

Formulazioni dei problemi di routing

Indice

Panoramica della famiglia

Modelli PLI per il problema del commesso viaggiatore

Un modello con variabili di posizione (MTZ)

Un modello con vincoli di eliminazione dei sottogiri (DFJ)

Rilassamenti lineari

- Il rilassamento di assegnamento

- Il rilassamento del modello MTZ

- Il rilassamento del modello DFJ

Modelli PLI per il TSP metrico e asimmetrico

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere il modello PLI del problema del commesso viaggiatore con le variabili di posizione di Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) e spiegare come eliminano i sottogiri;
- ▶ scrivere il modello PLI con i vincoli di eliminazione dei sottogiri di Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ) e dimostrarne la correttezza;
- ▶ contare le variabili e i vincoli dei due modelli;
- ▶ confrontare i rilassamenti lineari dei due modelli sulla stessa istanza;
- ▶ scrivere il modello PLI del TSP asimmetrico e spiegare perché il TSP metrico ha gli stessi modelli del TSP.

Prerequisiti

- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «Programmazione lineare intera» e «Bound primali e duali»: problemi PLI, rilassamenti lineari e bound.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «Problemi di routing»: il problema, le sue ipotesi, i giri, la matrice delle distanze e l'istanza di riferimento con 5 città.

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ I modelli PLI dei problemi di routing hanno le stesse variabili e gli stessi vincoli di base
- ▶ Introduciamo gli archi orientati, le variabili di arco e i vincoli di grado, comuni a tutti i modelli del capitolo
- ▶ I modelli differiscono solo nei vincoli che eliminano i sottogiri: è il punto chiave del capitolo
- ▶ Poi elenchiamo i membri della famiglia, con i nomi dei loro modelli PLI

- Dato l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ delle città, i modelli di questo capitolo usano l'insieme degli archi orientati

$$A = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}.$$

- Ogni lato $\{i, j\}$ del problema simmetrico è rappresentato dai due archi opposti (i, j) e (j, i) , che hanno lo stesso costo $d_{ij} = d_{ji}$.

Variabili di arco e vincoli di grado

- ▶ I modelli PLI dei problemi di routing usano una **variabile di arco** binaria x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$, uguale a 1 se il giro va dalla città i alla città j .
- ▶ I **vincoli di grado** impongono che da ogni città esca esattamente un arco e che in ogni città entri esattamente un arco.
- ▶ I modelli differiscono nei vincoli che eliminano i sottogiri.

I modelli di routing in una frase

- ▶ I modelli di routing sono modelli di assegnamento sugli archi, con i vincoli di grado, più vincoli che vietano i sottogiri.
- ▶ La funzione obiettivo minimizza la distanza totale

$$\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij}.$$

I membri della famiglia

La tabella elenca i membri della famiglia, con i nomi dei loro modelli PLI e le sezioni che li scrivono.

Problema	Modello	Eliminazione dei sottogiri	Sezione
TSP	ILP_{TSP}^{MTZ}	variabili di posizione u_i	modello MTZ
TSP	ILP_{TSP}^{DFJ}	un vincolo per ogni sottoinsieme di città	modello DFJ
TSP metrico	$ILP_{TSP}^{MTZ}, ILP_{TSP}^{DFJ}$	i modelli del TSP	TSP metrico e asimmetrico
ATSP	ILP_{ATSP}	i vincoli dei modelli del TSP	TSP metrico e asimmetrico

Che cosa hanno in comune i modelli:

- ▶ una variabile di arco binaria x_{ij} per ogni arco orientato $(i, j) \in A$
- ▶ i vincoli di grado: da ogni città esce esattamente un arco e in ogni città entra esattamente un arco
- ▶ l'obiettivo: minimizzare la distanza totale $\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij}$

Che cosa li distingue:

- ▶ i vincoli che vietano i sottogiri: variabili di posizione (MTZ) o un vincolo per ogni sottoinsieme di città (DFJ)

Modelli PLI per il problema del commesso viaggiatore

Introduzione: Modelli PLI per il TSP

- ▶ Il problema del commesso viaggiatore e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo [«Problemi di routing»](#)
- ▶ Qui scriviamo il problema come modello PLI, sulle variabili di arco x_{ij}
- ▶ I modelli classici sono due: differiscono nel modo in cui vietano i sottogiri, e i loro rilassamenti lineari danno lower bound diversi

Due modelli PLI classici

- ▶ Il TSP ha due modelli PLI classici sulle variabili di arco x_{ij} :
 - ▶ il modello di Miller, Tucker e Zemlin (**MTZ**), con variabili di posizione;
 - ▶ il modello di Dantzig, Fulkerson e Johnson (**DFJ**), con vincoli di eliminazione dei sottogiri.
- ▶ Una sezione successiva confronta i rilassamenti lineari dei due modelli.

