

Formulazioni dei problemi di lot sizing

Indice

Panoramica della famiglia

Modelli PLI per il problema di lot sizing capacitato

Una formulazione con un legame big-M

Il rilassamento lineare della formulazione big-M

Una formulazione a cammino minimo

Confronto fra le formulazioni

Modelli PLI per le varianti

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere la formulazione big-M del problema di lot sizing capacitato e calcolare un valore debole e un valore forte di big-M;
- ▶ scrivere la formulazione a cammino minimo e interpretarne le variabili come gli archi di una rete;
- ▶ rappresentare un piano di produzione come combinazione di cammini della rete;
- ▶ confrontare i bound LP delle formulazioni sull'istanza di riferimento;
- ▶ scrivere il modello PLI del problema di lot sizing senza capacità;
- ▶ estendere la formulazione big-M a più prodotti con tempi di setup, alla scorta iniziale, agli straordinari e alla domanda non soddisfatta, e calcolare i valori forti di big-M di ogni modello.

Prerequisiti

- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «Programmazione lineare intera» e «Bound primali e duali»: problemi PLI, rilassamenti lineari e lower bound.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «Problemi di lot sizing»: il problema, le sue ipotesi, i piani e l'istanza di riferimento.

Panoramica della famiglia

Introduzione: panoramica della famiglia

- ▶ Questo capitolo scrive i modelli dei problemi di lot sizing: il problema capacitato e le sue varianti
- ▶ Tutti i modelli condividono le stesse variabili e gli stessi tipi di vincoli
- ▶ Guardiamo prima la famiglia nel suo insieme: le sue variabili, i suoi vincoli e l'elenco dei suoi membri

Variabili, vincoli e funzione obiettivo

- ▶ I modelli big- M dei problemi di lot sizing usano, per ogni periodo $t \in T$, una **variabile di produzione** intera x_t , una **variabile di scorta** intera s_t e una **variabile di setup** binaria y_t .
- ▶ I **vincoli di bilanciamento del flusso** collegano le scorte di periodi consecutivi alla produzione e alla domanda; le variabili di setup sono collegate alla produzione da vincoli big- M .
- ▶ La funzione obiettivo minimizza il costo totale di setup, di produzione e di mantenimento a scorta. La formulazione a cammino minimo del CLS sostituisce le variabili di produzione e di scorta con gli archi di una rete.

Modelli di flusso con setup

- ▶ I modelli di lot sizing sono **modelli di flusso sui periodi**, con variabili di setup binarie che attivano la produzione.
- ▶ I membri della famiglia aggiungono prodotti, tempi di setup, una scorta iniziale, straordinari o domanda non soddisfatta agli stessi vincoli di bilanciamento e big- M .

I membri della famiglia

I membri della famiglia, con i nomi dei loro modelli e le sezioni che li scrivono:

Problema	Modelli	Formulazione
<i>Sezione «Una formulazione con un legame big-M»</i>		
CLS	ILP_{CLSP}	formulazione big-M
<i>Sezione «Una formulazione a cammino minimo»</i>		
CLS	MIP_{CLSP}^{SP}	formulazione a cammino minimo
<i>Sezione «Modelli PLI per le varianti»</i>		
ULS	ILP_{ULS}	big-M, senza capacità
MLS	ILP_{CLSP}^P	big-M, tempi di setup
LS-SI	ILP_{CLSP}^{SI}	big-M, variabili di scorta iniziale
LS-OT	ILP_{CLSP}^{OT}	big-M, variabili di straordinario
LS-UD	ILP_{CLSP}^{UD}	big-M, variabili di domanda non soddisfatta

Riepilogo

- ▶ Ogni modello big- M della famiglia usa variabili di produzione x_t , variabili di scorta s_t e variabili di setup y_t
- ▶ I vincoli di bilanciamento del flusso collegano scorte, produzione e domanda; i vincoli big- M collegano i setup alla produzione
- ▶ Le varianti aggiungono prodotti, tempi di setup, una scorta iniziale, straordinari o domanda non soddisfatta agli stessi vincoli

Modelli PLI per il problema di lot sizing capacitato

Introduzione: modelli PLI per il CLS

- ▶ Partiamo dal problema di lot sizing capacitato (CLS), il membro principale della famiglia
- ▶ Ha due formulazioni diverse, e le scriveremo entrambe
- ▶ Due modelli corretti dello stesso problema possono dare lower bound molto diversi: è il filo conduttore delle prossime sezioni

Il CLS e le sue due formulazioni

- ▶ Il problema di lot sizing capacitato e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di lot sizing](#)».
- ▶ Il CLS ha due formulazioni: la formulazione big- M ILP_{CLSP} (sezione «Una formulazione con un legame big- M ») e la formulazione a cammino minimo MIP_{CLSP}^{SP} (sezione «Una formulazione a cammino minimo»).
- ▶ La sezione «Confronto fra le formulazioni» confronta i bound dei loro rilassamenti lineari sull'istanza di riferimento.

Riepilogo

- ▶ Il CLS ha una formulazione big- M ILP_{CLSP} e una formulazione a cammino minimo MIP_{CLSP}^{SP}
- ▶ Confronteremo i bound dei loro rilassamenti lineari sull'istanza di riferimento

Una formulazione con un legame big-M

Introduzione: una formulazione con un legame big-M

- ▶ Scriviamo il primo modello PLI del CLS, con variabili di produzione, di scorta e di setup
- ▶ I setup sono collegati alla produzione da un vincolo big-M
- ▶ Il valore di M conta: calcoliamo un valore debole e un valore forte
- ▶ Chiudiamo con il modello sull'istanza di riferimento e la sua soluzione ottima

Domande totali e variabili

- ▶ Dato un insieme $T = \{1, 2, \dots, m\}$ di periodi con domande d_t , per $j \leq t$ scriviamo $D_{j,t} = \sum_{k=j}^t d_k$ per la domanda totale dei periodi $j, j+1, \dots, t$.
- ▶ Introduciamo le seguenti **variabili intere** e **variabili binarie**, per ogni periodo $t \in T$:

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (produzione),}$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (scorta alla fine del periodo),}$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un setup nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La scorta all'inizio dell'orizzonte è la costante s_0 .

Il vincolo big-M

- ▶ Le variabili di setup sono collegate alle quantità dall'implicazione logica

$$x_t > 0 \implies y_t = 1,$$

modellata dal **vincolo big-M** $x_t \leq M_t y_t$, dove M_t è un upper bound sulla produzione del periodo t .

- ▶ Se si ignorano i setup, il piano migliore produce in ogni periodo esattamente la sua domanda: non ha scorte e, nell'istanza di riferimento, ha costo 0.
- ▶ È un lower bound molto debole: i costi di setup vanno modellati.

La formulazione big-M ILP_{CLSP}

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing capacitato (CLS) è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t)$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_t \leq M_t y_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_t \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

$$s_0 = s_m = 0,$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T,$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T,$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T.$$

Descrizione del modello ILP_{CLSP}

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il costo dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta;
- ▶ i vincoli $s_{t-1} + x_t = d_t + s_t$ sono i **vincoli di bilanciamento del flusso**: la domanda del periodo t è soddisfatta dalla produzione del periodo e dalla scorta del periodo precedente, e l'eccedenza diventa la scorta alla fine del periodo t (m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $x_t \leq M_t y_t$ collegano le quantità con i setup, e i vincoli $x_t \leq cap_t$ sono i vincoli di capacità (m vincoli lineari ciascuno);
- ▶ il vincolo $s_0 = s_m = 0$ impone una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello PLI.

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{CLSP} , o **formulazione big-M**.

Valori deboli e forti di big-M

- ▶ **Un valore debole.** Poiché $s_m = 0$ e le scorte sono non negative, la produzione del periodo t non può superare la domanda dei periodi $t, \dots, m$: $M_t^{\text{dem}} = D_{t,m}$ è un valore valido.
- ▶ **Un secondo valore.** Per i vincoli di capacità $x_t \leq \text{cap}_t$, anche $M_t^{\text{cap}} = \text{cap}_t$ è valido.
- ▶ **Un valore forte.** Il valore migliore è il più piccolo dei due:

$$M_t = \min \{ \text{cap}_t, D_{t,m} \}.$$

Valori di big-M e rilassamento lineare

- ▶ Più piccolo è il valore di big-M, più forte è il **rilassamento lineare**: il vincolo $x_t \leq M_t y_t$ taglia i valori frazionari di y_t inferiori a x_t/M_t .
- ▶ Un valore troppo piccolo, però, taglia piani ammissibili.

Esempio: l'istanza di riferimento (1/2)

Consideriamo $m = 5$ periodi, con i seguenti dati:

periodo t	1	2	3	4	5
domanda d_t	2	1	3	4	1
capacità cap_t	4	4	4	4	4
costo di setup sc_t	50	50	50	50	50
costo di produzione vc_t	0	0	0	0	0
costo di mantenimento hc_t	10	10	10	10	10

È l'istanza di riferimento del capitolo «[Problemi di lot sizing](#)».

