

# Problemi di zaino

# Indice

Perché i problemi di zaino?

Panoramica della famiglia

Il problema dello zaino 0/1

Il problema del subset sum

Il problema dello zaino limitato

Il problema dello zaino illimitato

Il problema dello zaino multidimensionale

Il problema degli zaini multipli

Il problema dello zaino a scelta multipla

Il problema dello zaino con setup

Osservazioni

Errori tipici

In sintesi

# Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ enunciare la definizione del problema dello zaino 0/1 e delle sue varianti, con istanze e soluzioni ammissibili;
- ▶ spiegare le ipotesi sui dati e perché si possono fare senza perdita di generalità;
- ▶ contare le soluzioni candidate e le soluzioni ammissibili di una piccola istanza;
- ▶ trovare a mano una soluzione ammissibile e calcolare un semplice bound duale combinatorio;
- ▶ distinguere le varianti: copie degli oggetti, più risorse, più zaini, classi di oggetti.

# Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di ottimizzazione combinatoria](#)»: istanze, soluzioni ammissibili, bound primali e duali e gap.
- ▶ Dai *Preliminari*: sottoinsiemi di un insieme finito e il numero  $2^n$  di sottoinsiemi.

# Perché i problemi di zaino?

# Introduzione: perché i problemi di zaino?

- ▶ Prima delle definizioni, vediamo da dove nascono i problemi di zaino: una storia e alcune applicazioni
- ▶ Scegliere gli oggetti di maggior valore con una capacità limitata è una delle decisioni più comuni nella pratica
- ▶ Un po' di storia: il problema fu studiato agli albori della programmazione intera
- ▶ Chiudiamo con una sfida sull'istanza di riferimento del capitolo

# Una storia

- ▶ Un fondo ha un budget di  $c$  euro e  $n$  progetti candidati
- ▶ Il progetto  $j$  costa  $w_j$  euro e porta un profitto  $p_j$
- ▶ **Quali progetti finanziare per massimizzare il profitto totale?**



# La stessa struttura, ovunque

La stessa struttura compare quando:

- ▶ carichiamo il carico di maggior valore su un camion;
- ▶ scegliamo le pubblicità per uno spazio limitato;
- ▶ selezioniamo gli investimenti di un budget limitato.

In ogni caso:

- ▶ una **capacità**  $c$  (budget, carico, spazio);
- ▶ **oggetti**  $j$ , ciascuno con un **peso**  $w_j$  (quanto usa) e un **profitto**  $p_j$  (quanto porta).

- ▶ Il problema fu studiato agli albori della programmazione intera.
- ▶ **Dantzig (1957)** ordinò gli oggetti per efficienza  $p_j/w_j$  non crescente e usò questo ordine per risolvere la versione continua, un'idea che ritorna nei bound del corso.
- ▶ **Karp (1972)** inserì il problema del subset sum, chiamato knapsack nel suo articolo, fra i primi 21 problemi NP-completi. Il KP contiene il SSP come caso particolare  $p_j = w_j$ , quindi è NP-hard.
- ▶ **Ibarra e Kim (1975)** diedero il primo schema di approssimazione pienamente polinomiale per il problema dello zaino (più avanti nel corso).

# Una sfida

Prima di proseguire, proviamo a rispondere a due domande sull'istanza di riferimento del capitolo: capacità  $c = 9$  e 6 oggetti.

| Oggetti  |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti | $p_j$ | 6       | 5       | 8       | 9       | 6       | 7       |
| Pesi     | $w_j$ | 2       | 3       | 6       | 7       | 5       | 9       |

1. Quanti sottoinsiemi di oggetti sono ammissibili, e quale è il migliore?
2. Come possiamo essere sicuri che non esista niente di meglio, senza elencare tutti i sottoinsiemi?

Il capitolo risponde alla prima domanda e dà un primo bound per la seconda.

## Da dove nascono i problemi di zaino:

- ▶ Selezionare oggetti di profitto totale massimo entro una capacità: progetti entro un budget, carico su un camion, pubblicità in uno spazio, investimenti

## Storia:

- ▶ Dantzig (1957): l'ordine di efficienza  $p_j/w_j$
- ▶ Karp (1972): il problema del subset sum è NP-completo, quindi il KP è NP-hard
- ▶ Ibarra e Kim (1975): il primo schema di approssimazione pienamente polinomiale

# Panoramica della famiglia

# Introduzione: panoramica della famiglia

- ▶ In questa sezione incontriamo l'intera famiglia dei problemi di zaino
- ▶ Tutti i membri hanno gli stessi dati: oggetti con pesi e profitti, zaini con capacità
- ▶ Differiscono in poche caratteristiche: copie degli oggetti, numero di risorse, numero di zaini, classi di oggetti
- ▶ Questa è la mappa del capitolo: ogni membro è poi definito nella sua sezione

# I dati comuni

- ▶ I **problemi di zaino** hanno gli stessi dati:
  - ▶ un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,
  - ▶ per ogni oggetto  $j \in \mathcal{J}$  un *peso*  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un *profitto*  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,
  - ▶ uno o più zaini con una *capacità* in  $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ .
- ▶ Una soluzione decide quali oggetti selezionare, o quante copie di ogni oggetto: il peso totale degli oggetti selezionati non deve superare la capacità dello zaino che li riceve.
- ▶ L'obiettivo è massimizzare il profitto totale degli oggetti selezionati.

# La famiglia in una frase

Un problema di zaino seleziona oggetti di profitto totale massimo il cui peso totale rispetta le capacità.

I membri della famiglia differiscono nel numero di copie degli oggetti, nel numero di capacità e di zaini, e nelle classi in cui gli oggetti sono raggruppati.

## I membri della famiglia (1/2)

La tabella elenca i membri della famiglia; ciascuno è definito nella sua sezione.

| Problema                        | Sigla | Differenza rispetto al KP                          |
|---------------------------------|-------|----------------------------------------------------|
| problema dello zaino 0/1        | KP    | una copia di ogni oggetto, uno zaino               |
| problema del subset sum         | SSP   | $p_j = w_j$ , peso totale esattamente uguale a $c$ |
| problema dello zaino limitato   | BKP   | al più $b_j$ copie dell'oggetto $j$                |
| problema dello zaino illimitato | UKP   | un numero illimitato di copie di ogni oggetto      |

## I membri della famiglia (2/2)

| Problema                               | Sigla | Differenza rispetto al KP                                             |
|----------------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------------------|
| problema dello zaino multidimensionale | MDKP  | $k$ capacità $c_d$ e pesi $w_{dj}$                                    |
| problema degli zaini multipli          | MKP   | $m$ zaini con capacità $c_k$                                          |
| problema dello zaino a scelta multipla | MCKP  | classi $\mathcal{J}_h$ , esattamente un oggetto per classe            |
| problema dello zaino con setup         | KPS   | classi $\mathcal{J}_h$ con costi di setup $f_h$ e pesi di setup $s_h$ |

## Le varianti in breve

- ▶ Ogni problema della famiglia è illustrato su una piccola istanza, nella sua sezione e con la notazione di quella sezione.
- ▶ Le tabelle seguenti riportano, per queste istanze, il numero di soluzioni candidate, il numero di soluzioni ammissibili e il valore ottimo, calcolati per enumerazione.
- ▶ Nel BKP e nell'UKP una soluzione candidata è il vettore dei numeri di copie di ogni oggetto, così che copie identiche non sono contate due volte.
- ▶ La soluzione ottima non è sempre unica: l'MKP, l'MCKP e il KPS hanno più soluzioni ottime con lo stesso valore, e nel SSP tre sottoinsiemi raggiungono il valore obiettivo.

