

Formulazioni dei problemi di zaino



Indice

Panoramica della famiglia

Un modello PLI per il problema dello zaino 0/1

Un primo rilassamento lineare

Un secondo rilassamento lineare

Upper bound per il problema dello zaino 0/1

Un modello PLI per il problema del subset sum

Un modello PLI per il problema dello zaino limitato

Un modello PLI per il problema dello zaino illimitato

Un modello PLI per il problema dello zaino multidimensionale

Un modello PLI per il problema degli zaini multipli

Un modello PLI per il problema dello zaino a scelta multipla

Un modello PLI per il problema dello zaino con setup

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere il modello PLI del problema dello zaino 0/1 e spiegare ciascuno dei suoi vincoli;
- ▶ scrivere i modelli PLI del SSP, del BKP, dell'UKP, del MDPK, del MKP, del MCKP e del KPS, e scriverli su un'istanza numerica;
- ▶ scrivere i due rilassamenti lineari e i loro duali, e calcolarne le soluzioni ottime con formule chiuse;
- ▶ calcolare l'oggetto critico, la capacità residua e il valore $z(LP_{KP})$;
- ▶ calcolare gli upper bound di Dantzig e di Martello-Toth, arrotondandoli correttamente;
- ▶ spiegare perché $z(LP_{KP})$ non supera mai il doppio di $z(ILP_{KP})$.

Prerequisiti

- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare*, il capitolo «[Teoria della dualità](#)»: il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «[Programmazione lineare intera](#)» e «[Bound primali e duali](#)»: problemi PLI, rilassamenti lineari e upper bound.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di zaino](#)»: il problema dello zaino 0/1 e le sue varianti, le loro ipotesi e le loro istanze di riferimento.

Panoramica della famiglia

Introduzione: panoramica della famiglia

- ▶ In questo capitolo scriviamo un modello PLI per ogni problema di zaino: il problema dello zaino 0/1 e le sue varianti
- ▶ Per il problema dello zaino 0/1 studiamo anche due rilassamenti lineari, i loro duali e due upper bound
- ▶ Prima vediamo che cosa hanno in comune tutti i modelli di zaino: le stesse variabili, lo stesso vincolo, lo stesso obiettivo

Variabili, vincoli e obiettivo

- ▶ I modelli PLI dei problemi di zaino usano una variabile x_j per ogni oggetto $j \in \mathcal{J}$: una **variabile binaria** quando l'oggetto è selezionato o no, una **variabile intera** quando conta le copie selezionate dell'oggetto.
- ▶ Ogni capacità dà un **vincolo di zaino** sul peso totale degli oggetti selezionati, e la funzione obiettivo ne massimizza il profitto totale.
- ▶ I membri della famiglia aggiungono un indice alle variabili (lo zaino k dell'oggetto j nel MKP), alcuni vincoli sulle classi di oggetti (MCKP, KPS) o variabili binarie di setup y_h (KPS).

Lo schema comune dei modelli di zaino

Lo schema comune dei modelli di zaino è

$$\max \left\{ \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j : \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \quad x_j \in D_j \quad \forall j \in \mathcal{J} \right\},$$

dove il dominio D_j è $\{0, 1\}$, $\{0, 1, \dots, b_j\}$ o $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

I membri della famiglia cambiano i domini e aggiungono capacità, zaini o classi.

I membri della famiglia

La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI; le sezioni seguenti scrivono i modelli in quest'ordine.

Problema	Modello	Variabili
KP	ILP_{KP}	binarie x_j
SSP	ILP_{SSP}	binarie x_j
BKP	ILP_{BKP}	interi $x_j \in \{0, 1, \dots, b_j\}$
UKP	ILP_{UKP}	interi $x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
MDKP	ILP_{MDKP}	binarie x_j , un vincolo per capacità
MKP	ILP_{MKP}	binarie x_{jk} , oggetto j nello zaino k
MCKP	ILP_{MCKP}	binarie x_j , un oggetto per classe
KPS	ILP_{KPS}	binarie x_j e variabili di setup y_h

La famiglia dei modelli di zaino:

- ▶ Una variabile x_j per oggetto: binaria, o intera quando conta le copie dell'oggetto
- ▶ Un vincolo di zaino per ogni capacità; l'obiettivo massimizza il profitto totale

I membri della famiglia:

- ▶ Cambiano i domini D_j e aggiungono capacità, zaini o classi
- ▶ Il KPS aggiunge anche variabili binarie di setup y_h

Un modello PLI per il problema dello zaino 0/1



Introduzione: un modello PLI per il KP

- ▶ Il problema dello zaino 0/1 e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI: le variabili, la funzione obiettivo e il vincolo
- ▶ Tutto il capitolo si basa su questo modello: i rilassamenti, i duali e gli upper bound partono da qui

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall j \in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{=\mathcal{J}}.$$

Il modello ILP_{KP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino 0/1 (KP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \\ & \text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{KP} .

Descrizione del modello ILP_{KP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{KP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il profitto totale degli oggetti selezionati nello zaino;
- ▶ il vincolo di capacità garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio (1/2)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9

Questa è l'istanza del KP del capitolo «Problemi di zaino», e in questo capitolo la chiamiamo **istanza di riferimento**.

Esempio (2/2)

Il modello ILP_{KP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(ILP_{KP})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(ILP_{KP})$ è 15. La soluzione ottima associata del KP è $\tilde{S} = \{1, 4\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

Il modello ILP_{KP} :

- ▶ n variabili binarie x_j : l'oggetto j è selezionato nello zaino o no
- ▶ L'obiettivo massimizza il profitto totale; un vincolo di capacità
- ▶ I vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili

Nell'istanza di riferimento:

- ▶ L'unica soluzione ottima è $\tilde{S} = \{1, 4\}$, con $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) = 15$

Un primo rilassamento lineare

Introduzione: un primo rilassamento lineare

- ▶ Rilassando i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ del modello ILP_{KP} otteniamo un modello PL: il suo valore ottimo è un upper bound su $z(ILP_{KP})$
- ▶ In questa sezione scriviamo un primo rilassamento lineare e il suo modello duale
- ▶ Calcoliamo una soluzione ottima primale e una soluzione ottima duale con formule chiuse, e ne dimostriamo l'ottimalità con la dualità forte della PL

Il modello $LP-0_{KP}$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{KP} , rilassiamo i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$, $\forall j \in \mathcal{J}$, con i seguenti:

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Questo modello PL si chiama modello $LP-0_{KP}$.

Esempio (1/2)

Il modello LP-0_{KP} per l'istanza di riferimento del KP è:

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Esempio (2/2)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP-0}_{\text{KP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{KP}})$ è 27.

Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq 27$$

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{KP}})$

Con una variabile duale non negativa π per il vincolo di capacità, il modello duale del modello LP-0_{KP} è:

$$\min \quad c \pi$$

$$\text{soggetto a} \quad w_j \pi \geq p_j, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\pi \geq 0.$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP-0}_{\text{KP}})$.