Esempio: l'istanza di riferimento (2/2)

I valori di big-M sono:

periodo t	1	2	3	4	5
$M_t^{\text{dem}} = D_{t,5}$	11	9	8	5	1
$M_t^{\text{cap}} = \text{cap}_t$	4	4	4	4	4
M_t	4	4	4	4	1

Chiamiamo questa istanza del CLS **istanza di riferimento**.

Esempio: il modello ILP_{CLSP} (1/3)

Il modello ILP_{CLSP} con i valori forti di big-M per l'istanza di riferimento del CLS è ($s_0 = 0$ è una costante e non compare):

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 + 10 s_2 \\ & + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 &= 2 \\ & s_1 + x_2 - s_2 &= 1 \\ & s_2 + x_3 - s_3 &= 3 \\ & s_3 + x_4 - s_4 &= 4 \\ & s_4 + x_5 - s_5 &= 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP} (2/3)

$$x_1 - 4 y_1 \leq 0$$

$$x_2 - 4 y_2 \leq 0$$

$$x_3 - 4 y_3 \leq 0$$

$$x_4 - 4 y_4 \leq 0$$

$$x_5 - y_5 \leq 0$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_3 \leq 4$$

$$x_4 \leq 4$$

$$x_5 \leq 4$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP} (3/3)

$$s_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})(\text{ILP}_{\text{CLSP}})$ è:

$$\tilde{\mathbf{y}} = (1, 0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3, 0, 4, 4, 0), \quad \tilde{\mathbf{s}} = (1, 0, 1, 1, 0)$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}})$ è $3 \cdot 50 + 3 \cdot 10 = 180$, il costo del piano ottimo trovato per enumerazione nel capitolo «[Problemi di lot sizing](#)».
- ▶ I valori deboli di big-M danno la stessa soluzione ottima.

La formulazione big-M ILP_{CLSP} :

- ▶ Variabili intere x_t , s_t e variabili binarie y_t ; vincoli di bilanciamento del flusso e vincoli di capacità
- ▶ Il legame $x_t \leq M_t y_t$ modella l'implicazione $x_t > 0 \Rightarrow y_t = 1$

I valori di big-M:

- ▶ $D_{t,m}$ e cap_t sono entrambi validi; il valore forte è $M_t = \min\{cap_t, D_{t,m}\}$
- ▶ Più piccolo è il valore, più forte è il rilassamento lineare

L'istanza di riferimento: piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$, di costo 180

Il rilassamento lineare della formulazione big-M

Introduzione: il rilassamento lineare della formulazione big-M

- ▶ Il rilassamento lineare di un modello PLI dà un lower bound sul suo valore ottimo
- ▶ Nella formulazione big-M il bound dipende dai valori M_t
- ▶ Calcoliamo il bound delle tre scelte M_t^{dem} , M_t^{cap} e M_t sull'istanza di riferimento

Rilassare l'interezza

- ▶ Per ottenere un rilassamento lineare (LP) del modello ILP_{CLSP} , rilassiamo i vincoli di interezza delle variabili in vincoli di non negatività e nei bound $y_t \leq 1$.
- ▶ Il modello LP ottenuto è scritto nella prossima slide.

Il rilassamento lineare della formulazione big-M

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t)$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_t \leq M_t y_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_t \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

$$s_0 = s_m = 0,$$

$$y_t \leq 1, \quad \forall t \in T,$$

$$x_t \geq 0, \quad \forall t \in T,$$

$$s_t \geq 0, \quad \forall t \in T,$$

$$y_t \geq 0, \quad \forall t \in T.$$

Tre modelli LP

- ▶ Questo modello LP si chiama modello LP_{CLSP}^{dem} , LP_{CLSP}^{cap} o LP_{CLSP}^{strong} , quando i valori di big-M sono M_t^{dem} , M_t^{cap} o i valori forti M_t .
- ▶ I tre modelli differiscono solo nei coefficienti dei vincoli $x_t \leq M_t y_t$.
- ▶ Ora li risolviamo tutti e tre sull'istanza di riferimento.

Esempio: valori di big-M e bound LP (1/4)

Il modello LP per l'istanza di riferimento del CLS è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 + 10 s_2 \\ & + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 &= 2 \\ & s_1 + x_2 - s_2 &= 1 \\ & s_2 + x_3 - s_3 &= 3 \\ & s_3 + x_4 - s_4 &= 4 \\ & s_4 + x_5 - s_5 &= 1 \end{aligned}$$

Esempio: valori di big-M e bound LP (2/4)

$$x_1 - M_1 y_1 \leq 0$$

$$x_2 - M_2 y_2 \leq 0$$

$$x_3 - M_3 y_3 \leq 0$$

$$x_4 - M_4 y_4 \leq 0$$

$$x_5 - M_5 y_5 \leq 0$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_3 \leq 4$$

$$x_4 \leq 4$$

$$x_5 \leq 4$$

Esempio: valori di big-M e bound LP (3/4)

$$s_5 = 0$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 1$$

$$y_3 \leq 1$$

$$y_4 \leq 1$$

$$y_5 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

con i valori $M_1, \dots, M_5$ della tabella dell'istanza di riferimento.

Esempio: valori di big-M e bound LP (4/4)

Le tre scelte danno le seguenti soluzioni ottime $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})$, con $\tilde{s}_5 = 0$:

Modello	$\tilde{\mathbf{y}}$	$\tilde{\mathbf{x}}$	$(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_4)$	valore ottimo
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}$	$(\frac{2}{11}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 0)$	$(2, 1, 4, 4, 0)$	$(0, 0, 1, 1)$	$\frac{9865}{99} \approx 99.65$
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{cap}}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4})$	$(2, 1, 3, 4, 1)$	$(0, 0, 0, 0)$	$\frac{275}{2} = 137.5$
$\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 1, 0)$	$(2, 1, 4, 4, 0)$	$(0, 0, 1, 1)$	$\frac{315}{2} = 157.5$

- ▶ In ogni soluzione $\tilde{y}_t = \tilde{x}_t / M_t$: più piccolo è M_t , maggiore è il costo dei setup pagato dal rilassamento.
- ▶ La soluzione ottima intera del modello ILP_{CLSP} ha valore $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}) = 180$.

Riepilogo

- ▶ Il rilassamento lineare di ILP_{CLSP} sostituisce l'interezza delle variabili con la non negatività e i bound $y_t \leq 1$
- ▶ In ogni soluzione LP $\tilde{y}_t = \tilde{x}_t / M_t$: i setup sono pagati solo in parte
- ▶ Sull'istanza di riferimento: 99.65 con M_t^{dem} , 137.5 con M_t^{cap} , 157.5 con i valori forti, contro il valore ottimo 180

Una formulazione a cammino minimo

Introduzione: una formulazione a cammino minimo

- ▶ Scriviamo una seconda formulazione del CLS, che non decide direttamente le quantità
- ▶ Le sue variabili sono gli archi di una rete: un piano diventa un cammino, o una combinazione di cammini
- ▶ I setup sono collegati agli archi senza alcun valore di big-M

Le variabili $z_{v_{tk}}$ e i loro costi

- ▶ La seconda formulazione non decide direttamente le quantità.

Per ogni $t, k \in T$, con $k \geq t$, introduciamo la seguente

variabile continua:

$z_{v_{tk}} \geq 0$, la frazione della domanda $D_{t,k}$ dei periodi $t, \dots, k$ prodotta nel periodo t .

- ▶ Produrre nel periodo t la domanda dei periodi $t, \dots, k$ costa la produzione di $D_{t,k}$ unità e il mantenimento a scorta delle unità che attendono il loro periodo:

$$cv_{tk} = vc_t D_{t,k} + \sum_{s=t+1}^k \sum_{u=t}^{s-1} hc_u d_s.$$

La formulazione a cammino minimo MIP_{CLSP}^{SP}

Usando queste variabili e le variabili binarie y_t , un modello di programmazione lineare intera mista (MIP) per il CLS è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} sc_t y_t + \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cv_{tk} zv_{tk}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{k=1}^m zv_{1k} = 1,$$

$$\sum_{u=1}^{t-1} zv_{u,t-1} - \sum_{k=t}^m zv_{tk} = 0, \quad \forall t \in T \setminus \{1\},$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{tk} \leq y_t, \quad \forall t \in T,$$

$$\sum_{k=t}^m D_{t,k} zv_{tk} \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

Il modello MIP_{CLSP}^{SP} : domini e descrizione

$$zv_{tk} \geq 0, \quad \forall t, k \in T, \quad k \geq t,$$

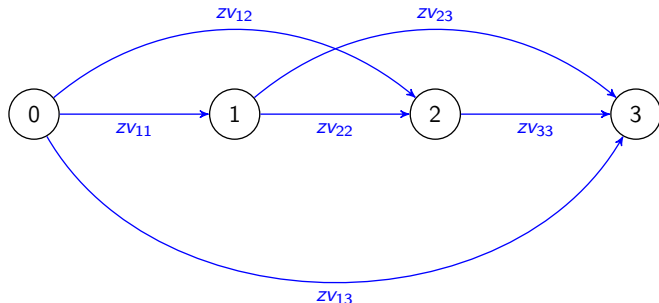
$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T.$$

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il costo dei setup e degli archi del piano;
- ▶ i vincoli $\sum_k zv_{1k} = 1$ e $\sum_u zv_{u,t-1} - \sum_k zv_{tk} = 0$ sono i vincoli di flusso di una rete (m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\sum_k zv_{tk} \leq y_t$ impongono il setup se il prodotto è prodotto nel periodo t , e i vincoli $\sum_k D_{t,k} zv_{tk} \leq cap_t$ impongono le capacità (m vincoli lineari ciascuno);
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello MIP.

