

TSP: il caso generale e il caso metrico



Indice

Perché garanzie, e perché limiti?

Il TSP generale non è approssimabile

Un caso particolare: il TSP metrico

L'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides

 L'algoritmo del doppio albero

 L'algoritmo di Christofides

Proprietà strutturali

Garanzie di prestazione

 Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di DT

 Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di CH

Fonti

Errori tipici

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ dimostrare che per il TSP generale non esiste una garanzia costante, a meno che $P = NP$;
- ▶ spiegare perché è la disuguaglianza triangolare a rendere approssimabile il TSP;
- ▶ eseguire a mano l'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides su un'istanza metrica;
- ▶ dimostrare le garanzie 2 del doppio albero e $\frac{3}{2}$ dell'algoritmo di Christofides;
- ▶ costruire le famiglie di istanze che rendono tight queste garanzie.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Principi degli algoritmi di approssimazione](#)»: rapporto di prestazione, garanzia di prestazione relativa, garanzia tight e rapporto di prestazione nel caso peggiore.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di routing](#)»: la definizione e l'istanza di riferimento del TSP.
- ▶ Dal modulo *Algoritmi* ([pagina principale del modulo](#)): alberi ricoprenti di costo minimo (Kruskal), circuiti euleriani e le nozioni di NP-completezza e di tempo polinomiale.

Perché garanzie, e perché limiti?



Introduzione: Perché garanzie, e perché limiti?

- ▶ Un algoritmo euristico per il TSP restituisce un giro, ma quanto può essere lontano da quello più corto?
- ▶ In questo capitolo rispondiamo per *ogni* istanza, non solo per le istanze che proviamo
- ▶ La risposta ha due facce: le garanzie quando esistono, e i limiti quando non esistono

Garanzie e limiti per il TSP

- ▶ I **risultati positivi** di questo capitolo limitano la distanza fra il giro euristico e il giro ottimo su *ogni* istanza del TSP metrico.
- ▶ Per il **TSP generale** dimostriamo il contrario: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale può avere una buona garanzia.
- ▶ I **risultati negativi** ci dicono quando dobbiamo smettere di chiedere.

Garanzie:

- ▶ Valgono su ogni istanza, e per il TSP esistono sulle istanze metriche

Limiti:

- ▶ Per il TSP generale nessun algoritmo polinomiale ha una buona garanzia, a meno che $P = NP$

Il TSP generale non è approssimabile

Introduzione: Il TSP generale non è approssimabile

- ▶ In questa sezione richiamiamo il TSP e il rapporto di prestazione di un algoritmo
- ▶ Poi dimostriamo che, a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale per il TSP generale ha una garanzia costante
- ▶ La dimostrazione mostra che cosa va storto: distanze enormi, che violano la disuguaglianza triangolare

Il problema di questo capitolo

- ▶ Il problema di questo capitolo è il **problema del commesso viaggiatore (TSP)**
- ▶ La sua definizione e le sue ipotesi sono nella sua pagina

Istanze e giri

- Come nella pagina del problema, un'istanza ha un insieme $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ di città, $n \geq 3$, e distanze simmetriche

$$d_{ij} = d_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

- Un giro σ è una permutazione di $\mathcal{V}$, di lunghezza

$$L(\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} d_{\sigma_k \sigma_{k+1}} + d_{\sigma_n \sigma_1}$$

- La lunghezza va minimizzata.

Richiamo: il rapporto di prestazione

- Come nel capitolo «[Principi degli algoritmi di approssimazione](#)», $z(I)$ è il valore ottimo dell'istanza I e $\mathcal{A}(I)$ il valore della soluzione restituita dall'algoritmo $\mathcal{A}$
- Il TSP è un problema di minimo, quindi per ogni istanza I

$$\mathcal{A}(I) \geq z(I) \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{A}(I)}{z(I)} \geq 1$$

- Il rapporto di prestazione nel caso peggiore è

$$r(\mathcal{A}) = \sup_I \frac{\mathcal{A}(I)}{z(I)}$$

Nessuna garanzia costante

- ▶ Per il TSP generale nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia costante, a meno che $P = NP$.
- ▶ La dimostrazione segue lo schema di tutti i risultati di questo tipo: un algoritmo di approssimazione con una garanzia troppo buona deciderebbe in tempo polinomiale un problema NP-completo.