Esempio

Il modello duale $D(LP-0_{KP})$ per l'istanza di riferimento del KP è:

$$\begin{array}{llll} \min & 9 & \pi & \\ \text{soggetto a} & 2 & \pi & \geq 6 \\ & 3 & \pi & \geq 5 \\ & 6 & \pi & \geq 8 \\ & 7 & \pi & \geq 9 \\ & 5 & \pi & \geq 6 \\ & 9 & \pi & \geq 7 \\ & & \pi & \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\pi}(D(LP-0_{KP}))$ è:

$$\tilde{\pi} = 3$$

Il valore ottimo $z(D(LP-0_{KP}))$ è 27.

Soluzioni ottime del primale e del duale

La seguente proposizione fornisce le formule per calcolare una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{KP}$ e del modello duale $D(LP-0_{KP})$.

Proposizione 1

Se il primo oggetto $j = 1$ ha l'efficienza massima, una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{KP}$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{c}{w_1} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n\}, \quad (1)$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP-0_{KP})$ è:

$$\tilde{\pi} = \frac{p_1}{w_1}. \quad (2)$$

Corollario 1

Il valore ottimo dei modelli primale LP-0_{KP} e duale D(LP-0_{KP}) è:

$$z(\text{LP-0}_{\text{KP}}) = p_1 \frac{c}{w_1} = z(D(\text{LP-0}_{\text{KP}})) \quad (3)$$

- ▶ Nell'istanza di riferimento l'oggetto 1 ha l'efficienza massima:
 $p_1 \frac{c}{w_1} = 6 \cdot \frac{9}{2} = 27$, il valore dell'esempio precedente

L'idea della dimostrazione

La dimostrazione procede in tre passi:

1. mostriamo che (1) è una soluzione ammissibile del modello primale $LP-0_{KP}$;
2. mostriamo che (2) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP-0_{KP})$;
3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità forte della PL, (1) e (2) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione (1/3)

1. Abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_j = w_1 \frac{c}{w_1} = c$$

quindi il vincolo di capacità è soddisfatto.

Poiché $\tilde{x}_j \geq 0$, per ogni $j \in \mathcal{J}$, i vincoli $x_j \geq 0$ sono soddisfatti.

Quindi (1) è una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{KP}.

Dimostrazione (2/3)

2. Per ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo:

$$w_j \tilde{\pi} = w_j \frac{p_1}{w_1} \geq p_j \quad \text{poiché} \quad \frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_j}{w_j}$$

quindi i vincoli $w_j \pi \geq p_j$ sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{\pi} \geq 0$, quindi il vincolo $\pi \geq 0$ è soddisfatto.

Quindi (2) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{KP}})$.

Dimostrazione (3/3)

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \tilde{x}_j = p_1 \frac{c}{w_1} = c \tilde{\pi}$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità forte della PL, (1) e (2) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.



Il primo rilassamento lineare:

- ▶ LP-0_{KP} sostituisce $x_j \in \{0, 1\}$ con $x_j \geq 0$; il suo duale ha una sola variabile π
- ▶ Con l'oggetto 1 di efficienza massima: $\tilde{x}_1 = c/w_1$, $\tilde{\pi} = p_1/w_1$, valore $p_1 c/w_1$
- ▶ L'ottimalità segue da ammissibilità primale, ammissibilità duale e valori uguali (dualità forte)

Nell'istanza di riferimento:

- ▶ $z(\text{LP-0}_{\text{KP}}) = 27$, quindi $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq 27$

Un secondo rilassamento lineare

Introduzione: un secondo rilassamento lineare

- ▶ Il primo rilassamento permette molte copie dello stesso oggetto: ora teniamo i limiti superiori $x_j \leq 1$
- ▶ Scriviamo il secondo rilassamento lineare LP_{KP} e il suo duale, e introduciamo l'efficienza di un oggetto, l'oggetto critico e la capacità residua
- ▶ Con essi calcoliamo soluzioni ottime primale e duale con formule chiuse
- ▶ Infine dimostriamo che $z(LP_{KP})$ non supera mai il doppio di $z(ILP_{KP})$

Il modello LP_{KP}

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{KP} , rilassiamo i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$, $\forall j \in \mathcal{J}$, con i seguenti:

$$x_j \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{KP} .

Esempio (1/2)

Il modello LP_{KP} per l'istanza di riferimento del KP è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 6x_1 & + 5x_2 & + 8x_3 & + 9x_4 & + 6x_5 & + 7x_6 & \\ \text{soggetto a} & 2x_1 & + 3x_2 & + 6x_3 & + 7x_4 & + 5x_5 & + 9x_6 & \leq 9 \\ & x_1 & & & & & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & & \leq 1 \\ & & & & x_4 & & & \leq 1 \\ & & & & & x_5 & & \leq 1 \\ & & & & & & x_6 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0 \end{array}$$

Esempio (2/2)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ è $\frac{49}{3}$.

Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \frac{49}{3}$$

Il modello duale $D(\text{LP}_{\text{KP}})$

Con una variabile duale non negativa π per il vincolo di capacità e una variabile duale non negativa μ_j per ogni vincolo $x_j \leq 1$, il modello duale del modello LP_{KP} è:

$$\min \quad c \pi + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j$$

$$\text{soggetto a} \quad w_j \pi + \mu_j \geq p_j, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\pi \geq 0,$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP}_{\text{KP}})$.

Esempio (1/2)

Il modello duale $D(LP_{KP})$ per l'istanza di riferimento del KP è:

$$\begin{array}{llllllll} \min & 9 & \pi & + \mu_1 & + \mu_2 & + \mu_3 & + \mu_4 & + \mu_5 & + \mu_6 \\ \text{soggetto a} & 2 & \pi & + \mu_1 & & & & & \geq 6 \\ & 3 & \pi & & + \mu_2 & & & & \geq 5 \\ & 6 & \pi & & & + \mu_3 & & & \geq 8 \\ & 7 & \pi & & & & + \mu_4 & & \geq 9 \\ & 5 & \pi & & & & & + \mu_5 & \geq 6 \\ & 9 & \pi & & & & & & + \mu_6 \geq 7 \\ & & \pi, & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, & \mu_6 \geq 0 \end{array}$$

Esempio (2/2)

Una soluzione ottima $(\tilde{\pi}, \tilde{\mu})(D(LP_{KP}))$ è:

$$\tilde{\pi} = \frac{4}{3}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{10}{3}, \quad \tilde{\mu}_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(D(LP_{KP}))$ è $\frac{49}{3}$, lo stesso valore di $z(LP_{KP})$.

Definizione 1: efficienza

L'efficienza di un oggetto $j \in \mathcal{J}$ è il rapporto fra il suo profitto e il suo peso:

$$\frac{p_j}{w_j}$$

- L'efficienza di un oggetto misura la sua redditività per unità di peso: indica quanto profitto si ottiene per ogni unità di peso.