Questo modello MIP si chiama modello MIP_{CLSP}^{SP} , o **formulazione a cammino minimo**.

La rete delle variabili zv_{tk}

- ▶ I nodi sono $0, 1, \dots, m$, e la variabile zv_{tk} è l'arco dal nodo $t - 1$ al nodo k , con costo cv_{tk} .
- ▶ Un'unità di flusso esce dal nodo 0 (vincolo $\sum_k zv_{1k} = 1$), e il flusso si conserva negli altri nodi (vincoli $\sum_u zv_{u,t-1} - \sum_k zv_{tk} = 0$).



Rete delle variabili zv_{tk} per $m = 3$: la variabile zv_{tk} è l'arco dal nodo $t - 1$ al nodo k .

Cammini e piani

- ▶ Un cammino dal nodo 0 al nodo m è un piano che produce solo quando la scorta è vuota: ogni arco $(t-1, k)$ è una produzione nel periodo t per i periodi $t, \dots, k$.
- ▶ Per questo la formulazione si chiama **formulazione a cammino minimo**: rilassate le capacità, il piano ottimo è un cammino minimo.

Setup, quantità e combinazioni di cammini

- ▶ I vincoli $\sum_k z_{v_{tk}} \leq y_t$ collegano gli archi con i setup con il coefficiente 1 invece di un valore di big-M.
- ▶ Nei vincoli $\sum_k D_{t,k} z_{v_{tk}} \leq cap_t$ la quantità prodotta nel periodo t è $x_t = \sum_k D_{t,k} z_{v_{tk}}$.
- ▶ I cammini sono i mattoni elementari, e un piano che non è un cammino è una **combinazione di cammini**: le quantità sono intere, ma le variabili $z_{v_{tk}}$ possono essere frazionarie.

Esempio: MIP_{CLS}^{SP} e combinazioni di cammini (1/6)

Per l'istanza di riferimento del CLS le domande $D_{t,k}$ e i costi cv_{tk} sono (il costo di produzione è nullo, quindi cv_{tk} è solo costo di mantenimento a scorta):

$t \backslash k$	$D_{t,k}$					cv_{tk}				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	6	10	11	0	10	70	190	230
2		1	4	8	9		0	30	110	140
3			3	7	8			0	40	60
4				4	5				0	10
5					1					0

Esempio: MIP_{CLSP}^{SP} e combinazioni di cammini (2/6)

Il modello MIP_{CLSP}^{SP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 \\ & + 10 z_{v_{12}} + 70 z_{v_{13}} + 190 z_{v_{14}} + 230 z_{v_{15}} \\ & + 30 z_{v_{23}} + 110 z_{v_{24}} + 140 z_{v_{25}} + 40 z_{v_{34}} \\ & + 60 z_{v_{35}} + 10 z_{v_{45}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & z_{v_{11}} + z_{v_{12}} + z_{v_{13}} + z_{v_{14}} + z_{v_{15}} &= 1 \\ & z_{v_{11}} - z_{v_{22}} - z_{v_{23}} - z_{v_{24}} - z_{v_{25}} &= 0 \\ & z_{v_{12}} + z_{v_{22}} - z_{v_{33}} - z_{v_{34}} - z_{v_{35}} &= 0 \\ & z_{v_{13}} + z_{v_{23}} + z_{v_{33}} - z_{v_{44}} - z_{v_{45}} &= 0 \\ & z_{v_{14}} + z_{v_{24}} + z_{v_{34}} + z_{v_{44}} - z_{v_{55}} &= 0 \end{aligned}$$

Esempio: MIP_{CLSP}^{SP} e combinazioni di cammini (3/6)

$$zV_{11} + zV_{12} + zV_{13} + zV_{14} + zV_{15} - y_1 \leq 0$$

$$zV_{22} + zV_{23} + zV_{24} + zV_{25} - y_2 \leq 0$$

$$zV_{33} + zV_{34} + zV_{35} - y_3 \leq 0$$

$$zV_{44} + zV_{45} - y_4 \leq 0$$

$$zV_{55} - y_5 \leq 0$$

$$2 zV_{11} + 3 zV_{12} + 6 zV_{13} + 10 zV_{14} + 11 zV_{15} \leq 4$$

$$zV_{22} + 4 zV_{23} + 8 zV_{24} + 9 zV_{25} \leq 4$$

$$3 zV_{33} + 7 zV_{34} + 8 zV_{35} \leq 4$$

$$4 zV_{44} + 5 zV_{45} \leq 4$$

$$zV_{55} \leq 4$$

Esempio: $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ e combinazioni di cammini (4/6)

$$\begin{aligned} z_{v_{11}}, z_{v_{12}}, z_{v_{13}}, \dots, z_{v_{55}} &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{z}}_v, \tilde{\mathbf{y}})(\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$ è:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{v_{12}} = 1, \quad \tilde{z}_{v_{33}} = \frac{4}{5}, \quad \tilde{z}_{v_{35}} = \frac{1}{5}, \quad \tilde{z}_{v_{45}} = \frac{4}{5}, \\ \tilde{\mathbf{y}} = (1, 0, 1, 1, 0), \end{aligned}$$

e tutte le altre variabili $z_{v_{tk}}$ sono nulle.

Esempio: MIP_{CLSP}^{SP} e combinazioni di cammini (5/6)

- ▶ È il piano ottimo $\tilde{x} = (3, 0, 4, 4, 0)$, che non è un cammino: nel periodo 3 produce 4 unità, più della domanda 3 del periodo 3 e meno della domanda 7 dei periodi 3 e 4.
- ▶ È la combinazione, con pesi $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{5}$, dei cammini

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \quad (\text{piano } (3, 0, 3, 5, 0)) \quad \text{e}$$

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \quad (\text{piano } (3, 0, 8, 0, 0)).$$

- ▶ Le quantità sono $x_1 = D_{1,2} z_{v_{12}} = 3$, $x_3 = 3 \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} = 4$ e $x_4 = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$.

Esempio: $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ e combinazioni di cammini (6/6)

Il valore ottimo $z(\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$ è

$$\underbrace{3 \cdot 50}_{\text{setup}} + \underbrace{10 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{4}{5} + 60 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{4}{5}}_{= 30} = 180.$$

Rilassare le variabili di setup

- ▶ Per ottenere un rilassamento lineare del modello $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$, rilassiamo i vincoli $y_t \in \{0, 1\}$ nei bound $0 \leq y_t \leq 1$.
- ▶ Il modello LP ottenuto è scritto nelle prossime slide.

Il rilassamento lineare della formulazione a cammino minimo

$$\min \sum_{t \in T} sc_t y_t + \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cv_{tk} zv_{tk}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{k=1}^m zv_{1k} = 1,$$

$$\sum_{u=1}^{t-1} zv_{u,t-1} - \sum_{k=t}^m zv_{tk} = 0, \quad \forall t \in T \setminus \{1\},$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{tk} \leq y_t, \quad \forall t \in T,$$

$$\sum_{k=t}^m D_{t,k} zv_{tk} \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

Il modello LP_{CLSP}^{SP} : bound e domini

$$\begin{aligned}y_t &\leq 1, & \forall t \in T, \\zv_{tk} &\geq 0, & \forall t, k \in T, k \geq t, \\y_t &\geq 0, & \forall t \in T.\end{aligned}$$

- ▶ Questo modello LP si chiama modello LP_{CLSP}^{SP} .
- ▶ Differisce dal modello MIP_{CLSP}^{SP} solo per i bound $0 \leq y_t \leq 1$ al posto dei vincoli binari $y_t \in \{0, 1\}$.