Due modelli PLI del TSP:

- ▶ entrambi sono scritti sulle variabili di arco x_{ij}
- ▶ MTZ: variabili di posizione
- ▶ DFJ: vincoli di eliminazione dei sottogiri

Nel seguito:

- ▶ i due modelli uno alla volta, poi i loro rilassamenti lineari

Un modello con variabili di posizione (MTZ)

Introduzione: Un modello con variabili di posizione (MTZ)

- ▶ Scriviamo il primo modello PLI del TSP, dovuto a Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)
- ▶ Oltre alle variabili di arco, usa una variabile di posizione per ogni città diversa dalla città 1
- ▶ Spieghiamo come le variabili di posizione eliminano i sottogiri, dimostriamo che il modello è corretto e lo scriviamo per l'istanza di riferimento

Variabili del modello MTZ

Introduciamo le seguenti $n(n-1)$ **variabili binarie**:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è percorso dal giro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i,j) \in A,$$

e le seguenti $n-1$ **variabili continue**:

$$u_i = \begin{cases} \text{posizione della città } i \\ \text{dopo la partenza dalla città 1,} \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}.$$

La città 1 serve solo come città di riferimento: un giro non ha una città di partenza privilegiata.

Il modello MTZ

Usando queste variabili, un modello PLI per il TSP è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V},$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V},$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, \quad i \neq j,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A,$$

$$1 \leq u_i \leq n-1, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}.$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$, o **modello MTZ**.

Il modello MTZ: funzione obiettivo e vincoli

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello
 ILP_{TSP}^{MTZ} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare minimizza la distanza totale percorsa dal giro;
- ▶ i primi vincoli garantiscono che da ogni città esca esattamente un arco (n vincoli lineari);
- ▶ i secondi vincoli garantiscono che in ogni città entri esattamente un arco (n vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2$ collegano le variabili di arco con le variabili di posizione ed eliminano i sottogiri che non contengono la città 1 ($(n - 1)(n - 2)$ vincoli lineari);
- ▶ infine, le ultime due famiglie di vincoli definiscono le variabili del modello PLI.

Come eliminano i sottogiri le variabili di posizione?

Guardiamo il legame fra le variabili di arco
e le variabili di posizione.

Spiegazione del legame fra le variabili (1/2)

- Per ogni coppia di città i, j diverse dalla città 1, se l'arco (i, j) è percorso, allora la posizione della città j supera di almeno un'unità la posizione della città i . Questa relazione logica è l'implicazione

$$x_{ij} = 1 \implies u_j \geq u_i + 1.$$

- La sua contronominale è

$$u_j < u_i + 1 \implies x_{ij} = 0.$$

In particolare, un arco da una città verso una città nella stessa posizione o in una posizione precedente non può essere percorso.

Spiegazione del legame fra le variabili (2/2)

- ▶ Entrambe le implicazioni sono imposte dai vincoli lineari $u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2$. Se $x_{ij} = 1$, allora il vincolo dà $u_i - u_j + (n - 1) \leq n - 2$, ossia $u_j \geq u_i + 1$.
- ▶ Viceversa, se $u_j < u_i + 1$, allora il vincolo dà $(n - 1)x_{ij} \leq n - 2 + u_j - u_i < n - 1$. Poiché x_{ij} è binaria, questo impone $x_{ij} = 0$.
- ▶ Quando $x_{ij} = 0$, il vincolo diventa $u_i - u_j \leq n - 2$, che è sempre soddisfatto perché entrambe le posizioni appartengono a $[1, n - 1]$. Di conseguenza, $n - 1$ è il più piccolo coefficiente big-M possibile per questi bound.

Il legame fra le variabili vieta ogni sottogiro
che non contiene la città 1.

Dimostriamo ora che il modello MTZ è corretto.

Proposizione 1: I vincoli MTZ eliminano i sottogiri

I vincoli del modello MTZ sono soddisfatti da una soluzione intera se e solo se i suoi archi selezionati formano un unico giro che passa per tutte le città.

Dimostrazione (1/2)

- ▶ I vincoli di grado fanno degli archi selezionati una collezione di cicli orientati disgiunti nei vertici che coprono tutte le città.
- ▶ Supponiamo che uno di questi cicli non contenga la città 1 e visiti, nell'ordine, $i_1, i_2, \dots, i_k$. Poiché ogni arco (i_r, i_{r+1}) è selezionato, l'implicazione precedente dà

$$u_{i_{r+1}} \geq u_{i_r} + 1 \quad r = 1, \dots, k,$$

dove $i_{k+1} = i_1$.

