

Problemi di lot sizing

Indice

Perché il lot sizing capacitato?

Panoramica della famiglia

Il problema del lot sizing capacitato

Contare le soluzioni

Un primo piano a mano

Un lower bound combinatorio

Varianti

Osservazioni

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ descrivere un piano di produzione tramite le sue quantità, scorte e setup, e calcolarne il costo;
- ▶ enunciare il problema del lot sizing capacitato e indicarne le principali varianti;
- ▶ stabilire se un piano è ammissibile, e contare le scelte di setup ammissibili di un'istanza;
- ▶ costruire a mano un primo piano, accorpendo le domande di periodi consecutivi;
- ▶ calcolare un lower bound sul costo dal numero di setup richiesto dalla domanda totale.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «**Problemi di ottimizzazione combinatoria**»:
 - ▶ che cos'è un problema di ottimizzazione combinatoria;
 - ▶ il numero di soluzioni candidate;
 - ▶ i bound primali e duali.

Perché il lot sizing capacitato?



Introduzione: perché il lot sizing capacitato?

- ▶ Partiamo da una domanda concreta: una fabbrica deve decidere in quali settimane produrre, e quanto
- ▶ La risposta è un compromesso tra il costo di avviare la produzione e il costo di tenere i prodotti in scorta
- ▶ Questa domanda è il **problema del lot sizing capacitato**, un problema classico della pianificazione della produzione e l'argomento di questo capitolo

Una fabbrica e la sua domanda settimanale

- ▶ Una fabbrica conosce la domanda del suo prodotto in ciascuna delle prossime settimane
- ▶ Avviare la linea di produzione costa una cifra fissa (il **setup**)
- ▶ La linea può produrre solo una quantità limitata a settimana (la **capacità**)
- ▶ Ciò che si produce in anticipo resta in magazzino, con un costo per ogni unità e ogni settimana
- ▶ In quali settimane la fabbrica deve produrre, e quanto?

Un compromesso

- ▶ La decisione è un compromesso:
 - ▶ produrre ogni settimana evita il magazzino ma paga molti setup;
 - ▶ produrre di rado risparmia setup ma paga la scorta;
 - ▶ la capacità limita quanto si può anticipare.
- ▶ Questo è il **problema del lot sizing capacitato**

Una sfida

- Guardiamo i dati dell'istanza di riferimento del capitolo, con 5 periodi:

periodo t	1	2	3	4	5
domanda d_t	2	1	3	4	1
capacità cap_t	4	4	4	4	4
costo di setup sc_t	50	50	50	50	50
costo di produzione vc_t	0	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	10	10	10	10	10

- Proviamo a trovare un piano di produzione di costo al più 180
- Poi chiediamoci quanti setup servono almeno a ogni piano

Un problema classico

- ▶ Il lot sizing ha un posto classico nella storia della pianificazione della produzione
- ▶ Nel 1958 Wagner e Whitin proposero un algoritmo di programmazione dinamica per il caso senza capacità e con domanda variabile nel tempo
- ▶ L'algoritmo si basa su una proprietà dei piani ottimi: **si produce solo quando la scorta è vuota**
- ▶ Con le capacità la proprietà non vale più, e il problema è NP-difficile (si veda il capitolo «Problemi di ottimizzazione combinatoria»)
- ▶ L'approccio di programmazione dinamica si studia più avanti nel corso

Riepilogo

La domanda:

- ▶ In quali periodi produrre, e quanto, per soddisfare una domanda nota
- ▶ Setup contro scorte, entro la capacità di ogni periodo

La storia:

- ▶ Senza capacità: Wagner e Whitin (1958), si produce solo con scorta vuota
- ▶ Con capacità: la proprietà non vale più, e il problema è NP-difficile

Panoramica della famiglia

Introduzione: panoramica della famiglia

- ▶ I problemi di lot sizing formano una **famiglia**: hanno gli stessi dati e lo stesso tipo di soluzione
- ▶ Descriviamo prima ciò che hanno in comune, poi elenchiamo i membri della famiglia
- ▶ Il problema del lot sizing capacitato (CLS) è il membro di riferimento: ciascuno degli altri differisce da esso per una caratteristica

I dati comuni

- ▶ I **problemi di lot sizing** hanno gli stessi dati:
 - ▶ un insieme $T = \{1, 2, \dots, m\}$ di m periodi di tempo;
 - ▶ per ogni periodo $t \in T$, una *domanda* d_t e una *capacità* produttiva;
 - ▶ per ogni periodo $t \in T$, tre costi: il costo di setup sc_t , il costo variabile di produzione vc_t e il costo di mantenimento a scorta hc_t .

