

Formulazioni dei problemi di scheduling



Indice

Panoramica della famiglia

Un modello PLI per il problema di scheduling su macchine parallele identiche

Un primo rilassamento lineare

Un secondo rilassamento lineare

Alcune proprietà teoriche importanti

Considerazioni aggiuntive

Errori tipici

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere il modello PLI di $P||C_{\max}$ e spiegare come la variabile di makespan è collegata ai carichi delle macchine;
- ▶ scrivere i rilassamenti lineari e i loro duali, e dimostrare che il loro valore ottimo è $\sum_j t_j/m$;
- ▶ dimostrare che il bound LP vale almeno $1/m$ del valore ottimo, e che il fattore è tight;
- ▶ usare le disuguaglianze valide e i vincoli di rottura delle simmetrie del modello.

Prerequisiti

- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare*, il capitolo «[Teoria della dualità](#)»: il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «[Programmazione lineare intera](#)» e «[Bound primali e duali](#)»: problemi ILP, rilassamenti lineari e bound.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di scheduling](#)»: il problema, la sua ipotesi, il makespan e la sua istanza di riferimento.

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ In questa sezione descriviamo che cosa hanno in comune i modelli PLI dei problemi di scheduling su macchine parallele
- ▶ Due tipi di variabili: l'assegnamento dei lavori alle macchine e il makespan
- ▶ Questa struttura è la chiave per leggere il modello del capitolo, i suoi rilassamenti e i suoi miglioramenti

Variabili di assegnamento e variabile di makespan

- ▶ I modelli PLI dei problemi di scheduling su macchine parallele usano l'insieme $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, m\}$ delle macchine e una **variabile di assegnamento** binaria x_{jh} per ogni lavoro $j \in \mathcal{J}$ e ogni macchina $h \in \mathcal{H}$.
- ▶ Una variabile continua $C_{\max}$ rappresenta il makespan: un vincolo per ogni macchina impone che $C_{\max}$ sia almeno pari al carico della macchina.
- ▶ La funzione obiettivo minimizza $C_{\max}$, quindi all'ottimo è uguale al carico massimo.

Modelli di assegnamento

I modelli di scheduling sono modelli di assegnamento dei lavori alle macchine, come i modelli di packing assegnano gli oggetti ai contenitori;

l'obiettivo min-max è linearizzato con la variabile di makespan $C_{\max}$.

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive.

Problema	Modello	Variabili	Sezione
$P \parallel C_{\max}$	$ILP_{P \parallel C_{\max}}$	x_{jh} binarie e $C_{\max}$ continua	la successiva

Le variabili:

- ▶ Una variabile binaria di assegnamento x_{jh} per ogni lavoro j e ogni macchina h
- ▶ Una variabile continua $C_{\max}$, il makespan

I vincoli e l'obiettivo:

- ▶ Un vincolo per ogni macchina: $C_{\max}$ è almeno pari al suo carico
- ▶ Minimizzare $C_{\max}$ lo rende uguale al carico massimo:
l'obiettivo min-max è linearizzato

Un modello PLI per il problema di scheduling su macchine parallele identiche

Introduzione: Un modello PLI per $P||C_{\max}$

- ▶ Il problema di questa sezione è lo scheduling su macchine parallele identiche ($P||C_{\max}$), definito nel capitolo «[Problemi di scheduling](#)»
- ▶ Scriviamo il suo modello PLI, con le variabili di assegnamento e la variabile di makespan
- ▶ Spieghiamo come la variabile di makespan è collegata ai carichi delle macchine
- ▶ Infine, scriviamo e risolviamo il modello sull'istanza del capitolo

I dati e le variabili

- Date m macchine identiche e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n lavori, con tempi di processamento t_j , indichiamo con $\mathcal{H} = \{1, 2, \dots, m\}$ l'insieme delle macchine.

Introduciamo le seguenti nm **variabili binarie**:

$$x_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } j \text{ è assegnato} \\ & \text{alla macchina } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H},$$

e una **variabile continua non negativa**:

$$C_{\max} = \text{makespan della schedula.}$$

Il modello $ILP_{P\parallel C_{\max}}$

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di scheduling su macchine parallele identiche ($P\parallel C_{\max}$) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & C_{\max} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, & \forall j \in \mathcal{J}, \\ & - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, & \forall h \in \mathcal{H}, \\ & x_{jh} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \\ & C_{\max} \geq 0. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello $ILP_{P\parallel C_{\max}}$.