Esempio: il modello LP_{CLSP}^{SP} (1/4)

Il modello LP_{CLSP}^{SP} per l'istanza di riferimento del CLS è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 \\ & + 10 z_{v_{12}} + 70 z_{v_{13}} + 190 z_{v_{14}} + 230 z_{v_{15}} \\ & + 30 z_{v_{23}} + 110 z_{v_{24}} + 140 z_{v_{25}} + 40 z_{v_{34}} \\ & + 60 z_{v_{35}} + 10 z_{v_{45}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & z_{v_{11}} + z_{v_{12}} + z_{v_{13}} + z_{v_{14}} + z_{v_{15}} &= 1 \\ & z_{v_{11}} - z_{v_{22}} - z_{v_{23}} - z_{v_{24}} - z_{v_{25}} &= 0 \\ & z_{v_{12}} + z_{v_{22}} - z_{v_{33}} - z_{v_{34}} - z_{v_{35}} &= 0 \\ & z_{v_{13}} + z_{v_{23}} + z_{v_{33}} - z_{v_{44}} - z_{v_{45}} &= 0 \\ & z_{v_{14}} + z_{v_{24}} + z_{v_{34}} + z_{v_{44}} - z_{v_{55}} &= 0 \end{aligned}$$

Esempio: il modello LP_{CLSP}^{SP} (2/4)

$$zV_{11} + zV_{12} + zV_{13} + zV_{14} + zV_{15} - y_1 \leq 0$$

$$zV_{22} + zV_{23} + zV_{24} + zV_{25} - y_2 \leq 0$$

$$zV_{33} + zV_{34} + zV_{35} - y_3 \leq 0$$

$$zV_{44} + zV_{45} - y_4 \leq 0$$

$$zV_{55} - y_5 \leq 0$$

$$2 zV_{11} + 3 zV_{12} + 6 zV_{13} + 10 zV_{14} + 11 zV_{15} \leq 4$$

$$zV_{22} + 4 zV_{23} + 8 zV_{24} + 9 zV_{25} \leq 4$$

$$3 zV_{33} + 7 zV_{34} + 8 zV_{35} \leq 4$$

$$4 zV_{44} + 5 zV_{45} \leq 4$$

$$zV_{55} \leq 4$$

Esempio: il modello LP_{CLSP}^{SP} (3/4)

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 1$$

$$y_3 \leq 1$$

$$y_4 \leq 1$$

$$y_5 \leq 1$$

$$z_{v_{11}}, z_{v_{12}}, z_{v_{13}}, \dots, z_{v_{55}} \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

Esempio: il modello LP_{CLSP}^{SP} (4/4)

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}})(LP_{CLSP}^{SP})$ è:

$$\tilde{z}_{v_{12}} = 1, \quad \tilde{z}_{v_{33}} = \frac{4}{5}, \quad \tilde{z}_{v_{35}} = \frac{1}{5}, \quad \tilde{z}_{v_{45}} = \frac{4}{5},$$
$$\tilde{\mathbf{y}} = (1, 0, 1, \frac{4}{5}, 0),$$

e tutte le altre variabili $z_{v_{tk}}$ sono nulle.

- ▶ Sono gli archi del piano ottimo, con il setup del periodo 4 pagato solo per la frazione $\frac{4}{5}$.
- ▶ Il valore ottimo $z(LP_{CLSP}^{SP})$ è $180 - \frac{1}{5} \cdot 50 = 170$.

La formulazione a cammino minimo $\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$:

- ▶ Variabili continue $z_{v_{tk}}$, gli archi di una rete con nodi $0, 1, \dots, m$, con costi $c_{v_{tk}}$
- ▶ Un cammino da 0 a m è un piano; un piano che non è un cammino è una combinazione di cammini
- ▶ Il legame $\sum_k z_{v_{tk}} \leq y_t$ ha coefficiente 1, senza valore di big-M

L'istanza di riferimento:

- ▶ Il piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$, di costo 180, combina due cammini
- ▶ Il rilassamento lineare $\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}$ dà il bound 170

Confronto fra le formulazioni

Introduzione: confronto fra le formulazioni

- ▶ Mettiamo a confronto i lower bound di tutti i rilassamenti calcolati finora
- ▶ Un bound più forte è più vicino al valore ottimo, ma può venire da un modello più grande
- ▶ Il confronto mostra che cosa guadagniamo e che cosa paghiamo con ogni formulazione

Stesso valore ottimo, bound diversi

- ▶ Le formulazioni hanno lo stesso valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}) = z(\text{MIP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}}) = 180$, ma i loro rilassamenti lineari hanno valori ottimi diversi.
- ▶ Sull'istanza di riferimento i lower bound, calcolati con l'algoritmo del semplice in aritmetica esatta e verificati con Gurobi, sono riportati nella prossima slide.
- ▶ L'ultima colonna è il gap del capitolo «[Problemi di ottimizzazione combinatoria](#)» fra il bound e il valore ottimo; non è definito per il bound 0.

Lower bound sull'istanza di riferimento

Modello	Lower bound	Gap $\frac{180-LB}{LB}$
Senza setup	0	non definito
$LP_{CLSP}^{dem} (M_t = D_{t,m})$	99.65	80.6%
$LP_{CLSP}^{cap} (M_t = cap_t)$	137.50	30.9%
$LP_{CLSP}^{strong} (M_t = \min\{cap_t, D_{t,m}\})$	157.50	14.3%
LP_{CLSP}^{SP} (cammino minimo)	170	5.9%

Forza e dimensione

- ▶ Il bound 170 della formulazione a cammino minimo è il valore ottimo del problema senza capacità (piano $(3, 0, 8, 0, 0)$, di costo 170): i vincoli di capacità $\sum_k D_{t,k} z_{v_{tk}} \leq cap_t$ agiscono solo sulle quantità, e una combinazione di cammini può soddisfarli.
- ▶ Il prezzo della formulazione a cammino minimo è la sua dimensione: ci sono $O(m^2)$ variabili $z_{v_{tk}}$, contro le $O(m)$ variabili della formulazione big-M.

Riepilogo

- ▶ Le due formulazioni hanno lo stesso valore ottimo 180, ma bound LP diversi
- ▶ Sull'istanza di riferimento il bound cresce da 99.65 (big-M con $D_{t,m}$) a 157.5 (big-M forte) e a 170 (cammino minimo)
- ▶ La formulazione a cammino minimo è più forte ma più grande: $O(m^2)$ variabili contro $O(m)$

Modelli PLI per le varianti

Introduzione: modelli PLI per le varianti

- ▶ I problemi di questa sezione sono le varianti del problema di lot sizing capacitato definite nel capitolo «[Problemi di lot sizing](#)»
- ▶ Scriviamo il modello PLI di ogni variante, nell'ordine di quel capitolo:
 - ▶ il problema di lot sizing senza capacità;
 - ▶ più prodotti e tempi di setup;
 - ▶ scorta iniziale;
 - ▶ straordinari;
 - ▶ domanda non soddisfatta.
- ▶ Ogni modello mantiene la struttura del modello big-M del CLS

Il problema di lot sizing senza capacità: variabili

- Dato un insieme $T = \{1, 2, \dots, m\}$ di periodi con domande d_t e senza capacità vincolante, introduciamo, per ogni periodo $t \in T$, le seguenti **variabili intere** e **variabili binarie**:

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (produzione),}$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (scorta alla fine del periodo),}$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un setup nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Poiché $s_m = 0$, la produzione del periodo t vale al più la domanda $D_{t,m}$ dei periodi $t, \dots, m$: questo è il valore di big-M del legame fra x_t e y_t .

Il modello ILP_{ULS}

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing senza capacità (ULS) è il seguente:

$$\min \sum_{t \in T} (sc_t y_t + vc_t x_t + hc_t s_t)$$

$$\text{soggetto a } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_t \leq D_{t,m} y_t, \quad \forall t \in T,$$

$$s_0 = s_m = 0,$$

$$x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T,$$

$$s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T,$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T.$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{ULS} .

Descrizione del modello ILP_{ULS}

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il costo dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta;
- ▶ i vincoli $s_{t-1} + x_t = d_t + s_t$ sono i vincoli di bilanciamento del flusso (m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $x_t \leq D_{t,m} y_t$ impongono un setup in ogni periodo con produzione positiva (m vincoli lineari);
- ▶ il vincolo $s_0 = s_m = 0$ impone una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello PLI.

L'ULS e il CLS

- ▶ Il modello ILP_{ULS} è il modello ILP_{CLSP} senza i vincoli di capacità $x_t \leq cap_t$ e con i valori di big-M $M_t = D_{t,m}$.
- ▶ L'algoritmo di PD di Wagner e Whitin, nel capitolo «PD per il problema di lot sizing senza capacità» più avanti nel corso, risolve l'ULS in tempo polinomiale.

Esempio: il modello ILP_{ULS} (1/3)

Consideriamo l'istanza di riferimento del CLS senza le capacità: le domande sono $\mathbf{d} = (2, 1, 3, 4, 1)$, i costi di setup $sc_t = 50$, i costi di mantenimento $hc_t = 10$, e $vc_t = 0$. I valori di big-M sono $D_{t,5} = (11, 9, 8, 5, 1)$, e il modello ILP_{ULS} per questa istanza dell'ULS è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 \\ & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 - s_1 = 2 \\ & s_1 + x_2 - s_2 = 1 \\ & s_2 + x_3 - s_3 = 3 \\ & s_3 + x_4 - s_4 = 4 \\ & s_4 + x_5 - s_5 = 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP_{ULS} (2/3)

$$x_1 - 11 y_1 \leq 0$$

$$x_2 - 9 y_2 \leq 0$$

$$x_3 - 8 y_3 \leq 0$$

$$x_4 - 5 y_4 \leq 0$$

$$x_5 - y_5 \leq 0$$

$$s_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}$$

Esempio: il modello ILP_{ULS} (3/3)

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})(\text{ILP}_{\text{ULS}})$ è:

$$\tilde{\mathbf{y}} = (1, 0, 1, 0, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3, 0, 8, 0, 0), \quad \tilde{\mathbf{s}} = (1, 0, 5, 1, 0)$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{ULS}})$ è $2 \cdot 50 + (1 + 5 + 1) \cdot 10 = 170$, il bound della formulazione a cammino minimo del CLS.
- ▶ La soluzione ottima non è unica: anche il piano $(3, 0, 3, 5, 0)$, con tre setup e le scorte $(1, 0, 0, 1, 0)$, costa $3 \cdot 50 + 2 \cdot 10 = 170$.

