

Problemi di colorazione



Indice

Perché i problemi di colorazione dei vertici?

Panoramica della famiglia

Un breve richiamo sui grafi

Il problema della colorazione dei vertici

Ipotesi

Due bound semplici

Contare le soluzioni, una prima soluzione e i bound

Osservazioni

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ usare le nozioni di base sui grafi: intorno, grado, grafo indotto, grafo complementare, clique e insieme stabile;
- ▶ enunciare la definizione del problema della colorazione dei vertici e le ipotesi sul grafo;
- ▶ contare le soluzioni candidate di una piccola istanza e riconoscere che sono partizioni;
- ▶ trovare a mano una colorazione e calcolare il bound di clique e il bound degli insiemi stabili;
- ▶ spiegare perché il bound di clique non è sempre stretto.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di ottimizzazione combinatoria](#)»: istanze, soluzioni ammissibili, bound primali e duali, il gap e i numeri di Bell che contano le partizioni di un insieme
- ▶ Dal capitolo «[Problemi di packing](#)»: il bound sul peso come esempio di bound duale
- ▶ Non serve alcuna conoscenza di teoria dei grafi: le definizioni usate qui sono richiamate in una breve sezione

Perché i problemi di colorazione dei vertici?

Introduzione: Perché i problemi di colorazione dei vertici?

- ▶ I problemi di colorazione modellano **conflitti**: coppie di oggetti che non possono ricevere la stessa risorsa
- ▶ Partiamo da una piccola storia, il calendario degli esami, e vediamo come diventa un problema su un grafo
- ▶ Richiamiamo poi alcune tappe della storia del problema
- ▶ Chiudiamo con una sfida su un grafo famoso, a cui il capitolo risponde

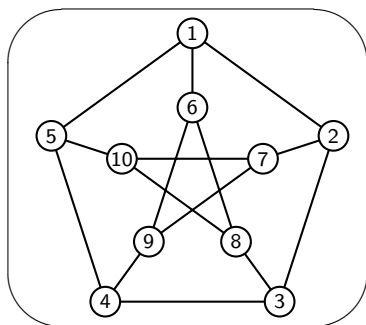
Una storia: il calendario degli esami

- ▶ Sei esami devono essere programmati nella sessione d'esami
- ▶ Due esami che hanno almeno uno studente in comune non possono svolgersi nello stesso giorno
- ▶ Qual è il **numero minimo di giorni?**

Sessione d'esami	Grafo
gli esami	i vertici
due esami con studenti in comune	un lato fra di loro
i giorni	i colori

- ▶ **Brooks (1941)** dimostrò che un grafo connesso che non è né completo né un ciclo dispari si può colorare con al più Δ colori, dove Δ è il grado massimo
- ▶ **Karp (1972)** incluse il numero cromatico fra i suoi 21 problemi NP-completi
- ▶ **Garey, Johnson e Stockmeyer (1976)** dimostrarono che stabilire se 3 colori bastano resta NP-completo sui grafi planari di grado massimo 4

Una sfida



il grafo di Petersen

Prima di proseguire, proviamo a rispondere a due domande sul grafo di Petersen, l'istanza di riferimento del capitolo:

1. Quanti colori servono?
2. Come possiamo dimostrare che meno colori non bastano, senza elencare tutte le partizioni?

Il bound di clique qui non basta, e il capitolo mostra perché.

Conflitti e colori:

- ▶ Gli oggetti in conflitto sono i vertici di un grafo, i conflitti sono i suoi lati, le risorse sono i colori
- ▶ Programmare gli esami nel minor numero di giorni è un problema di colorazione

Un problema classico e difficile:

- ▶ Il numero cromatico è uno dei 21 problemi NP-completi di Karp; già 3 colori sono difficili sui grafi planari

La sfida:

- ▶ Quanti colori servono al grafo di Petersen, e come lo dimostriamo?