Descrizione del modello

- ▶ La funzione obiettivo lineare $\min C_{\max}$ minimizza il makespan.
- ▶ I vincoli $\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1$ garantiscono che ogni lavoro sia assegnato a esattamente una macchina (n vincoli lineari).
- ▶ I vincoli $-\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0$ collegano le variabili di assegnamento con la variabile di makespan. In particolare, garantiscono che il makespan sia maggiore o uguale al carico di ogni macchina (m vincoli lineari).
- ▶ Infine, i vincoli $x_{jh} \in \{0, 1\}$ e $C_{\max} \geq 0$ definiscono le variabili del modello PLI.

Come fa la variabile di makespan
a diventare il carico massimo di una macchina?

Guardiamo il legame fra le variabili.

Il legame fra le variabili (1/2)

- Per ogni macchina h , il makespan e il suo carico devono soddisfare la relazione diretta

$$C_{\max} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh},$$

che è imposta dal vincolo di carico della macchina h .

- Poiché il vincolo vale per ogni macchina, esso impone

$$C_{\max} \geq \max_{h \in \mathcal{H}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} \right\}.$$

Il legame fra le variabili (2/2)

- ▶ In ogni soluzione ottima vale l'uguaglianza.
- ▶ Infatti, se $C_{\max}$ fosse maggiore del carico massimo, sostituendo $C_{\max}$ con il carico massimo tutti i vincoli di carico resterebbero soddisfatti e il valore obiettivo diminuirebbe di una quantità positiva, il che contraddice l'ottimalità.
- ▶ Quando a una macchina non è assegnato alcun lavoro, il suo carico è zero.

Esempio: il modello $\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}}$ (1/3)

- Consideriamo $m = 3$ macchine ($\mathcal{H} = \{1, 2, 3\}$) e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 7\}$ di 7 lavori ($n = 7$), con i seguenti tempi di processamento:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
t_j	5	5	4	4	3	3	3

- È l'istanza di riferimento del capitolo «[Problemi di scheduling](#)»; la chiamiamo l'istanza del capitolo.
- La slide seguente scrive il modello $\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}}$ per questa istanza.

Esempio: il modello $ILP_{P||C_{\max}}$ (2/3)

Il modello $ILP_{P||C_{\max}}$ per questa istanza è:

$$\begin{array}{ll} \min & C_{\max} \\ \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\ & x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1 \\ & x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1 \\ & -5x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 4x_{41} - 3x_{51} - 3x_{61} - 3x_{71} + C_{\max} \geq 0 \\ & -5x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 4x_{42} - 3x_{52} - 3x_{62} - 3x_{72} + C_{\max} \geq 0 \\ & -5x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 4x_{43} - 3x_{53} - 3x_{63} - 3x_{73} + C_{\max} \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} \in \{0, 1\} \\ & C_{\max} \geq 0 \end{array}$$

Esempio: il modello $ILP_{P\|C_{\max}}$ (3/3)

Una soluzione ottima $(\tilde{x}, \tilde{C}_{\max})(ILP_{P\|C_{\max}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{53} = \tilde{x}_{63} = \tilde{x}_{73} = 1,$$

$$\text{tutte le altre } \tilde{x}_{jh} = 0, \quad \tilde{C}_{\max} = 9$$

- ▶ Assegna i lavori $\{1, 3\}$ alla macchina 1, $\{2, 4\}$ alla macchina 2 e $\{5, 6, 7\}$ alla macchina 3, con carichi 9, 9 e 9.
- ▶ Il valore ottimo $z(ILP_{P\|C_{\max}})$ è 9, poiché raggiunge il lower bound

$$\max \left\{ \max_{j \in \mathcal{J}} t_j, \left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m} \right\rceil \right\} = \max\{5, \lceil 27/3 \rceil\} = 9.$$

Riepilogo

Il modello $ILP_{P||C_{\max}}$:

- ▶ nm variabili binarie di assegnamento x_{jh} e una variabile continua di makespan $C_{\max}$
- ▶ n vincoli di assegnamento: ogni lavoro su esattamente una macchina
- ▶ m vincoli di carico: $C_{\max}$ è almeno pari al carico di ogni macchina