Il TSP generale non è approssimabile

Proposizione 1

Sia $\alpha \geq 1$ una costante. Se $P \neq NP$, non esiste un algoritmo polinomiale $\mathcal{A}$ per il TSP tale che, per ogni istanza I del TSP,

$$\frac{\mathcal{A}(I)}{z(I)} \leq \alpha.$$

Dimostrazione (1/3)

- ▶ Il **problema del ciclo hamiltoniano** chiede se un grafo $G = (V, E)$ ha un ciclo che passa per tutti i suoi vertici; è NP-completo.
- ▶ Supponiamo che $\mathcal{A}$ esista e, dato un grafo G con $n \geq 3$ vertici, costruiamo l'istanza I_G del TSP sulle città $\mathcal{V} = V$ con

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i, j\} \in E, \\ \lceil \alpha n \rceil + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione (2/3)

- ▶ Se G ha un ciclo hamiltoniano, quel ciclo è un giro di lunghezza n , quindi

$$z(I_G) = n \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(I_G) \leq \alpha n$$

- ▶ Se G non ha un ciclo hamiltoniano, ogni giro usa almeno una coppia $\{i, j\} \notin E$, quindi

$$\mathcal{A}(I_G) \geq z(I_G) \geq (n-1) + \lceil \alpha n \rceil + 1 > \alpha n$$

Dimostrazione (3/3)

- Quindi

$$G \text{ è hamiltoniano} \iff \mathcal{A}(I_G) \leq \alpha n$$

- Costruire I_G ed eseguire $\mathcal{A}$ richiede tempo polinomiale, quindi il problema del ciclo hamiltoniano sarebbe in P , e $P = NP$.



Le istanze I_G non sono metriche

- ▶ L'istanza I_G viola la **disuguaglianza triangolare**
 $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ non appena G ha un cammino i, k, j con $\{i, j\} \notin E$:

$$d_{ij} = \lceil \alpha n \rceil + 1 > 2 = d_{ik} + d_{kj}$$

- ▶ La dimostrazione ha bisogno di distanze così grandi, e non dice nulla sulle istanze che soddisfano la disuguaglianza.
- ▶ Il risultato e la sua dimostrazione sono dovuti a Sahni e Gonzalez (1976), e la NP-completezza del problema del ciclo hamiltoniano a Karp (1972).

TSP generale e TSP metrico

- ▶ Il TSP generale non è approssimabile: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia di prestazione costante.
- ▶ Il TSP *metrico*, il caso particolare con la disuguaglianza triangolare, è approssimabile, e il resto del capitolo è dedicato a esso.

Inapprossimabilità:

- ▶ Un algoritmo con una garanzia costante α deciderebbe il problema del ciclo hamiltoniano in tempo polinomiale
- ▶ Quindi per il TSP generale un tale algoritmo non esiste, a meno che $P = NP$

Che cosa serve alla dimostrazione:

- ▶ Distanze $\lceil \alpha n \rceil + 1$, che violano la disuguaglianza triangolare
- ▶ Sulle istanze metriche non dice nulla

Un caso particolare: il TSP metrico

Introduzione: Un caso particolare: il TSP metrico

- ▶ In questa sezione definiamo le istanze metriche del TSP: quelle con la disuguaglianza triangolare
- ▶ È la disuguaglianza triangolare a rendere approssimabile il TSP
- ▶ Richiamiamo anche l'istanza di riferimento, su cui eseguiamo gli algoritmi del capitolo

Definizione 1: TSP metrico

*Un'istanza del TSP, con città $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ e distanze simmetriche $d_{ij} = d_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, è **metrica** se le distanze soddisfano la disuguaglianza triangolare*

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj} \quad \text{per ogni terna di città distinte } i, j, k \in \mathcal{V}.$$

La disuguaglianza triangolare

- ▶ Il **TSP metrico** è il TSP ristretto alle istanze metriche.
- ▶ Le istanze I_G della dimostrazione di inapprossimabilità non sono metriche.
- ▶ È proprio la disuguaglianza triangolare a rendere approssimabile il TSP, e ogni garanzia delle prossime sezioni la usa.

L'istanza di riferimento

L'istanza di riferimento ha 5 città, è metrica, e il suo unico giro ottimo è $(1, 3, 5, 2, 4)$, con $z(I) = 18$. Le sue distanze sono:

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	—	5	2	2	9
2	5	—	4	3	4
3	2	4	—	4	7
4	2	3	4	—	7
5	9	4	7	7	—

Istanze metriche:

- ▶ Le distanze soddisfano $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$ per ogni terna di città distinte i, j, k
- ▶ Le istanze I_G della dimostrazione di inapprossimabilità non sono metriche

Istanza di riferimento:

- ▶ 5 città, metrica, unico giro ottimo $(1, 3, 5, 2, 4)$ con $z(I) = 18$

L'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides

Introduzione: L'algoritmo del doppio albero e l'algoritmo di Christofides

- ▶ In questa sezione descriviamo due euristiche costruttive per il TSP metrico
- ▶ Entrambe partono da un albero ricoprente di costo minimo, costruiscono un cammino chiuso che passa per tutte le città e lo trasformano in un giro
- ▶ Le eseguiamo entrambe a mano sull'istanza di riferimento