Piano di produzione e obiettivo

- ▶ Una soluzione è un **piano di produzione**: la quantità prodotta in ogni periodo
- ▶ Il piano determina la scorta alla fine di ciascun periodo e i periodi con un setup
- ▶ L'obiettivo è soddisfare tutte le domande al minimo costo totale di setup, produzione e mantenimento a scorta

Setup contro scorte

- ▶ Un problema di lot sizing bilancia i costi di setup, pagati in ogni periodo con produzione, e i costi di mantenimento della scorta
- ▶ I membri della famiglia differiscono:
 - ▶ per le capacità;
 - ▶ per il numero di prodotti;
 - ▶ per il modo in cui la domanda e la capacità si possono modificare.

I membri della famiglia (1/2)

La tabella elenca i membri della famiglia, con la sezione che definisce ciascuno di essi.

Problema	Sigla	Differenza rispetto al CLS	Sezione
problema del lot sizing capacitato	CLS	un prodotto, capacità cap_t	il CLS
problema del lot sizing senza capacità	ULS	nessuna capacità vincolante	Varianti
più prodotti e tempi di setup	MLS	prodotti che condividono il tempo di ogni periodo	Varianti

I membri della famiglia (2/2)

Problema	Sigla	Differenza rispetto al CLS	Sezione
scorta iniziale	LS-SI	la scorta iniziale è una decisione	Varianti
straordinario	LS-OT	capacità aggiuntiva a un costo più alto	Varianti
domanda non soddisfatta	LS-UD	parte della domanda persa con una penalità	Varianti

Riepilogo

La famiglia:

- ▶ Periodi, domande, capacità, e costi di setup, di produzione e di mantenimento a scorta
- ▶ Una soluzione è un piano di produzione; l'obiettivo è il minimo costo totale
- ▶ I costi di setup si bilanciano con i costi di mantenimento

I membri:

- ▶ Il CLS e le sue varianti: ULS, MLS, LS-SI, LS-OT e LS-UD

Il problema del lot sizing capacitato

Introduzione: il problema del lot sizing capacitato

- ▶ In questa sezione definiamo il **problema del lot sizing capacitato (CLS)**
- ▶ Descriviamo un'istanza, un piano di produzione ammissibile e il suo costo
- ▶ Introduciamo l'**istanza di riferimento** del capitolo, usata in tutte le sezioni successive
- ▶ Chiudiamo con le ipotesi che facciamo sui dati

Definizione 1: problema del lot sizing capacitato

Dati:

1. *un insieme $T = \{1, 2, \dots, m\}$ di m periodi di tempo,*
2. *per ogni periodo $t \in T$, una domanda $d_t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e una capacità $cap_t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, entrambe misurate in unità di un prodotto,*
3. *per ogni periodo $t \in T$, tre costi interi non negativi: il costo di setup sc_t , il costo variabile di produzione vc_t per unità prodotta e il costo di mantenimento a scorta hc_t per unità tenuta in scorta alla fine del periodo,*

*il **problema del lot sizing capacitato (CLS)** chiede di decidere quanto produrre in ogni periodo, in modo che ogni domanda sia soddisfatta con ciò che si produce e ciò che è in scorta, le capacità siano rispettate, e il costo totale di setup, produzione e mantenimento a scorta sia minimo.*

Un'istanza del CLS

► Un'istanza del CLS è specificata da:

1. un numero intero:

il numero di periodi $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

2. cinque vettori di numeri interi di lunghezza m :

$\mathbf{d}, \mathbf{cap} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$, che contengono domande e capacità,
 $\mathbf{sc}, \mathbf{vc}, \mathbf{hc} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, che contengono i costi.