Il legame fra le variabili:

- ▶ All'ottimo, $C_{\max}$ è uguale al carico massimo

L'istanza del capitolo:

- ▶ Lavori $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$, carichi 9, 9, 9:
 $z(ILP_{P||C_{\max}}) = 9$

Un primo rilassamento lineare



Introduzione: Un primo rilassamento lineare

- ▶ In questa sezione rilassiamo i vincoli binari del modello $ILP_{P||C_{\max}}$ in vincoli di non negatività
- ▶ Stiamo minimizzando: il valore ottimo del rilassamento è un lower bound sul makespan ottimo
- ▶ Scriviamo il rilassamento e il suo duale, e risolviamo entrambi sull'istanza del capitolo
- ▶ Infine, dimostriamo che il valore ottimo del rilassamento è $\sum_j t_j / m$ per ogni istanza

Il modello LP-0 $_{P\|C_{\max}}$

Per ottenere un rilassamento lineare (LP) del modello ILP $_{P\|C_{\max}}$, rilassiamo i vincoli $x_{jh} \in \{0, 1\}$ in vincoli di non negatività. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & C_{\max} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, & \forall j \in \mathcal{J}, \\ & - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, & \forall h \in \mathcal{H}, \\ & x_{jh} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \\ & C_{\max} \geq 0. \end{aligned}$$

Questo modello LP si chiama modello LP-0 $_{P\|C_{\max}}$.

Esempio: il modello $LP-0_{P||C_{\max}}$ (1/2)

Il modello $LP-0_{P||C_{\max}}$ per l'istanza del capitolo è:

$$\begin{array}{ll}\min & C_{\max} \\ \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\ & x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1 \\ & x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1 \\ & -5x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 4x_{41} - 3x_{51} - 3x_{61} - 3x_{71} + C_{\max} \geq 0 \\ & -5x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 4x_{42} - 3x_{52} - 3x_{62} - 3x_{72} + C_{\max} \geq 0 \\ & -5x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 4x_{43} - 3x_{53} - 3x_{63} - 3x_{73} + C_{\max} \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} \geq 0 \\ & C_{\max} \geq 0\end{array}$$

Esempio: il modello $LP-0_{P\|C_{\max}}$ (2/2)

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{C}_{\max})(LP-0_{P\|C_{\max}})$ è:

$$\tilde{x}_{jh} = \frac{1}{3}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \tilde{C}_{\max} = 9$$

Il valore ottimo $z(LP-0_{P\|C_{\max}})$ è 9. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$9 \leq z(ILP_{P\|C_{\max}})$$

Le variabili duali

- ▶ Scriviamo ora il duale del modello $LP-0_{P\|C_{\max}}$.
- ▶ Usiamo una variabile duale **libera** μ_j per ogni vincolo $\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1$, cioè per ogni lavoro $j \in \mathcal{J}$.
- ▶ Usiamo una variabile duale **non negativa** π_h per ogni vincolo $-\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0$, cioè per ogni macchina $h \in \mathcal{H}$.

Il modello $D(\text{LP-0}_{P\|C_{\max}})$

Usando una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo di assegnamento e una variabile duale non negativa π_h per ogni vincolo di carico, il modello duale del modello $\text{LP-0}_{P\|C_{\max}}$ è:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j$$

$$\text{soggetto a } \mu_j - t_j \pi_h \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H},$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \pi_h \leq 1,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\pi_h \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Questo modello LP si chiama modello $D(\text{LP-0}_{P\|C_{\max}})$.

Esempio: il modello $D(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}})$ (1/3)