Esempio

Consideriamo l'istanza di riferimento del KP. Abbiamo:

Oggetti		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
Profitti	p_j	6	5	8	9	6	7
Pesi	w_j	2	3	6	7	5	9
Efficienze	$\frac{p_j}{w_j}$	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{9}$

Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché:

$$3 \geq \frac{5}{3} \geq \frac{4}{3} \geq \frac{9}{7} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{7}{9}$$

Ordinare gli oggetti

Ordinare gli oggetti per efficienza non crescente richiede un algoritmo di ordinamento con tempo di calcolo $O(n \log n)$, che è una funzione polinomiale del numero n di oggetti.

- D'ora in poi gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente: le prossime definizioni e formule richiedono quest'ordine

Definizione 2: oggetto critico e capacità residua

Dato un insieme $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ di n oggetti ordinati per efficienza non crescente, l'**oggetto critico** è l'oggetto

$$s \in \mathcal{I} \quad \text{tale che} \quad \sum_{j=1}^{s-1} w_j \leq c \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^s w_j > c$$

e la **capacità residua** è

$$rc = c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j$$

Oggetto critico e capacità residua: osservazioni

- L'oggetto critico è il primo che non entra per intero nello zaino se tutti i precedenti sono selezionati. In inglese si chiama **split item**, **break item** o **critical item**, e si può scrivere come

$$s = \min \left\{ j \in \mathcal{J} : \sum_{k=1}^j w_k > c \right\}$$

- La capacità residua è la capacità dello zaino che resta quando tutti gli oggetti che precedono l'oggetto critico sono selezionati. Soddisfa $0 \leq rc < w_s$.

Esempio

Per l'istanza di riferimento del KP, l'oggetto critico è $s = 3$ poiché:

$$\sum_{j=1}^2 w_j = 2 + 3 = 5 \leq 9 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^3 w_j = 2 + 3 + 6 = 11 > 9$$

e la capacità residua è:

$$rc = c - \sum_{j=1}^2 w_j = 9 - 2 - 3 = 4$$

Formule chiuse per LP_{KP} e il suo duale

- ▶ La seguente proposizione fornisce le formule per calcolare una soluzione ottima del modello primale LP_{KP} e del modello duale $D(LP_{KP})$.
- ▶ Le formule usano l'ordine degli oggetti per efficienza non crescente, l'oggetto critico s e la capacità residua rc definiti sopra.

Proposizione 2

Se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, una soluzione ottima del modello primale LP_{KP} è:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j &= 1, & \forall j \in \{1, 2, \dots, s-1\}, \\ \tilde{x}_s &= \frac{rc}{w_s}, \\ \tilde{x}_j &= 0, & \forall j \in \{s+1, s+2, \dots, n\},\end{aligned}\tag{4}$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP_{KP})$ è:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} &= \frac{p_s}{w_s}, \\ \tilde{\mu}_j &= p_j - w_j \frac{p_s}{w_s}, & \forall j \in \{1, 2, \dots, s-1\}, \\ \tilde{\mu}_j &= 0, & \forall j \in \{s, s+1, \dots, n\}.\end{aligned}\tag{5}$$

Corollario 2

Il valore ottimo dei modelli primale LP_{KP} e duale $D(LP_{KP})$ è:

$$z(LP_{KP}) = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \frac{rc}{w_s} = z(D(LP_{KP})) \quad (6)$$

- Gli oggetti prima dell'oggetto critico sono selezionati, l'oggetto critico si prende in parte, gli altri si scartano

L'idea della dimostrazione

La dimostrazione procede in tre passi:

1. mostriamo che (4) è una soluzione ammissibile del modello primale LP_{KP} ;
2. mostriamo che (5) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP_{KP})$;
3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità forte della PL, (4) e (5) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione (1/4)

1. Abbiamo:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_j = \sum_{j=1}^{s-1} w_j + w_s \frac{rc}{w_s} = \sum_{j=1}^{s-1} w_j + c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j = c$$

quindi il vincolo di capacità è soddisfatto.

Poiché $rc < w_s$, abbiamo $0 \leq \tilde{x}_j \leq 1$, per ogni $j \in \mathcal{J}$. Di conseguenza, i vincoli $x_j \leq 1$ e $x_j \geq 0$ sono soddisfatti.

Quindi (4) è una soluzione ammissibile del modello primale LP_{KP} .

Dimostrazione (2/4)

2. Per ogni $j \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, abbiamo:

$$w_j \tilde{\pi} + \tilde{\mu}_j = w_j \frac{p_s}{w_s} + \left(p_j - w_j \frac{p_s}{w_s} \right) = p_j$$

e, per ogni $j \in \{s, s+1, \dots, n\}$, abbiamo:

$$w_j \tilde{\pi} + \tilde{\mu}_j = w_j \frac{p_s}{w_s} \geq p_j \quad \text{poich} \quad \frac{p_s}{w_s} \geq \frac{p_j}{w_j}$$

quindi i vincoli $w_j \pi + \mu_j \geq p_j$ sono soddisfatti.

Dimostrazione (3/4)

Abbiamo $\tilde{\pi} \geq 0$. Per ogni $j \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, abbiamo:

$$p_j - w_j \frac{p_s}{w_s} \geq 0 \quad \text{poich} \quad \frac{p_j}{w_j} \geq \frac{p_s}{w_s}$$

di conseguenza, $\tilde{\mu}_j \geq 0$ per ogni $j \in \mathcal{J}$. Quindi il vincolo $\pi \geq 0$ e i vincoli $\mu_j \geq 0$ sono soddisfatti.

Quindi (5) è una soluzione ammissibile del modello duale $D(\text{LP}_{\text{KP}})$.

Dimostrazione (4/4)

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \tilde{x}_j &= \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \frac{rc}{w_s} \\&= \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \frac{p_s}{w_s} \left(c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j \right) \\&= c \frac{p_s}{w_s} + \sum_{j=1}^{s-1} \left(p_j - w_j \frac{p_s}{w_s} \right) \\&= c \tilde{\pi} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{\mu}_j\end{aligned}$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono. Quindi, per la dualità forte della PL, (4) e (5) sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale. □

Quanto è stretto $z(\text{LP}_{\text{KP}})$?

Nella maggior parte delle istanze del KP il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ supera di poco uno:

$z(\text{LP}_{\text{KP}})$ è tipicamente un upper bound stretto per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$.

Una dimostrazione alternativa

- ▶ Riportiamo una dimostrazione alternativa delle formule (4). Procediamo per assurdo, dimostrando che una soluzione diversa non può essere ottima.
- ▶ In questa dimostrazione supponiamo che gli oggetti con la stessa efficienza siano fusi in un unico oggetto. Poiché possiamo scegliere qualunque frazione di un oggetto, questo non cambia il problema, ed evitiamo di discutere le soluzioni simmetriche.