Albero ricoprente di costo minimo

- ▶ I due algoritmi di questa sezione costruiscono un giro a partire da un **albero ricoprente di costo minimo** (MST) del grafo completo su $\mathcal{V}$, con pesi degli spigoli d_{ij} .
- ▶ Lo calcoliamo con l'algoritmo di Kruskal: gli spigoli si esaminano per distanza non decrescente (pareggi per coppia di indici) e uno spigolo si prende se non chiude un ciclo con gli spigoli già presi.
- ▶ Il peso di un albero T è

$$d(T) = \sum_{\{i,j\} \in T} d_{ij}$$

Le scorciatoie

- ▶ Entrambi gli algoritmi costruiscono prima un cammino chiuso che passa per ogni città, eventualmente più di una volta.
- ▶ Poi lo trasformano in un giro con le **scorciatoie** (shortcutting): si segue il cammino e si salta ogni città già visitata.
- ▶ In altre parole, una città si mantiene solo alla sua prima occorrenza.

Circuiti euleriani e regola di Fleury

- ▶ Un cammino chiuso che usa ogni spigolo di un (multi)grafo esattamente una volta è un **circuito euleriano**.
- ▶ Negli esempi lo costruiamo con la **regola di Fleury**:
 - ▶ si parte dalla città 1;
 - ▶ a ogni passo, si lascia la città corrente lungo uno spigolo non usato verso il vicino di indice minimo,
 - ▶ a meno che quello spigolo sia un *ponte* degli spigoli non usati (la sua rimozione li sconnette) e sia disponibile un altro spigolo.

L'algoritmo del doppio albero

- ▶ Il *Double Tree Algorithm* (algoritmo del doppio albero, indicato con *DT*) è un'euristica costruttiva per il TSP metrico.
- ▶ Calcola un albero ricoprente di costo minimo T , raddoppia ciascuno dei suoi spigoli, segue un circuito euleriano dell'albero raddoppiato, e lo trasforma in un giro con le scorciatoie.

Algorithm: Double Tree

Input : istanza del TSP metrico con n città e distanze
 $d[1..n][1..n]$

Output: un giro σ e la sua lunghezza $L(\sigma)$

```
1 function DoubleTree( $n, d$ )
2    $T :=$  un albero ricoprente di costo minimo del grafo
   completo (Kruskal)
3    $D :=$  il multigrafo con due copie di ogni spigolo di  $T$ 
4    $W :=$  un circuito euleriano di  $D$  dalla città 1 (Fleury)
5    $\sigma :=$  le città di  $W$  in ordine di prima occorrenza
   // scorciatoie
6   return  $\sigma, L(\sigma)$ 
7 end
```

Come funziona l'algoritmo del doppio albero

- ▶ Nell'albero raddoppiato, la regola di Fleury non torna mai al padre finché resta da visitare un figlio, perché l'ultima copia dello spigolo verso il padre è un ponte.
- ▶ Il circuito euleriano è quindi una visita in profondità di T dalla città 1, con i figli in ordine crescente.
- ▶ Il giro σ è l'ordine in cui la visita incontra le città per la prima volta (il *preordine*).
- ▶ Con l'algoritmo di Kruskal e una visita in profondità, DT richiede tempo $O(n^2 \log n)$.

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (1/4)

L'algoritmo di Kruskal esamina:

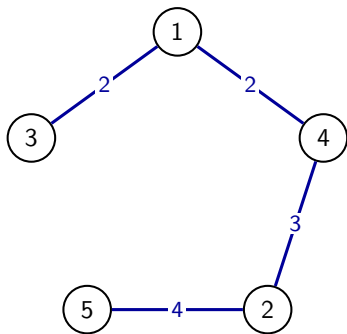
- ▶ $\{1, 3\}$ (2, preso)
- ▶ $\{1, 4\}$ (2, preso)
- ▶ $\{2, 4\}$ (3, preso)
- ▶ $\{2, 3\}$ (4, chiude il ciclo 2, 3, 1, 4: scartato)
- ▶ $\{2, 5\}$ (4, preso)

L'albero è

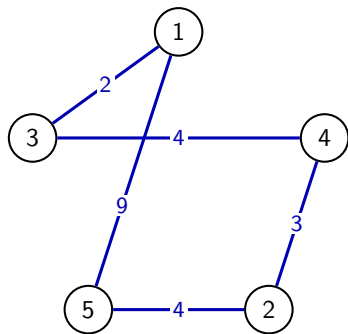
$$T = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\}, \quad d(T) = 2 + 2 + 3 + 4 = 11,$$

ed è l'unico MST dell'istanza.