Piano di produzione e scorta

- Una **soluzione ammissibile del CLS** è un **piano di produzione**, ossia un vettore di quantità intere

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m,$$

dove x_t è la quantità prodotta nel periodo t

- La scorta rimasta alla fine del periodo t è

$$s_t(\mathbf{x}) = \sum_{u=1}^t (x_u - d_u),$$

perché la scorta del periodo $t - 1$ più la produzione del periodo t deve coprire la domanda del periodo t , e ciò che resta è la scorta del periodo t

Piani ammissibili e loro costo

- Il piano è **ammissibile** se

$$x_t \leq cap_t \quad \text{e} \quad s_t(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall t \in T, \quad s_m(\mathbf{x}) = 0.$$

- C'è un **setup** nel periodo t quando $x_t > 0$: in questo caso scriviamo $y_t = 1$, e $y_t = 0$ altrimenti
- Il **costo** di un piano è

$$c(\mathbf{x}) = \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t(\mathbf{x})).$$

Enunciato formale del CLS

Data un'istanza del CLS, il CLS si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ c(\mathbf{x}) : \begin{array}{l} x_t \leq cap_t, \quad s_t(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall t \in T, \\ s_m(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \end{array} \right\}.$$

- Indichiamo con $z(I)$ il costo di un piano ottimo $\tilde{\mathbf{x}}$ dell'istanza I

L'istanza di riferimento

Fissiamo ora una piccola istanza con 5 periodi.

La useremo in tutte le sezioni successive: per contare le soluzioni, per costruire un piano a mano e per calcolare un lower bound.

Esempio (1/3)

Consideriamo $m = 5$ periodi, con i seguenti dati, tutti interi:

periodo t	1	2	3	4	5
domanda d_t	2	1	3	4	1
capacità cap_t	4	4	4	4	4
costo di setup sc_t	50	50	50	50	50
costo di produzione vc_t	0	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	10	10	10	10	10

- ▶ La domanda totale è $2 + 1 + 3 + 4 + 1 = 11$
- ▶ Chiamiamo questa istanza del CLS l'**istanza di riferimento** del capitolo

Esempio (2/3)

Il piano $\mathbf{x} = (3, 0, 4, 4, 0)$ è ammissibile:

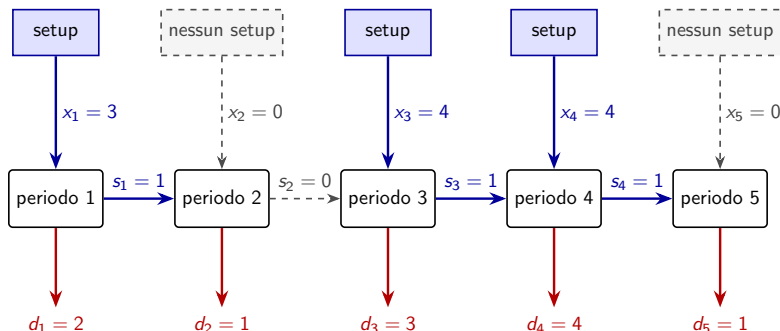
- ▶ le scorte sono $s = (1, 0, 1, 1, 0)$, tutte non negative, con $s_5 = 0$;
- ▶ ogni quantità è al più 4;
- ▶ ci sono 3 setup, nei periodi 1, 3 e 4.

Il suo costo è

$$c(\mathbf{x}) = 3 \cdot 50 + 10 \cdot (1 + 0 + 1 + 1 + 0) = 150 + 30 = 180.$$

Esempio (3/3)

Il piano, periodo per periodo da sinistra a destra: la produzione x_t entra dall'alto, attraverso un setup (linea continua) oppure non entra affatto (tratteggio); la scorta s_t passa al periodo successivo; la domanda d_t esce verso il basso. Ogni periodo ha capacità $cap_t = 4$, e i tre setup costano 50 ciascuno.