- ▶ Sommando le disuguaglianze otteniamo $u_{i_1} \geq u_{i_1} + k$, una contraddizione.
- ▶ Quindi nessun ciclo può evitare la città 1, e la collezione è un unico giro.

Dimostrazione (2/2)

- ▶ Viceversa, consideriamo un giro qualsiasi e facciamo partire dalla città 1. Per ogni città $i \neq 1$, poniamo u_i uguale alla posizione in cui la città i è visitata dopo la partenza dalla città 1.
- ▶ I bound $1 \leq u_i \leq n - 1$ valgono.
- ▶ Se un arco selezionato (i, j) ha $i, j \neq 1$, allora la città j segue immediatamente la città i , quindi $u_j = u_i + 1$ e il vincolo $u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2$ vale.
- ▶ Se l'arco non è selezionato, il vincolo $u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2$ vale grazie ai bound sulle posizioni.
- ▶ Quindi il giro definisce una soluzione intera ammissibile.



Scriviamo ora il modello MTZ
per l'istanza di riferimento del TSP.

Esempio: istanza del TSP

Consideriamo l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 città ($n = 5$), con la matrice delle distanze

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	2	2	9
2	5	—	4	3	4
3	2	4	—	4	7
4	2	3	4	—	7
5	9	4	7	7	—

- ▶ È l'istanza di riferimento del capitolo [«Problemi di routing»](#).
- ▶ Usiamo questa istanza del TSP in tutti gli esempi del capitolo.

Esempio: il modello ILP_{TSP}^{MTZ} (1/4)

Il modello ILP_{TSP}^{MTZ} per l'istanza del TSP ha 20 variabili di arco, 4 variabili di posizione, 10 vincoli di grado e 12 vincoli MTZ:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\ & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\ & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP^{MTZ}_{TSP} (2/4)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$$

$$u_2 - u_3 + 4 x_{23} \leq 3$$

$$u_2 - u_4 + 4 x_{24} \leq 3$$

$$u_2 - u_5 + 4 x_{25} \leq 3$$

$$u_3 - u_2 + 4 x_{32} \leq 3$$

$$u_3 - u_4 + 4 x_{34} \leq 3$$

$$u_3 - u_5 + 4 x_{35} \leq 3$$

Esempio: il modello ILP^{MTZ}_{TSP} (3/4)

$$u_4 - u_2 + 4 x_{42} \leq 3$$

$$u_4 - u_3 + 4 x_{43} \leq 3$$

$$u_4 - u_5 + 4 x_{45} \leq 3$$

$$u_5 - u_2 + 4 x_{52} \leq 3$$

$$u_5 - u_3 + 4 x_{53} \leq 3$$

$$u_5 - u_4 + 4 x_{54} \leq 3$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \in \{0, 1\}$$

$$u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 1$$

$$u_2, u_3, u_4, u_5 \leq 4$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ (4/4)

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ è:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{52} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{41} = 1, \text{ tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0,$$

$$\tilde{u}_3 = 1, \quad \tilde{u}_5 = 2, \quad \tilde{u}_2 = 3, \quad \tilde{u}_4 = 4$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$ è 18.
- ▶ La soluzione ottima associata del TSP è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 5, 2, 4)$, di lunghezza

$$L(\tilde{\sigma}) = 2 + 7 + 4 + 3 + 2 = 18;$$

è l'unico giro ottimo, a meno del verso di percorrenza.

Il modello MTZ:

- ▶ $n(n-1)$ variabili di arco binarie e $n-1$ variabili di posizione continue
- ▶ $2n$ vincoli di grado e $(n-1)(n-2)$ vincoli $u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2$

Perché è corretto:

- ▶ $x_{ij} = 1$ implica $u_j \geq u_i + 1$, con $n-1$ il più piccolo coefficiente big-M
- ▶ un ciclo che evita la città 1 darebbe $u_{i_1} \geq u_{i_1} + k$

Sull'istanza di riferimento: il giro ottimo $(1, 3, 5, 2, 4)$, di lunghezza 18.

Un modello con vincoli di eliminazione dei sottogiri (DFJ)

Introduzione: Un modello con vincoli di eliminazione dei sottogiri (DFJ)

- ▶ Scriviamo il secondo modello PLI del TSP, dovuto a Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ)
- ▶ Usa solo le variabili di arco: i sottogiri sono vietati direttamente, con un vincolo per ogni sottoinsieme di città
- ▶ Dimostriamo che il modello è corretto, contiamo i suoi vincoli e lo scriviamo per l'istanza di riferimento

Variabili del modello DFJ

- ▶ Il secondo modello usa solo le $n(n - 1)$ variabili di arco x_{ij} del modello MTZ:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i, j) \text{ è percorso dal giro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A.$$

- ▶ Non ci sono variabili di posizione.
- ▶ I sottogiri sono vietati direttamente, con un vincolo per ogni sottoinsieme di città.