## Le varianti in breve: soluzioni candidate e ammissibili

| Variante | Soluzioni candidate                       | Numero | Ammissibili |
|----------|-------------------------------------------|--------|-------------|
| KP       | sottoinsiemi di 6 oggetti                 | 64     | 13          |
| SSP      | sottoinsiemi di 6 oggetti                 | 64     | 3           |
| BKP      | copie $x_j \leq b_j$                      | 144    | 18          |
| UKP      | copie $x_j \leq \hat{b}_j$                | 320    | 22          |
| MDKP     | sottoinsiemi di 4 oggetti                 | 16     | 9           |
| MKP      | ogni oggetto in uno zaino<br>o in nessuno | 243    | 109         |
| MCKP     | un oggetto per classe                     | 8      | 3           |
| KPS      | sottoinsiemi di 6 oggetti                 | 64     | 40          |

## Le varianti in breve: soluzioni ottime

| Variante | Ottimo | Soluzioni ottime                                                                     |
|----------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| KP       | 15     | $\{1, 4\}$                                                                           |
| SSP      | sì     | $\{6\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}$                                                          |
| BKP      | 18     | due copie dell'oggetto 1 e l'oggetto 5                                               |
| UKP      | 24     | quattro copie dell'oggetto 1                                                         |
| MDKP     | 14     | $\{3, 4\}$                                                                           |
| MKP      | 30     | $(S_1, S_2) = (\{1, 2\}, \{4, 5\}),$<br>$(\{2, 4\}, \{1, 5\}), (\{4, 5\}, \{1, 2\})$ |
| MCKP     | 17     | $\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}$                                                           |
| KPS      | 16     | $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}$                                           |

Nell'MCKP solo 3 delle 8 scelte di un oggetto per classe entrano nello zaino: la condizione di ammissibilità fra le ipotesi dell'MCKP non è una formalità.

## La famiglia:

- ▶ Stessi dati: oggetti con pesi  $w_j$  e profitti  $p_j$ , uno o più zaini con capacità
- ▶ Stesso obiettivo: massimizzare il profitto totale degli oggetti selezionati entro le capacità

## I membri:

- ▶ KP, SSP, BKP, UKP, MDPK, MKP, MCKP, KPS
- ▶ Differiscono per copie degli oggetti, risorse, zaini e classi di oggetti
- ▶ Sulle piccole istanze la soluzione ottima non è sempre unica

# Il problema dello zaino 0/1

# Introduzione: il problema dello zaino 0/1

- ▶ Definiamo il problema dello zaino 0/1 (KP), il membro di base della famiglia
- ▶ Ogni oggetto è selezionato (una volta) oppure no: una soluzione è un sottoinsieme di oggetti
- ▶ Introduciamo l'istanza di riferimento del capitolo
- ▶ Su di essa contiamo le soluzioni, troviamo una prima soluzione a occhio e calcoliamo un semplice bound duale

## Definizione 1: problema dello zaino 0/1

*Dati:*

1. *uno zaino di capacità  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*
2. *un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,*
3. *per ogni oggetto  $j \in \mathcal{J}$ , un profitto  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*

*il **problema dello zaino 0/1** (KP) chiede di decidere quali oggetti inserire nello zaino, in modo che il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità dello zaino e il profitto totale degli oggetti selezionati sia massimo.*

# Istanza del KP

Un'istanza del KP è specificata da:

1. due numeri interi:

il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

la capacità dello zaino  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

2. due vettori di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i profitti degli oggetti,

$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti.

# Soluzione ammissibile del KP

Una **soluzione ammissibile del KP** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \mathcal{I}$$

tale che il peso totale degli oggetti selezionati non supera la capacità dello zaino, ossia

$$\sum_{j \in S} w_j \leq c.$$

Di conseguenza, il KP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare un sottoinsieme di oggetti il cui peso totale rispetta la capacità dello zaino e il cui profitto totale è massimo.

## Il KP in termini formali

Data un'istanza del KP, il KP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \mathcal{I}} \left\{ \sum_{j \in S} p_j \quad : \quad \sum_{j \in S} w_j \leq c \right\}.$$

Vediamo ora un'istanza del KP con 6 oggetti:  
è l'**istanza di riferimento** del capitolo.

## Esempio (1/2)

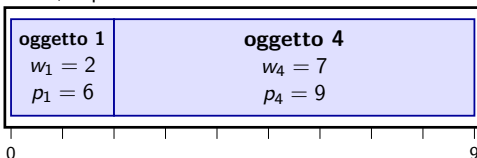
Consideriamo uno zaino di capacità  $c = 9$  e un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  di 6 oggetti ( $n = 6$ ), con i seguenti profitti e pesi:

| Oggetti  |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti | $p_j$ | 6       | 5       | 8       | 9       | 6       | 7       |
| Pesi     | $w_j$ | 2       | 3       | 6       | 7       | 5       | 9       |

- ▶ Nel disegno, lo zaino è una scatola di lunghezza  $c = 9$  e ogni oggetto è un blocco di lunghezza  $w_j$ .
- ▶ Gli oggetti 1 e 4 riempiono lo zaino, con peso 9 e profitto 15; gli altri oggetti restano fuori (tratteggiati).
- ▶ È l'istanza di riferimento del capitolo.

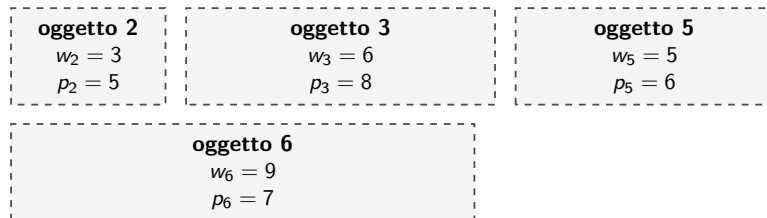
## Esempio (2/2)

zaino, capacità  $c = 9$



peso  $2 + 7 = 9$   
profitto  $6 + 9 = 15$

non selezionati



# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il peso totale di tutti gli oggetti supera la capacità dello zaino (altrimenti si potrebbero selezionare tutti gli oggetti).

Formalmente:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j > c$$

2. Ogni oggetto, da solo, entra nello zaino (altrimenti non può essere selezionato). Formalmente:

$$w_j \leq c, \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

Quante soluzioni ha l'istanza di riferimento?  
E quanto è buona una soluzione trovata a mano?

# Contare le soluzioni

- ▶ **Soluzioni candidate.** Ogni sottoinsieme di  $\mathcal{I}$  è una soluzione candidata, quindi ce ne sono  $2^n$  (vedi «[Problemi di ottimizzazione combinatoria](#)»). Per l'istanza di riferimento abbiamo  $2^6 = 64$ .
- ▶ **Soluzioni ammissibili.** I tre oggetti più leggeri pesano  $2 + 3 + 5 = 10 > 9$ , quindi nessun sottoinsieme con tre o più oggetti è ammissibile. Le soluzioni ammissibili sono l'insieme vuoto, i 6 singoletti e le 6 coppie della tabella seguente: 13 soluzioni su 64.

| coppia $S$ | $\{1, 2\}$ | $\{1, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{1, 5\}$ | $\{2, 3\}$ | $\{2, 5\}$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| peso       | 5          | 8          | 9          | 7          | 9          | 8          |
| profitto   | 11         | 14         | 15         | 12         | 13         | 11         |

# Una prima soluzione, a occhio

- ▶ L'oggetto 4 ha il profitto massimo (9, peso 7).
- ▶ La capacità residua  $9 - 7 = 2$  basta per l'oggetto 1 (peso 2, profitto 6).
- ▶ Il sottoinsieme  $\{1, 4\}$  ha peso 9 e profitto 15: è un **bound primale**,

$$LB = 15 \leq z(I).$$

Una soluzione ammissibile limita  $z(I)$  dal basso.

Per limitare  $z(I)$  dall'alto, contiamo quanti oggetti entrano al più.

### Osservazione 1: bound di cardinalità

*Sia  $\bar{k}$  il più grande intero tale che i  $\bar{k}$  oggetti più leggeri pesano al più  $c$ . Ogni sottoinsieme ammissibile ha al più  $\bar{k}$  oggetti, quindi  $z(I)$  è al più la somma dei  $\bar{k}$  profitti più grandi.*

# Dimostrazione

- ▶ Un sottoinsieme con  $k$  oggetti pesa almeno quanto i  $k$  oggetti più leggeri.
- ▶ Se  $k > \bar{k}$ , i  $k$  oggetti più leggeri pesano più di  $c$ , quindi il sottoinsieme non è ammissibile.
- ▶ Il profitto di un sottoinsieme con al più  $\bar{k}$  oggetti è al più la somma dei  $\bar{k}$  profitti più grandi.



