Esempio: il bound sull'istanza di riferimento (2/2)

- Insieme al giro nearest neighbour otteniamo

$$17 \leq z(I) \leq 25,$$

un gap assoluto di 8, ossia un gap relativo di $\frac{8}{17} \approx 47.1\%$.

- Il giro (1, 3, 5, 2, 4) di lunghezza 18 ne chiude la maggior parte, e solo l'enumerazione dei 12 giri dimostra che 18 è ottimo.

Il bound dei due archi più corti:

- ▶ $a_i \leq b_i$ sono le due distanze più piccole della città i
- ▶ ogni città ha due archi del giro, e ogni arco è contato due volte: $z(I) \geq \lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in V} (a_i + b_i) \rceil$

Sull'istanza di riferimento:

- ▶ bound 17; con il giro nearest neighbour, $17 \leq z(I) \leq 25$, un gap di 8
- ▶ la lunghezza ottima 18 è dimostrata solo dall'enumerazione

Varianti: TSP metrico e TSP asimmetrico

Introduzione: Le varianti del TSP

- ▶ Due varianti importanti del TSP si ottengono cambiando le proprietà delle distanze
- ▶ Nel TSP metrico le distanze soddisfano la disuguaglianza triangolare: è il caso in cui gli algoritmi euristici hanno garanzie
- ▶ Nel TSP asimmetrico la distanza da i a j può differire da quella da j a i : il verso di un giro conta

Il problema del commesso viaggiatore metrico

Definizione 2: TSP metrico

Un'istanza del TSP è **metrica** se le sue distanze soddisfano la **disuguaglianza triangolare**

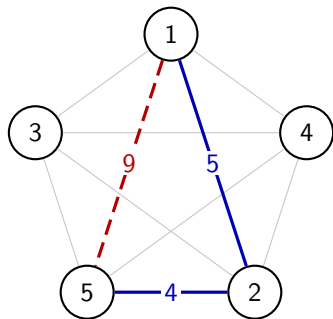
$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj} \quad \text{per ogni terna di città distinte } i, j, k \in \mathcal{V}.$$

Il problema del commesso viaggiatore metrico (TSP metrico) è il TSP ristretto alle istanze metriche.

- La disuguaglianza triangolare dice che andare direttamente da i a j non è mai più lungo che passare per una terza città k .

L'istanza di riferimento è metrica

- ▶ Tutte le $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ disuguaglianze triangolari valgono, alcune all'uguaglianza, per esempio $d_{15} = 9 = d_{12} + d_{25} = 5 + 4$.
- ▶ Nel disegno, l'arco diretto $\{1, 5\}$ (tratteggiato) è lungo quanto il cammino da 1 a 5 che passa per la città 2.



$$d_{15} = 9 \leq d_{12} + d_{25} = 5 + 4$$

Da dove vengono le istanze metriche

- ▶ Le istanze ottenute da punti nel piano, con d_{ij} uguale alla distanza euclidea fra i punti, sono metriche (quando le distanze non sono arrotondate).
- ▶ Diversi algoritmi euristici per il TSP si comportano bene, e alcuni di essi hanno una garanzia di prestazione, solo sulle istanze metriche.

Il problema del commesso viaggiatore asimmetrico

Definizione 3: Problema del commesso viaggiatore asimmetrico

Dati:

1. *un insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n città,*
2. *per ogni coppia ordinata di città distinte $i, j \in \mathcal{V}$, una distanza $d_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dalla città i alla città j , dove d_{ij} può differire da d_{ji} ,*

il problema del commesso viaggiatore asimmetrico (ATSP) chiede di trovare un percorso chiuso che parte da una città, visita ogni altra città esattamente una volta e ritorna alla città di partenza, in modo che la distanza totale percorsa sia minima.

L'ATSP e il TSP

- ▶ Le distanze asimmetriche nascono, per esempio, quando si percorrono strade a senso unico o in salita e in discesa.
- ▶ La definizione di giro e della sua lunghezza $L(\sigma)$ non cambia, ma ora il verso conta: un giro e lo stesso giro percorso all'indietro sono soluzioni diverse.
- ▶ Il TSP è il caso particolare dell'ATSP in cui $d_{ij} = d_{ji}$ per ogni i, j .

Contare i giri dell'ATSP

- ▶ Un'istanza dell'ATSP ha $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ giri distinti, il doppio del conteggio della proposizione per il TSP:
 - ▶ la città di partenza continua a non cambiare il giro;
 - ▶ ma il verso sì, quindi non dividiamo per 2.
- ▶ L'istanza di riferimento, letta come istanza dell'ATSP, ha $4! = 24$ giri invece di 12.