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (2/4)



MST T , $d(T) = 11$



giro di DT , $L(\sigma) = 22$

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (3/4)

- Il circuito euleriano dell'albero raddoppiato dalla città 1 è

$$W = (1, 3, 1, 4, 2, 5, 2, 4, 1),$$

di lunghezza

$$2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 22 = 2 d(T)$$

- Mantenendo ogni città alla sua prima occorrenza otteniamo

$$\sigma = (1, 3, 4, 2, 5),$$

di lunghezza

$$L(\sigma) = d_{13} + d_{34} + d_{42} + d_{25} + d_{51} = 2 + 4 + 3 + 4 + 9 = 22$$

Esempio: DT sull'istanza di riferimento (4/4)

- ▶ Le scorciatoie sostituiscono
 - ▶ $3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ ($2 + 2$) con $3 \rightarrow 4$ (4),
 - ▶ $5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ($4 + 3 + 2$) con $5 \rightarrow 1$ (9).
- ▶ Su questa istanza entrambe le disuguaglianze triangolari usate valgono all'uguaglianza, e le scorciatoie non fanno risparmiare nulla.
- ▶ Quindi

$$DT(I) = 22 \quad \text{e} \quad \frac{DT(I)}{z(I)} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$$

L'algoritmo di Christofides

- ▶ Il *Christofides Algorithm* (algoritmo di Christofides, indicato con *CH*) è un'euristica costruttiva per il TSP metrico.
- ▶ Calcola un albero ricoprente di costo minimo T e, invece di raddoppiarlo, aggiunge a T un abbinamento perfetto di peso minimo M sulle città di grado dispari in T .
- ▶ Poi segue un circuito euleriano di $T \cup M$ e lo trasforma in un giro con le scorciatoie.

Algorithm: Christofides

Input : istanza del TSP metrico con n città e distanze
 $d[1..n][1..n]$

Output : un giro σ e la sua lunghezza $L(\sigma)$

```
1 function Christofides( $n, d$ )
2    $T :=$  un albero ricoprente di costo minimo del grafo
   completo (Kruskal)
3    $O := \{v \in \mathcal{V} : v \text{ ha grado dispari in } T\}$  //  $|O|$  è pari
4    $M :=$  un abbinamento perfetto di peso minimo delle città
   in  $O$ 
5    $D := T \cup M$  // multigrafo, tutti i gradi pari
6    $W :=$  un circuito euleriano di  $D$  dalla città 1 (Fleury)
7    $\sigma :=$  le città di  $W$  in ordine di prima occorrenza
   // scorciatoie
8   return  $\sigma, L(\sigma)$ 
9 end
```

Perché l'algoritmo è ben definito

- ▶ **Perché $|O|$ è pari.** I gradi di un grafo sommano al doppio del numero di spigoli, un numero pari, quindi il numero di vertici di grado dispari è pari, e un abbinamento perfetto di O esiste (il grafo è completo).
- ▶ **Perché $T \cup M$ ha gradi pari.** Ogni città di O riceve da M esattamente uno spigolo in più, e le altre città nessuno. Se uno spigolo appartiene sia a T sia a M , D ne contiene due copie.

Calcolare l'abbinamento

- ▶ Un abbinamento perfetto di peso minimo si può calcolare in tempo polinomiale, $O(n^3)$, con l'algoritmo blossom di Edmonds.
- ▶ Negli esempi e negli esercizi $|O| \leq 4$ e gli abbinamenti si enumerano ($|O| = 4$ dà 3 abbinamenti perfetti).

Esempio: CH sull'istanza di riferimento (1/3)

- ▶ L'MST è quello dell'esempio di DT , con gradi

$$\deg(1) = 2, \quad \deg(2) = 2, \quad \deg(3) = 1,$$

$$\deg(4) = 2, \quad \deg(5) = 1$$

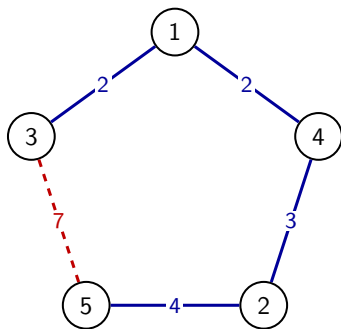
- ▶ Quindi

$$O = \{3, 5\},$$

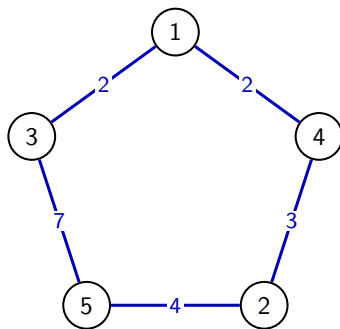
e l'unico abbinamento perfetto è

$$M = \{\{3, 5\}\}, \quad d(M) = 7$$

Esempio: CH sull'istanza di riferimento (2/3)



T (continuo) e M (tratteggiato)



giro di CH , $L(\sigma) = 18$

Esempio: CH sull'istanza di riferimento (3/3)

- ▶ $T \cup M$ è un ciclo che passa per tutte le città.
- ▶ La regola di Fleury dalla città 1 (vicini 3 e 4) va in 3 e dà

$$W = (1, 3, 5, 2, 4, 1), \quad d(T) + d(M) = 11 + 7 = 18,$$

in cui nessuna città si ripete: non serve alcuna scorciatoia e

$$\sigma = (1, 3, 5, 2, 4), \quad CH(I) = 18 = z(I)$$

- ▶ Sull'istanza di riferimento CH trova il giro ottimo, mentre DT lo supera di 4 unità.