Dimostrazione (1/3)

Supponiamo che $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ sia una soluzione ottima di LP_{KP} diversa da $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ determinata con le formule (4).

Ogni soluzione ottima di LP_{KP} ha peso totale pari a c , cioè il vincolo di capacità è soddisfatto all'uguaglianza (altrimenti si può migliorare).

Supponiamo che non esista una coppia di oggetti $h < k$ con $\bar{x}_h < 1$ e $\bar{x}_k > 0$. Allora $\bar{\mathbf{x}}$ seleziona gli oggetti in ordine di efficienza, riempiendo lo zaino oggetto per oggetto fino al peso c : questa è esattamente $\tilde{\mathbf{x}}$, assurdo.

Quindi una tale coppia di oggetti $h < k$ esiste (il caso $k = s$ è incluso).

Dimostrazione (2/3)

Sia:

$$d = \min \{ w_k \bar{x}_k, w_h (1 - \bar{x}_h) \} > 0$$

Costruiamo una nuova soluzione ammissibile $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ identica a $\bar{\mathbf{x}}$ tranne che:

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k - \frac{d}{w_k} \geq 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_h = \bar{x}_h + \frac{d}{w_h} \leq 1$$

Per la definizione di d , abbiamo $\hat{x}_k \geq 0$ e $\hat{x}_h \leq 1$, e $\hat{\mathbf{x}}$ è una soluzione ammissibile poiché:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \hat{x}_j = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \bar{x}_j + w_h \frac{d}{w_h} - w_k \frac{d}{w_k} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \bar{x}_j = c$$

Dimostrazione (3/3)

Il valore della funzione obiettivo di $\hat{\mathbf{x}}$ è:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \hat{x}_j = \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \bar{x}_j + d \underbrace{\left(\frac{p_h}{w_h} - \frac{p_k}{w_k} \right)}_{>0 \text{ poich } \frac{p_h}{w_h} > \frac{p_k}{w_k}} > \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j \bar{x}_j$$

Allora il valore della funzione obiettivo di $\hat{\mathbf{x}}$ è maggiore del valore della funzione obiettivo di $\bar{\mathbf{x}}$, contro il fatto che $\bar{\mathbf{x}}$ è una soluzione ottima.

La disuguaglianza stretta $p_h/w_h > p_k/w_k$ vale per ogni $h < k$, poiché gli oggetti con la stessa efficienza sono stati fusi. □

Esempio (1/2)

Per l'istanza di riferimento del KP, abbiamo $s = 3$ e $rc = 4$.

Con le formule (4), calcoliamo la seguente soluzione ottima del modello LP_{KP} :

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = 0$$

Con la formula (6), il valore ottimo di entrambi i modelli PL, primale e duale, è:

$$\sum_{j=1}^2 p_j + p_s \frac{rc}{w_s} = 6 + 5 + 8 \frac{2}{3} = \frac{49}{3}$$

Esempio (2/2)

Con le formule (5), calcoliamo la seguente soluzione ottima del modello $D(LP_{KP})$:

$$\tilde{\pi} = \frac{4}{3},$$

$$\tilde{\mu}_1 = 6 - 2 \frac{4}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\tilde{\mu}_2 = 5 - 3 \frac{4}{3} = 1,$$

$$\tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = \tilde{\mu}_5 = \tilde{\mu}_6 = 0$$

Sono le soluzioni ottime trovate negli esempi dei modelli LP_{KP} e $D(LP_{KP})$.

Alcune proprietà teoriche importanti

- ▶ Le due proposizioni seguenti mostrano che il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è al più due per tutte le istanze del KP. Inoltre, esistono istanze per cui il valore due si raggiunge asintoticamente quando la capacità $c \rightarrow +\infty$.

Proposizione 3

Per ogni istanza del KP abbiamo:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \leq 2$$

Dimostrazione (1/3)

Consideriamo due soluzioni ammissibili del modello ILP_{KP} :

1. La soluzione che seleziona tutti gli oggetti che precedono l'oggetto critico:

$$\bar{x}_j = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, s-1\} \quad \text{e}$$

$$\bar{x}_j = 0, \quad \forall j \in \{s, s+1, \dots, n\}$$

che è ammissibile per definizione di oggetto critico, e fornisce il lower bound valido:

$$\sum_{j=1}^{s-1} p_j \leq z(ILP_{KP})$$

Dimostrazione (2/3)

2. La soluzione che seleziona solo l'oggetto critico:

$$\bar{x}_j = 0, \quad \forall j \in \mathcal{J} \setminus \{s\} \quad \text{e} \quad \bar{x}_s = 1$$

che è ammissibile per l'ipotesi $w_s \leq c$, e fornisce il lower bound valido:

$$p_s \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}})$$

Dimostrazione (3/3)

Sommando le due disuguaglianze otteniamo:

$$2 z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \geq \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \geq z(\text{LP}_{\text{KP}})$$

e quindi:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \leq 2$$



Il rapporto due si può avvicinare

Proposizione 4

Esistono istanze del KP tali che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \rightarrow 2 \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty$$

- ▶ La dimostrazione costruisce una famiglia di istanze con due oggetti, ciascuno dei quali entra da solo nello zaino, mentre i due insieme no

Dimostrazione (1/3)

Dato $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, consideriamo l'istanza del KP con capacità dello zaino $c = 2\vartheta$ e $n = 2$ oggetti con i seguenti profitti e pesi:

$$p_1 = 1, \quad w_1 = \vartheta + 1 \quad \text{e} \quad p_2 = 1, \quad w_2 = \vartheta + 1$$

Poiché si può selezionare un solo oggetto, una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ del modello ILP_{KP} è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{ILP}_{\text{KP}}) = 1$$

Dimostrazione (2/3)

L'oggetto critico è $s = 2$, e la capacità residua è:

$$rc = 2\vartheta - (\vartheta + 1) = \vartheta - 1$$

Di conseguenza, una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}})$ del modello LP_{KP} è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1}$$

e

$$z(\text{LP}_{\text{KP}}) = 1 + \frac{\vartheta - 1}{\vartheta + 1} = \frac{2\vartheta}{\vartheta + 1}$$

Dimostrazione (3/3)

Ne segue che:

$$\begin{aligned}\lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} &= \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\vartheta}{\vartheta+1}}{1} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{2(\vartheta+1) - 2}{\vartheta+1} \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\frac{2}{\vartheta+1}}_{\rightarrow 0} = 2\end{aligned}$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{KP}})}{z(\text{ILP}_{\text{KP}})} \rightarrow 2 \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty$$



Riepilogo (1/2)

Il secondo rilassamento lineare:

- ▶ LP_{KP} sostituisce $x_j \in \{0, 1\}$ con $0 \leq x_j \leq 1$; il suo duale ha le variabili π e μ_j
- ▶ L'efficienza dell'oggetto j è p_j/w_j ; ordinare gli oggetti richiede tempo $O(n \log n)$
- ▶ L'oggetto critico s è il primo oggetto che non entra per intero; la capacità residua è $rc = c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j$

Formule chiuse:

- ▶ $\tilde{x}_j = 1$ prima di s , $\tilde{x}_s = rc/w_s$, $\tilde{x}_j = 0$ dopo s ; $\tilde{\pi} = p_s/w_s$
- ▶ $z(LP_{KP}) = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s rc/w_s$

Riepilogo (2/2)

Proprietà:

- ▶ $z(\text{LP}_{\text{KP}})$ è tipicamente un upper bound stretto per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$
- ▶ Per ogni istanza $z(\text{LP}_{\text{KP}}) \leq 2 z(\text{ILP}_{\text{KP}})$, e il rapporto due si avvicina per $c \rightarrow +\infty$

Nell'istanza di riferimento:

- ▶ $s = 3$, $rc = 4$ e $z(\text{LP}_{\text{KP}}) = \frac{49}{3}$, molto meglio di $z(\text{LP-0}_{\text{KP}}) = 27$

Upper bound per il problema dello zaino 0/1

Introduzione: upper bound per il KP

- ▶ I profitti sono interi, quindi $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è intero: un upper bound si può arrotondare per difetto
- ▶ In questa sezione vediamo due upper bound calcolati con l'oggetto critico: il bound di Dantzig e il bound di Martello-Toth
- ▶ Entrambi si calcolano con formule chiuse, a partire dall'oggetto critico e dalla capacità residua

L'upper bound di Dantzig

- Le due proposizioni seguenti richiedono che gli oggetti siano ordinati per efficienza non crescente.

Proposizione 5: upper bound di Dantzig

Per ogni istanza del KP abbiamo:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor}_{\text{UB}_D} \quad (7)$$

*e UB_D si chiama **upper bound di Dantzig** per il KP.*

Dimostrazione

Abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}) \rfloor = \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s \frac{rc}{w_s} \right\rfloor$$

che è un upper bound valido per $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ poiché $p_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, per ogni $j \in \mathcal{I}$.



L'upper bound di Martello-Toth: gli oggetti $s - 1$ e $s + 1$

- ▶ Il bound di Martello-Toth usa gli oggetti $s - 1$ e $s + 1$.
- ▶ Poiché $w_1 \leq c$ e $\sum_j w_j > c$ abbiamo $s \geq 2$, quindi l'oggetto $s - 1$ esiste sempre.
- ▶ Se $s = n$ l'oggetto $s + 1$ non esiste, e poniamo $p_{n+1}/w_{n+1} := 0$: in questo caso $UB_0 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j$.

Proposizione 6: upper bound di Martello-Toth

Per ogni istanza del KP abbiamo:

$$z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \text{UB}_{\text{MT}} = \max \left\{ \text{UB}_0, \text{UB}_1 \right\} \quad (8)$$

dove

$$\text{UB}_0 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor rc \frac{p_{s+1}}{w_{s+1}} \right\rfloor$$

$$\text{UB}_1 = \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \left\lfloor p_s - (w_s - rc) \frac{p_{s-1}}{w_{s-1}} \right\rfloor$$

*e UB_{MT} si chiama **upper bound di Martello-Toth** per il KP.*

Dimostrazione

Poiché x_s non può assumere un valore frazionario, una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ si ottiene da una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}})$ o senza l'oggetto critico s o con l'oggetto critico s , e quindi togliendo almeno uno dei primi $s - 1$ oggetti.

1. Se l'oggetto critico è escluso, abbiamo $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \text{UB}_0$ poiché la capacità residua rc si riempie con oggetti di efficienza massima possibile $\frac{p_{s+1}}{w_{s+1}}$
2. Se l'oggetto critico è incluso, abbiamo $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \text{UB}_1$ poiché supponiamo che l'oggetto da togliere abbia esattamente il peso minimo necessario $w_s - rc$ e l'efficienza minima possibile $\frac{p_{s-1}}{w_{s-1}}$



Esempio (1/3)

Per l'istanza di riferimento del KP, con la formula (7) calcoliamo l'upper bound di Dantzig:

$$\text{UB}_D = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 \frac{rc}{w_3} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 8 \frac{2}{3} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor = 16$$

Esempio (2/3)

Con la formula (8) calcoliamo l'upper bound di Martello-Toth:

$$UB_0 = \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor rc \frac{p_4}{w_4} \right\rfloor = 6 + 5 + \left\lfloor 4 \frac{9}{7} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{36}{7} \right\rfloor = 16$$

$$\begin{aligned} UB_1 &= \sum_{j=1}^2 p_j + \left\lfloor p_3 - (w_3 - rc) \frac{p_2}{w_2} \right\rfloor \\ &= 6 + 5 + \left\lfloor 8 - (6 - 4) \frac{5}{3} \right\rfloor = 11 + \left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 15 \end{aligned}$$

Esempio (3/3)

L'upper bound di Martello-Toth è:

$$UB_{MT} = \max \left\{ UB_0, UB_1 \right\} = \max \left\{ 16, 15 \right\} = 16$$

Per questa istanza del KP, l'upper bound di Martello-Toth è forte quanto l'upper bound di Dantzig.

Upper bound per il KP (oggetti ordinati per efficienza non crescente):

- ▶ Dantzig: $UB_D = \lfloor z(LP_{KP}) \rfloor$, valido perché i profitti sono interi
- ▶ Martello-Toth: $UB_{MT} = \max\{UB_0, UB_1\}$, con l'oggetto critico escluso (UB_0) o incluso (UB_1)

Nell'istanza di riferimento:

- ▶ $UB_D = 16$, $UB_0 = 16$, $UB_1 = 15$, $UB_{MT} = 16$, mentre $z(ILP_{KP}) = 15$

Un modello PLI per il problema del subset sum

Introduzione: un modello PLI per il SSP

- ▶ Il problema del subset sum e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI, con le stesse variabili del modello ILP_{KP}
- ▶ Vedremo che è il modello ILP_{KP} con i profitti uguali ai pesi

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nel sottoinsieme} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{I}.$$

Il modello ILP_{SSP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del subset sum (SSP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \\ & \text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{SSP} .

Descrizione del modello ILP_{SSP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

ILP_{SSP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il peso totale degli oggetti selezionati nel sottoinsieme;
- ▶ il vincolo di capacità garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati non superi il valore obiettivo (un vincolo lineare);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Il modello ILP_{SSP} è il modello ILP_{KP} con $p_j = w_j$, per ogni $j \in \mathcal{I}$:
la risposta al SSP è sì se e solo se $z(ILP_{SSP}) = c$.

Esempio (1/2)

Consideriamo un valore obiettivo $c = 9$ e un insieme $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
w_j	2	3	6	7	5	9

Questa è l'istanza del SSP del capitolo «Problemi di zaino».