Ipotesi (1/2)

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. La scorta è vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte.
 - ▶ Lasciare scorta alla fine aggiunge solo costo, quindi nessun piano ottimo ne ha bisogno
 - ▶ Una scorta iniziale è una variante del problema (si veda la sezione «Varianti»)
2. Le capacità permettono di soddisfare le domande, periodo dopo periodo (altrimenti non esiste alcun piano ammissibile).
Formalmente:

$$\sum_{u=1}^t cap_u \geq \sum_{u=1}^t d_u, \quad \forall t \in T$$

Ipotesi (2/2)

3. Le quantità sono intere.

- ▶ Con dati interi, una volta fissati i periodi con un setup, ciò che resta è un problema di flusso di costo minimo
- ▶ Questo problema ha una soluzione ottima intera
- ▶ Restringere le quantità agli interi non cambia il costo ottimo

II CLS:

- ▶ Un piano $\mathbf{x}$ determina le scorte $s_t(\mathbf{x})$ e i setup y_t
- ▶ Ammissibile: $x_t \leq cap_t$ e $s_t(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $t \in T$, e $s_m(\mathbf{x}) = 0$
- ▶ Costo: setup, produzione e mantenimento a scorta; $z(I)$ è il costo ottimo

L'istanza di riferimento:

- ▶ 5 periodi, domanda totale 11, capacità 4 in ogni periodo
- ▶ Il piano $(3, 0, 4, 4, 0)$ è ammissibile e costa 180

Contare le soluzioni

Introduzione: contare le soluzioni

- ▶ Quante soluzioni candidate ha un'istanza del CLS?
- ▶ Separiamo la scelta combinatoria, i **periodi con un setup**, dalle quantità prodotte
- ▶ Sull'istanza di riferimento contiamo entrambe, e troviamo il piano ottimo per enumerazione
- ▶ Il conteggio mostra anche perché l'enumerazione è senza speranza su orizzonti realistici

Scelte di setup e piani di produzione

- ▶ La parte combinatoria della decisione è la scelta dei periodi con un setup: ci sono 2^m sottoinsiemi di periodi
- ▶ Non tutti sono ammissibili, perché i periodi con un setup devono avere capacità sufficiente per produrre tutto
- ▶ Per una data scelta dei periodi di setup possono esistere molti piani di produzione, poiché le quantità si possono distribuire in molti modi
- ▶ Il numero di piani ammissibili è maggiore del numero di scelte di setup ammissibili

Contare sull'istanza di riferimento

Contiamo le scelte di setup e i piani dell'istanza di riferimento:
5 periodi, domande 2, 1, 3, 4, 1, capacità 4 in ogni periodo.

Esempio (1/3)

- ▶ Per l'istanza di riferimento ci sono $2^5 = 32$ sottoinsiemi di periodi
- ▶ Sia k_t il numero di setup nei periodi $1, \dots, t$
- ▶ Le domande cumulate 2, 3, 6, 10, 11 richiedono, con capacità 4:
 - ▶ almeno un setup nei periodi 1–2;
 - ▶ due nei periodi 1–3;
 - ▶ tre nei periodi 1–4.

Esempio (2/3)

- ▶ Poiché $d_1 > 0$ c'è un setup nel periodo 1
- ▶ Nei periodi 2, 3, 4 servono almeno due setup, di cui uno nei periodi 2 o 3:

$$(y_2, y_3, y_4) \in \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

- ▶ Il periodo 5 è libero, quindi le scelte di setup ammissibili sono $4 \cdot 2 = 8$ su 32

Esempio (3/3)

Per enumerazione, a queste scelte di setup corrispondono 94 piani ammissibili. I costi di sei di essi sono:

piano	costo	piano	costo	piano	costo
(3, 0, 4, 4, 0)	180	(4, 0, 3, 4, 0)	200	(2, 1, 4, 4, 0)	220
(3, 0, 3, 4, 1)	210	(4, 0, 4, 3, 0)	210	(2, 1, 3, 4, 1)	250

Il piano (3, 0, 4, 4, 0) è l'unico piano ottimo, e $z(I) = 180$.