Più prodotti e tempi di setup: dati

- ▶ Un insieme P di prodotti condivide la risorsa di ogni periodo.
- ▶ Scriviamo d_{pt} , sc_{pt} , vc_{pt} e hc_{pt} per i dati del prodotto $p \in P$ nel periodo $t \in T$.
- ▶ Produrre un'unità di p richiede il tempo $vt_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, un setup richiede il tempo $st_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, e la capacità cap_t è un tempo.
- ▶ Per $j \leq k$ scriviamo $sd_{pjk} = \sum_{u=j}^k d_{pu}$ per la domanda del prodotto p nei periodi $j, \dots, k$.

Più prodotti e tempi di setup: variabili

- ▶ Introduciamo, per ogni prodotto $p \in P$ e ogni periodo $t \in T$, le seguenti **variabili intere** e **variabili binarie**:

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (produzione),}$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (scorta alla fine del periodo),}$$

$$y_{pt} = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un setup del prodotto } p \text{ nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- ▶ Le scorte all'inizio dell'orizzonte sono le costanti $s_{p0} = 0$.

Il modello ILP^P_{CLSP}: obiettivo e vincoli

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup (MLS) è il seguente:

$$\min \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt})$$

$$\text{soggetto a } s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P,$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$: domini delle variabili

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T.$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$.

Descrizione del modello ILP_{CLSP}^P

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il costo dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta di tutti i prodotti;
- ▶ i vincoli $s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}$ sono i vincoli di bilanciamento del flusso di ogni prodotto ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\sum_p (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t$ impongono che i tempi di setup e i tempi di produzione di ogni periodo non superino la sua capacità (m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}$ collegano le quantità con i setup ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $s_{p0} = s_{pm} = 0$ impongono una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello PLI.

Valori forti di big-M e prodotti

- Un setup di p nel periodo t lascia il tempo $cap_t - st_{pt}$ per la produzione, e $s_{pm} = 0$ limita la produzione alla domanda residua. Il valore forte di big-M è

$$M_{pt} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{cap_t - st_{pt}}{vt_{pt}} \right\rfloor, sd_{ptm} \right\}.$$

- I prodotti interagiscono solo attraverso i vincoli di capacità $\sum_p (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t$: senza di essi, il modello si scompone in $|P|$ modelli indipendenti a un solo prodotto.

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^P (1/5)

Consideriamo $|P| = 2$ prodotti e $m = 3$ periodi, con capacità $cap_t = 9$, tempi di produzione $vt_{pt} = 1$, tempi di setup $st_{pt} = 1$, costi di mantenimento $hc_{pt} = 5$ e costi di produzione $vc_{pt} = 0$. I costi di setup sono $sc_{1t} = 30$ e $sc_{2t} = 40$, e le domande sono:

periodo t	prodotto 1			prodotto 2		
	1	2	3	1	2	3
d_{pt}	3	2	4	2	4	1
sd_{ptm}	9	6	4	7	5	1
M_{pt}	8	6	4	7	5	1

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^P (2/5)

Il modello ILP_{CLSP}^P con i valori forti di big-M per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 30 y_{11} + 30 y_{12} + 30 y_{13} + 40 y_{21} + 40 y_{22} + 40 y_{23} \\ & + 5 s_{11} + 5 s_{12} + 5 s_{13} + 5 s_{21} + 5 s_{22} + 5 s_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & x_{11} - s_{11} &= 3 \\ & s_{11} + x_{12} - s_{12} &= 2 \\ & s_{12} + x_{13} - s_{13} &= 4 \\ & x_{21} - s_{21} &= 2 \\ & s_{21} + x_{22} - s_{22} &= 4 \\ & s_{22} + x_{23} - s_{23} &= 1 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^P (3/5)

$$x_{11} + x_{21} + y_{11} + y_{21} \leq 9$$

$$x_{12} + x_{22} + y_{12} + y_{22} \leq 9$$

$$x_{13} + x_{23} + y_{13} + y_{23} \leq 9$$

$$x_{11} - 8 y_{11} \leq 0$$

$$x_{12} - 6 y_{12} \leq 0$$

$$x_{13} - 4 y_{13} \leq 0$$

$$x_{21} - 7 y_{21} \leq 0$$

$$x_{22} - 5 y_{22} \leq 0$$

$$x_{23} - y_{23} \leq 0$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ (4/5)

$$s_{13} = 0$$

$$s_{23} = 0$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, s_{22}, s_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} \in \{0, 1\}$$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P)$ è:

$$\tilde{y}_{11} = \tilde{y}_{13} = \tilde{y}_{21} = \tilde{y}_{22} = 1, \quad \tilde{y}_{12} = \tilde{y}_{23} = 0,$$

$$\tilde{x}_{11} = 5, \quad \tilde{x}_{13} = 4, \quad \tilde{x}_{21} = 2, \quad \tilde{x}_{22} = 5, \quad \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{23} = 0,$$

$$\tilde{s}_{11} = 2, \quad \tilde{s}_{22} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{s}_{pt} = 0$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^P (5/5)

- ▶ Il valore ottimo $z(ILP_{CLSP}^P)$ è $2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 + (2 + 1) \cdot 5 = 155$, e la soluzione ottima è unica (Gurobi).
- ▶ Il periodo 1 usa tutta la sua capacità, $5 + 2 + 1 + 1 = 9$.
- ▶ Senza i vincoli di capacità il prodotto 2 sarebbe prodotto solo nel periodo 1, con valore 140: questo piano richiede il tempo $5 + 7 + 1 + 1 = 14 > 9$.

Scorta iniziale: dati e variabili

- ▶ I dati sono quelli del problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup. In più, la scorta iniziale del prodotto p è una decisione, acquistata al costo fc_p per unità.
- ▶ Introduciamo le variabili intere x_{pt} , s_{pt} e le variabili binarie y_{pt} del modello ILP_{CLSP}^P e, per ogni prodotto $p \in P$, la seguente **variabile intera**:

$si_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (scorta del prodotto p
all'inizio dell'orizzonte).

Il modello ILP_{CLSP}^{SI}: obiettivo e vincoli

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con scorta iniziale (LS-SI) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} f_{C_p} s_{i_p} + \\ & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (s_{C_{pt}} y_{pt} + v_{C_{pt}} x_{pt} + h_{C_{pt}} s_{pt}) \end{aligned}$$

$$\text{soggetto a} \quad s_{i_p} + x_{p1} = d_{p1} + s_{p1}, \quad \forall p \in P,$$

$$s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T \setminus \{1\},$$

$$\sum_{p \in P} (s_{t_{pt}} y_{pt} + v_{t_{pt}} x_{pt}) \leq \text{cap}_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P,$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$: domini delle variabili

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$si_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P,$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T.$$

- ▶ Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{SI}}$.
- ▶ È il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ con le variabili si_p al posto delle costanti $s_{p0} = 0$, e con il loro costo nella funzione obiettivo; i valori forti di big-M M_{pt} sono gli stessi.

Descrizione del modello ILP^{SI}_{CLSP}

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il costo della scorta iniziale, dei setup, della produzione e del mantenimento a scorta;
- ▶ i vincoli $si_p + x_{p1} = d_{p1} + s_{p1}$ e $s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}$ sono i vincoli di bilanciamento del flusso di ogni prodotto, con la scorta iniziale si_p nel primo periodo ($|P|$ m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\sum_p (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t$ impongono che i tempi di setup e i tempi di produzione di ogni periodo non superino la sua capacità (m vincoli lineari); i vincoli $x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}$ collegano le quantità con i setup ($|P|$ m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $s_{pm} = 0$ impongono una scorta vuota alla fine dell'orizzonte ($|P|$ vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio: il modello ILP^{SI}_{CLSP} (1/6)

Consideriamo $|P| = 2$ prodotti e $m = 3$ periodi, con capacità $cap_1 = 2500$, $cap_2 = 2100$, $cap_3 = 2500$, i costi della scorta iniziale $fc_1 = fc_2 = 3000$ e i costi di setup $sc_{pt} = 10000$. Gli altri dati sono:

periodo t	prodotto 1			prodotto 2		
	1	2	3	1	2	3
d_{pt}	100	200	10	10	100	150
vt_{pt}	20	10	10	10	5	5
st_{pt}	100	100	100	110	110	110
hc_{pt}	110	100	100	105	105	105
vc_{pt}	1100	1000	1000	900	800	800

Esempio: il modello ILP^{SI}_{CLSP} (2/6)