# Un primo bound duale

- ▶ Nell'istanza di riferimento abbiamo  $\bar{k} = 2$ , poiché

$$2 + 3 = 5 \leq 9 \quad \text{e} \quad 2 + 3 + 5 = 10 > 9.$$

- ▶ I due profitti più grandi sono 9 e 8, quindi

$$UB = 9 + 8 = 17.$$

- ▶ La somma di tutti i profitti, 41, è un bound duale molto più debole.

# Il gap

- ▶ Abbiamo

$$15 \leq z(I) \leq 17 :$$

il gap assoluto è 2 e il gap relativo è  $\frac{2}{15}$ .

- ▶ Elencando i 13 sottoinsiemi ammissibili si vede che  $\{1, 4\}$  è l'unica soluzione ottima e  $z(I) = 15$ .
- ▶ Per istanze più grandi servono bound più forti, che vengono dai rilassamenti (modulo *Programmazione lineare intera*, «Bound primali e duali»).

## Il problema dello zaino 0/1:

- ▶ Una copia di ogni oggetto, uno zaino: una soluzione è un sottoinsieme  $S \subseteq \mathcal{I}$  con  $\sum_{j \in S} w_j \leq c$
- ▶ Ipotesi: non tutti gli oggetti entrano, ogni oggetto entra da solo
- ▶ Le soluzioni candidate sono  $2^n$

## Sull'istanza di riferimento:

- ▶ 13 sottoinsiemi ammissibili su 64
- ▶  $LB = 15$  a occhio,  $UB = 17$  dal bound di cardinalità
- ▶  $\{1, 4\}$  è l'unica soluzione ottima,  $z(I) = 15$

# Il problema del subset sum

# Introduzione: il problema del subset sum

- ▶ Il problema del subset sum (SSP) chiede di raggiungere *esattamente* un valore obiettivo con i pesi di un sottoinsieme di oggetti
- ▶ La sua risposta è sì oppure no: non è un problema di ottimizzazione
- ▶ Si può risolvere come un KP, ponendo i profitti uguali ai pesi
- ▶ È il caso particolare che rende il KP NP-hard

## Definizione 2: problema del subset sum

*Dati:*

1. un valore obiettivo  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,
2. un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,
3. per ogni oggetto  $j \in \mathcal{J}$ , un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

*il problema del subset sum (SSP) chiede se esiste un sottoinsieme di oggetti il cui peso totale è esattamente uguale al valore obiettivo  $c$ .*

# Istanza del SSP

Un'istanza del **SSP** è specificata da:

1. due numeri interi:

il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

il valore obiettivo  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

2. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti.

# Soluzione ammissibile del SSP

Una **soluzione ammissibile del SSP** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \mathcal{I}$$

tale che il peso totale degli oggetti selezionati è esattamente uguale al valore obiettivo, ossia

$$\sum_{j \in S} w_j = c.$$

Di conseguenza, il SSP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare un sottoinsieme di oggetti il cui peso totale coincide esattamente con il valore obiettivo.

## Il SSP in termini formali

Data un'istanza del SSP, il SSP si può enunciare formalmente come:

$$\text{trovare } S \subseteq \mathcal{I} \quad \text{tale che} \quad \sum_{j \in S} w_j = c.$$

## Esempio (1/2)

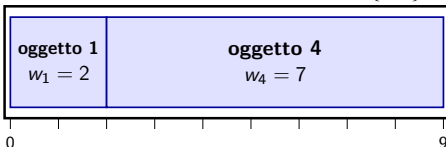
Consideriamo un valore obiettivo  $c = 9$  e un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  di 6 oggetti ( $n = 6$ ), con i seguenti pesi:

| Oggetti |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|---------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Pesi    | $w_j$ | 2       | 3       | 6       | 7       | 5       | 9       |

- ▶ Il sottoinsieme  $S = \{1, 4\}$  è ammissibile poiché  $w_1 + w_4 = 2 + 7 = 9$ .
- ▶ Anche il sottoinsieme  $S = \{6\}$  è ammissibile poiché  $w_6 = 9$ .
- ▶ Il disegno mostra i tre sottoinsiemi i cui pesi riempiono esattamente la scatola di lunghezza  $c = 9$ :  $\{1, 4\}$ ,  $\{6\}$  e  $\{2, 3\}$ .

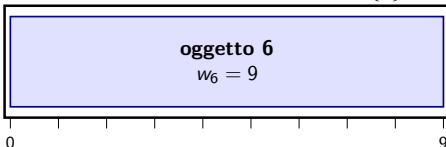
## Esempio (2/2)

valore obiettivo  $c = 9$ , sottoinsieme  $S = \{1, 4\}$



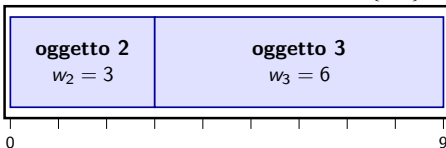
$$2 + 7 = 9$$

valore obiettivo  $c = 9$ , sottoinsieme  $S = \{6\}$



$$9 = 9$$

valore obiettivo  $c = 9$ , sottoinsieme  $S = \{2, 3\}$



$$3 + 6 = 9$$

# Risolvere il SSP con il KP

- ▶ Il SSP non è un **problema di ottimizzazione**, poiché la sua risposta è **sì** oppure **no**. Tuttavia, si può risolvere usando un problema di ottimizzazione.
- ▶ Un'istanza del SSP si può risolvere come un'istanza del KP ponendo il profitto di ogni oggetto uguale al suo peso, ossia

$$p_j = w_j, \quad \forall j \in \mathcal{I}.$$

# Risolvere il SSP con il KP: la risposta

In questo caso, risolviamo il seguente KP:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \mathcal{I}} \left\{ \sum_{j \in S} w_j \quad : \quad \sum_{j \in S} w_j \leq c \right\}.$$

- ▶ Se  $\sum_{j \in \tilde{S}} w_j = c$ , la risposta al SSP è **sì**.
- ▶ Altrimenti, se  $\sum_{j \in \tilde{S}} w_j < c$ , la risposta è **no**.

# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il peso totale di tutti gli oggetti è almeno pari al valore obiettivo (altrimenti non può esistere alcun sottoinsieme ammissibile). Formalmente:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \geq c$$

2. Il peso di ogni oggetto non supera il valore obiettivo (altrimenti l'oggetto non può appartenere ad alcun sottoinsieme ammissibile). Formalmente:

$$w_j \leq c, \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

## Il problema del subset sum:

- ▶ Trovare un sottoinsieme di oggetti il cui peso totale è esattamente uguale al valore obiettivo  $c$
- ▶ La risposta è sì oppure no: non è un problema di ottimizzazione

## Risolverlo con il KP:

- ▶ Porre  $p_j = w_j$  e risolvere il KP: la risposta è sì se e solo se il sottoinsieme ottimo pesa esattamente  $c$
- ▶ Nell'esempio tre sottoinsiemi raggiungono il valore obiettivo  $c = 9$ :  $\{1, 4\}$ ,  $\{6\}$ ,  $\{2, 3\}$

# Il problema dello zaino limitato

# Introduzione: il problema dello zaino limitato

- ▶ Nel problema dello zaino limitato (BKP) ogni oggetto è disponibile in più copie, al più  $b_j$
- ▶ La decisione è quante copie di ogni oggetto inserire
- ▶ La trasformiamo nella selezione di un sottoinsieme di un **insieme esteso degli oggetti**, un elemento per copia
- ▶ La stessa idea ritorna nel problema dello zaino illimitato

### Definizione 3: problema dello zaino limitato

*Dati:*

1. *uno zaino di capacità  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*
2. *un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,*
3. *per ogni oggetto  $j \in \mathcal{J}$ , un profitto  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un numero di copie disponibili  $b_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*

*il **problema dello zaino limitato** (BKP) chiede di decidere quante copie di ogni oggetto inserire nello zaino, in modo che il peso totale di tutte le copie selezionate non superi la capacità dello zaino, che nessun oggetto sia preso più volte delle sue copie disponibili e che il profitto totale di tutte le copie selezionate sia massimo.*

# Istanza del BKP

Un'istanza del BKP è specificata da:

1. due numeri interi:

il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

la capacità dello zaino  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

2. tre vettori di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i profitti degli oggetti,

$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti,

$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene il numero di copie disponibili di ogni oggetto.