Il modello DFJ

Usando queste variabili, un secondo modello PLI per il TSP è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V},$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V},$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A.$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$, o **modello DFJ**.

Il modello DFJ: funzione obiettivo e vincoli

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

ILP_{TSP}^{DFJ}:

- ▶ la funzione obiettivo e i vincoli di grado (le prime due famiglie) sono quelli del modello MTZ;
- ▶ i terzi vincoli si chiamano **vincoli di eliminazione dei sottogiri**: un giro non può contenere tutti gli $|S|$ archi di un ciclo sulle città di S , quindi usa al più $|S| - 1$ archi dentro S ($2^{n-1} - n$ vincoli lineari);
- ▶ infine, gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello PLI.

Quanti vincoli di eliminazione dei sottogiri?

- ▶ C'è un vincolo di eliminazione dei sottogiri per ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}$ con $|S| \geq 2$.
- ▶ Il loro numero $2^{n-1} - n$ è esponenziale in n :
 - ▶ per $n = 5$ sono 11;
 - ▶ per $n = 20$ sono 524 268.

Proposizione 2: Vincoli di eliminazione dei sottogiri

I vincoli del modello DFJ sono soddisfatti da una soluzione intera se e solo se i suoi archi selezionati formano un unico giro che passa per tutte le città.

Dimostrazione (1/2)

- ▶ Sia dato un giro e sia $S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}$ con $|S| \geq 2$.
- ▶ Se il giro usasse $|S|$ archi dentro S , questi archi formerebbero un ciclo sulle città di S , che non è l'intero giro perché $1 \notin S$: una contraddizione.
- ▶ Quindi i vincoli di eliminazione dei sottogiri valgono, e i vincoli di grado valgono per definizione di giro.

Dimostrazione (2/2)

- ▶ Viceversa, i vincoli di grado fanno degli archi selezionati una collezione di cicli orientati disgiunti nei vertici.
- ▶ Se ci fosse più di un ciclo, uno di essi non conterrebbe la città 1. Sia S l'insieme delle sue città: allora $|S| \geq 2$ e il ciclo usa $|S|$ archi dentro S , il che viola il vincolo di eliminazione dei sottogiri di S .
- ▶ Quindi c'è un unico ciclo, un giro.



Esempio: il modello ILP^{DFJ}_{TSP} (1/4)

Il modello ILP^{DFJ}_{TSP} per l'istanza del TSP ha 20 variabili di arco, 10 vincoli di grado e 11 vincoli di eliminazione dei sottogiri, uno per ogni sottoinsieme $S \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$ con almeno due città:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\ & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\ & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP^{DFJ}_{TSP} (2/4)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$$

$$x_{23} + x_{32} \leq 1$$

$$x_{24} + x_{42} \leq 1$$

$$x_{25} + x_{52} \leq 1$$

$$x_{34} + x_{43} \leq 1$$

$$x_{35} + x_{53} \leq 1$$

$$x_{45} + x_{54} \leq 1$$

Esempio: il modello ILP^{DFJ}_{TSP} (3/4)

$$x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2$$

$$x_{23} + x_{25} + x_{32} + x_{35} + x_{52} + x_{53} \leq 2$$

$$x_{24} + x_{25} + x_{42} + x_{45} + x_{52} + x_{54} \leq 2$$

$$x_{34} + x_{35} + x_{43} + x_{45} + x_{53} + x_{54} \leq 2$$

$$\begin{aligned} x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{32} + x_{34} + x_{35} \\ + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 3 \end{aligned}$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \in \{0, 1\}$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ (4/4)

- ▶ Il sottogiro $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ insieme al sottogiro $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ soddisfa i vincoli di grado ma viola il vincolo $x_{25} + x_{52} \leq 1$ di $S = \{2, 5\}$.

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$ è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 5, 2, 4)$:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{52} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{41} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$ è 18.

Il modello DFJ:

- ▶ solo le $n(n - 1)$ variabili di arco, nessuna variabile di posizione
- ▶ $2n$ vincoli di grado e $2^{n-1} - n$ vincoli di eliminazione dei sottogiri, uno per ogni $S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}$ con $|S| \geq 2$

Perché è corretto:

- ▶ un giro usa al più $|S| - 1$ archi dentro S
- ▶ una collezione di due o più cicli ha un ciclo senza la città 1, che viola il vincolo dell'insieme delle sue città

Sull'istanza di riferimento: 11 vincoli di eliminazione dei sottogiri, valore ottimo 18.