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ In questa sezione presentiamo la famiglia dei **problemi di colorazione**: i loro dati, le loro soluzioni e il loro obiettivo
- ▶ Richiamiamo le poche nozioni sui grafi che ci servono: intorno, grado, grafo indotto, grafo complementare, clique e insieme stabile
- ▶ Queste nozioni sono la notazione comune di tutta la famiglia, e il linguaggio del resto del capitolo

Problemi di colorazione

- ▶ I **problemi di colorazione** hanno gli stessi dati: un grafo semplice non orientato $G = (V, E)$, i cui lati sono le coppie di vertici in conflitto
- ▶ Una soluzione assegna un colore a ogni vertice, in modo che i due estremi di ogni lato ricevano colori diversi: i vertici con lo stesso colore formano un insieme stabile di G
- ▶ L'obiettivo è minimizzare il numero di colori usati

La famiglia in una frase

Un problema di colorazione partiziona i vertici di un grafo nel
minor numero di insiemi stabili.

Le nozioni sui grafi che seguono sono la notazione comune
della famiglia.

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con la sezione che definisce ciascuno di essi

Problema	Sigla	Soluzione	Sezione
problema della colorazione dei vertici	VCP	una partizione di V in insiemi stabili	Il problema della colorazione dei vertici

Richiamiamo ora le nozioni sui grafi
che usiamo nel capitolo:

prima grafi, intorni,
grafi indotti e grafi complementari;

poi clique e insiemi stabili.

Definizione 1: grafo, intorno, grafo indotto e grafo complementare (1/2)

- ▶ Un **grafo** $G = (V, E)$ è dato da un insieme finito V di **vertici** e da un insieme E di **lati**, ciascuno dei quali è un sottoinsieme di 2 elementi di V . Scriviamo $n = |V|$ e $m = |E|$; i vertici sono etichettati $1, 2, \dots, n$. Tutti i grafi di questo capitolo sono semplici e non orientati.
- ▶ Due vertici distinti u e v sono **adiacenti** se $\{u, v\} \in E$. L'**intorno** di un vertice v è l'insieme $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$, e il suo **grado** è $\deg(v) = |N(v)|$.

Definizione: grafo, intorno, grafo indotto e grafo complementare (2/2)

- ▶ Per un sottoinsieme $U \subseteq V$ il **grafo indotto** $G[U] = (U, E[U])$ ha i vertici di U e i lati di E con entrambi gli estremi in U .
- ▶ Il **grafo complementare** $\overline{G} = (V, \overline{E})$ ha gli stessi vertici di G , e due vertici distinti sono adiacenti in $\overline{G}$ se e solo se non sono adiacenti in G .

Definizione 2: clique e insieme stabile

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

1. Una **clique** è un sottoinsieme $K \subseteq V$ di vertici a due a due adjacenti: $\{u, v\} \in E$ per ogni $u, v \in K$ con $u \neq v$.
2. Un **insieme stabile** (detto anche **insieme indipendente**) è un sottoinsieme $Q \subseteq V$ di vertici a due a due non adjacenti: $\{u, v\} \notin E$ per ogni $u, v \in Q$ con $u \neq v$.

Il **numero di clique** $\omega(G)$ è il massimo numero di vertici di una clique, e il **numero di stabilità** $\alpha(G)$ è il massimo numero di vertici di un insieme stabile.

Clique, insiemi stabili e grafo complementare

- ▶ Un insieme stabile di G è una clique del grafo complementare $\overline{G}$, e viceversa
- ▶ Un vertice da solo e l'insieme vuoto sono sia una clique sia un insieme stabile

Clique, insiemi stabili e colori

Una clique è un gruppo di vertici a due a due in *conflitto*;
un insieme stabile è un gruppo di vertici senza conflitti.

In una colorazione, i vertici di una clique
richiedono **colori diversi**,
e i vertici di un insieme stabile
possono dividerne uno.