I valori di big-M sono:

periodo t	1	2	3	1	2	3
sd_{ptm}	310	210	10	260	250	150
$\lfloor (cap_t - st_{pt})/vt_{pt} \rfloor$	120	200	240	239	398	478
M_{pt}	120	200	10	239	250	150

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^{SI} (3/6)

Il modello ILP_{CLSP}^{SI} con i valori forti di big-M per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3000 s_{i1} + 3000 s_{i2} + 10000 y_{11} + 10000 y_{12} \\ & + 10000 y_{13} + 10000 y_{21} + 10000 y_{22} + 10000 y_{23} \\ & + 1100 x_{11} + 1000 x_{12} + 1000 x_{13} + 900 x_{21} \\ & + 800 x_{22} + 800 x_{23} + 110 s_{11} + 100 s_{12} \\ & + 100 s_{13} + 105 s_{21} + 105 s_{22} + 105 s_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a} \quad & s_{i1} + x_{11} - s_{11} &= 100 \\ & s_{11} + x_{12} - s_{12} &= 200 \\ & s_{12} + x_{13} - s_{13} &= 10 \\ & s_{i2} + x_{21} - s_{21} &= 10 \\ & s_{21} + x_{22} - s_{22} &= 100 \\ & s_{22} + x_{23} - s_{23} &= 150 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP^{SI}_{CLSP} (4/6)

$$20 x_{11} + 10 x_{21} + 100 y_{11} + 110 y_{21} \leq 2500$$

$$10 x_{12} + 5 x_{22} + 100 y_{12} + 110 y_{22} \leq 2100$$

$$10 x_{13} + 5 x_{23} + 100 y_{13} + 110 y_{23} \leq 2500$$

$$x_{11} - 120 y_{11} \leq 0$$

$$x_{12} - 200 y_{12} \leq 0$$

$$x_{13} - 10 y_{13} \leq 0$$

$$x_{21} - 239 y_{21} \leq 0$$

$$x_{22} - 250 y_{22} \leq 0$$

$$x_{23} - 150 y_{23} \leq 0$$

Esempio: il modello ILP^{SI}_{CLSP} (5/6)

$$s_{13} = 0$$

$$s_{23} = 0$$

$$s_{i1}, s_{i2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{21}, s_{22}, s_{23} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} \in \{0, 1\}$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^{SI} (6/6)

Una soluzione ottima del modello ILP_{CLSP}^{SI} è:

$$\tilde{x}_{11} = 59, \quad \tilde{x}_{12} = 200, \quad \tilde{x}_{13} = 10,$$

$$\tilde{x}_{21} = 110, \quad \tilde{x}_{22} = 0, \quad \tilde{x}_{23} = 150,$$

$$\tilde{s}_{i1} = 41, \quad \tilde{s}_{i2} = 0, \quad \tilde{s}_{21} = 100, \quad \text{tutte le altre } \tilde{s}_{pt} = 0,$$

con un setup in ogni periodo tranne che per il prodotto 2 nel periodo 2.

- ▶ Il valore ottimo $z(ILP_{CLSP}^{SI})$ è 677 400, e la soluzione ottima è unica (Gurobi).
- ▶ Il prodotto 1 parte con 41 unità acquistate all'inizio dell'orizzonte, perché il periodo 1 non ha il tempo di produrre tutta la sua domanda.

Il rilassamento lineare LP_{CLSP}^{SI} : obiettivo e vincoli

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{CLSP}^{SI} , rilassiamo i vincoli di interezza delle variabili in vincoli di non negatività e nei bound $y_{pt} \leq 1$. Il modello LP ottenuto è il seguente:

$$\min \sum_{p \in P} f_{C_p} s_{ip} + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (s_{C_{pt}} y_{pt} + v_{C_{pt}} x_{pt} + h_{C_{pt}} s_{pt})$$

$$\text{soggetto a } s_{ip} + x_{p1} = d_{p1} + s_{p1}, \quad \forall p \in P,$$

$$s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T \setminus \{1\},$$

$$\sum_{p \in P} (s_{t_{pt}} y_{pt} + v_{t_{pt}} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P,$$

Il rilassamento lineare LP_{CLSP}^{SI} : bound e domini

$$y_{pt} \leq 1, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$x_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$y_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{ip} \geq 0, \quad \forall p \in P.$$

Questo modello LP si chiama modello LP_{CLSP}^{SI} .

Una formulazione a cammino minimo con scorta iniziale

- ▶ Nella formulazione a cammino minimo ogni prodotto ha la sua rete, con una variabile continua aggiuntiva $w_{pt} \geq 0$, l'arco dal nodo 0 al nodo t , per la frazione della scorta iniziale che copre le domande dei primi t periodi.
- ▶ I costi degli archi sono

$$cv_{ptk} = vc_{pt} sd_{ptk} + \sum_{s=t+1}^k \sum_{u=t}^{s-1} hc_{pu} d_{ps},$$

$$ci_{pt} = fc_p sd_{p1t} + \sum_{s=2}^t \sum_{u=1}^{s-1} hc_{pu} d_{ps}.$$

Il modello MIP^{SP,SI}_{CLSP}: obiettivo e vincoli

Usando queste variabili, un modello MIP per il problema di lot sizing con scorta iniziale (LS-SI) è il seguente:

$$\min \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + ci_{pt} w_{pt}) +$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cv_{ptk} zv_{ptk}$$

$$\text{soggetto a } \sum_{k=1}^m (w_{pk} + zv_{p1k}) = 1, \quad \forall p \in P,$$

$$w_{p,t-1} + \sum_{u=1}^{t-1} zv_{p,u,t-1} - \sum_{k=t}^m zv_{ptk} = 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T \setminus \{1\},$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{ptk} \leq y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\sum_{p \in P} st_{pt} y_{pt} + \sum_{p \in P} \sum_{k=t}^m vt_{pt} sd_{ptk} zv_{ptk} \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

Il modello $MIP_{CLSP}^{SP,SI}$: interezza e domini

$$\sum_{k=t}^m sd_{ptk} zv_{ptk} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\sum_{t \in T} sd_{p1t} w_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P,$$

$$zv_{ptk} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t, k \in T, k \geq t,$$

$$w_{pt} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T.$$

- ▶ Questo modello MIP si chiama modello $MIP_{CLSP}^{SP,SI}$.
- ▶ Rilassando i vincoli $y_{pt} \in \{0, 1\}$ in $0 \leq y_{pt} \leq 1$ ed eliminando i vincoli di interezza delle quantità otteniamo il modello LP chiamato modello $LP_{CLSP}^{SP,SI}$.

Descrizione del modello $MIP^{SP,SI}_{CLSP}$

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il costo dei setup, della scorta iniziale e degli archi dei piani di tutti i prodotti;
- ▶ i vincoli $\sum_k (w_{pk} + zv_{p1k}) = 1$ e $w_{p,t-1} + \sum_u zv_{p,u,t-1} - \sum_k zv_{ptk} = 0$ sono i vincoli di flusso della rete di ogni prodotto, con gli archi w_{pt} della scorta iniziale uscenti dal nodo 0 ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\sum_k zv_{ptk} \leq y_{pt}$ impongono il setup del prodotto p nel periodo t se questo è prodotto ($|P| m$ vincoli lineari), e i vincoli $\sum_p st_{pt} y_{pt} + \sum_p \sum_k vt_{pt} sd_{ptk} zv_{ptk} \leq cap_t$ impongono le capacità, tempi di setup compresi (m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli di interezza mantengono intere le quantità e le scorte iniziali;
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello MIP.

Quantità intere

- ▶ La quantità prodotta è $x_{pt} = \sum_{k=t}^m sd_{ptk} zv_{ptk}$, e la scorta iniziale è $si_p = \sum_{t \in T} sd_{p1t} w_{pt}$: i vincoli di interezza delle quantità le mantengono intere, come nel modello ILP_{CLSP}^{SI} .
- ▶ Con un solo prodotto e $vt_t = 1$ questi vincoli non servono: fissati i setup, resta un problema di flusso di costo minimo, che ha una soluzione ottima intera.
- ▶ Con più prodotti e tempi di produzione $vt_{pt} > 1$, una quantità frazionaria può usare meglio la capacità. Senza i vincoli di interezza delle quantità il modello è solo un rilassamento del problema, e il suo valore ottimo può essere minore di $z(ILP_{CLSP}^{SI})$ (prossimo esempio).