# Insieme esteso degli oggetti

Data un'istanza del BKP, definiamo l'**insieme esteso degli oggetti** come

$$\hat{\mathcal{J}} = \{ (j, k) : j \in \mathcal{J}, k \in \{1, 2, \dots, b_j\} \},$$

dove ogni coppia  $(j, k)$  rappresenta la  $k$ -esima copia disponibile dell'oggetto  $j$ .

La cardinalità dell'insieme esteso degli oggetti è

$$|\hat{\mathcal{J}}| = \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j.$$

# Soluzione ammissibile del BKP

Una **soluzione ammissibile del BKP** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \hat{\mathcal{S}}$$

tale che il peso totale degli oggetti selezionati non supera la capacità dello zaino, ossia

$$\sum_{(j,k) \in S} w_j \leq c.$$

Di conseguenza, il BKP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare un sottoinsieme dell'insieme esteso degli oggetti il cui peso totale rispetta la capacità dello zaino e il cui profitto totale è massimo.

## Il BKP in termini formali

Data un'istanza del BKP, il BKP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \hat{\mathcal{I}}} \left\{ \sum_{(j,k) \in S} p_j : \sum_{(j,k) \in S} w_j \leq c \right\}.$$

## Esempio (1/3)

Consideriamo uno zaino di capacità  $c = 9$  e un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  di 6 oggetti ( $n = 6$ ), con i seguenti profitti, pesi e copie disponibili:

| Oggetti           |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|-------------------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti          | $p_j$ | 6       | 5       | 8       | 9       | 6       | 7       |
| Pesi              | $w_j$ | 2       | 3       | 6       | 7       | 5       | 9       |
| Copie disponibili | $b_j$ | 2       | 2       | 1       | 1       | 1       | 1       |

L'insieme esteso degli oggetti è:

$$\hat{\mathcal{I}} = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \\ (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1) \}.$$

## Esempio (2/3)

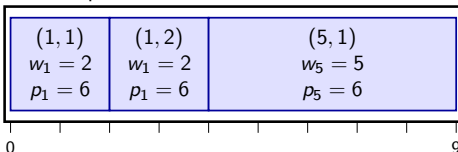
Ogni copia  $(j, k)$  ha profitto  $p_j$  e peso  $w_j$ .

| Etichetta<br>della copia | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $(j, k)$                 | (1, 1) | (1, 2) | (2, 1) | (2, 2) | (3, 1) | (4, 1) | (5, 1) | (6, 1) |
| Profitto $p_j$           | 6      | 6      | 5      | 5      | 8      | 9      | 6      | 7      |
| Peso $w_j$               | 2      | 2      | 3      | 3      | 6      | 7      | 5      | 9      |

Il disegno nella slide successiva mostra una soluzione ottima: le due copie dell'oggetto 1 e la copia dell'oggetto 5, con peso  $2 + 2 + 5 = 9$  e profitto  $6 + 6 + 6 = 18$ .

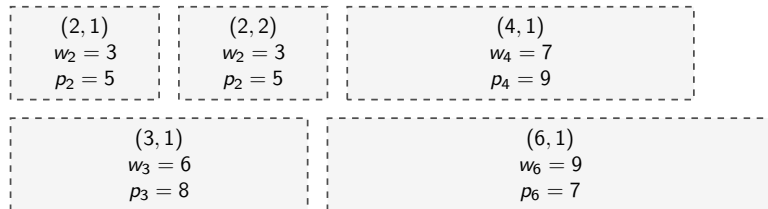
## Esempio (3/3)

zaino, capacità  $c = 9$



peso  $2 + 2 + 5 = 9$   
profitto  $6 + 6 + 6 = 18$

copie non selezionate



## Ipotesi (1/2)

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il peso totale di tutte le copie disponibili di tutti gli oggetti supera la capacità dello zaino (altrimenti si potrebbero selezionare tutte le copie). Formalmente:

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} b_j w_j > c$$

2. Ogni oggetto, da solo, entra nello zaino (altrimenti non può essere selezionato). Formalmente:

$$w_j \leq c, \quad \forall j \in \mathcal{I}$$

## Ipotesi (2/2)

3. Il peso totale di tutte le copie disponibili di un singolo oggetto non supera la capacità dello zaino (altrimenti quell'oggetto non potrebbe mai essere preso nel numero massimo di copie consentito). Formalmente:

$$b_j w_j \leq c, \quad \forall j \in \mathcal{I}$$

## Il problema dello zaino limitato:

- ▶ L'oggetto  $j$  si può prendere in al più  $b_j$  copie
- ▶ Una soluzione è un sottoinsieme dell'insieme esteso degli oggetti  $\hat{\mathcal{J}}$ , con  $|\hat{\mathcal{J}}| = \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j$
- ▶ Ipotesi: non tutte le copie entrano, ogni oggetto entra da solo, tutte le copie di un oggetto entrano

## Nell'esempio:

- ▶ 8 copie; una soluzione ottima prende le due copie dell'oggetto 1 e la copia dell'oggetto 5, con profitto 18

# Il problema dello zaino illimitato

# Introduzione: il problema dello zaino illimitato

- ▶ Nel problema dello zaino illimitato (UKP) ogni oggetto è disponibile in un numero illimitato di copie
- ▶ La capacità limita comunque le copie: calcoliamo il **massimo numero ammissibile di copie** di ogni oggetto
- ▶ Con esso costruiamo, come nel BKP, un insieme esteso degli oggetti
- ▶ Una soluzione è di nuovo un sottoinsieme dell'insieme esteso

## Definizione 4: problema dello zaino illimitato

*Dati:*

1. *uno zaino di capacità  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*
2. *un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,*
3. *per ogni oggetto  $j \in \mathcal{J}$ , disponibile in un numero illimitato di copie, un profitto  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*

*il **problema dello zaino illimitato** (UKP) chiede di decidere quante copie di ogni oggetto inserire nello zaino, in modo che il peso totale di tutte le copie selezionate non superi la capacità dello zaino e il profitto totale di tutte le copie selezionate sia massimo.*

# Istanza dell'UKP

Un'istanza dell'UKP è specificata da:

1. due numeri interi:

il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

la capacità dello zaino  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

2. due vettori di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i profitti degli oggetti,

$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti.

# Massimo numero ammissibile di copie e insieme esteso

- Data un'istanza dell'UKP, definiamo prima, per ogni oggetto  $j \in \mathcal{I}$ , il **massimo numero ammissibile di copie**

$$\hat{b}_j = \left\lfloor \frac{c}{w_j} \right\rfloor,$$

ossia il massimo numero di copie dell'oggetto  $j$  che si possono inserire nello zaino senza superarne la capacità.

- Definiamo poi l'**insieme esteso degli oggetti** come

$$\hat{\mathcal{I}} = \{ (j, k) : j \in \mathcal{I}, k \in \{1, 2, \dots, \hat{b}_j\} \},$$

dove ogni coppia  $(j, k)$  rappresenta la  $k$ -esima copia dell'oggetto  $j$ .

## Soluzione ammissibile dell'UKP

- ▶ La cardinalità dell'insieme esteso degli oggetti è

$$|\hat{\mathcal{I}}| = \sum_{j \in \mathcal{I}} \hat{b}_j.$$

- ▶ Una **soluzione ammissibile dell'UKP** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \hat{\mathcal{I}}$$

tale che il peso totale degli oggetti selezionati non supera la capacità dello zaino, ossia

$$\sum_{(j,k) \in S} w_j \leq c.$$

- ▶ Di conseguenza, l'UKP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare un sottoinsieme dell'insieme esteso degli oggetti il cui peso totale rispetta la capacità dello zaino e il cui profitto totale è massimo.