Il modello duale $D(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}})$ per l'istanza del capitolo è:

$$\begin{array}{llll} \max & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 & & \\ \text{soggetto a} & \mu_1 - 5\pi_1 & \leq & 0 \\ & \mu_1 - 5\pi_2 & \leq & 0 \\ & \mu_1 - 5\pi_3 & \leq & 0 \\ & \mu_2 - 5\pi_1 & \leq & 0 \\ & \mu_2 - 5\pi_2 & \leq & 0 \\ & \mu_2 - 5\pi_3 & \leq & 0 \\ & \mu_3 - 4\pi_1 & \leq & 0 \\ & \mu_3 - 4\pi_2 & \leq & 0 \\ & \mu_3 - 4\pi_3 & \leq & 0 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}})$ (2/3)

$$\mu_4 - 4 \pi_1 \leq 0$$

$$\mu_4 - 4 \pi_2 \leq 0$$

$$\mu_4 - 4 \pi_3 \leq 0$$

$$\mu_5 - 3 \pi_1 \leq 0$$

$$\mu_5 - 3 \pi_2 \leq 0$$

$$\mu_5 - 3 \pi_3 \leq 0$$

$$\mu_6 - 3 \pi_1 \leq 0$$

$$\mu_6 - 3 \pi_2 \leq 0$$

$$\mu_6 - 3 \pi_3 \leq 0$$

$$\mu_7 - 3 \pi_1 \leq 0$$

$$\mu_7 - 3 \pi_2 \leq 0$$

$$\mu_7 - 3 \pi_3 \leq 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \leq 1$$

Esempio: il modello $D(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}})$ (3/3)

I domini delle variabili sono:

$$\begin{array}{rcl} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7 & \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} & 0 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi})(D(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}}))$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = \tilde{\mu}_7 = 1,$$

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}$$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}}))$ è 9.

Sull'istanza del capitolo,
il modello $LP-0_{P\|C_{\max}}$ e il suo duale
hanno lo stesso valore ottimo $9 = 27/3$.

La proposizione seguente mostra che il valore ottimo
del rilassamento è $\sum_j t_j/m$ per ogni istanza.

Proposizione 1: Valore ottimo di $\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}}$

Per ogni istanza di $P\parallel C_{\max}$,

$$z(\text{LP-}0_{P\parallel C_{\max}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

- L'idea della dimostrazione: costruiamo una soluzione primale ammissibile e una soluzione duale ammissibile con lo stesso valore obiettivo.

Dimostrazione (1/2)

- Poniamo $x_{jh} = 1/m$ per ogni lavoro e ogni macchina, e poniamo

$$C_{\max} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

- Ogni vincolo $\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1$ è soddisfatto, e ogni macchina ha il carico indicato:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j \frac{1}{m} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m} = C_{\max}.$$

- Quindi questa è una soluzione primale ammissibile.

Dimostrazione (2/2)

- Nel duale, poniamo

$$\pi_h = \frac{1}{m} \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \mu_j = \frac{t_j}{m} \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

- I vincoli $\mu_j - t_j \pi_h \leq 0$ valgono all'uguaglianza, $\sum_h \pi_h = 1$, e il valore obiettivo duale è

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

- Per la dualità debole della PL, le due soluzioni sono ottime, e il valore ottimo è il valore comune delle funzioni obiettivo.



Riepilogo

Il rilassamento $LP-0_{P\|C_{\max}}$:

- ▶ I vincoli binari diventano $x_{jh} \geq 0$
- ▶ Sull'istanza del capitolo: $\tilde{x}_{jh} = 1/3$, $\tilde{C}_{\max} = 9$, quindi $9 \leq z(ILP_{P\|C_{\max}})$

Il duale $D(LP-0_{P\|C_{\max}})$:

- ▶ Una variabile libera μ_j per ogni lavoro, una variabile non negativa π_h per ogni macchina
- ▶ Sull'istanza del capitolo: valore ottimo 9

Il valore ottimo:

- ▶ $z(LP-0_{P\|C_{\max}}) = \sum_j t_j/m$, con la primale $x_{jh} = 1/m$ e la duale $\pi_h = 1/m$, $\mu_j = t_j/m$

Un secondo rilassamento lineare

Introduzione: Un secondo rilassamento lineare

- ▶ In questa sezione rilassiamo i vincoli binari nei bound $0 \leq x_{jh} \leq 1$
- ▶ Mostriamo che gli upper bound non cambiano il rilassamento, e scriviamo il suo duale
- ▶ Poi studiamo la qualità del bound LP: quanto può essere lontano dal valore ottimo, e un esempio di gap di integralità

Il modello $LP_{P||C_{\max}}$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello $ILP_{P||C_{\max}}$, rilassiamo i vincoli $x_{jh} \in \{0, 1\}$ nei bound $0 \leq x_{jh} \leq 1$. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & C_{\max} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1, & \forall j \in \mathcal{J}, \\ & - \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0, & \forall h \in \mathcal{H}, \\ & x_{jh} \leq 1, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \\ & x_{jh} \geq 0, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall h \in \mathcal{H}, \\ & C_{\max} \geq 0. \end{aligned}$$

Questo modello LP si chiama modello $LP_{P||C_{\max}}$.