Riepilogo (1/2)

Problemi di colorazione:

- ▶ Dati: un grafo semplice non orientato $G = (V, E)$; i lati sono le coppie di vertici in conflitto
- ▶ Soluzione: un colore per ogni vertice, diverso sui due estremi di ogni lato
- ▶ Obiettivo: minimizzare il numero di colori usati

Grafi:

- ▶ Intorno $N(v)$ e grado $\deg(v) = |N(v)|$ di un vertice
- ▶ Grafo indotto $G[U]$ e grafo complementare $\overline{G}$

Riepilogo (2/2)

Clique e insiemi stabili:

- ▶ Una clique ha vertici a due a due adiacenti: il numero di clique è $\omega(G)$
- ▶ Un insieme stabile ha vertici a due a due non adiacenti: il numero di stabilità è $\alpha(G)$
- ▶ Gli insiemi stabili di G sono le clique di $\overline{G}$, e viceversa

Colori:

- ▶ Una clique richiede colori diversi; un insieme stabile può dividerne uno
- ▶ Una colorazione partiziona i vertici nel minor numero di insiemi stabili

Il problema della colorazione dei vertici

Introduzione: Il problema della colorazione dei vertici

- ▶ In questa sezione definiamo il **problema della colorazione dei vertici** (VCP): le sue istanze, le sue soluzioni ammissibili e il suo valore ottimo, il numero cromatico $\chi(G)$
- ▶ Incontriamo due istanze di riferimento: un triangolo e il grafo di Petersen
- ▶ Enunciamo due ipotesi sul grafo e due bound duali semplici, il bound di clique e il bound degli insiemi stabili
- ▶ Con questi strumenti rispondiamo alla sfida sul grafo di Petersen

Definizione 3: problema della colorazione dei vertici

Dato:

1. *un grafo semplice $G = (V, E)$, dove*

$$V = \{1, 2, \dots, n\}$$

è l'insieme degli n vertici e

$$E \subseteq \{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v \}$$

è l'insieme degli m lati,

*il **problema della colorazione dei vertici (VCP)** chiede di decidere come assegnare un colore a ogni vertice, in modo che due vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore e il numero totale di colori usati sia minimo.*

Un'istanza del VCP

Un'istanza del VCP è specificata da:

1. due numeri interi:

- ▶ il numero di vertici $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,
- ▶ il numero di lati $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

2. due vettori di numeri interi di lunghezza m :

- ▶ $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$, che contiene il primo estremo dei lati,
- ▶ $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$, che contiene il secondo estremo dei lati.

Una soluzione ammissibile del VCP (1/2)

Una **soluzione ammissibile del VCP** è una famiglia di **classi di colore**, ossia sottoinsiemi di vertici ciascuno assegnato a un colore,

$$\mathcal{Q} \subseteq 2^V$$

tale che:

(i) $\mathcal{Q}$ forma una partizione di V in classi di colore *non vuote*, ossia

$$\begin{aligned} Q &\neq \emptyset, \quad \text{per ogni } Q \in \mathcal{Q}, \\ Q \cap Q' &= \emptyset, \quad \text{per ogni } Q, Q' \in \mathcal{Q} \text{ con } Q \neq Q', \\ \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q &= V; \end{aligned}$$

Una soluzione ammissibile del VCP (2/2)

(ii) ogni classe di colore in $\mathcal{Q}$ è un *insieme stabile*, ossia

$$\{u, v\} \notin E, \quad \text{per ogni } Q \in \mathcal{Q}, \text{ per ogni } u, v \in Q \text{ con } u \neq v.$$

Di conseguenza, il VCP si può enunciare in modo equivalente come il problema di determinare una partizione dell'insieme dei vertici in classi di colore

- ▶ tale che ogni classe di colore sia un insieme stabile (ossia i suoi vertici possano ricevere lo stesso colore)
- ▶ e il numero di classi di colore (colori) sia minimo.

Il VCP in formule

Data un'istanza del VCP, il VCP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{Q} \in \arg \min_{Q \subseteq 2^V} \left\{ |Q| : \begin{array}{l} Q \neq \emptyset, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \\ Q \cap Q' = \emptyset, \quad \forall Q, Q' \in \mathcal{Q} \text{ con } Q \neq Q', \\ \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q = V, \\ \{u, v\} \notin E, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \forall u, v \in Q \text{ con } u \neq v \end{array} \right\}.$$

Il numero cromatico

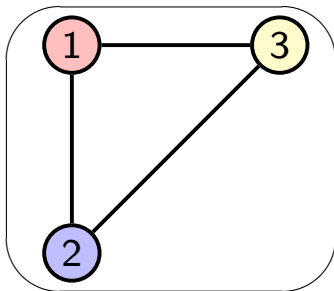
- ▶ Il valore ottimo del VCP è il **numero cromatico** $\chi(G)$ del grafo: il numero minimo di colori (insiemi stabili) necessari per colorare tutti i vertici
- ▶ Le classi di colore di una soluzione sono insiemi stabili, e il numero di classi è il numero di colori usati

Due istanze di riferimento

Vediamo ora due istanze del VCP:
un **triangolo**,
e il **grafo di Petersen**, l'istanza di riferimento del capitolo.