Rilassamenti lineari

Introduzione: Rilassamenti lineari

- ▶ Rilassiamo i vincoli di binarietà dei modelli in vincoli di non negatività, e otteniamo modelli LP
- ▶ Il valore ottimo di ogni rilassamento è un lower bound sul valore ottimo del TSP
- ▶ Confrontiamo tre rilassamenti sull'istanza di riferimento: il rilassamento di assegnamento, il rilassamento del modello MTZ e il rilassamento del modello DFJ

Il rilassamento di assegnamento

Tenendo solo i vincoli di grado dei due modelli e rilassando i vincoli di binarietà in vincoli di non negatività, otteniamo il seguente modello LP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \\ & \sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V}, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

Questo modello LP si chiama modello LP-0_{TSP}, o **rilassamento di assegnamento**.

Gli upper bound $x_{ij} \leq 1$ non servono

- ▶ Aggiungere gli upper bound $x_{ij} \leq 1$ non cambia questo rilassamento, né i due rilassamenti seguenti.
- ▶ Per ogni arco (i, j) , la non negatività e l'equazione di grado degli archi che escono dalla città i danno

$$x_{ij} \leq \sum_{\substack{k \in \mathcal{V} \\ k \neq i}} x_{ik} = 1.$$

Esempio: il modello LP-0_{TSP} (1/3)

Il modello LP-0_{TSP} per l'istanza del TSP è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\ & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\ & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \end{aligned}$$

$$\text{soggetto a } x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1$$

Esempio: il modello LP-0_{TSP} (2/3)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \geq 0$$

Esempio: il modello LP-0_{TSP} (3/3)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP-0}_{\text{TSP}})$ è:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{52} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

- ▶ È intera, ma è formata dai due sottogiri $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$.
- ▶ Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{TSP}})$ è 16. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$16 \leq z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}) = z(\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{TSP}^{MTZ} ,
rilassiamo i vincoli di binarietà
in vincoli di non negatività;
le variabili di posizione mantengono i loro bound.

Il rilassamento del modello MTZ

Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V},$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V},$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, \quad i \neq j,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A,$$

$$1 \leq u_i \leq n-1, \quad \forall i \in \mathcal{V} \setminus \{1\}.$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$.

Proposizione 3: Una regione debole del rilassamento MTZ

Sia (x, u) tale da soddisfare le equazioni di grado, con $x_{ij} \geq 0$.
Se

$$x_{ij} \leq \frac{n-2}{n-1} \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \setminus \{1\}, \quad i \neq j,$$

allora (x, u) è ammissibile per $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ dopo aver posto $u_i = 1$ per ogni $i \neq 1$.

Dimostrazione

- ▶ Con $u_i = u_j = 1$, ogni vincolo $u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2$ diventa

$$(n - 1)x_{ij} \leq n - 2,$$

che è esattamente l'upper bound assunto.

- ▶ Anche i bound $1 \leq u_i \leq n - 1$ sulle variabili di posizione valgono.



Che cosa ci dice la proposizione

- ▶ La proposizione mostra perché la formulazione compatta MTZ può avere un lower bound debole.
- ▶ Molte soluzioni frazionarie del rilassamento di assegnamento soddisfano già i vincoli di ordinamento.

Esempio: il modello LP_{TSP}^{MTZ} (1/4)

Il modello LP_{TSP}^{MTZ} per l'istanza del TSP è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\ & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\ & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello LP_{TSP}^{MTZ} (2/4)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$$

$$u_2 - u_3 + 4 x_{23} \leq 3$$

$$u_2 - u_4 + 4 x_{24} \leq 3$$

$$u_2 - u_5 + 4 x_{25} \leq 3$$

$$u_3 - u_2 + 4 x_{32} \leq 3$$

$$u_3 - u_4 + 4 x_{34} \leq 3$$

$$u_3 - u_5 + 4 x_{35} \leq 3$$

Esempio: il modello LP_{TSP}^{MTZ} (3/4)

$$u_4 - u_2 + 4x_{42} \leq 3$$

$$u_4 - u_3 + 4x_{43} \leq 3$$

$$u_4 - u_5 + 4x_{45} \leq 3$$

$$u_5 - u_2 + 4x_{52} \leq 3$$

$$u_5 - u_3 + 4x_{53} \leq 3$$

$$u_5 - u_4 + 4x_{54} \leq 3$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \geq 0$$

$$u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 1$$

$$u_2, u_3, u_4, u_5 \leq 4$$

Esempio: il modello LP_{TSP}^{MTZ} (4/4)