Gli upper bound non cambiano il rilassamento

- ▶ I vincoli $x_{jh} \leq 1$ non cambiano il rilassamento: per i vincoli $\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1$ e $x_{jh} \geq 0$, ogni x_{jh} vale al più uno.
- ▶ Quindi

$$z(\text{LP}_{P \parallel C_{\max}}) = z(\text{LP-0}_{P \parallel C_{\max}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m}.$$

Esempio: il modello $LP_{P||C_{\max}}$ (1/2)

Il modello $LP_{P||C_{\max}}$ per l'istanza del capitolo è:

$$\begin{array}{ll} \min & C_{\max} \\ \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\ & x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1 \\ & x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1 \\ & -5x_{11} - 5x_{21} - 4x_{31} - 4x_{41} - 3x_{51} - 3x_{61} - 3x_{71} + C_{\max} \geq 0 \\ & -5x_{12} - 5x_{22} - 4x_{32} - 4x_{42} - 3x_{52} - 3x_{62} - 3x_{72} + C_{\max} \geq 0 \\ & -5x_{13} - 5x_{23} - 4x_{33} - 4x_{43} - 3x_{53} - 3x_{63} - 3x_{73} + C_{\max} \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} \leq 1 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{73} \geq 0 \\ & C_{\max} \geq 0 \end{array}$$

Esempio: il modello $LP_{P\|C_{\max}}$ (2/2)

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{C}_{\max})(LP_{P\|C_{\max}})$ è la soluzione dell'esempio del modello $LP-0_{P\|C_{\max}}$:

$$\tilde{x}_{jh} = \frac{1}{3}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \tilde{C}_{\max} = 9$$

Il valore ottimo $z(LP_{P\|C_{\max}})$ è 9. Di conseguenza, abbiamo lo stesso lower bound.

Le variabili duali

- ▶ Scriviamo ora il duale del modello $LP_{P||C_{\max}}$.
- ▶ Usiamo una variabile duale **libera** μ_j per ogni vincolo $\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{jh} = 1$.
- ▶ Usiamo una variabile duale **non negativa** π_h per ogni vincolo $-\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0$.
- ▶ Usiamo una variabile duale **non positiva** λ_{jh} per ogni vincolo $x_{jh} \leq 1$.

Il modello $D(\text{LP}_{P\|C_{\max}})$

Usando queste variabili duali, il modello duale del modello $\text{LP}_{P\|C_{\max}}$ è:

$$\max \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j + \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \lambda_{jh}$$

$$\text{soggetto a} \quad \mu_j - t_j \pi_h + \lambda_{jh} \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \pi_h \leq 1,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\pi_h \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

$$\lambda_{jh} \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Questo modello LP si chiama modello $D(\text{LP}_{P\|C_{\max}})$.

Esempio: il modello $D(LP_{P||C_{\max}})$ (1/3)

Il modello duale $D(LP_{P||C_{\max}})$ per l'istanza del capitolo è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \lambda_{11} \\ & + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{33} \\ & + \lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + \lambda_{51} + \lambda_{52} + \lambda_{53} + \lambda_{61} + \lambda_{62} \\ & + \lambda_{63} + \lambda_{71} + \lambda_{72} + \lambda_{73} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{soggetto a} & \mu_1 - 5\pi_1 + \lambda_{11} \leq 0 \\ & \mu_1 - 5\pi_2 + \lambda_{12} \leq 0 \\ & \mu_1 - 5\pi_3 + \lambda_{13} \leq 0 \\ & \mu_2 - 5\pi_1 + \lambda_{21} \leq 0 \\ & \mu_2 - 5\pi_2 + \lambda_{22} \leq 0 \\ & \mu_2 - 5\pi_3 + \lambda_{23} \leq 0 \\ & \mu_3 - 4\pi_1 + \lambda_{31} \leq 0 \\ & \mu_3 - 4\pi_2 + \lambda_{32} \leq 0 \\ & \mu_3 - 4\pi_3 + \lambda_{33} \leq 0 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(LP_{P\|C_{\max}})$ (2/3)