Esempio (2/2)

Il modello ILP_{SSP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{SSP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{SSP}})$ è $9 = c$, quindi la risposta al SSP è sì. Il sottoinsieme associato è $\tilde{S} = \{1, 4\}$. La soluzione ottima non è unica: anche i sottoinsiemi $\{2, 3\}$ e $\{6\}$ raggiungono il valore obiettivo.

Il modello ILP_{SSP} :

- ▶ Il modello ILP_{KP} con $p_j = w_j$: massimizzare il peso totale del sottoinsieme, senza superare c
- ▶ La risposta è sì se e solo se $z(\text{ILP}_{\text{SSP}}) = c$

Nell'esempio:

- ▶ $z(\text{ILP}_{\text{SSP}}) = 9 = c$: la risposta è sì, con i sottoinsiemi $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ e $\{6\}$

Un modello PLI per il problema dello zaino limitato

Introduzione: un modello PLI per il BKP

- ▶ Il problema dello zaino limitato e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ L'oggetto j è disponibile in b_j copie: le variabili non sono più binarie, contano le copie
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI con variabili intere

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili intere**:

x_j = numero di copie dell'oggetto j inserite nello zaino $\forall j \in \mathcal{I}$.

Il modello ILP_{BKP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino limitato (BKP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \\ & \text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1, \dots, b_j\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{BKP} .

Descrizione del modello ILP_{BKP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{BKP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il profitto totale delle copie degli oggetti selezionate nello zaino;
- ▶ il vincolo di capacità garantisce che il peso totale delle copie selezionate non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \{0, 1, \dots, b_j\}$ definiscono le variabili del modello PLI: ogni oggetto j si prende al più b_j volte.

Esempio (1/2)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), con i seguenti profitti, pesi e copie disponibili:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9
b_j	2	2	1	1	1	1

Questa è l'istanza del BKP del capitolo «Problemi di zaino».

Esempio (2/2)

Il modello ILP_{BKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\} \\ & x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{BKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{BKP}})$ è 18. La soluzione ottima associata del BKP prende due copie dell'oggetto 1 e una copia dell'oggetto 5, ed è l'unica soluzione ottima.

Il modello ILP_{BKP} :

- ▶ n variabili intere x_j : il numero di copie dell'oggetto j nello zaino
- ▶ Lo stesso obiettivo e lo stesso vincolo di capacità del modello ILP_{KP} , con $x_j \in \{0, 1, \dots, b_j\}$

Nell'esempio:

- ▶ Due copie dell'oggetto 1 e una dell'oggetto 5, con $z(\text{ILP}_{\text{BKP}}) = 18$

Un modello PLI per il problema dello zaino illimitato

Introduzione: un modello PLI per l'UKP

- ▶ Il problema dello zaino illimitato e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ Ogni oggetto è disponibile in un numero illimitato di copie: le variabili contano le copie, senza limite superiore
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI con variabili intere non negative

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili intere**:

x_j = numero di copie dell'oggetto j inserite nello zaino $\forall j \in \mathcal{I}$.

Il modello ILP_{UKP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino illimitato (UKP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{UKP} .

Descrizione del modello ILP_{UKP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

ILP_{UKP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il profitto totale delle copie degli oggetti selezionate nello zaino;
- ▶ il vincolo di capacità garantisce che il peso totale delle copie selezionate non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiscono le variabili del modello PLI; il vincolo di capacità dà già $x_j \leq \hat{b}_j = \lfloor c/w_j \rfloor$, per ogni $j \in \mathcal{I}$.

Esempio (1/2)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), ciascuno disponibile in un numero illimitato di copie, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9

Questa è l'istanza dell'UKP del capitolo «Problemi di zaino».

Esempio (2/2)

Il modello ILP_{UKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ \text{soggetto a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{UKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 4, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{UKP}})$ è 24. La soluzione ottima associata dell'UKP prende quattro copie dell'oggetto 1, ed è l'unica soluzione ottima.

Il modello ILP_{UKP} :

- ▶ n variabili intere $x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: il numero di copie dell'oggetto j nello zaino
- ▶ Il vincolo di capacità dà già $x_j \leq \hat{b}_j = \lfloor c/w_j \rfloor$

Nell'esempio:

- ▶ Quattro copie dell'oggetto 1, con $z(\text{ILP}_{\text{UKP}}) = 24$

Un modello PLI per il problema dello zaino multidimensionale

Introduzione: un modello PLI per il MDKP

- ▶ Il problema dello zaino multidimensionale e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ Lo zaino ha k dimensioni, ciascuna con la sua capacità c_d , $d \in \mathcal{D}$
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI: variabili binarie e un vincolo di capacità per dimensione

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{I}.$$

Il modello ILP_{MDKP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino multidimensionale (MDKP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \\ & \text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_{dj} x_j \leq c_d, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \\ & \quad x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MDKP} .

Descrizione del modello ILP_{MDKP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

ILP_{MDKP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il profitto totale degli oggetti selezionati nello zaino;
- ▶ i vincoli di capacità garantiscono che, in ogni dimensione d , il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità c_d (k vincoli lineari, uno per ogni dimensione);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio (1/2)

Consideriamo uno zaino a 2 dimensioni ($k = 2$) con capacità $c_1 = 10$ e $c_2 = 12$, e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	6	7	5	9
w_{1j}	4	5	3	7
w_{2j}	6	4	5	3

Questa è l'istanza del MDKP del capitolo «Problemi di zaino».

Esempio (2/2)

Il modello ILP_{MDKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ \text{soggetto a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 10 \\ & 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MDKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 1$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MDKP}})$ è 14. La soluzione ottima associata del MDKP è $\tilde{S} = \{3, 4\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

Il modello ILP_{MDKP} :

- ▶ n variabili binarie x_j , come nel modello ILP_{KP}
- ▶ Un vincolo di capacità per ogni dimensione $d \in \mathcal{D}$: k vincoli lineari

Nell'esempio:

- ▶ L'unica soluzione ottima è $\tilde{S} = \{3, 4\}$, con $z(\text{ILP}_{\text{MDKP}}) = 14$

Un modello PLI per il problema degli zaini multipli

Introduzione: un modello PLI per il MKP

- ▶ Il problema degli zaini multipli e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ Ci sono m zaini $k \in \mathcal{K}$: dobbiamo decidere non solo se un oggetto è selezionato, ma anche in quale zaino
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI, con una variabile binaria per ogni oggetto e ogni zaino

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti $n m$ **variabili binarie**:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nello zaino } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathcal{K}.$$

Il modello ILP_{MKP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema degli zaini multipli (MKP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_{jk} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jk} \leq c_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\ & \sum_{k \in \mathcal{K}} x_{jk} \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \\ & x_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall k \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MKP}.