# L'UKP in termini formali

Data un'istanza dell'UKP, l'UKP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \hat{\mathcal{J}}} \left\{ \sum_{(j,k) \in S} p_j : \sum_{(j,k) \in S} w_j \leq c \right\}.$$

## Esempio (1/4)

Consideriamo uno zaino di capacità  $c = 9$  e un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  di 6 oggetti ( $n = 6$ ), con i seguenti profitti e pesi:

| Oggetti  |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti | $p_j$ | 6       | 5       | 8       | 9       | 6       | 7       |
| Pesi     | $w_j$ | 2       | 3       | 6       | 7       | 5       | 9       |

I massimi numeri ammissibili di copie dei singoli oggetti sono:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor}_{=4}, & \hat{b}_2 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor}_{=3}, & \hat{b}_3 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{6} \right\rfloor}_{=1}, \\ \hat{b}_4 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor}_{=1}, & \hat{b}_5 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor}_{=1}, & \hat{b}_6 &= \underbrace{\left\lfloor \frac{9}{9} \right\rfloor}_{=1}.\end{aligned}$$

## Esempio (2/4)

L'insieme esteso degli oggetti è:

$$\hat{\mathcal{J}} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1) \}.$$

Ogni copia  $(j, k)$  ha profitto  $p_j$  e peso  $w_j$ .

| Etichetta della copia | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $(j, k)$              | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (2, 1) | (2, 2) |
| Profitto $p_j$        | 6      | 6      | 6      | 6      | 5      | 5      |
| Peso $w_j$            | 2      | 2      | 2      | 2      | 3      | 3      |

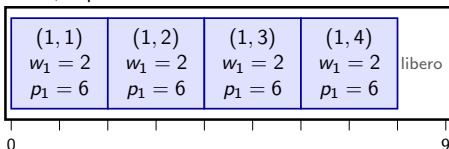
| Etichetta della copia | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $(j, k)$              | (2, 3) | (3, 1) | (4, 1) | (5, 1) | (6, 1) |
| Profitto $p_j$        | 5      | 8      | 9      | 6      | 7      |
| Peso $w_j$            | 3      | 6      | 7      | 5      | 9      |

## Esempio (3/4)

Il disegno nella slide successiva mostra una soluzione ottima:  
quattro copie dell'oggetto 1, con peso  $4 \cdot 2 = 8$  e profitto  
 $4 \cdot 6 = 24$ ;  
resta libera un'unità di capacità.

## Esempio (4/4)

zaino, capacità  $c = 9$



peso  $4 \cdot 2 = 8$   
profitto  $4 \cdot 6 = 24$

oggetti senza copie selezionate

|                                            |                                            |                                            |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| <b>oggetto 2</b><br>$w_2 = 3$<br>$p_2 = 5$ | <b>oggetto 4</b><br>$w_4 = 7$<br>$p_4 = 9$ | <b>oggetto 5</b><br>$w_5 = 5$<br>$p_5 = 6$ |
| <b>oggetto 3</b><br>$w_3 = 6$<br>$p_3 = 8$ | <b>oggetto 6</b><br>$w_6 = 9$<br>$p_6 = 7$ |                                            |

# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il peso totale di tutte le copie possibili di tutti gli oggetti (fino al numero massimo che entra nello zaino) supera la capacità dello zaino (altrimenti si potrebbero selezionare tutte le copie). Formalmente:

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} \hat{b}_j w_j > c$$

2. Ogni oggetto, da solo, entra nello zaino (altrimenti non può essere selezionato). Formalmente:

$$w_j \leq c, \quad \forall j \in \mathcal{I}$$

## Il problema dello zaino illimitato:

- ▶ Ogni oggetto è disponibile in un numero illimitato di copie
- ▶ La capacità le limita: al più  $\hat{b}_j = \lfloor c/w_j \rfloor$  copie dell'oggetto  $j$
- ▶ Una soluzione è un sottoinsieme dell'insieme esteso degli oggetti, con  $|\hat{\mathcal{J}}| = \sum_{j \in \mathcal{J}} \hat{b}_j$

## Nell'esempio:

- ▶ 11 copie; una soluzione ottima prende quattro copie dell'oggetto 1, con profitto 24

# Il problema dello zaino multidimensionale

# Introduzione: il problema dello zaino multidimensionale

- ▶ Nel problema dello zaino multidimensionale (MDKP) lo zaino ha  $k$  dimensioni, ciascuna con la sua capacità
- ▶ Ogni oggetto ha un peso in ogni dimensione
- ▶ Un sottoinsieme di oggetti è ammissibile solo se rispetta *tutte* le capacità
- ▶ Più risorse consumate insieme: una situazione comune nella pratica

## Definizione 5: problema dello zaino multidimensionale

*Dati:*

1. *uno zaino  $k$ -dimensionale,*
2. *per ogni dimensione  $d \in \underbrace{\{1, 2, \dots, k\}}_{=\mathcal{D}}$ , una capacità*  
 $c_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$
3. *un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,*
4. *per ogni oggetto  $j \in \mathcal{I}$ , un profitto  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$*
5. *per ogni dimensione  $d \in \mathcal{D}$  e ogni oggetto  $j \in \mathcal{I}$ , un peso  $w_{dj} \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$*

*il **problema dello zaino multidimensionale** (MDKP) chiede di decidere quali oggetti inserire nello zaino, in modo che per ogni dimensione il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità corrispondente e il profitto totale degli oggetti selezionati sia massimo.*

# Istanza dell'MDKP

Un'istanza dell'MDKP è specificata da:

1. due numeri interi:  
il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  
il numero di dimensioni  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,
2. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :  
 $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i profitti degli oggetti,
3. un vettore di numeri interi di lunghezza  $k$ :  
 $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^k$ , che contiene le capacità dello zaino per ogni dimensione,
4. una matrice di numeri interi con  $k$  righe e  $n$  colonne:  
 $\mathbf{W} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{k \times n}$ , che contiene i pesi degli oggetti per ogni dimensione.

# Soluzione ammissibile dell'MDKP

Una **soluzione ammissibile dell'MDKP** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \mathcal{I}$$

tale che i vincoli di capacità sono soddisfatti in ogni dimensione, ossia

$$\sum_{j \in S} w_{dj} \leq c_d \quad \forall d \in \mathcal{D}.$$

Di conseguenza, l'MDKP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare un sottoinsieme di oggetti il cui peso totale rispetta le capacità dello zaino in ogni dimensione e il cui profitto totale è massimo.

# L'MDKP in termini formali

Data un'istanza dell'MDKP, l'MDKP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \mathcal{J}} \left\{ \sum_{j \in S} p_j \quad : \quad \sum_{j \in S} w_{dj} \leq c_d \quad \forall d \in \mathcal{D} \right\}.$$

## Esempio (1/2)

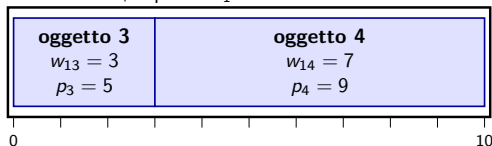
Consideriamo uno zaino 2-dimensionale ( $k = 2$ ) con capacità  $c_1 = 10$  e  $c_2 = 12$ , e un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$  di 4 oggetti ( $n = 4$ ), con i seguenti profitti e pesi:

| Oggetti       |          | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ |
|---------------|----------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti      | $p_j$    | 6       | 7       | 5       | 9       |
| Pesi (dim. 1) | $w_{1j}$ | 4       | 5       | 3       | 7       |
| Pesi (dim. 2) | $w_{2j}$ | 6       | 4       | 5       | 3       |

- ▶ Il disegno ha una scatola per dimensione, di lunghezza  $c_1 = 10$  e  $c_2 = 12$ : un oggetto selezionato occupa un blocco di lunghezza  $w_{1j}$  nella prima scatola e uno di lunghezza  $w_{2j}$  nella seconda.
- ▶ La soluzione ottima  $\{3, 4\}$  riempie la prima dimensione e usa 8 unità della seconda, con profitto  $5 + 9 = 14$ .