$$\mu_4 - 4\pi_1 + \lambda_{41} \leq 0$$

$$\mu_4 - 4\pi_2 + \lambda_{42} \leq 0$$

$$\mu_4 - 4\pi_3 + \lambda_{43} \leq 0$$

$$\mu_5 - 3\pi_1 + \lambda_{51} \leq 0$$

$$\mu_5 - 3\pi_2 + \lambda_{52} \leq 0$$

$$\mu_5 - 3\pi_3 + \lambda_{53} \leq 0$$

$$\mu_6 - 3\pi_1 + \lambda_{61} \leq 0$$

$$\mu_6 - 3\pi_2 + \lambda_{62} \leq 0$$

$$\mu_6 - 3\pi_3 + \lambda_{63} \leq 0$$

$$\mu_7 - 3\pi_1 + \lambda_{71} \leq 0$$

$$\mu_7 - 3\pi_2 + \lambda_{72} \leq 0$$

$$\mu_7 - 3\pi_3 + \lambda_{73} \leq 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \leq 1$$

Esempio: il modello $D(LP_{P\|C_{\max}})$ (3/3)

I domini delle variabili sono:

$$\begin{array}{ll} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7 & \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} 0 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 & \geq 0 \\ \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{73} & \leq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi}, \tilde{\lambda})(D(LP_{P\|C_{\max}}))$ è la soluzione dell'esempio del modello $D(LP-0_{P\|C_{\max}})$ con $\tilde{\lambda}_{jh} = 0$ per ogni lavoro e ogni macchina:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = \frac{5}{3}, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = \tilde{\mu}_7 = 1,$$

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\lambda}_{jh} = 0$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{P\|C_{\max}}))$ è 9.

Alcune proprietà teoriche importanti

Quanto è buono il bound LP $\sum_j t_j/m$?

Lo confrontiamo con il valore ottimo $z(\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}})$:
prima un rapporto nel caso peggiore, valido per ogni istanza,
poi istanze che lo raggiungono,
e infine un esempio di gap di integralità.

Proposizione 2: Rapporto nel caso peggiore del bound LP

Per ogni istanza di $P \parallel C_{\max}$,

$$\frac{z(\text{LP}_{P \parallel C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P \parallel C_{\max}})} \geq \frac{1}{m}.$$

Dimostrazione

- ▶ Assegnando ogni lavoro a una sola macchina otteniamo una schedula ammissibile di makespan $\sum_j t_j$.
- ▶ Quindi $z(\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}}) \leq \sum_j t_j$.
- ▶ Per la Proposizione 1,

$$\frac{z(\text{LP}_{P\parallel C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}})} \geq \frac{\frac{\sum_j t_j}{m}}{\sum_j t_j} = \frac{1}{m}.$$



Proposizione 3: Il rapporto $1/m$ è raggiunto asintoticamente

Per un numero fissato $m \geq 2$ di macchine, esistono istanze per cui

$$\frac{z(\text{LP}_{P \parallel C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P \parallel C_{\max}})} \longrightarrow \frac{1}{m}.$$

- L'idea della dimostrazione: un lavoro molto lungo impone un makespan grande, mentre il bound LP lo distribuisce sulle m macchine.

Dimostrazione (1/2)

- ▶ Per $M \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, consideriamo un lavoro di tempo di processamento M e m lavori di tempo di processamento uno.
- ▶ Il lavoro lungo da solo impone $z(\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}}) \geq M$.
- ▶ La schedula che assegna il lavoro lungo da solo alla macchina 1 e gli m lavori unitari alle altre $m - 1$ macchine ha carichi al più $2 \leq M$, quindi il makespan M è ammissibile.
- ▶ Quindi

$$z(\text{ILP}_{P\parallel C_{\max}}) = M.$$

Dimostrazione (2/2)

- ▶ La Proposizione 1 dà

$$z(\text{LP}_{P \parallel C_{\max}}) = \frac{M + m}{m}.$$

- ▶ Di conseguenza,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{z(\text{LP}_{P \parallel C_{\max}})}{z(\text{ILP}_{P \parallel C_{\max}})} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = \frac{1}{m}.$$