Che cosa mostra l'esempio

- ▶ Senza le capacità la stessa istanza ha $2^{m-1} = 16$ piani che producono solo quando la scorta è vuota, e il costo ottimo è 170: qui la capacità costa 10
- ▶ Il piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$ produce nel periodo 4 con una scorta di 1 unità, quindi la proprietà di Wagner e Whitin non vale quando le capacità sono vincolanti
- ▶ Il numero di scelte di setup cresce come 2^m : con $m = 52$ settimane supera $4 \cdot 10^{15}$

Scelte di setup:

- ▶ 2^m sottoinsiemi di periodi, non tutti ammissibili
- ▶ Sull'istanza di riferimento: 8 scelte di setup ammissibili su 32

Piani di produzione:

- ▶ A ogni scelta di setup ammissibile corrispondono uno o più piani: 94 piani in tutto
- ▶ L'unico piano ottimo è $(3, 0, 4, 4, 0)$, con $z(I) = 180$
- ▶ Con le capacità, un piano ottimo può produrre mentre la scorta è positiva

Un primo piano a mano

Introduzione: un primo piano a mano

- ▶ Enumerare tutti i piani funziona solo su istanze minuscole
- ▶ Qui costruiamo a mano un buon piano, con due idee semplici:
il **lot-for-lot** e l'**accorpamento**
- ▶ Il costo di qualsiasi piano ammissibile è un upper bound sul costo ottimo $z(I)$

Lot-for-lot e accorpamento

- ▶ Il piano ammissibile più semplice è il **lot-for-lot**: in ogni periodo produciamo esattamente la domanda di quel periodo
 - ▶ non c'è scorta, e ci sono m setup;
 - ▶ è ammissibile quando ogni domanda rientra nella capacità del suo periodo.
- ▶ Un piano si migliora **accorpando**: la domanda di un periodo si produce in un periodo precedente
 - ▶ questo risparmia un setup;
 - ▶ e costa la scorta delle unità anticipate.

Esempio (1/2)

Sull'istanza di riferimento:

1. il piano lot-for-lot $(2, 1, 3, 4, 1)$ ha 5 setup e nessuna scorta:
costo $5 \cdot 50 = 250$;
2. produrre la domanda del periodo 2 nel periodo 1 risparmia un setup (-50) e tiene 1 unità in scorta per un periodo $(+10)$: il piano $(3, 0, 3, 4, 1)$ costa 210;

Esempio (2/2)

3. il periodo 4 non può produrre anche la domanda del periodo 5, perché $4 + 1 > cap_4 = 4$; ma il periodo 3 può anticipare un'unità del periodo 4, così che il periodo 4 abbia spazio per la domanda del periodo 5: il piano $(3, 0, 4, 4, 0)$ risparmia un setup (-50) e tiene in scorta due unità in più $(+20)$.

Il costo è

$$210 - 50 + 20 = 180.$$

180 è il costo ottimo?

- ▶ Abbiamo trovato a mano il piano di costo 180
- ▶ Ma non sappiamo ancora dire se esista un piano più economico
- ▶ Ci serve un **lower bound**

Lot-for-lot:

- ▶ In ogni periodo si produce la sua domanda: nessuna scorta, m setup
- ▶ Sull'istanza di riferimento: costo 250

Accorpamento:

- ▶ Si produce una domanda in anticipo: un setup in meno, un po' di scorta in più
- ▶ Sull'istanza di riferimento: $250 \rightarrow 210 \rightarrow 180$

Un lower bound combinatorio

Introduzione: un lower bound combinatorio

- ▶ Un piano ammissibile dà un upper bound su $z(I)$; per giudicarne la qualità ci serve un lower bound
- ▶ Ricaviamo un semplice bound combinatorio: contiamo i setup richiesti dalla domanda totale
- ▶ Sull'istanza di riferimento, il bound e il piano trovato a mano danno un gap del 20%

Domanda totale e numero di setup

- ▶ Sia $D = \sum_{t \in T} d_t$ la domanda totale
- ▶ Sia k il minimo numero di periodi le cui capacità sommano almeno a D
- ▶ Il numero k si trova prendendo i periodi con le capacità più grandi

Un lower bound sul costo

Osservazione 1

Per ogni istanza del CLS, ogni piano ammissibile ha almeno k setup, e

$z(I) \geq$ la somma dei k costi di setup più piccoli.