Riepilogo

Passi comuni:

- ▶ Un albero ricoprente di costo minimo T (Kruskal), un circuito euleriano (Fleury), le scorciatoie

Doppio albero DT :

- ▶ Raddoppia gli spigoli di T ; sull'istanza di riferimento $DT(I) = 22$

Christofides CH :

- ▶ Aggiunge un abbinamento perfetto minimo M delle città di grado dispari; sull'istanza di riferimento $CH(I) = 18 = z(I)$

Proprietà strutturali

Introduzione: Proprietà strutturali

- ▶ Le garanzie della prossima sezione confrontano la lunghezza di un giro euristico con un lower bound su $z(I)$.
- ▶ Servono tre proprietà:
 - ▶ le scorciatoie non aumentano la lunghezza;
 - ▶ un MST è più corto di ogni giro;
 - ▶ lo stesso vale per (il doppio di) un abbinamento perfetto minimo di un insieme pari di città.

Le scorciatoie non aumentano la lunghezza

Osservazione 1

In un'istanza del TSP metrico, sia W un cammino chiuso che visita ogni città almeno una volta, e sia σ il giro ottenuto da W con le scorciatoie. Allora $L(\sigma) \leq$ lunghezza di W .

Dimostrazione

- ▶ Ogni spigolo $\{\sigma_k, \sigma_{k+1}\}$ del giro (e lo spigolo di chiusura $\{\sigma_n, \sigma_1\}$) sostituisce un tratto $\sigma_k = u_0, u_1, \dots, u_q = \sigma_{k+1}$ di W le cui città interne vengono saltate.
- ▶ Applicando la disuguaglianza triangolare $q - 1$ volte,

$$d_{u_0 u_q} \leq d_{u_0 u_1} + d_{u_1 u_q} \leq \dots \leq \sum_{p=0}^{q-1} d_{u_p u_{p+1}}$$

- ▶ I tratti sono parti disgiunte di W , quindi sommando su tutti gli spigoli di σ si ottiene

$$L(\sigma) \leq \text{lunghezza di } W$$



L'MST è un lower bound

Osservazione 2

Per ogni istanza del TSP (metrica o no) e ogni albero ricoprente di costo minimo T ,

$$d(T) \leq z(I).$$

Dimostrazione

- ▶ Togliendo uno spigolo qualsiasi da un giro ottimo resta un cammino che passa per tutte le città, che è un albero ricoprente.
- ▶ Il suo peso è $z(I)$ meno la distanza tolta, al più $z(I)$ poiché le distanze sono positive.
- ▶ L'MST non pesa più di alcun albero ricoprente.



L'abbinamento è al più metà dell'ottimo

Osservazione 3

In un'istanza del TSP metrico, sia $O \subseteq \mathcal{V}$ con $|O|$ pari e $|O| \geq 2$, e sia M un abbinamento perfetto di peso minimo di O . Allora

$$d(M) \leq \frac{z(I)}{2}.$$

Dimostrazione (1/2)

- Sia $\tilde{\sigma}$ un giro ottimo e applichiamo le scorciatoie restringendolo alle città di O : otteniamo un ciclo

$$o_1, o_2, \dots, o_{|O|}, o_1$$

sulle città di O che, per l'Osservazione 1, ha lunghezza al più $z(I)$.

- Poiché $|O|$ è pari, i suoi spigoli si dividono in due abbinamenti perfetti di O , prendendo alternativamente uno spigolo ciascuno:

$$M_1 = \{\{o_1, o_2\}, \{o_3, o_4\}, \dots\}$$

$$M_2 = \{\{o_2, o_3\}, \{o_4, o_5\}, \dots, \{o_{|O|}, o_1\}\}$$

Dimostrazione (2/2)

- Quindi

$$d(M_1) + d(M_2) \leq z(I),$$

e uno dei due pesa al più $\frac{z(I)}{2}$, quindi

$$d(M) \leq \min\{d(M_1), d(M_2)\} \leq \frac{z(I)}{2}$$

- Per $|O| = 2$ il ciclo è lo spigolo $\{o_1, o_2\}$ percorso due volte e $M_1 = M_2$.