Esempio: un gap di integralità

- ▶ Consideriamo due macchine e tre lavori con tempi di processamento $(3, 3, 2)$.
- ▶ La Proposizione 1 dà $z(LP_{P||C_{\max}}) = 8/2 = 4$.
- ▶ In ogni schedula intera una macchina esegue almeno due dei tre lavori, quindi il suo carico è almeno $3 + 2 = 5$; la schedula $\{3, 2\}, \{3\}$ lo raggiunge, quindi $z(ILP_{P||C_{\max}}) = 5$.
- ▶ L'assegnamento frazionario

$$x_{j1} = x_{j2} = \frac{1}{2} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

ha carico quattro su entrambe le macchine, mentre l'ottimo intero ha carichi cinque e tre.

Riepilogo (1/2)

Il rilassamento $LP_{P\|C_{\max}}$:

- ▶ I vincoli binari diventano $0 \leq x_{jh} \leq 1$
- ▶ Gli upper bound sono impliciti:
$$z(LP_{P\|C_{\max}}) = z(LP-0_{P\|C_{\max}}) = \sum_j t_j/m$$

Il duale $D(LP_{P\|C_{\max}})$:

- ▶ Una variabile non positiva λ_{jh} in più per ogni upper bound
- ▶ Sull'istanza del capitolo: la soluzione duale di $D(LP-0_{P\|C_{\max}})$ con $\tilde{\lambda}_{jh} = 0$, valore ottimo 9

Riepilogo (2/2)

La qualità del bound LP:

- ▶ Per ogni istanza, $z(\text{LP}_{P\|C_{\max}})/z(\text{ILP}_{P\|C_{\max}}) \geq 1/m$
- ▶ Il rapporto $1/m$ è raggiunto asintoticamente: un lavoro lungo di lunghezza M e m lavori unitari, con $M \rightarrow +\infty$

Un gap di integralità:

- ▶ Due macchine e lavori $(3, 3, 2)$: bound LP 4, valore ottimo 5

Considerazioni aggiuntive



Introduzione: Considerazioni aggiuntive

- ▶ In questa sezione aggiungiamo vincoli al modello $ILP_{P||C_{\max}}$
- ▶ Due **disuguaglianze valide**: rafforzano il modello, poiché il bound LP da solo ignora il lavoro più lungo e l'integralità del makespan
- ▶ **Vincoli che preservano l'ottimalità**: le macchine sono identiche, e questi vincoli riducono le rinumerazioni equivalenti delle macchine
- ▶ Vediamo anche quando questi vincoli non eliminano nulla

Una disuguaglianza valida per ogni lavoro

- ▶ Per ogni lavoro j , la disuguaglianza

$$C_{\max} \geq t_j$$

è una **disuguaglianza valida** per il modello $ILP_{P||C_{\max}}$.

- ▶ In ogni schedula intera, il lavoro j è assegnato a una macchina, il cui carico, e quindi il makespan, vale almeno t_j (n vincoli lineari).

Una disuguaglianza valida dal carico medio

- La disuguaglianza

$$C_{\max} \geq \left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j}{m} \right\rceil$$

è anch'essa una **disuguaglianza valida** per il modello $\text{ILP}_{P \parallel C_{\max}}$.

- Gli m carichi delle macchine hanno somma $\sum_j t_j$, quindi il loro massimo vale almeno la loro media ed è intero in ogni schedula intera (un vincolo lineare).

Vincoli che preservano l'ottimalità

- ▶ Le macchine sono identiche. I vincoli

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{j,h+1} \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

sono **vincoli che preservano l'ottimalità**.

- ▶ Non sono validi per ogni assegnamento ammissibile, ma le macchine di ogni schedula si possono rinumerare in modo che i carichi siano non crescenti, senza cambiare il makespan.

Quando la simmetria non viene rotta

- ▶ Questi vincoli eliminano le rinumerazioni equivalenti delle macchine solo quando i carichi sono distinti.
- ▶ Con carichi uguali non ne eliminano nessuna.
- ▶ Nell'istanza del capitolo tutte le schedule ottime hanno carichi 9, 9, 9, e tutte le 12 soluzioni ottime del modello li soddisfano.