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})(LP_{TSP}^{MTZ})$ è:

$$\tilde{x}_{13} = 1, \quad \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x}_{25} = \tilde{x}_{52} = \frac{3}{4},$$

$$\tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{45} = \tilde{x}_{54} = \frac{1}{4}, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0,$$

$$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = \tilde{u}_4 = \tilde{u}_5 = 1$$

- ▶ Tutti gli archi fra le città 2, 3, 4, 5 hanno valore al più $\frac{3}{4} = \frac{n-2}{n-1}$, come nella proposizione sulla regione debole del rilassamento MTZ.
- ▶ Il valore ottimo $z(LP_{TSP}^{MTZ})$ è 17. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$17 \leq z(ILP_{TSP}^{MTZ})$$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{TSP}^{DFJ} ,
rilassiamo i vincoli di binarietà
in vincoli di non negatività.

Il rilassamento del modello DFJ

Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{V},$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \mathcal{V},$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A.$$

Questo modello LP si chiama modello $\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$.

Compatto o forte?

- ▶ Il modello MTZ è prezioso perché ha solo $O(n^2)$ variabili e vincoli.
- ▶ Il modello DFJ ha un rilassamento più forte, ma un numero esponenziale di vincoli.
- ▶ In pratica, i vincoli di eliminazione dei sottogiri si aggiungono solo quando sono violati dalla soluzione corrente del rilassamento.

Esempio: il modello LP_{TSP}^{DFJ} (1/4)

Il modello LP_{TSP}^{DFJ} per l'istanza del TSP è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{15} + 5x_{21} + 4x_{23} + 3x_{24} \\ & + 4x_{25} + 2x_{31} + 4x_{32} + 4x_{34} + 7x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} \\ & + 4x_{43} + 7x_{45} + 9x_{51} + 4x_{52} + 7x_{53} + 7x_{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ & x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello LP_{TSP}^{DFJ} (2/4)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$$

$$x_{23} + x_{32} \leq 1$$

$$x_{24} + x_{42} \leq 1$$

$$x_{25} + x_{52} \leq 1$$

$$x_{34} + x_{43} \leq 1$$

$$x_{35} + x_{53} \leq 1$$

$$x_{45} + x_{54} \leq 1$$

Esempio: il modello LP_{TSP}^{DFJ} (3/4)

$$x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2$$

$$x_{23} + x_{25} + x_{32} + x_{35} + x_{52} + x_{53} \leq 2$$

$$x_{24} + x_{25} + x_{42} + x_{45} + x_{52} + x_{54} \leq 2$$

$$x_{34} + x_{35} + x_{43} + x_{45} + x_{53} + x_{54} \leq 2$$

$$\begin{aligned} x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{32} + x_{34} + x_{35} \\ + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \leq 3 \end{aligned}$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{54} \geq 0$$

Esempio: il modello LP_{TSP}^{DFJ} (4/4)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP_{TSP}^{DFJ})$ è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 3, 5, 2, 4)$:

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{35} = \tilde{x}_{52} = \tilde{x}_{24} = \tilde{x}_{41} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

- ▶ Il valore ottimo $z(LP_{TSP}^{DFJ})$ è 18: su questa istanza il rilassamento chiude il gap.

Esempio: confronto fra i rilassamenti

Per l'istanza del TSP, i tre rilassamenti danno i seguenti lower bound sul valore ottimo 18:

Rilassamento	Valore ottimo
$LP-0_{TSP}$ (rilassamento di assegnamento)	16
LP_{TSP}^{MTZ}	17
LP_{TSP}^{DFJ}	18

- ▶ I vincoli di ordinamento alzano il bound da 16 a 17.
- ▶ I vincoli di eliminazione dei sottogiri chiudono il gap su questa istanza.

Tre rilassamenti lineari:

- ▶ rilassamento di assegnamento: solo i vincoli di grado, $x_{ij} \geq 0$; i bound $x_{ij} \leq 1$ sono implicati
- ▶ rilassamento MTZ: debole, perché ogni soluzione con $x_{ij} \leq \frac{n-2}{n-1}$ fra le città diverse da 1 è ammissibile con $u_i = 1$
- ▶ rilassamento DFJ: più forte, con un numero esponenziale di vincoli, aggiunti quando sono violati

Sull'istanza di riferimento:

- ▶ lower bound 16, 17 e 18 sul valore ottimo 18

Modelli PLI per il TSP metrico e asimmetrico

Introduzione: Modelli PLI per il TSP metrico e asimmetrico

- ▶ I problemi di questa sezione sono il problema del commesso viaggiatore asimmetrico (ATSP) e il TSP metrico, definiti nel capitolo [«Problemi di routing»](#)
- ▶ Scriviamo il modello PLI dell'ATSP, in cui d_{ij} può differire da d_{ji}
- ▶ Vediamo perché i modelli del TSP sono anche modelli dell'ATSP e del TSP metrico