Descrizione del modello ILP_{MKP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MKP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il profitto totale degli oggetti inseriti negli zaini;
- ▶ i vincoli di capacità garantiscono che, in ogni zaino k , il peso totale degli oggetti assegnati non superi la capacità c_k (m vincoli lineari, uno per ogni zaino);
- ▶ i vincoli $\sum_{k \in \mathcal{K}} x_{jk} \leq 1$ garantiscono che ogni oggetto sia inserito in al più uno zaino (n vincoli lineari, uno per ogni oggetto);
- ▶ infine, i vincoli $x_{jk} \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio (1/3)

Consideriamo $m = 2$ zaini con capacità $c_1 = 10$ e $c_2 = 12$, e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$), con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	6	8	5	7	9
w_j	4	6	5	3	7

Questa è l'istanza del MKP del capitolo «Problemi di zaino». Il modello ha 10 variabili, quindi scriviamo un vincolo per riga.

Esempio (2/3)

Il modello ILP_{MKP} per questa istanza è:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_{11} + 8x_{21} + 5x_{31} + 7x_{41} + 9x_{51} \\ & + 6x_{12} + 8x_{22} + 5x_{32} + 7x_{42} + 9x_{52} \\ \text{soggetto a} \quad & 4x_{11} + 6x_{21} + 5x_{31} + 3x_{41} + 7x_{51} \leq 10 \\ & 4x_{12} + 6x_{22} + 5x_{32} + 3x_{42} + 7x_{52} \leq 12 \\ & x_{11} + x_{12} \leq 1 \\ & x_{21} + x_{22} \leq 1 \\ & x_{31} + x_{32} \leq 1 \\ & x_{41} + x_{42} \leq 1 \\ & x_{51} + x_{52} \leq 1 \\ & x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Esempio (3/3)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MKP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{21} = 1, \quad \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{52} = 1,$$

e tutte le altre variabili pari a 0.

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MKP}})$ è 30.

La soluzione ottima associata del MKP è $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2) = (\{1, 2\}, \{4, 5\})$. La soluzione ottima non è unica: $(\{2, 4\}, \{1, 5\})$ e $(\{4, 5\}, \{1, 2\})$ hanno lo stesso valore.

Il modello ILP_{MKP} :

- ▶ $n m$ variabili binarie x_{jk} : l'oggetto j nello zaino k
- ▶ Un vincolo di capacità per zaino (m) e un vincolo di assegnamento per oggetto (n): ogni oggetto in al più uno zaino

Nell'esempio:

- ▶ $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2) = (\{1, 2\}, \{4, 5\})$, con $z(\text{ILP}_{\text{MKP}}) = 30$; la soluzione ottima non è unica

Un modello PLI per il problema dello zaino a scelta multipla

Introduzione: un modello PLI per il MCKP

- ▶ Il problema dello zaino a scelta multipla e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ Gli oggetti sono partizionati in q classi $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_q$, e da ogni classe va selezionato esattamente un oggetto
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI: il modello ILP_{KP} più un'uguaglianza per classe

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{I}.$$

Il modello ILP_{MCKP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino a scelta multipla (MCKP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j \leq c, \\ & \sum_{j \in \mathcal{J}_h} x_j = 1, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MCKP} .

Descrizione del modello ILP_{MCKP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MCKP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il profitto totale degli oggetti selezionati nello zaino;
- ▶ il vincolo di capacità garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
- ▶ i vincoli $\sum_{j \in \mathcal{J}_h} x_j = 1$ garantiscono che da ogni classe sia selezionato esattamente un oggetto (q vincoli lineari, uno per ogni classe);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio (1/2)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 15$ e un insieme $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), partizionato in $q = 3$ classi $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_2 = \{3, 4\}$ e $\mathcal{I}_3 = \{5, 6\}$, con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	8	5	7	4	9
w_j	4	6	5	8	3	7

Questa è l'istanza del MCKP del capitolo «Problemi di zaino».

Esempio (2/2)

Il modello ILP_{MCKP} per questa istanza è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & 6 & x_1 & + & 8 & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 7 & x_4 & + & 4 & x_5 & + & 9 & x_6 \\ \text{soggetto a} & 4 & x_1 & + & 6 & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 8 & x_4 & + & 3 & x_5 & + & 7 & x_6 & \leq & 15 \\ & & x_1 & & & + & x_2 & & & & & & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & x_3 & & + & x_4 & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & x_5 & & + & x_6 & = & 1 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MCKP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 1, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCKP}})$ è 17. La soluzione ottima associata del MCKP è $\tilde{S} = \{1, 4, 5\}$. La soluzione ottima non è unica: il sottoinsieme $\{2, 3, 5\}$ ha lo stesso valore.

Il modello ILP_{MCKP} :

- ▶ n variabili binarie x_j e un vincolo di capacità, come nel modello ILP_{KP}
- ▶ Un'**uguaglianza** per classe: esattamente un oggetto da ogni classe (q vincoli lineari)

Nell'esempio:

- ▶ $\tilde{S} = \{1, 4, 5\}$, con $z(ILP_{MCKP}) = 17$; il sottoinsieme $\{2, 3, 5\}$ ha lo stesso valore

Un modello PLI per il problema dello zaino con setup

Introduzione: un modello PLI per il KPS

- ▶ Il problema dello zaino con setup e la sua istanza di riferimento sono definiti nel capitolo «[Problemi di zaino](#)»
- ▶ Gli oggetti sono partizionati in q classi; per selezionare un oggetto della classe h bisogna attivare la classe, che costa f_h e usa la capacità s_h
- ▶ In questa sezione scriviamo il suo modello PLI, con variabili binarie per gli oggetti e variabili binarie di setup per le classi

Variabili decisionali

Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{I}.$$

Introduciamo le seguenti q **variabili binarie**:

$$y_h = \begin{cases} 1 & \text{se la classe } h \text{ è attivata (si paga il suo setup)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

Il modello ILP_{KPS}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dello zaino con setup (KPS) è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j x_j - \sum_{h=1}^q f_h y_h$$

$$\text{soggetto a } \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_j + \sum_{h=1}^q s_h y_h \leq c,$$

$$x_j \leq y_h, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}_h,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$y_h \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{KPS} .

Descrizione del modello ILP_{KPS}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{KPS} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il ricavo totale degli oggetti selezionati meno i costi di setup delle classi attivate;
- ▶ il vincolo di capacità garantisce che il peso totale degli oggetti selezionati più i pesi di setup delle classi attivate non superi la capacità dello zaino (un vincolo lineare);
- ▶ i vincoli $x_j \leq y_h$ garantiscono che un oggetto si possa selezionare solo se la sua classe è attivata (n vincoli lineari, uno per ogni oggetto);
- ▶ infine, i vincoli $x_j \in \{0, 1\}$ e $y_h \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Esempio (1/3)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 20$ e un insieme $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$), partizionato in $q = 2$ classi $\mathcal{I}_1 = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{I}_2 = \{4, 5, 6\}$, con costi di setup $f_1 = 3$, $f_2 = 4$, pesi di setup $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, e i seguenti ricavi e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	8	5	7	9	4
w_j	4	5	3	6	7	2

Questa è l'istanza del KPS del capitolo «Problemi di zaino».