Perché il bound vale

- ▶ Il piano deve produrre D unità nei periodi con un setup, e un periodo senza setup non produce nulla
- ▶ Le capacità dei periodi con un setup sommano almeno a D , quindi questi periodi sono almeno k
- ▶ I costi di produzione e di mantenimento a scorta sono non negativi
- ▶ Trascurandoli, e pagando solo k setup, i più economici, otteniamo un bound sul costo di ogni piano

Esempio (1/2)

- ▶ Per l'istanza di riferimento abbiamo $D = 11$ e tutte le capacità uguali a 4, quindi

$$k = \lceil 11/4 \rceil = 3.$$

- ▶ Tutti i costi di setup valgono 50, quindi

$$z(I) \geq 3 \cdot 50 = 150.$$

Esempio (2/2)

- Insieme ai piani della sezione precedente otteniamo

$$150 \leq z(I) \leq 180,$$

un gap assoluto di 30, ossia un gap relativo di $\frac{30}{150} = 20\%$

- L'enumerazione dei 94 piani dimostra che 180 è ottimo

Il bound:

- ▶ k è il minimo numero di periodi le cui capacità coprono la domanda totale D
- ▶ Ogni piano ammissibile ha almeno k setup
- ▶ $z(I) \geq$ la somma dei k costi di setup più piccoli

Sull'istanza di riferimento:

- ▶ $k = 3$ e $150 \leq z(I) \leq 180$: un gap relativo del 20%

Varianti

Introduzione: varianti

- ▶ Ogni variante mantiene i dati del CLS (periodi, domande, costi) e cambia una caratteristica del problema
- ▶ Le definizioni qui sotto riportano solo ciò che cambia
- ▶ Vediamo cinque varianti: senza capacità, con più prodotti e tempi di setup, con scorta iniziale, con straordinario e con domanda non soddisfatta

Il problema del lot sizing senza capacità

Definizione 2: problema del lot sizing senza capacità

Il problema del lot sizing senza capacità (ULS) è il CLS in cui le capacità non sono vincolanti, per esempio $cap_t \geq \sum_{u \in T} d_u$ per ogni $t \in T$.

- Il ULS si risolve in tempo polinomiale con la programmazione dinamica

Definizione 3: lot sizing con più prodotti e tempi di setup

Nel problema del lot sizing con più prodotti e tempi di setup (MLS) un insieme P di prodotti condivide la risorsa di ogni periodo: d_{pt} è la domanda del prodotto $p \in P$ nel periodo t , e cap_t è il tempo disponibile nel periodo t . Produrre un'unità di p richiede vt_{pt} unità di tempo, e un setup di p costa sc_{pt} e richiede st_{pt} unità di tempo.

Definizione 4: lot sizing con scorta iniziale

Nel problema del lot sizing con scorta iniziale (LS-SI) la quantità si_p del prodotto p disponibile all'inizio dell'orizzonte è una decisione, acquistata al costo fc_p per unità.

Definizione 5: lot sizing con straordinario

Nel problema del lot sizing con straordinario (LS-OT) la capacità non è fissa: il tempo di lavoro in orario normale costa cw_t per unità fino a cap_t^N , e lo straordinario costa co_t per unità fino a cap_t^O .

Definizione 6: lot sizing con domanda non soddisfatta

Nel problema del lot sizing con domanda non soddisfatta (LS-UD) una parte della domanda può restare non soddisfatta, con una penalità cu_{pt} per unità.

Le varianti cambiano una caratteristica del CLS:

- ▶ ULS: nessuna capacità vincolante, si risolve in tempo polinomiale con la programmazione dinamica
- ▶ MLS: più prodotti condividono il tempo di ogni periodo, con tempi di setup
- ▶ LS-SI: la scorta iniziale è una decisione
- ▶ LS-OT: capacità aggiuntiva in straordinario, a un costo più alto
- ▶ LS-UD: parte della domanda può essere persa, con una penalità