Variabili del modello ATSP

- ▶ Dato l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ delle città e l'insieme A degli archi orientati, ogni arco (i, j) ha la sua distanza d_{ij} , che può differire da d_{ji} .
- ▶ Introduciamo le seguenti $n(n - 1)$ **variabili binarie**:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i, j) \text{ è percorso dal giro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A.$$

Il modello ATSP

Usando queste variabili, un modello PLI per l'ATSP è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} d_{ij} x_{ij} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, & \forall i \in \mathcal{V}, \\ & \sum_{\substack{i \in \mathcal{V} \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, & \forall j \in \mathcal{V}, \\ & \sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq \mathcal{V} \setminus \{1\}, |S| \geq 2, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, & \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{ATSP}.

Il modello ATSP: funzione obiettivo e vincoli

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello
 ILP_{ATSP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare minimizza la distanza totale percorsa lungo gli archi del giro, ciascun arco con la sua distanza;
- ▶ le prime due famiglie di vincoli garantiscono che da ogni città esca esattamente un arco e che in ogni città entri esattamente un arco ($2n$ vincoli lineari);
- ▶ i terzi vincoli sono i vincoli di eliminazione dei sottogiri ($2^{n-1} - n$ vincoli lineari);
- ▶ infine, gli ultimi vincoli definiscono le variabili del modello PLI.

Il modello ATSP e i modelli del TSP

- ▶ Il modello ILP_{ATSP} è il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}}$ con le distanze degli archi: la sua dimostrazione di correttezza, la proposizione sui vincoli di eliminazione dei sottogiri, non usa mai $d_{ij} = d_{ji}$.
- ▶ Per lo stesso motivo anche il modello $\text{ILP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}}$ è un modello PLI dell'ATSP.
- ▶ Un giro e lo stesso giro percorso al contrario usano archi opposti: nell'ATSP sono soluzioni diverse, in generale di lunghezze diverse.

Il TSP metrico

- ▶ Il TSP metrico, definito nel capitolo [«Problemi di routing»](#), ha gli stessi modelli PLI del TSP.
- ▶ La disuguaglianza triangolare è una proprietà delle distanze, non un vincolo del modello.
- ▶ L'istanza di riferimento del TSP è metrica, quindi i modelli ILP_{TSP}^{MTZ} e ILP_{TSP}^{DFJ} scritti per essa sono già modelli di un'istanza del TSP metrico.

Esempio: il modello ILP_{ATSP} (1/4)

Consideriamo l'insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 città ($n = 4$), con la matrice delle distanze asimmetrica

d_{ij}	1	2	3	4
1	—	2	7	7
2	2	—	4	2
3	9	7	—	1
4	2	4	1	—

Per esempio, $d_{13} = 7$ e $d_{31} = 9$.

Esempio: il modello ILP_{ATSP} (2/4)

Il modello ILP_{ATSP} per questa istanza dell'ATSP ha 12 variabili di arco, 8 vincoli di grado e 4 vincoli di eliminazione dei sottogiri, uno per ogni sottoinsieme $S \subseteq \{2, 3, 4\}$ con almeno due città:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_{12} + 7x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 4x_{23} + 2x_{24} \\ & + 9x_{31} + 7x_{32} + x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + x_{43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ & x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP_{ATSP} (3/4)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$

$$x_{23} + x_{32} \leq 1$$

$$x_{24} + x_{42} \leq 1$$

$$x_{34} + x_{43} \leq 1$$

$$x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{34} + x_{42} + x_{43} \leq 2$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{43} \in \{0, 1\}$$

Esempio: il modello ILP_{ATSP} (4/4)

- ▶ I due sottogiri $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$, di lunghezza totale $2 + 2 + 1 + 1 = 6$, soddisfano i vincoli di grado ma violano il vincolo $x_{34} + x_{43} \leq 1$ di $S = \{3, 4\}$.

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{ATSP}})$ è il giro $\tilde{\sigma} = (1, 2, 3, 4)$:

$$\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{34} = \tilde{x}_{41} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{x}_{ij} = 0$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{ATSP}})$ è $2 + 4 + 1 + 2 = 9$, e il giro ottimo è unico.
- ▶ Lo stesso giro percorso al contrario, $(1, 4, 3, 2)$, ha lunghezza $7 + 1 + 7 + 2 = 17$.