Esempio: lower bound con due prodotti (1/2)

- ▶ Consideriamo l'istanza dell'esempio del modello ILP_{CLSP}^{SI} .
- ▶ Ignorando i setup (nei costi e nelle capacità), il valore ottimo è 575400, raggiunto dalla soluzione intera

$$x_{11} = 120, \quad x_{12} = 160, \quad x_{13} = 10,$$

$$x_{21} = 10, \quad x_{22} = 100, \quad x_{23} = 150, \quad s_{11} = 40, \quad s_{i1} = 20.$$

Esempio: lower bound con due prodotti (2/2)

I lower bound e il valore ottimo delle formulazioni sono:

Modello	Valore
Senza setup	575 400.00
LP_{CLSP}^{SI} con $M_{pt} = sd_{ptm}$	638 882.20
LP_{CLSP}^{SI} con gli M_{pt} forti	651 267.37
$LP_{CLSP}^{SP,SI}$	668 928.57
$MIP_{CLSP}^{SP,SI}$ senza vincoli di interezza	676 450.00
ILP_{CLSP}^{SI} e $MIP_{CLSP}^{SP,SI}$ (ottimo intero)	677 400

Senza i vincoli di interezza delle quantità il modello a cammino minimo raggiunge 676 450 con gli stessi setup e le quantità frazionarie $x_{11} = 59.5$ e $s_1 = 40.5$: il periodo 1 usa allora tutta la sua capacità, $100 + 20 \cdot 59.5 + 110 + 10 \cdot 110 = 2500$.

Straordinari: dati e variabili

- ▶ I dati sono quelli del problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup, ma il tempo di ogni periodo non è una capacità fissa: nel periodo t il tempo di lavoro in orario normale costa cw_t per unità, fino a cap_t^N , e lo straordinario costa co_t per unità, fino a cap_t^O .
- ▶ Introduciamo le variabili intere x_{pt} , s_{pt} e le variabili binarie y_{pt} del modello ILP_{CLSP}^P e, per ogni periodo $t \in T$, le seguenti **variabili intere**:

$$\begin{aligned}\mu_t &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (tempo di lavoro in orario normale),} \\ \nu_t &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ (straordinario).}\end{aligned}$$

Poiché i tempi vt_{pt} e st_{pt} sono interi, i tempi di lavoro si possono prendere interi.

Il modello ILP_{CLSP}^{OT}: obiettivo e vincoli

Usando queste variabili, un modello PLI per il problema di lot sizing con straordinari (LS-OT) è il seguente:

$$\min \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) + \sum_{t \in T} (cw_t \mu_t + co_t \nu_t)$$

$$\text{soggetto a } s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq \mu_t + \nu_t, \quad \forall t \in T,$$

$$\mu_t \leq cap_t^N, \quad \forall t \in T,$$

$$\nu_t \leq cap_t^O, \quad \forall t \in T,$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P,$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$: domini delle variabili

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\mu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T,$$

$$\nu_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall t \in T,$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T.$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$.

Descrizione del modello ILP_{CLSP}^{OT}

- ▶ La funzione obiettivo lineare aggiunge ai costi del modello ILP_{CLSP}^P il costo del tempo di lavoro in orario normale e in straordinario;
- ▶ i vincoli $s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} + s_{pt}$ sono i vincoli di bilanciamento del flusso di ogni prodotto ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\sum_p (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq \mu_t + \nu_t$ impongono che i tempi di setup e i tempi di produzione di ogni periodo siano coperti dal tempo di lavoro, in orario normale e in straordinario (m vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\mu_t \leq cap_t^N$ e $\nu_t \leq cap_t^O$ limitano i due tempi di lavoro (m vincoli lineari ciascuno);
- ▶ i vincoli $x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}$ collegano le quantità con i setup ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $s_{p0} = s_{pm} = 0$ impongono una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello PLI.

Valori forti di big-M con straordinari

- Il tempo disponibile nel periodo t è al più $cap_t^N + cap_t^O$, quindi il valore forte di big-M è

$$M_{pt} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{cap_t^N + cap_t^O - st_{pt}}{vt_{pt}} \right\rfloor, sd_{ptm} \right\}.$$

- Con $co_t > cw_t$ una soluzione ottima usa lo straordinario solo quando le ore normali del periodo sono esaurite.

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^{OT} (1/5)

- ▶ Consideriamo l'istanza di riferimento del CLS, con un solo prodotto ($|P| = 1$, e omettiamo l'indice p), tempi di produzione $vt_t = 1$ e tempi di setup $st_t = 0$.
- ▶ La capacità $cap_t = 4$ diventa l'orario normale $cap_t^N = 4$, al costo $cw_t = 1$, e in ogni periodo è disponibile un'unità di straordinario: $cap_t^O = 1$, al costo $co_t = 6$.
- ▶ I valori di big-M sono $M_t = \min\{5, D_{t,5}\}$, ossia $(5, 5, 5, 5, 1)$.

Il modello ILP_{CLSP}^{OT} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 \\ & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 + \mu_1 + \mu_2 \\ & + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + 6 \nu_1 + 6 \nu_2 + 6 \nu_3 \\ & + 6 \nu_4 + 6 \nu_5 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^{OT} (2/5)

$$\text{soggetto a } x_1 - s_1 = 2$$

$$s_1 + x_2 - s_2 = 1$$

$$s_2 + x_3 - s_3 = 3$$

$$s_3 + x_4 - s_4 = 4$$

$$s_4 + x_5 - s_5 = 1$$

$$x_1 - \mu_1 - \nu_1 \leq 0$$

$$x_2 - \mu_2 - \nu_2 \leq 0$$

$$x_3 - \mu_3 - \nu_3 \leq 0$$

$$x_4 - \mu_4 - \nu_4 \leq 0$$

$$x_5 - \mu_5 - \nu_5 \leq 0$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{OT}}$ (3/5)

$$x_1 - 5 y_1 \leq 0$$

$$x_2 - 5 y_2 \leq 0$$

$$x_3 - 5 y_3 \leq 0$$

$$x_4 - 5 y_4 \leq 0$$

$$x_5 - y_5 \leq 0$$

$$\mu_1 \leq 4$$

$$\mu_2 \leq 4$$

$$\mu_3 \leq 4$$

$$\mu_4 \leq 4$$

$$\mu_5 \leq 4$$

Esempio: il modello ILP^{OT}_{CLSP} (4/5)

$$\nu_1 \leq 1$$

$$\nu_2 \leq 1$$

$$\nu_3 \leq 1$$

$$\nu_4 \leq 1$$

$$\nu_5 \leq 1$$

$$s_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \nu_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}$$

Esempio: il modello ILP_{CLSP}^{OT} (5/5)

Una soluzione ottima del modello ILP_{CLSP}^{OT} è:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} &= (1, 0, 1, 1, 0), & \tilde{\mathbf{x}} &= (3, 0, 3, 5, 0), & \tilde{\mathbf{s}} &= (1, 0, 0, 1, 0), \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= (3, 0, 3, 4, 0), & \tilde{\boldsymbol{\nu}} &= (0, 0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

- ▶ Il valore ottimo $z(ILP_{CLSP}^{OT})$ è
 $3 \cdot 50 + 2 \cdot 10 + 10 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 186$, e la soluzione ottima è unica (Gurobi).
- ▶ Un'unità di straordinario nel periodo 4, al costo 6, sostituisce un'unità tenuta a scorta dal periodo 3 al periodo 4, al costo 10: il piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$ del CLS qui costa 191.

Domanda non soddisfatta: dati e variabili

- ▶ I dati sono quelli del problema di lot sizing con più prodotti e tempi di setup. In più, una parte della domanda d_{pt} può restare non soddisfatta, con la penalità cu_{pt} per unità.
- ▶ Introduciamo le variabili intere x_{pt} , s_{pt} e le variabili binarie y_{pt} del modello ILP_{CLSP}^P e, per ogni prodotto $p \in P$ e ogni periodo $t \in T$, la seguente **variabile intera**:

$\varepsilon_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (domanda del prodotto p
nel periodo t non soddisfatta).

Il modello ILP^{UD}_{CLSP}: obiettivo e vincoli

Usando queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema di lot sizing con domanda non soddisfatta (LS-UD) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} (sc_{pt} y_{pt} + vc_{pt} x_{pt} + hc_{pt} s_{pt}) + \\ & \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} cu_{pt} \varepsilon_{pt} \end{aligned}$$

$$\text{soggetto a} \quad s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} - \varepsilon_{pt} + s_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\sum_{p \in P} (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq cap_t, \quad \forall t \in T,$$

$$x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{p0} = s_{pm} = 0, \quad \forall p \in P,$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$: domini delle variabili

$$x_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$s_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$\varepsilon_{pt} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T,$$

$$y_{pt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \forall t \in T.$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$.

Descrizione del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$

- ▶ La funzione obiettivo lineare aggiunge ai costi del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^P$ la penalità della domanda non soddisfatta;
- ▶ i vincoli $s_{p,t-1} + x_{pt} = d_{pt} - \varepsilon_{pt} + s_{pt}$ sono i vincoli di bilanciamento del flusso, con la domanda ridotta della sua parte non soddisfatta ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\sum_p (st_{pt} y_{pt} + vt_{pt} x_{pt}) \leq \text{cap}_t$ sono i vincoli di capacità e i vincoli $x_{pt} \leq M_{pt} y_{pt}$ collegano le quantità con i setup (m e $|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}$ garantiscono che la domanda non soddisfatta non superi la domanda ($|P| m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $s_{p0} = s_{pm} = 0$ impongono una scorta vuota all'inizio e alla fine dell'orizzonte;
- ▶ infine, i vincoli di dominio definiscono le variabili del modello PLI.