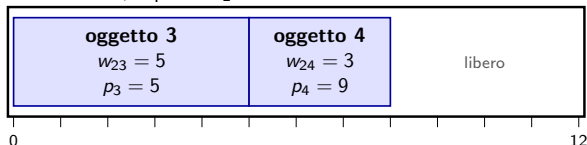
## Esempio (2/2)

dimensione 1, capacità  $c_1 = 10$



peso  $3 + 7 = 10$

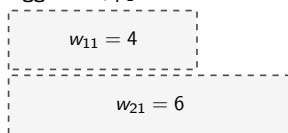
dimensione 2, capacità  $c_2 = 12$



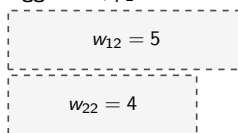
peso  $5 + 3 = 8$

non selezionati (sopra: dimensione 1, sotto: dimensione 2)

**oggetto 1**,  $p_1 = 6$



**oggetto 2**,  $p_2 = 7$



# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. L'insieme di tutti gli oggetti *non* entra nello zaino (altrimenti selezionare tutti gli oggetti è ammissibile e ottimo).  
Formalmente,

$$\exists d \in \mathcal{D} \text{ tale che } \sum_{j \in \mathcal{I}} w_{dj} > c_d.$$

2. Ogni oggetto, da solo, entra nello zaino in ogni dimensione (altrimenti non può mai essere selezionato). Formalmente,

$$w_{dj} \leq c_d, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \forall j \in \mathcal{I}.$$

## Il problema dello zaino multidimensionale:

- ▶  $k$  dimensioni con capacità  $c_d$ , e pesi  $w_{dj}$  dell'oggetto  $j$  nella dimensione  $d$
- ▶ Una soluzione è un sottoinsieme  $S \subseteq \mathcal{I}$  che rispetta ogni capacità
- ▶ Ipotesi: l'insieme di tutti gli oggetti supera qualche capacità, ogni oggetto entra da solo in ogni dimensione

## Nell'esempio:

- ▶ La soluzione ottima  $\{3, 4\}$  ha profitto 14

# Il problema degli zaini multipli

# Introduzione: il problema degli zaini multipli

- ▶ Nel problema degli zaini multipli (MKP) ci sono  $m$  zaini, ciascuno con la sua capacità
- ▶ Decidiamo quali oggetti inserire in ogni zaino; ogni oggetto va in al più uno zaino
- ▶ Una soluzione è una famiglia di sottoinsiemi di oggetti a due a due disgiunti, uno per ogni zaino

## Definizione 6: problema degli zaini multipli

*Dati:*

1.  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  zaini,
2. per ogni zaino  $k \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{K}}$ , una capacità  $c_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,
3. un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,
4. per ogni oggetto  $j \in \mathcal{J}$ , un profitto  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

*il **problema degli zaini multipli** (MKP) chiede di decidere quali oggetti inserire in ogni zaino, in modo che in ogni zaino il peso totale degli oggetti assegnati non superi la sua capacità e il profitto totale degli oggetti selezionati sia massimo.*

# Istanza dell'MKP

Un'istanza dell'MKP è specificata da:

1. due numeri interi:  
il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  
il numero di zaini  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,
2. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :  
 $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i profitti degli oggetti,
3. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :  
 $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti,
4. un vettore di numeri interi di lunghezza  $m$ :  
 $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$ , che contiene le capacità degli zaini.

# Soluzione ammissibile dell'MKP

Una **soluzione ammissibile dell'MKP** è una famiglia di sottoinsiemi di oggetti

$$\mathcal{S} = \{S_k\}_{k \in \mathcal{K}}, \quad S_k \subseteq \mathcal{I} \quad \text{per ogni } k \in \mathcal{K},$$

tale che:

(i) ogni oggetto è assegnato ad al più uno zaino, ossia

$$S_k \cap S_{k'} = \emptyset \quad \text{per ogni } k, k' \in \mathcal{K} \text{ con } k \neq k';$$

(ii) il peso totale degli oggetti assegnati a ogni zaino rispetta la sua capacità, ossia

$$\sum_{j \in S_k} w_j \leq c_k \quad \text{per ogni } k \in \mathcal{K}.$$

# L'MKP in termini formali

Di conseguenza, l'MKP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare sottoinsiemi di oggetti a due a due disgiunti, uno per ogni zaino, in modo che ogni capacità sia rispettata e il profitto totale sia massimo.

Data un'istanza dell'MKP, l'MKP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S=\{S_k\}_{k \in \mathcal{K}}} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in S_k} p_j : \begin{array}{l} S_k \subseteq \mathcal{I} \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\ S_k \cap S_{k'} = \emptyset \quad \forall k, k' \in \mathcal{K} \text{ con } k \neq k', \\ \sum_{j \in S_k} w_j \leq c_k \quad \forall k \in \mathcal{K} \end{array} \right\}.$$

## Esempio (1/2)

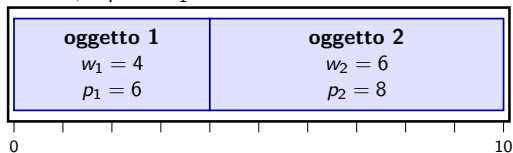
Consideriamo  $m = 2$  zaini con capacità  $c_1 = 10$  e  $c_2 = 12$ , e un insieme  $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  di 5 oggetti ( $n = 5$ ), con i seguenti profitti e pesi:

| Oggetti  |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ |
|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti | $p_j$ | 6       | 8       | 5       | 7       | 9       |
| Pesi     | $w_j$ | 4       | 6       | 5       | 3       | 7       |

Il disegno nella slide successiva mostra una soluzione ottima:  $S_1 = \{1, 2\}$  nello zaino 1 e  $S_2 = \{4, 5\}$  nello zaino 2, con profitto totale  $14 + 16 = 30$ ; l'oggetto 3 resta fuori.

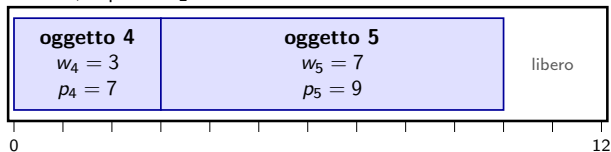
## Esempio (2/2)

zaino 1, capacità  $c_1 = 10$



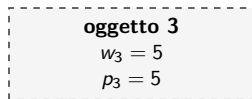
peso  $4 + 6 = 10$   
profitto  $6 + 8 = 14$

zaino 2, capacità  $c_2 = 12$



peso  $3 + 7 = 10$   
profitto  $7 + 9 = 16$

non selezionati



# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. L'insieme di tutti gli oggetti *non* entra nel complesso degli zaini (altrimenti selezionare tutti gli oggetti è ammissibile e ottimo). Formalmente,

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j > \sum_{k \in \mathcal{K}} c_k.$$

2. Ogni oggetto, da solo, entra in (almeno) uno zaino (altrimenti non può mai essere selezionato). Formalmente,

$$\forall j \in \mathcal{J} \quad \exists k \in \mathcal{K} \text{ tale che } w_j \leq c_k.$$

## Il problema degli zaini multipli:

- ▶  $m$  zaini con capacità  $c_k$ ; ogni oggetto va in al più uno zaino
- ▶ Una soluzione è una famiglia  $\{S_k\}_{k \in \mathcal{K}}$  di sottoinsiemi a due a due disgiunti, ciascuno entro la sua capacità
- ▶ Ipotesi: gli oggetti non entrano tutti insieme, ogni oggetto entra da solo in almeno uno zaino

## Nell'esempio:

- ▶  $S_1 = \{1, 2\}$ ,  $S_2 = \{4, 5\}$ , profitto totale 30; l'oggetto 3 resta fuori

# Il problema dello zaino a scelta multipla

# Introduzione: il problema dello zaino a scelta multipla

- ▶ Nel problema dello zaino a scelta multipla (MCKP) gli oggetti sono partizionati in classi
- ▶ Dobbiamo selezionare **esattamente un** oggetto da ogni classe, entro la capacità dello zaino
- ▶ A causa della parola «esattamente», un'istanza può essere inammissibile: vediamo una condizione semplice che lo esclude

## Definizione 7: problema dello zaino a scelta multipla

*Dati:*

1. *uno zaino di capacità  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*
2. *un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,*
3. *una partizione dell'insieme degli oggetti in  $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  classi,*
4. *per ogni classe  $h \in \{1, 2, \dots, q\}$ , il sottoinsieme  $\mathcal{I}_h \subseteq \mathcal{I}$  degli oggetti di quella classe,*
5. *per ogni oggetto  $j \in \mathcal{I}$ , un profitto  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*

*il **problema dello zaino a scelta multipla** (MCKP) chiede di decidere quali oggetti inserire nello zaino, in modo che da ogni classe sia selezionato esattamente un oggetto, che il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità dello zaino e che il profitto totale degli oggetti selezionati sia massimo.*

# Istanza dell'MCKP (1/2)

Un'istanza dell'MCKP è specificata da:

1. due numeri interi:

il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

la capacità dello zaino  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

2. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i profitti degli oggetti,

3. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti,

# Istanza dell'MCKP (2/2)

4. un numero intero:

il numero di classi  $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,

5. una famiglia di sottoinsiemi:

$\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_q\}$ , una partizione di  $\mathcal{I}$  in  $q$  classi, dove  $\mathcal{I}_h \subseteq \mathcal{I}$  è l'insieme degli oggetti che appartengono alla classe  $h$ .