Disuguaglianze valide:

- ▶ $C_{\max} \geq t_j$ per ogni lavoro j (n vincoli)
- ▶ $C_{\max} \geq \lceil \sum_j t_j / m \rceil$ (un vincolo)

Vincoli che preservano l'ottimalità:

- ▶ Carichi delle macchine non crescenti: non validi per ogni assegnamento, ma ogni schedula si può rinumerare in modo da soddisfarli
- ▶ Eliminano le rinumerazioni solo quando i carichi sono distinti

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ In questa sezione raccogliamo gli errori più comuni sulle formulazioni di $P \parallel C_{\max}$
- ▶ Riguardano il bound LP, l'arrotondamento, i vincoli di simmetria, il verso dei vincoli di carico e gli indici delle variabili
- ▶ Riconoscerli aiuta a scrivere e usare il modello correttamente

Osservazione 1: Attenzione

- ▶ **Usare solo il bound LP.** Il valore $\sum_j t_j/m$ ignora il lavoro più lungo: con un lavoro molto lungo è molto più piccolo del valore ottimo. Bisogna aggiungere la disuguaglianza valida $C_{\max} \geq t_j$.
- ▶ **Dimenticare l'arrotondamento per eccesso.** Tutti i tempi di processamento sono interi, quindi $C_{\max}$ è intero in ogni schedula intera: il lower bound è $\lceil \sum_j t_j/m \rceil$.
- ▶ **Credere che i vincoli di simmetria eliminino tutte le soluzioni equivalenti.** Eliminano le rinumerazioni delle macchine solo quando i carichi sono distinti; con carichi uguali non ne eliminano nessuna.

Osservazione: Attenzione

- ▶ ***Dimenticare il verso dei vincoli di carico.*** I vincoli $-\sum_{j \in \mathcal{J}} t_j x_{jh} + C_{\max} \geq 0$ limitano $C_{\max}$ dal basso: è la minimizzazione che rende $C_{\max}$ uguale al carico massimo.
- ▶ ***Confondere gli indici.*** La variabile x_{jh} ha il lavoro j come primo indice e la macchina h come secondo.

Riepilogo

Bound:

- ▶ Il bound LP da solo ignora il lavoro più lungo: si aggiunge $C_{\max} \geq t_j$
- ▶ Arrotondare per eccesso: il lower bound è $\lceil \sum_j t_j / m \rceil$

Il modello:

- ▶ I vincoli di simmetria non eliminano le rinumerazioni con carichi uguali
- ▶ I vincoli di carico limitano $C_{\max}$ dal basso; il resto lo fa la minimizzazione
- ▶ In x_{jh} : prima il lavoro, poi la macchina

Riepilogo del capitolo (1/2)

- ▶ Il modello $ILP_{P\parallel C_{\max}}$ ha $n \cdot m$ variabili di assegnamento x_{jh} e la variabile di makespan $C_{\max}$, collegate da un vincolo di carico per ogni macchina.
- ▶ Il rilassamento lineare ha valore ottimo $z(LP_{P\parallel C_{\max}}) = \sum_j t_j/m$, raggiunto assegnando ogni lavoro con valore $1/m$ a ogni macchina; la soluzione duale è $\tilde{\pi}_h = 1/m$ e $\tilde{\mu}_j = t_j/m$.
- ▶ Il rapporto fra $z(LP_{P\parallel C_{\max}})$ e $z(ILP_{P\parallel C_{\max}})$ vale almeno $1/m$, e $1/m$ è raggiunto asintoticamente.
- ▶ Le disuguaglianze valide $C_{\max} \geq t_j$ e $C_{\max} \geq \lceil \sum_j t_j/m \rceil$ rafforzano il modello.

Riepilogo del capitolo (2/2)

Quadro riassuntivo dell'istanza del capitolo ($m = 3$, $t = (5, 5, 4, 4, 3, 3, 3)$). Lower bound sul valore ottimo 9:

Bound	Valore	Da
Rilassamento lineare	9	$\sum_j t_j / m = 27/3$
Disuguaglianze valide	9	$\max\{5, \lceil 27/3 \rceil\}$
Valore ottimo	9	carichi 9, 9, 9

Sull'istanza del gap di integralità ($m = 2$, $t = (3, 3, 2)$) il bound LP vale 4 e il valore ottimo è 5.