L'ATSP:

- ▶ il modello ILP_{ATSP} è il modello DFJ in cui è ammesso $d_{ij} \neq d_{ji}$; anche il modello MTZ è un modello dell'ATSP
- ▶ un giro e il suo inverso sono soluzioni diverse: 9 e 17 nell'esempio

Il TSP metrico:

- ▶ stessi modelli del TSP: la disuguaglianza triangolare è una proprietà dei dati, non un vincolo

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Raccogliamo gli errori più frequenti nello scrivere e nell'usare i modelli di routing
- ▶ Ciascuno di essi viene da un modello o da un risultato di questo capitolo
- ▶ Conviene ripassarli prima di risolvere gli esercizi

Errori tipici (1/4)

Osservazione 1: Scrivere i vincoli MTZ per la città 1

I vincoli MTZ si scrivono solo per le coppie di città diverse dalla città 1: la città 1 non ha variabile di posizione.

Osservazione 2: Usare un big-M minore di $n - 1$

Scritto come $u_i - u_j + Mx_{ij} \leq M - 1$, il vincolo con $M < n - 1$ taglia giri ammissibili: quando $x_{ij} = 0$ richiede $u_i - u_j \leq M - 1 < n - 2$, mentre due posizioni possono differire di $n - 2$; $M = n - 1$ è il più piccolo valore valido.

Errori tipici (2/4)

Osservazione 3: Prendere $S = \mathcal{V}$ nei vincoli di eliminazione dei sottogiri

Un giro usa $|\mathcal{V}|$ archi dentro $\mathcal{V}$: il vincolo taglierebbe ogni giro. Gli insiemi S sono sottoinsiemi propri delle città, con almeno due città.

Osservazione 4: Fidarsi del bound MTZ

Per la proposizione sulla regione debole del rilassamento MTZ, molte soluzioni frazionarie del rilassamento di assegnamento sono ammissibili per il rilassamento MTZ: la formulazione compatta non è forte.

Osservazione 5: Elencare tutti i vincoli di eliminazione dei sottogiri

Il loro numero è $2^{n-1} - n$: non si scrivono tutti insieme, ma si aggiungono quando sono violati.

Osservazione 6: Identificare un giro con il suo inverso nell'ATSP

Con distanze asimmetriche i due versi di un giro sono soluzioni diverse: nell'esempio dell'ATSP di questo capitolo hanno lunghezze 9 e 17.

Osservazione 7: Aggiungere la disuguaglianza triangolare come vincolo

Nel TSP metrico la disuguaglianza triangolare vale per i dati d_{ij} ; le variabili del modello sono le stesse del TSP.

Scrivere i modelli:

- ▶ vincoli MTZ solo per le città diverse da 1, con coefficiente $n - 1$
- ▶ vincoli di eliminazione dei sottogiri solo per sottoinsiemi propri S con almeno due città, aggiunti quando sono violati

Usare i modelli:

- ▶ il bound MTZ è debole
- ▶ nell'ATSP un giro e il suo inverso sono soluzioni diverse
- ▶ la disuguaglianza triangolare è una proprietà dei dati, non un vincolo

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo sulle formulazioni dei problemi di routing
- ▶ Il quadro riassuntivo raccoglie i lower bound calcolati sull'istanza di riferimento

Riepilogo (1/3)

- ▶ I due modelli hanno le stesse variabili di arco x_{ij} e gli stessi vincoli di grado; differiscono nel modo in cui vietano i sottogiri.
- ▶ Il modello MTZ aggiunge $n - 1$ variabili di posizione e $(n - 1)(n - 2)$ vincoli: è compatto, ma il suo rilassamento è debole.
- ▶ Il modello DFJ aggiunge $2^{n-1} - n$ vincoli di eliminazione dei sottogiri: il rilassamento è più forte, e i vincoli si generano quando servono.

Riepilogo (2/3)

- ▶ Entrambi i modelli sono corretti: una soluzione intera è ammissibile se e solo se i suoi archi formano un unico giro.
- ▶ Entrambi i modelli sono scritti sugli archi, quindi sono anche modelli dell'ATSP: il modello ILP_{ATSP} è il modello DFJ in cui è ammesso $d_{ij} \neq d_{ji}$. Il TSP metrico ha gli stessi modelli del TSP.
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, il capitolo [«Branch-and-cut»](#) mostra come i vincoli di eliminazione dei sottogiri si aggiungono solo quando sono violati.

Quadro riassuntivo dell'istanza del capitolo. Lower bound sul valore ottimo 18 calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Rilassamento di assegnamento	16	$z(\text{LP-0}_{\text{TSP}})$
Rilassamento MTZ	17	$z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{MTZ}})$
Rilassamento DFJ	18	$z(\text{LP}_{\text{TSP}}^{\text{DFJ}})$
Valore ottimo	18	giro $\sigma = (1, 3, 5, 2, 4)$