Circuiti euleriani

- ▶ L'ultima proprietà che serve è classica: un multigrafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari ha un circuito euleriano (un risultato classico di Eulero), e la regola di Fleury ne trova uno.
- ▶ L'albero raddoppiato di DT e il multigrafo $T \cup M$ di CH sono connessi (contengono T) e hanno gradi pari.

Le proprietà sull'istanza di riferimento

- L'albero ricoprente di costo minimo:

$$d(T) = 11 \leq 18$$

- Con $O = \{3, 5\}$ il giro ottimo ristretto a O è 3, 5, 3, di lunghezza $14 \leq 18$, quindi

$$d(M) = 7 \leq 9$$

Scorciatoie:

- ▶ In un'istanza metrica non aumentano la lunghezza di un cammino chiuso

Lower bound su $z(I)$:

- ▶ $d(T) \leq z(I)$ per ogni albero ricoprente di costo minimo T
- ▶ $d(M) \leq \frac{z(I)}{2}$ per un abbinamento perfetto minimo M di un insieme pari di città

Circuiti euleriani:

- ▶ Esistono nei multigrafi connessi con gradi pari

Garanzie di prestazione



Introduzione: Garanzie di prestazione

- ▶ In questa sezione dimostriamo le garanzie 2 di DT e $\frac{3}{2}$ di CH , con le proprietà strutturali
- ▶ Poi costruiamo famiglie di istanze su cui i rapporti si avvicinano quanto vogliamo a 2 e a $\frac{3}{2}$
- ▶ Quindi entrambe le garanzie sono tight

Proposizione 2

Per ogni istanza I del TSP metrico,

$$\frac{DT(I)}{z(I)} \leq 2.$$

Dimostrazione

- ▶ Il circuito euleriano W dell'albero raddoppiato usa ogni spigolo di T due volte, quindi la sua lunghezza è $2 d(T)$.
- ▶ Visita ogni città perché T è ricoprente.
- ▶ Per l'Osservazione 1 e l'Osservazione 2,

$$DT(I) = L(\sigma) \leq 2 d(T) \leq 2 z(I).$$



La garanzia 2 è tight?

Il bound 2 vale su ogni istanza metrica.

Costruiamo ora una famiglia di istanze metriche su cui il rapporto di DT tende a 2.

La garanzia di DT è tight

Proposizione 3

Esistono istanze I_n del TSP metrico, con $n \geq 5$ dispari, tali che

$$\frac{DT(I_n)}{z(I_n)} = \frac{2n}{n+2} \rightarrow 2 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Dimostrazione (1/4)

- ▶ Siano $n = 2k + 1$ con $k \geq 2$, $a := n$ e $b := n + 1$.
- ▶ La città 1 è un centro e le città $2, \dots, n$ sono foglie; le foglie sono unite dal cammino

$$P = (3, 5, \dots, 2k + 1, 2, 4, \dots, 2k),$$

in cui città consecutive non hanno mai indici consecutivi (le differenze valgono 2, e $2k - 1 \geq 3$ per lo spigolo $\{2k + 1, 2\}$).

Dimostrazione (2/4)

- Le distanze sono

$$d_{ij} = \begin{cases} a & \text{se } i = 1 \text{ o } j = 1, \\ b & \text{se } \{i, j\} \text{ è uno spigolo di } P, \\ 2a & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Tutte le distanze sono comprese fra a e $2a$, quindi

$$d_{ij} \leq 2a \leq d_{ik} + d_{kj} :$$

l'istanza è metrica.

Dimostrazione (3/4)

DT.

- ▶ Le sole distanze pari ad a sono quelle dal centro, e un albero ricoprente ha $n - 1$ spigoli, ciascuno di peso almeno a : la stella di centro 1 è l'unico MST, con $d(T) = (n - 1)a$.
- ▶ La visita in profondità dalla città 1 incontra le foglie in ordine crescente, $\sigma = (1, 2, 3, \dots, n)$, e nessuna coppia di foglie consecutive è uno spigolo di P :

$$DT(I_n) = a + (n - 2)2a + a = 2(n - 1)a = 2n(n - 1)$$

Dimostrazione (4/4)

Ottimo.