# Soluzione ammissibile dell'MCKP

Una **soluzione ammissibile dell'MCKP** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \mathcal{I}$$

tale che:

- (i) da ogni classe è selezionato esattamente un oggetto, ossia

$$|S \cap \mathcal{I}_h| = 1 \quad \text{per ogni } h \in \{1, 2, \dots, q\};$$

- (ii) il peso totale degli oggetti selezionati non supera la capacità dello zaino, ossia

$$\sum_{j \in S} w_j \leq c.$$

## L'MCKP in termini formali

Di conseguenza, l'MCKP si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare esattamente un oggetto da ogni classe in modo che la capacità dello zaino sia rispettata e il profitto totale sia massimo.

Data un'istanza dell'MCKP, l'MCKP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \mathcal{J}} \left\{ \sum_{j \in S} p_j : \sum_{j \in S} w_j \leq c, |S \cap \mathcal{J}_h| = 1 \ \forall h \in \{1, 2, \dots, q\} \right\}.$$

## Esempio (1/2)

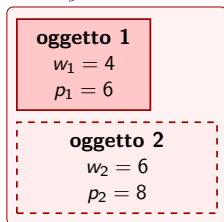
Consideriamo uno zaino di capacità  $c = 15$  e un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  di 6 oggetti ( $n = 6$ ). Gli oggetti sono partizionati in  $q = 3$  classi:  $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{3, 4\}$ ,  $\mathcal{I}_3 = \{5, 6\}$ . I profitti e i pesi sono i seguenti:

| Oggetti  |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Profitti | $p_j$ | 6       | 8       | 5       | 7       | 4       | 9       |
| Pesi     | $w_j$ | 4       | 6       | 5       | 8       | 3       | 7       |

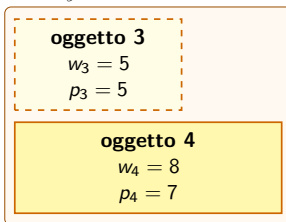
- ▶ Nel disegno ogni classe è un gruppo colorato: l'oggetto scelto in ogni classe è disegnato pieno, l'altro tratteggiato.
- ▶ Una soluzione ottima,  $\{1, 4, 5\}$ , riempie lo zaino, con peso  $4 + 8 + 3 = 15$  e profitto  $6 + 7 + 4 = 17$ .

## Esempio (2/2)

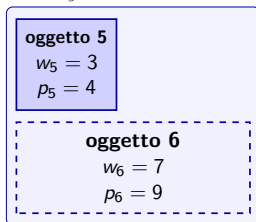
classe  $\mathcal{I}_1$



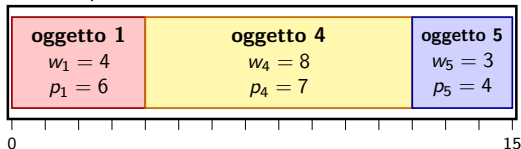
classe  $\mathcal{I}_2$



classe  $\mathcal{I}_3$



zaino, capacità  $c = 15$



$$\begin{aligned}\text{peso } 4 + 8 + 3 &= 15 \\ \text{profitto } 6 + 7 + 4 &= 17\end{aligned}$$

# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Ogni classe contiene almeno un oggetto (altrimenti selezionare esattamente un oggetto da ogni classe è impossibile).

Formalmente:

$$\mathcal{J}_h \neq \emptyset \quad \forall h \in \{1, \dots, q\}.$$

2. L'istanza è ammissibile, ossia esiste almeno una scelta di esattamente un oggetto per classe che entra nello zaino. Una condizione necessaria e sufficiente (e facile da verificare) è:

$$\sum_{h=1}^q \min_{j \in \mathcal{J}_h} w_j \leq c.$$

## Il problema dello zaino a scelta multipla:

- ▶ Gli oggetti sono partizionati in  $q$  classi  $\mathcal{J}_h$
- ▶ Una soluzione seleziona esattamente un oggetto per classe, entro la capacità
- ▶ L'ammissibilità non è garantita: vale se e solo se
$$\sum_{h=1}^q \min_{j \in \mathcal{J}_h} w_j \leq c$$

## Nell'esempio:

- ▶ Solo 3 delle 8 scelte entrano;  $\{1, 4, 5\}$  e  $\{2, 3, 5\}$  sono ottime, con profitto 17

# Il problema dello zaino con setup

# Introduzione: il problema dello zaino con setup

- ▶ Nel problema dello zaino con setup (KPS) gli oggetti sono partizionati in classi
- ▶ Usare una classe ha un prezzo: un **costo di setup** nell'obiettivo e un **peso di setup** nello zaino
- ▶ Il setup si paga una volta per ogni classe con almeno un oggetto selezionato (una **classe attivata**)
- ▶ L'obiettivo è il ricavo totale meno i costi di setup

## Definizione 8: problema dello zaino con setup

*Dati:*

1. *uno zaino di capacità  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*
2. *un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$  di  $n$  oggetti,*
3. *una partizione dell'insieme degli oggetti in  $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  classi,*
4. *per ogni classe  $h \in \{1, 2, \dots, q\}$ , il sottoinsieme  $\mathcal{I}_h \subseteq \mathcal{I}$  degli oggetti di quella classe, con un costo di setup  $f_h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un peso di setup  $s_h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  associati,*
5. *per ogni oggetto  $j \in \mathcal{I}$ , un ricavo  $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  e un peso  $w_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,*

*il **problema dello zaino con setup** (KPS) chiede di decidere quali oggetti inserire nello zaino, in modo che il peso totale degli oggetti selezionati più i pesi di setup delle loro classi non superi la capacità dello zaino e il ricavo totale degli oggetti selezionati meno i costi di setup delle loro classi sia massimo.*

# Istanza del KPS (1/2)

Un'istanza del KPS è specificata da:

1. due numeri interi:

il numero di oggetti  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  
la capacità dello zaino  $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,

2. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i ricavi degli oggetti,

3. un vettore di numeri interi di lunghezza  $n$ :

$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ , che contiene i pesi degli oggetti,

## Istanza del KPS (2/2)

4. un numero intero:

il numero di classi  $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,

5. una famiglia di sottoinsiemi:

$\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_q\}$ , una partizione di  $\mathcal{I}$  in  $q$  classi, dove  $\mathcal{I}_h \subseteq \mathcal{I}$  è l'insieme degli oggetti che appartengono alla classe  $h$ ,

6. due vettori di numeri interi di lunghezza  $q$ :

$\mathbf{f} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^q$ , che contiene i costi di setup delle classi,

$\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^q$ , che contiene i pesi di setup delle classi.

# Soluzione ammissibile del KPS

- ▶ Una **soluzione ammissibile del KPS** è un sottoinsieme di oggetti

$$S \subseteq \mathcal{I}.$$

- ▶ Dato  $S$ , definiamo l'insieme delle **classi attivate** come

$$\mathcal{H}(S) := \{ h \in \{1, 2, \dots, q\} : S \cap \mathcal{I}_h \neq \emptyset \}.$$

- ▶ Il sottoinsieme  $S$  è ammissibile se il peso totale degli oggetti selezionati più i pesi di setup delle classi attivate non supera la capacità dello zaino, ossia

$$\sum_{j \in S} w_j + \sum_{h \in \mathcal{H}(S)} s_h \leq c.$$

## Il KPS in termini formali

Di conseguenza, il KPS si può enunciare in modo equivalente come il problema di selezionare un sottoinsieme di oggetti che massimizza il ricavo totale degli oggetti selezionati meno i costi di setup delle classi attivate.