Valori di big-M con domanda non soddisfatta

- ▶ I valori di big-M del modello ILP_{CLSP}^P restano validi, poiché la produzione può solo diminuire.
- ▶ Con $\varepsilon_{pt} = 0$ per ogni prodotto e periodo il modello è il modello ILP_{CLSP}^P .

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$ (1/4)

Consideriamo l'istanza di riferimento del CLS, con un solo prodotto ($|P| = 1$, e omettiamo l'indice p), tempi di produzione $vt_t = 1$, tempi di setup $st_t = 0$ e i valori forti di big-M $M_t = (4, 4, 4, 4, 1)$. Ogni unità di domanda non soddisfatta costa $cu_t = 18$. Il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$ per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 + 50 y_5 + 10 s_1 \\ & + 10 s_2 + 10 s_3 + 10 s_4 + 10 s_5 + 18 \varepsilon_1 + 18 \varepsilon_2 \\ & + 18 \varepsilon_3 + 18 \varepsilon_4 + 18 \varepsilon_5 \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP^{UD}_{CLSP} (2/4)

$$\begin{array}{rcll} \text{soggetto a} & x_1 - s_1 + \varepsilon_1 & = & 2 \\ & s_1 + x_2 - s_2 + \varepsilon_2 & = & 1 \\ & s_2 + x_3 - s_3 + \varepsilon_3 & = & 3 \\ & s_3 + x_4 - s_4 + \varepsilon_4 & = & 4 \\ & s_4 + x_5 - s_5 + \varepsilon_5 & = & 1 \\ & x_1 & \leq & 4 \\ & x_2 & \leq & 4 \\ & x_3 & \leq & 4 \\ & x_4 & \leq & 4 \\ & x_5 & \leq & 4 \end{array}$$

Esempio: il modello ILP^{UD}_{CLSP} (3/4)

$$x_1 - 4 y_1 \leq 0$$

$$x_2 - 4 y_2 \leq 0$$

$$x_3 - 4 y_3 \leq 0$$

$$x_4 - 4 y_4 \leq 0$$

$$x_5 - y_5 \leq 0$$

$$\varepsilon_1 \leq 2$$

$$\varepsilon_2 \leq 1$$

$$\varepsilon_3 \leq 3$$

$$\varepsilon_4 \leq 4$$

$$\varepsilon_5 \leq 1$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$ (4/4)

$$s_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}$$

Una soluzione ottima del modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$ è:

$$\tilde{\mathbf{y}} = (0, 0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (0, 0, 3, 4, 0),$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = (0, 0, 0, 0, 0), \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (2, 1, 0, 0, 1)$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}}$, il valore ottimo

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{CLSP}}^{\text{UD}})$ è $2 \cdot 50 + 4 \cdot 18 = 172$, e la soluzione ottima è unica (Gurobi).
- ▶ Le domande dei periodi 1, 2 e 5 non sono soddisfatte: le loro 4 unità costano 72, e il piano risparmia un setup e tutti i costi di mantenimento a scorta del piano ottimo $(3, 0, 4, 4, 0)$ del CLS, di costo 180.

Riepilogo (1/2)

Il problema di lot sizing senza capacità:

- ▶ Il modello big-M senza capacità e con $M_t = D_{t,m}$
- ▶ Sull'istanza di riferimento il suo valore ottimo è 170, il bound della formulazione a cammino minimo del CLS

Più prodotti e tempi di setup:

- ▶ I prodotti condividono la capacità con i loro tempi di setup; interagiscono solo attraverso i vincoli di capacità
- ▶ Big-M forte: $M_{pt} = \min\{\lfloor (cap_t - st_{pt})/vt_{pt} \rfloor, sd_{ptm}\}$

Riepilogo (2/2)

Scorta iniziale: le variabili si_p , al costo fc_p ; con più prodotti il modello a cammino minimo richiede l'interezza delle quantità ($676\,450 < 677\,400$)

Straordinari: i tempi di lavoro μ_t e ν_t sostituiscono la capacità fissa; i valori di big-M usano $cap_t^N + cap_t^O$; sull'istanza di riferimento il valore ottimo è 186

Domanda non soddisfatta: le variabili $\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}$, con la penalità cu_{pt} ; sull'istanza di riferimento il valore ottimo è 172

Errori tipici

Introduzione: errori tipici

- ▶ Raccogliamo gli errori più frequenti quando si scrivono i modelli di lot sizing
- ▶ Riguardano i valori di big-M, i vincoli di capacità, i costi degli archi e le varianti
- ▶ Per ognuno diciamo perché è un errore

Osservazione 1: Errori tipici (1/3)

- ▶ *Prendere un valore di big-M troppo piccolo. Un valore minore della produzione di un piano ammissibile taglia quel piano: i valori $D_{t,m}$ e cap_t sono entrambi validi.*
- ▶ *Prendere un valore di big-M troppo grande. Ogni valore valido dà un modello corretto, ma un valore grande dà un rilassamento debole: le variabili di setup diventano quasi nulle nelle soluzioni LP, come nel bound 99.65 dell'istanza di riferimento.*
- ▶ *Dimenticare i tempi di setup nei vincoli di capacità. Con più prodotti i vincoli contengono $st_{pt} y_{pt}$ oltre a $vt_{pt} x_{pt}$.*

Osservazione: Errori tipici (2/3)

- ▶ **Contare il costo di mantenimento della domanda del periodo di produzione.** In cv_{tk} le unità per il periodo t non vanno a scorta: la somma dei costi di mantenimento parte dalla domanda del periodo $t + 1$.
- ▶ **Credere che la formulazione a cammino minimo richieda cammini binari.** Le variabili $z_{v_{tk}}$ sono continue: un piano ammissibile che non è un cammino è una combinazione di cammini.
- ▶ **Dimenticare l'interezza delle quantità con più prodotti.** Con tempi di produzione $vt_{pt} > 1$ le variabili continue $z_{v_{ptk}}$ possono dare quantità frazionarie: il modello a cammino minimo richiede i vincoli di interezza delle quantità, altrimenti è solo un rilassamento ($676\,450 < 677\,400$).

Osservazione: Errori tipici (3/3)

- ▶ *Mantenere la capacità fissa nel modello con straordinari. Il tempo del periodo t è limitato dal tempo di lavoro $\mu_t + \nu_t$, e i valori di big-M usano $cap_t^N + cap_t^O$.*
- ▶ *Lasciare illimitata la domanda non soddisfatta. Senza $\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}$ i vincoli di bilanciamento ammetterebbero una domanda netta negativa, ossia scorta creata dal nulla al prezzo della penalità.*

Valori di big-M:

- ▶ Troppo piccoli tagliano piani ammissibili; troppo grandi danno un rilassamento debole

Formulazione a cammino minimo:

- ▶ La somma dei costi di mantenimento in cv_{tk} parte dal periodo $t + 1$; le variabili zv_{tk} sono continue
- ▶ Con più prodotti serve l'interezza delle quantità

Varianti:

- ▶ Tempi di setup nei vincoli di capacità; tempo di lavoro $\mu_t + \nu_t$ con gli straordinari; $\varepsilon_{pt} \leq d_{pt}$

In sintesi

Introduzione: in sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con il quadro riassuntivo dei lower bound calcolati sull'istanza di riferimento

Riepilogo (1/3)

- ▶ Senza i setup il CLS è un semplice problema di flusso; i setup richiedono le variabili binarie y_t e un legame con le quantità.
- ▶ Nella formulazione big-M il legame $x_t \leq M_t y_t$ è corretto per ogni M_t valido, ma il bound LP migliora quando M_t diminuisce: il valore forte è $\min\{cap_t, D_{t,m}\}$.
- ▶ La formulazione a cammino minimo scrive i piani come cammini in una rete, con il legame $\sum_k z_{v_{tk}} \leq y_t$ e senza valore di big-M: il suo rilassamento è il più forte.

Riepilogo (2/3)

- ▶ Le due formulazioni hanno lo stesso valore ottimo; differiscono nel lower bound e nella dimensione del modello.
- ▶ Il modello ULS è il modello big-M senza capacità e con $M_t = D_{t,m}$: sull'istanza di riferimento il suo valore ottimo è 170.
- ▶ Le varianti mantengono la struttura del modello big-M: più prodotti condividono la capacità con i loro tempi di setup, la scorta iniziale aggiunge le variabili si_p , gli straordinari aggiungono i tempi di lavoro μ_t, ν_t , e la domanda non soddisfatta aggiunge le variabili ε_{pt} . Sull'istanza di riferimento, gli straordinari danno 186 e la domanda non soddisfatta 172.

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento. Lower bound sul valore ottimo calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Senza setup	0	piano lot-for-lot
Big-M, $M_t = D_{t,m}$	99.65	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{dem}}) = \frac{9865}{99}$
Big-M, $M_t = \text{cap}_t$	137.5	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{cap}})$
Big-M forte	157.5	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{strong}})$
Cammino minimo	170	$z(\text{LP}_{\text{CLSP}}^{\text{SP}})$
Valore ottimo	180	piano (3, 0, 4, 4, 0)