TSP metrico:

- ▶ le distanze soddisfano la disuguaglianza triangolare
 $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$
- ▶ l'istanza di riferimento è metrica; le distanze euclidee (non arrotondate) sono metriche
- ▶ è il caso in cui gli algoritmi euristici possono avere una garanzia di prestazione

TSP asimmetrico:

- ▶ d_{ij} può differire da d_{ji} : il verso di un giro conta
- ▶ $(n-1)!$ giri invece di $(n-1)!/2$; il TSP è un caso particolare

Osservazioni

Introduzione: Osservazioni

- ▶ Chiudiamo il capitolo con alcune osservazioni sullo stato dell'arte
- ▶ Quanto sono grandi le istanze del TSP che oggi si risolvono all'ottimo?
- ▶ Che cosa dice la complessità sul TSP, e che cosa può garantire un algoritmo di approssimazione?

Istanze record

- ▶ L'istanza più grande risolta all'ottimo, pla85900, ha 85 900 punti che vengono da un problema di progettazione di chip.
- ▶ È stata risolta nel 2005–2006 con il codice Concorde; il giro ottimo, di lunghezza 142 382 641, è stato certificato nel 2009 da Applegate, Bixby, Chvátal, Cook, Espinoza, Goycoolea e Helsgaun.
- ▶ Sulle mappe stradali di paesi reali, il record del 2025 è l'istanza korea81998, con 81 998 bar della Corea del Sud.

Complessità e approssimazione

- ▶ Il TSP è fortemente NP-difficile (capitolo [«Problemi di ottimizzazione combinatoria»](#)).
- ▶ Christofides (1976) ha dato un algoritmo di approssimazione con rapporto $\frac{3}{2}$ per il TSP metrico.

Risoluzione esatta:

- ▶ istanze record con decine di migliaia di punti: pla85900 e korea81998

Complessità e approssimazione:

- ▶ il TSP è fortemente NP-difficile
- ▶ per il TSP metrico, l'algoritmo di Christofides ha rapporto $\frac{3}{2}$

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Raccogliamo gli errori che si commettono più spesso con il TSP
- ▶ Ciascuno di essi viene da una definizione o da un risultato di questo capitolo
- ▶ Controlliamoli prima di risolvere gli esercizi

Errori tipici (1/3)

Osservazione 2: Contare $n!$ giri

La città di partenza non cambia il giro e, nel caso simmetrico, nemmeno il verso: il numero di giri è $(n - 1)!/2$.

Osservazione 3: Dimenticare l'arco di ritorno

La lunghezza di un giro comprende l'ultima distanza $d_{\sigma_n \sigma_1}$, dall'ultima città di nuovo alla prima.

Osservazione 4: Scambiare due cicli per un giro

Due cicli disgiunti che insieme visitano ogni città una volta non sono un giro: un giro è un unico ciclo attraverso tutte le città.

Osservazione 5: Leggere il bound come un giro

Il valore 17 del bound dei due archi più corti non è la lunghezza di un giro; dice solo che nessun giro è più corto.

Osservazione 6: Usare la disuguaglianza triangolare senza verificarla

Le garanzie degli algoritmi euristici valgono solo per le istanze metriche.

Giri:

- ▶ $(n-1)!/2$ giri, non $n!$; la lunghezza comprende l'arco di ritorno
- ▶ un giro è un unico ciclo attraverso tutte le città

Bound e garanzie:

- ▶ un lower bound non è la lunghezza di un giro
- ▶ verificare la disuguaglianza triangolare prima di usare una garanzia per le istanze metriche

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo sui problemi di routing
- ▶ Il cruscotto riunisce i bound trovati sull'istanza di riferimento

Riepilogo (1/2)

- ▶ Il TSP chiede un percorso chiuso più corto attraverso tutte le città; una soluzione è un ordinamento ciclico delle città, detto giro.
- ▶ Un'istanza simmetrica con n città ha $(n - 1)!/2$ giri, una asimmetrica $(n - 1)!$; elencarli è possibile solo per n molto piccolo.
- ▶ La nearest neighbour rule dà rapidamente un giro, senza garanzie; i due archi più corti di ogni città danno un lower bound sulla lunghezza ottima.
- ▶ Il TSP metrico, con la disuguaglianza triangolare, è il caso in cui esistono garanzie di approssimazione.

Riepilogo (2/2)

Cruscotto dell'istanza del TSP (minimizzazione: il lower bound è un bound duale, l'upper bound è la lunghezza di un giro):

Capitolo	Lower bound	Upper bound	Da
Questo capitolo	17	25	due archi più corti; nearest neighbour dalla città 1
Questo capitolo, enumerazione	18	18	i 12 giri