Data un'istanza del KPS, il KPS si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{S} \in \arg \max_{S \subseteq \mathcal{I}} \left\{ \sum_{j \in S} p_j - \sum_{h \in \mathcal{H}(S)} f_h : \sum_{j \in S} w_j + \sum_{h \in \mathcal{H}(S)} s_h \leq c \right\}.$$

## Esempio (1/3)

- ▶ Consideriamo uno zaino di capacità  $c = 20$  e un insieme  $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  di 6 oggetti ( $n = 6$ ).
- ▶ Gli oggetti sono partizionati in  $q = 2$  classi:  $\mathcal{J}_1 = \{1, 2, 3\}$  e  $\mathcal{J}_2 = \{4, 5, 6\}$ .
- ▶ Ogni classe ha un costo di setup e un peso di setup:  $f_1 = 3$ ,  $s_1 = 2$  per la classe 1, e  $f_2 = 4$ ,  $s_2 = 3$  per la classe 2.
- ▶ I ricavi e i pesi degli oggetti sono i seguenti:

| Oggetti |       | $j = 1$ | $j = 2$ | $j = 3$ | $j = 4$ | $j = 5$ | $j = 6$ |
|---------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Ricavi  | $p_j$ | 6       | 8       | 5       | 7       | 9       | 4       |
| Pesi    | $w_j$ | 4       | 5       | 3       | 6       | 7       | 2       |

## Esempio (2/3)

- ▶ Nel disegno le classi hanno due colori, e un blocco più scuro è il setup di una classe, con il suo peso  $s_h$  e il suo costo  $f_h$ .
- ▶ Una soluzione ottima,  $\{1, 2, 3, 6\}$ , attiva entrambe le classi.
- ▶ Il peso è

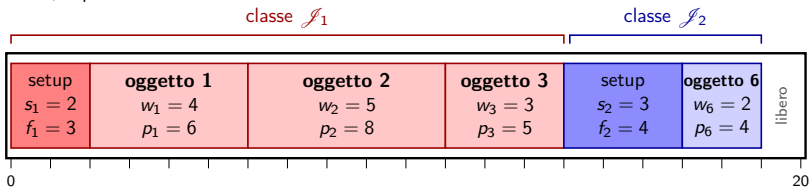
$$(2 + 4 + 5 + 3) + (3 + 2) = 19 \leq 20$$

e il valore è

$$(6 + 8 + 5 + 4) - (3 + 4) = 16.$$

## Esempio (3/3)

zaino, capacità  $c = 20$



non selezionati



# Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Ogni classe contiene almeno un oggetto. Formalmente:

$$\mathcal{I}_h \neq \emptyset \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

2. Ogni oggetto entra nello zaino insieme al peso di setup della sua classe (altrimenti non può mai essere selezionato).

Formalmente:

$$w_j + s_h \leq c \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}, \forall j \in \mathcal{I}_h.$$

## Il problema dello zaino con setup:

- ▶ Classi  $\mathcal{I}_h$  con costo di setup  $f_h$  e peso di setup  $s_h$
- ▶ Il setup di una classe si paga solo se la classe è attivata, ossia se almeno uno dei suoi oggetti è selezionato
- ▶ Obiettivo: ricavo totale meno i costi di setup delle classi attivate

## Nell'esempio:

- ▶  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{4, 5, 6\}$  e  $\{1, 2, 3, 6\}$  sono ottime, con valore 16

# Osservazioni

# Introduzione: osservazioni

- ▶ Chiudiamo il capitolo con tre osservazioni storiche sul KP
- ▶ Collegano questo capitolo a ciò che viene più avanti nel corso: bound, complessità e approssimazione

# Osservazioni storiche

- ▶ **Dantzig (1957)** ordinò gli oggetti per efficienza  $p_j/w_j$  non crescente e usò questo ordine per risolvere la versione continua del KP; lo stesso ordine ritorna nei bound visti più avanti nel corso.
- ▶ **Karp (1972)** inserì il problema del subset sum, chiamato knapsack nel suo articolo, fra i primi 21 problemi NP-completi. Il KP contiene il SSP come caso particolare  $p_j = w_j$ , quindi è NP-hard.
- ▶ **Ibarra e Kim (1975)** diedero il primo schema di approssimazione pienamente polinomiale (FPTAS) per il KP.

## Osservazioni:

- ▶ L'ordine di efficienza  $p_j/w_j$  non crescente risale a Dantzig (1957)
- ▶ Il KP è NP-hard, poiché contiene il SSP ( $p_j = w_j$ ), uno dei 21 problemi NP-completi di Karp
- ▶ Il KP ha uno schema di approssimazione pienamente polinomiale (Ibarra e Kim, 1975)

# Errori tipici

# Introduzione: errori tipici

- ▶ Elenchiamo gli errori più frequenti sui problemi di zaino
- ▶ Riguardano le differenze fra le varianti, l'ordine di efficienza e le ipotesi sui dati
- ▶ Conoscerli aiuta a leggere e risolvere correttamente gli esercizi

## Osservazione 2: Errori tipici (1/3)

- ▶ **Confondere il KP con il SSP.** Il SSP chiede un peso totale esattamente uguale a  $c$  e ha una risposta sì/no; è il KP con  $p_j = w_j$ , in cui la risposta è sì se il valore ottimo è  $c$ .
- ▶ **Fermarsi all'ordine di efficienza.** Prendere gli oggetti nell'ordine  $1, 2, 3, \dots$  di  $p_j/w_j$  non crescente dà  $\{1, 2\}$  con profitto 11, mentre la soluzione ottima dell'istanza di riferimento è  $\{1, 4\}$  con profitto 15.

### Osservazione 3: Errori tipici (2/3)

- ▶ ***Contare copie identiche come soluzioni diverse.***  
*Nel BKP e nell'UKP le copie  $(j, k)$  dello stesso oggetto sono intercambiabili: sottoinsiemi diversi dell'insieme esteso degli oggetti possono dare lo stesso riempimento.*
- ▶ ***Scegliere al più un oggetto per classe.*** *Nell'MCKP si seleziona esattamente un oggetto per classe, quindi un'istanza può essere inammissibile; nel KPS una classe senza oggetti selezionati non costa nulla.*

### Osservazione 4: Errori tipici (3/3)

- ***Dimenticare le ipotesi.*** *Un oggetto con  $w_j > c$  non può mai essere selezionato, e se tutti gli oggetti entrano il problema è banale: entrambi i casi si eliminano prima di risolvere.*

## Errori tipici:

- ▶ Il SSP non è il KP: valore obiettivo esatto, risposta sì/no
- ▶ L'ordine di efficienza non dà una soluzione ottima
- ▶ Le copie identiche sono intercambiabili: si contano una volta
- ▶ MCKP: esattamente un oggetto per classe; KPS: una classe non usata non costa nulla
- ▶ Eliminare i casi banali con le ipotesi prima di risolvere

# In sintesi

# Introduzione: in sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con il quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento: i bound trovati finora

## Riepilogo (1/2)

- ▶ Il KP seleziona un sottoinsieme di oggetti di peso al più  $c$  e profitto massimo; una soluzione è un sottoinsieme, e le candidate sono  $2^n$  sottoinsiemi.
- ▶ Il SSP, il BKP, l'UKP, l'MDKP, l'MKP, l'MCKP e il KPS cambiano il numero di copie, di risorse, di zaini o la struttura degli oggetti; ciascuno ha le sue ipotesi sui dati.
- ▶ Una soluzione trovata a occhio è un bound primale; il bound di cardinalità è un bound duale che usa solo i pesi e i profitti.
- ▶ L'ordine di efficienza non basta a trovare una soluzione ottima, neppure su una piccola istanza.

### Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento.

| KP, istanza di riferimento (max) | lower bound   | upper bound               | da          |
|----------------------------------|---------------|---------------------------|-------------|
| questo capitolo                  | 15 (a occhio) | 17 (bound di cardinalità) | definizione |

- ▶ Il gap assoluto è 2; elencando i 13 sottoinsiemi ammissibili si vede che  $z(I) = 15$ .
- ▶ Per istanze più grandi, bound più forti vengono dai rilassamenti.