Esempio: un triangolo

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 3 vertici ($n = 3$) e 3 lati ($m = 3$):

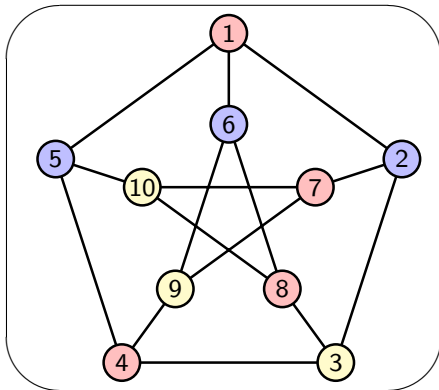


L'insieme dei vertici V e l'insieme dei lati E sono:

$$V = \{ 1, 2, 3 \}, \quad E = \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}.$$

Esempio: il grafo di Petersen (1/2)

Consideriamo ora il seguente grafo $G = (V, E)$ con 10 vertici ($n = 10$) e 15 lati ($m = 15$):



Esempio: il grafo di Petersen (2/2)

L'insieme dei vertici V e l'insieme dei lati E sono:

$$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \},$$

$$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 7\}, \\ \{3, 4\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \\ \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{7, 9\}, \{7, 10\}, \{8, 10\} \}.$$

Questa istanza del VCP è l'**istanza di riferimento** del capitolo.

Ipotesi

Facciamo le seguenti ipotesi:

1. Il grafo non ha vertici isolati. Un vertice isolato può ricevere un qualunque colore usato dal resto del grafo; se il grafo non ha lati, il valore ottimo è uno. Formalmente:

$$\deg(v) \geq 1, \quad \forall v \in V.$$

2. Nessun vertice ha l'intorno contenuto nell'intorno di un altro vertice. Formalmente:

$$N(u) \not\subseteq N(v), \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v.$$

La seconda ipotesi non fa perdere generalità

La seconda ipotesi si può fare senza perdita di generalità, perché:

1. se $N(u) \subseteq N(v)$, il vertice u si può eliminare senza cambiare il numero cromatico: ogni colorazione di $G \setminus \{u\}$ si estende a u con il colore di v ;
2. i vertici u e v non sono adiacenti: altrimenti $v \in N(u) \subseteq N(v)$, il che è impossibile in un grafo semplice, quindi u e v possono condividere un colore.

Bound sul numero cromatico

- ▶ Una colorazione trovata a mano dà un **bound primale**: $\chi(G)$ è al più il suo numero di colori
- ▶ Per dimostrare che meno colori non bastano servono **bound duali**
- ▶ Vediamo ora due bound semplici: il primo usa una clique, il secondo un insieme stabile

Osservazione 1: bound di clique

Per ogni grafo $G = (V, E)$ abbiamo

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Dimostrazione

- ▶ Tutti i vertici di una clique sono a due a due adiacenti
- ▶ Perciò devono ricevere colori diversi in ogni soluzione ammissibile del VCP
- ▶ Quindi servono almeno $\omega(G)$ colori diversi per colorare i vertici di una clique massima, da cui

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$



Osservazione 2: bound degli insiemi stabili

Per ogni grafo $G = (V, E)$ abbiamo

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leq \chi(G).$$

Dimostrazione

- ▶ Consideriamo una soluzione ammissibile con k classi di colore: ogni classe è un insieme stabile, quindi ha al più $\alpha(G)$ vertici
- ▶ Gli n vertici sono coperti dalle classi, quindi

$$n \leq k \alpha(G)$$

- ▶ Il numero k è intero, quindi

$$k \geq \left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil$$



Due bound duali

- ▶ Il **bound di clique** è utile quando il grafo ha una clique grande
- ▶ Il **bound degli insiemi stabili** è utile quando i suoi insiemi stabili sono piccoli
- ▶ Entrambi sono **bound duali**: una clique e un insieme stabile si trovano senza conoscere $\chi(G)$

Applichiamo ora le definizioni
alle due istanze di riferimento:

contiamo le soluzioni candidate,
troviamo a occhio una prima colorazione
e calcoliamo i due bound duali.