Esempio (2/3)

Il modello ILP_{KPS} per questa istanza è:

$$\begin{array}{llllllllll}
 \max & 6 & x_1 + 8 & x_2 + 5 & x_3 + 7 & x_4 + 9 & x_5 + 4 & x_6 - 3 & y_1 - 4 & y_2 \\
 \text{soggetto a} & 4 & x_1 + 5 & x_2 + 3 & x_3 + 6 & x_4 + 7 & x_5 + 2 & x_6 + 2 & y_1 + 3 & y_2 \leq 20 \\
 & & x_1 & & & & & & - y_1 & \leq 0 \\
 & & & x_2 & & & & & - y_1 & \leq 0 \\
 & & & & x_3 & & & & - y_1 & \leq 0 \\
 & & & & & x_4 & & & - y_2 & \leq 0 \\
 & & & & & & x_5 & & - y_2 & \leq 0 \\
 & & & & & & & x_6 & - y_2 & \leq 0 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & & \in \{0, 1\} \\
 & & & & & & & & y_1, & y_2 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

Esempio (3/3)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KPS}})$, $\tilde{\mathbf{y}}(\text{ILP}_{\text{KPS}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{KPS}})$ è 16.

La soluzione ottima associata del KPS è $\tilde{S} = \{1, 2, 3, 6\}$. La soluzione ottima non è unica: i sottoinsiemi $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$ hanno lo stesso valore.

Il modello ILP_{KPS} :

- ▶ n variabili binarie x_j per gli oggetti e q variabili binarie di setup y_h per le classi
- ▶ L'obiettivo sottrae i costi di setup; il vincolo di capacità aggiunge i pesi di setup
- ▶ I vincoli $x_j \leq y_h$ permettono un oggetto solo se la sua classe è attivata

Nell'esempio:

- ▶ $\tilde{S} = \{1, 2, 3, 6\}$, con $z(ILP_{KPS}) = 16$; i sottoinsiemi $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$ hanno lo stesso valore

Errori tipici

Introduzione: errori tipici

- ▶ Raccogliamo gli errori più frequenti sulle formulazioni dei problemi di zaino
- ▶ Quattro riguardano i rilassamenti lineari e gli upper bound del KP, due i modelli delle varianti
- ▶ Riconoscerli evita bound sbagliati e modelli sbagliati

Osservazione 1: l'ordine e i rilassamenti

- ▶ *Dimenticare di ordinare gli oggetti.* Le formule (4), (5) e i bound valgono solo se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente: con un altro ordine il vettore (4) è ammissibile ma non ottimo.
- ▶ *Usare $z(\text{LP-0}_{\text{KP}})$ come bound.* Il primo rilassamento non ha limiti superiori sulle variabili, ed è molto più debole: nell'istanza di riferimento dà 27, contro $\frac{49}{3}$ del secondo rilassamento.

Osservazione: i bound e l'oggetto critico

- ▶ **Arrotondare quando i profitti non sono interi.** I bound UB_D e UB_{MT} arrotondano per difetto la parte frazionaria: questo è valido solo perché tutti i profitti sono interi.
- ▶ **Confondere l'oggetto critico con l'ultimo oggetto selezionato.** L'oggetto critico s è il primo oggetto che non entra: nell'istanza di riferimento è $s = 3$, mentre gli oggetti 1 e 2 sono selezionati per intero.

Osservazione: l'ottimo e le varianti

- ▶ **Supporre che l'ottimo del rilassamento sia unico.** Con oggetti di uguale efficienza il problema LP_{KP} ha altre soluzioni ottime; le formule (4) ne danno una.
- ▶ **Copiare il modello ILP_{KP} nelle varianti.** Nel BKP e nell'UKP le variabili sono intere, non binarie; nel MCKP i vincoli di classe $\sum_{j \in \mathcal{J}_h} x_j = 1$ sono uguaglianze; nel KPS, senza i vincoli $x_j \leq y_h$ il modello seleziona oggetti con $y_h = 0$ e non paga mai un setup.

Errori tipici:

- ▶ Ordinare gli oggetti per efficienza non crescente prima di usare le formule e i bound
- ▶ $LP-0_{KP}$ è molto più debole di LP_{KP} ; arrotondare per difetto solo con profitti interi
- ▶ L'oggetto critico è il primo oggetto che non entra; l'ottimo del rilassamento può non essere unico
- ▶ Ogni variante cambia il modello ILP_{KP} : variabili intere, uguaglianze, vincoli di setup

In sintesi

Introduzione: in sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con il quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento: gli upper bound calcolati in questo capitolo

Riepilogo (1/3)

- ▶ Il modello ILP_{KP} ha una variabile binaria per oggetto, un vincolo di capacità e l'obiettivo di massimizzare il profitto totale.
- ▶ Il rilassamento LP_{KP} si risolve ordinando gli oggetti per efficienza non crescente: gli oggetti prima dell'oggetto critico sono selezionati, l'oggetto critico si prende in parte, gli altri si scartano.
- ▶ Il duale di LP_{KP} ha la soluzione ottima $\tilde{\pi} = p_s/w_s$, e $z(LP_{KP})$ non supera mai il doppio di $z(ILP_{KP})$.

Riepilogo (2/3)

- ▶ Arrotondando per difetto $z(LP_{KP})$ otteniamo il bound di Dantzig; il bound di Martello-Toth considera separatamente l'oggetto critico escluso e incluso.
- ▶ Ogni variante del capitolo «**Problemi di zaino**» cambia un ingrediente del modello ILP_{KP} : variabili intere (BKP, UKP), un vincolo di capacità per dimensione (MDKP), una variabile per oggetto e zaino (MKP), un'uguaglianza per classe (MCKP), variabili di setup y_h con $x_j \leq y_h$ (KPS); il SSP è il KP con $p_j = w_j$.

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento. Upper bound su $z(\text{ILP}_{\text{KP}})$ calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Primo rilassamento	27	$z(\text{LP}-0_{\text{KP}})$, oggetto 1 con $\frac{9}{2}$ copie
Secondo rilassamento	$\frac{49}{3}$	$z(\text{LP}_{\text{KP}})$, oggetto critico $s = 3$
Bound di Dantzig	16	$\lfloor \frac{49}{3} \rfloor$
Bound di Martello-Toth	16	$\max\{16, 15\}$
Valore ottimo	15	soluzione $\{1, 4\}$ del modello ILP_{KP}

Il gap fra il miglior upper bound (16) e il valore ottimo (15) si chiude con gli algoritmi esatti più avanti nel corso.