- ▶ Un giro ha esattamente due spigoli nella città 1 (di lunghezza a ciascuno) e $n - 2$ spigoli fra foglie (di lunghezza almeno b ciascuno), quindi $z(I_n) \geq 2a + (n - 2)b$.
- ▶ Il giro $(1, 3, 5, \dots, 2k + 1, 2, 4, \dots, 2k)$ segue P e raggiunge questo valore, quindi

$$z(I_n) = 2a + (n - 2)b = 2n + (n - 2)(n + 1) = (n + 2)(n - 1)$$

- ▶ Pertanto

$$\frac{DT(I_n)}{z(I_n)} = \frac{2n(n - 1)}{(n + 2)(n - 1)} = \frac{2n}{n + 2} = \frac{2}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 2$$



Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di DT

Dalla Proposizione 2 e dalla Proposizione 3 segue che DT è un algoritmo di 2-approssimazione per il TSP metrico, e che il suo rapporto di prestazione nel caso peggiore è

$$r(DT) = 2$$

Osservazioni su DT

- ▶ Per $n = 5$: $a = 5$, $b = 6$, $P = (3, 5, 2, 4)$, $DT(I_5) = 40$, $z(I_5) = 28$ e il rapporto è $\frac{10}{7}$.
- ▶ Per $n = 7$ e $n = 9$ i rapporti sono $\frac{14}{9}$ e $\frac{18}{11}$.
- ▶ Sull'istanza di riferimento $DT(I) = 22 = 2 d(T)$: l'upper bound della dimostrazione è raggiunto, ma $z(I) = 18 > d(T) = 11$, e il rapporto è solo $\frac{11}{9}$.
- ▶ L'analisi di DT è dovuta a Rosenkrantz, Stearns e Lewis (1977).

Proposizione 4

Per ogni istanza I del TSP metrico,

$$\frac{CH(I)}{z(I)} \leq \frac{3}{2}.$$

Dimostrazione

- ▶ Il circuito euleriano W di $T \cup M$ usa ogni spigolo una volta, quindi la sua lunghezza è $d(T) + d(M)$, e visita ogni città.
- ▶ Usiamo l'Osservazione 1, l'Osservazione 2 e l'Osservazione 3, con l'insieme O delle città di grado dispari ($|O| \geq 2$ perché un albero con almeno due vertici ha almeno due foglie):

$$CH(I) = L(\sigma) \leq d(T) + d(M) \leq z(I) + \frac{z(I)}{2} = \frac{3}{2} z(I).$$



La garanzia di CH è tight

Proposizione 5

Esistono istanze I_n del TSP metrico, con $n \geq 5$ dispari, tali che

$$\frac{CH(I_n)}{z(I_n)} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Dimostrazione (1/4)

- ▶ Siano $n \geq 5$ dispari, $a := n$ e $b := n + 1$, così che $a < b < 2a$.
- ▶ Consideriamo il grafo H sulle città $1, \dots, n$ con gli spigoli $\{i, i + 1\}$ di lunghezza a e $\{i, i + 2\}$ di lunghezza b (una striscia di triangoli).
- ▶ Sia d_{ij} la lunghezza di un cammino minimo da i a j in H ; le distanze di cammino minimo soddisfano sempre la disuguaglianza triangolare.

Dimostrazione (2/4)

- ▶ Un cammino da i a $j > i$ avanza di 1 (costo a) o di 2 (costo b) a ogni spigolo.
- ▶ Poiché $b < 2a$ conviene avanzare di 2 il più possibile:

$$d_{ij} = \left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor b + (|i-j| \bmod 2) a$$

Dimostrazione (3/4)

CH.

- ▶ Le distanze pari ad a sono esattamente quelle fra città consecutive, quindi, come nella dimostrazione precedente, il cammino $T = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ è l'unico MST, con $d(T) = (n-1)a$.
- ▶ Le sue città di grado dispari sono $O = \{1, n\}$, quindi $M = \{\{1, n\}\}$, con $d(M) = \frac{n-1}{2}b$.
- ▶ $T \cup M$ è il ciclo $1, 2, \dots, n, 1$, la regola di Fleury lo segue dalla città 1 verso la città 2, e non serve alcuna scorciatoia:

$$CH(I_n) = (n-1)a + \frac{n-1}{2}b = (n-1)\frac{3n+1}{2}$$

Dimostrazione (4/4)

Un upper bound sull'ottimo.

- ▶ Il giro $(1, 3, 5, \dots, n, n-1, n-3, \dots, 2)$ usa $n-2$ spigoli di lunghezza b e i due spigoli $\{n, n-1\}$ e $\{2, 1\}$ di lunghezza a , quindi

$$z(I_n) \leq (n-2)b + 2a = (n-2)(n+1) + 2n = (n+2)(n-1)$$

- ▶ Insieme alla Proposizione 4,

$$\frac{3}{2} \geq \frac{CH(I_n)}{z(I_n)} \geq \frac{(n-1)(3n+1)}{2(n+2)(n-1)} = \frac{3n+1}{2n+4} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n}} \rightarrow \frac{3}{2}$$



Il rapporto di prestazione nel caso peggiore di CH

Dalla Proposizione 4 e dalla Proposizione 5 segue che CH è un algoritmo di $\frac{3}{2}$ -approssimazione per il TSP metrico, e che il suo rapporto di prestazione nel caso peggiore è

$$r(CH) = \frac{3}{2}$$

Osservazioni su CH

- ▶ Per $n = 5, 7, 9$ l'enumerazione di tutti i giri mostra che l'upper bound su $z(I_n)$ è l'ottimo (28, 54, 88), e i rapporti sono

$$\frac{32}{28} = \frac{8}{7}, \quad \frac{66}{54} = \frac{11}{9}, \quad \frac{112}{88} = \frac{14}{11}$$

- ▶ L'algoritmo è stato trovato indipendentemente da Christofides (1976) e da Serdyukov (1978).
- ▶ Per più di quarant'anni non si è conosciuto per il TSP metrico alcun algoritmo polinomiale con una costante migliore; il primo miglioramento, di una costante piccolissima, è un algoritmo randomizzato di Karlin, Klein e Oveis Gharan (2021).