Soluzioni candidate

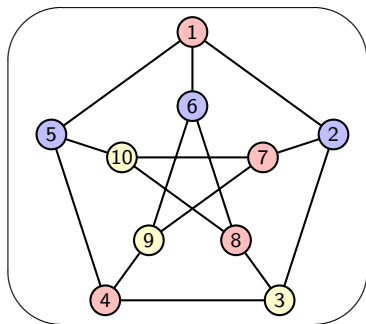
- ▶ Le soluzioni candidate sono le partizioni di V , contate dai **numeri di Bell** (si veda il capitolo «Problemi di ottimizzazione combinatoria»)

- ▶ **Triangolo**: abbiamo $B(3) = 5$ partizioni e una sola è ammissibile: tre singoletti, poiché ogni coppia di vertici è adiacente. Quindi

$$\chi(G) = 3.$$

- ▶ **Grafo di Petersen**: abbiamo $B(10) = 115\,975$ partizioni, e 7 430 di esse sono ammissibili, cioè hanno come classi solo insiemi stabili

Una prima soluzione, a occhio



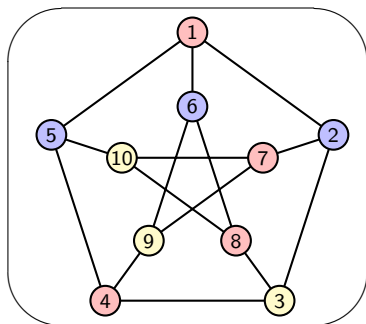
- ▶ La colorazione mostrata nell'esempio del grafo di Petersen usa 3 colori:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{aligned} &\{1, 4, 7, 8\}, \\ &\{2, 5, 6\}, \\ &\{3, 9, 10\} \end{aligned} \right\}$$

- ▶ Nessun lato unisce due vertici della stessa classe, quindi è ammissibile
- ▶ È un **bound primale**:

$$UB = 3 \geq \chi(G)$$

Bound duali sul grafo di Petersen (1/3)



- ▶ Il grafo non ha triangoli, quindi

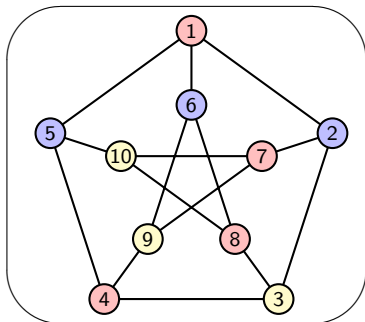
$$\omega(G) = 2$$

- ▶ Il bound di clique dà solo

$$LB = 2$$

- ▶ Con $UB = 3$, resta un **gap di**
1

Bound duali sul grafo di Petersen (2/3)



- ▶ I vertici 1, 2, 3, 4, 5 formano un ciclo con 5 vertici, e così 6, 7, 8, 9, 10 (i lati della figura)
- ▶ Un insieme stabile contiene al più 2 vertici di ogni ciclo, quindi $\alpha(G) \leq 4$
- ▶ L'insieme $\{1, 4, 7, 8\}$ mostra che

$$\alpha(G) = 4$$

Bound duali sul grafo di Petersen (3/3)

- ▶ Il bound degli insiemi stabili dà

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3$$

- ▶ I due bound coincidono:

$$LB = 3 = UB$$

- ▶ Il gap è nullo e

$$\chi(G) = 3$$

Torniamo alla sfida

- ▶ **Quanti colori servono?** Tre: la colorazione a occhio usa 3 colori, e nessuna colorazione ne usa meno
- ▶ **Come dimostriamo che due colori non bastano?** Non elencando le 115 975 partizioni: lo dimostra il bound degli insiemi stabili $\lceil 10/4 \rceil = 3$
- ▶ **Perché il bound di clique non basta?** Il grafo di Petersen non ha triangoli, quindi il bound di clique dà solo 2