Osservazioni

Introduzione: osservazioni

- ▶ Due osservazioni collocano il CLS nel suo contesto
- ▶ La prima è storica: l'algoritmo di Wagner e Whitin per il caso senza capacità
- ▶ La seconda riguarda la complessità: che cosa cambia quando le capacità sono vincolanti

Osservazioni

- ▶ Nel 1958 Wagner e Whitin proposero un algoritmo di programmazione dinamica per il caso senza capacità e con domanda variabile nel tempo
- ▶ L'algoritmo si basa su una proprietà dei piani ottimi: si produce solo quando la scorta è vuota
- ▶ Con le capacità la proprietà non vale più, e il problema è NP-difficile (capitolo «[Problemi di ottimizzazione combinatoria](#)»)

Senza capacità:

- ▶ Wagner e Whitin (1958): programmazione dinamica
- ▶ I piani ottimi producono solo quando la scorta è vuota

Con capacità:

- ▶ La proprietà non vale più, e il problema è NP-difficile

Errori tipici

Introduzione: errori tipici

- ▶ Raccogliamo cinque errori facili da commettere quando si controlla un piano o se ne calcola il costo
- ▶ Ognuno è accompagnato dalla regola che lo evita
- ▶ Sono una lista di controllo rapida per gli esercizi

Osservazione 2: Errori tipici (1/2)

- ▶ ***Produrre in ritardo.*** La produzione di un periodo non può servire la domanda di un periodo precedente: la scorta $s_t(\mathbf{x})$ deve essere non negativa in ogni periodo.
- ▶ ***Addebitare un setup quando non si produce nulla.*** Un costo di setup si paga solo nei periodi con $x_t > 0$.
- ▶ ***Dimenticare la scorta degli ultimi periodi.*** Il costo di mantenimento si paga sulla scorta alla fine di ogni periodo, compresi i periodi in cui il piano non produce nulla.

Osservazione 3: Errori tipici (2/2)

- ▶ ***Credere che si produca solo con scorta vuota.*** La proprietà di Wagner e Whitin vale senza capacità; con le capacità il piano ottimo dell'istanza di riferimento la viola.
- ▶ ***Contare 2^m piani ammissibili.*** I 2^m sottoinsiemi di periodi sono le scelte di setup: alcune sono inammissibili, e a ciascuna ammissibile corrispondono uno o più piani.

Quando si controlla un piano:

- ▶ La scorta è non negativa in ogni periodo: niente produzione in ritardo
- ▶ Un setup si paga solo dove $x_t > 0$
- ▶ Il costo di mantenimento si paga in ogni periodo, anche senza produzione

Quando si ragiona sul problema:

- ▶ Con le capacità, si può produrre mentre la scorta è positiva
- ▶ 2^m conta le scelte di setup, non i piani ammissibili

In sintesi

Introduzione: in sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con il quadro riassuntivo dei bound ottenuti sull'istanza di riferimento

Riepilogo (1/3)

- ▶ Il problema del lot sizing capacitato chiede le quantità da produrre in ogni periodo, con capacità, setup e scorte, al minimo costo totale; una soluzione è un piano di produzione
- ▶ La parte combinatoria è la scelta dei periodi con un setup: ci sono 2^m scelte, solo alcune ammissibili, e a ciascuna corrispondono uno o più piani
- ▶ Il lot-for-lot dà rapidamente un piano, accorpare le domande lo migliora; il numero di setup richiesto dalla domanda totale dà un lower bound

Riepilogo (2/3)

- ▶ Con le capacità, i piani ottimi possono produrre mentre la scorta è positiva; senza capacità non lo fanno mai
- ▶ Le varianti aggiungono prodotti, tempi di setup, scorta iniziale, straordinario o domanda non soddisfatta
- ▶ I loro modelli si vedono più avanti nel corso, nel capitolo «Formulazioni dei problemi di lot sizing»

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza del CLS (minimizzazione: il lower bound è un bound duale, l'upper bound è il costo di un piano):

Capitolo	Lower bound	Upper bound	Da
Questo capitolo	150	250	almeno tre setup; lot-for-lot
Questo capitolo, accorpendo	150	180	il piano (3, 0, 4, 4, 0)
Questo capitolo, enumerazione	180	180	i 94 piani ammissibili