Doppio albero:

- ▶ $DT(I) \leq 2 d(T) \leq 2 z(I)$, e le istanze a stella danno rapporti $\frac{2n}{n+2} \rightarrow 2$: $r(DT) = 2$

Christofides:

- ▶ $CH(I) \leq d(T) + d(M) \leq \frac{3}{2} z(I)$, e la striscia di triangoli dà rapporti $\frac{3n+1}{2n+4} \rightarrow \frac{3}{2}$: $r(CH) = \frac{3}{2}$

Fonti

Introduzione: Fonti

- ▶ I risultati di questo capitolo vengono da cinque articoli e rapporti di ricerca
- ▶ Sono i luoghi dove leggere le analisi originali di *DT*, di *CH* e del TSP generale

Fonti (1/2)

- ▶ D.J. Rosenkrantz, R.E. Stearns, P.M. Lewis II, An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem, *SIAM Journal on Computing* 6(3):563–581, 1977.
- ▶ N. Christofides, Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem, Report 388, Carnegie-Mellon University, 1976.
- ▶ A.I. Serdyukov, On some extremal walks in graphs, *Upravlyaemye Sistemy* 17:76–79, 1978.

- ▶ S. Sahni, T. Gonzalez, P-complete approximation problems, *Journal of the ACM* 23(3):555–565, 1976.
- ▶ R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, 85–103, 1972.

Riepilogo: Fonti

- ▶ Rosenkrantz, Stearns e Lewis (1977): l'analisi di DT
- ▶ Christofides (1976) e Serdyukov (1978): l'algoritmo CH
- ▶ Sahni e Gonzalez (1976): il TSP generale non è approssimabile
- ▶ Karp (1972): la NP-completezza del problema del ciclo hamiltoniano

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Tre errori che capitano spesso quando si applicano gli algoritmi di questo capitolo
- ▶ Riguardano la disuguaglianza triangolare, il passo delle scorciatoie e l'abbinamento di CH
- ▶ Controllarli è un modo rapido per non perdere punti

Osservazione 4: errori tipici

- ▶ **Applicare DT o CH a un'istanza non metrica.** Le garanzie 2 e $\frac{3}{2}$ usano la disuguaglianza triangolare, nel passo delle scorciatoie; senza di essa non esiste alcuna garanzia costante.
- ▶ **Saltare una città visitata per la prima volta.** Seguendo il circuito euleriano, una città si salta solo se è già stata visitata; la prima occorrenza si mantiene.
- ▶ **Abbinare le città sbagliate in CH.** L'abbinamento perfetto si calcola sulle città di grado dispari nell'albero ricoprente, il cui numero è pari, e ha peso minimo.

Riepilogo: Errori tipici

- ▶ Le garanzie valgono solo sulle istanze metriche
- ▶ Le scorciatoie saltano solo le città già visitate
- ▶ L'abbinamento di CH è un abbinamento perfetto minimo delle città di grado dispari

Riepilogo (1/3)

- ▶ Il TSP generale non è approssimabile: un algoritmo con una garanzia costante deciderebbe il problema del ciclo hamiltoniano in tempo polinomiale.
- ▶ Il TSP metrico è il caso particolare approssimabile. Le garanzie di DT e CH si dimostrano con lower bound su $z(I)$: l'albero ricoprente di costo minimo e metà dell'abbinamento perfetto minimo; le scorciatoie, che usano la disuguaglianza triangolare, trasformano il circuito euleriano in un giro non più lungo.
- ▶ Entrambi i rapporti sono tight, con famiglie di istanze costruite in questo capitolo.

Riepilogo (2/3)

problema	algoritmo	rapporto nel caso peggiore
TSP generale	qualsiasi polinomiale	nessuna costante, a meno che $P = NP$
TSP metrico	DT	2 (tight)
TSP metrico	CH	$\frac{3}{2}$ (tight)

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento. I bound su $z(I)$ trovati finora:

Istanza	Lower bound	Valori euristici	Valore ottimo
TSP metrico, 5 città	11, albero ricoprente di costo minimo	<i>DT</i> 22, <i>CH</i> 18	18