Riepilogo (1/2)

Il problema della colorazione dei vertici:

- ▶ Una soluzione ammissibile è una partizione di V in classi di colore non vuote, ciascuna un insieme stabile
- ▶ Il valore ottimo è il numero cromatico $\chi(G)$

Ipotesi:

- ▶ Nessun vertice isolato: $\deg(v) \geq 1$ per ogni $v \in V$
- ▶ Nessun intorno contenuto in un altro: $N(u) \not\subseteq N(v)$ per ogni $u \neq v$

Riepilogo (2/2)

Bound:

- ▶ Una colorazione trovata a occhio è un bound primale:
 $UB \geq \chi(G)$
- ▶ Bound di clique: $\omega(G) \leq \chi(G)$
- ▶ Bound degli insiemi stabili: $\lceil n/\alpha(G) \rceil \leq \chi(G)$

Istanze di riferimento:

- ▶ Triangolo: $B(3) = 5$ partizioni, una ammissibile, $\chi(G) = 3$
- ▶ Grafo di Petersen: 7 430 partizioni ammissibili su 115 975;
 $\omega(G) = 2$, $\alpha(G) = 4$, $\chi(G) = 3$

Osservazioni

Introduzione: Osservazioni

- ▶ In questa sezione raccogliamo tre risultati classici sul numero cromatico
- ▶ Il primo è un upper bound che dipende solo dal grado massimo
- ▶ Gli altri due mostrano che il problema è NP-completo, anche su grafi molto particolari

Tre risultati classici

- ▶ **Brooks (1941)** dimostrò che un grafo connesso che non è né completo né un ciclo dispari si può colorare con al più Δ colori, dove Δ è il grado massimo
- ▶ **Karp (1972)** incluse il numero cromatico fra i suoi 21 problemi NP-completi
- ▶ **Garey, Johnson e Stockmeyer (1976)** dimostrarono che stabilire se 3 colori bastano resta NP-completo sui grafi planari di grado massimo 4

Un upper bound dai gradi:

- ▶ Brooks: al più Δ colori per un grafo connesso che non è né completo né un ciclo dispari

Complessità:

- ▶ Il numero cromatico è NP-completo (Karp)
- ▶ Stabilire se 3 colori bastano è NP-completo anche sui grafi planari di grado massimo 4

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ In questa sezione elenchiamo gli errori più comuni sui problemi di colorazione
- ▶ Riguardano clique e insiemi stabili, i bound, il conteggio delle soluzioni e le ipotesi
- ▶ Riconoscerli aiuta a leggere e a controllare correttamente una colorazione

Osservazione 3: errori tipici (1/2)

- ▶ **Confondere una clique con un insieme stabile.** In una clique tutte le coppie sono lati e i vertici richiedono colori diversi; in un insieme stabile nessuna coppia è un lato e i vertici possono condividere un colore.
- ▶ **Credere che il bound di clique sia stretto.** Non lo è: il grafo di Petersen ha $\omega(G) = 2$ e $\chi(G) = 3$, e lo stesso accade per un ciclo con 5 vertici.
- ▶ **Contare le permutazioni dei colori come soluzioni diverse.** Una soluzione è una partizione dei vertici in insiemi stabili: scambiare i nomi di due colori dà la stessa soluzione.

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ▶ *Usare una classe che non è un insieme stabile.* Una classe di colore con due vertici adiacenti rende la soluzione inammissibile, qualunque sia il numero di colori.
- ▶ *Dimenticare le ipotesi.* Un vertice isolato e un vertice con $N(u) \subseteq N(v)$ si possono eliminare prima di risolvere, senza cambiare il numero cromatico.

Prima di fidarsi di una colorazione:

- ▶ Controllare che ogni classe di colore sia un insieme stabile
- ▶ Contare le partizioni, non le permutazioni dei colori

Prima di fidarsi di un bound:

- ▶ Il bound di clique può lasciare un gap, come sul grafo di Petersen e su un ciclo con 5 vertici
- ▶ Applicare prima le ipotesi: un vertice isolato e un vertice con $N(u) \subseteq N(v)$ si possono eliminare

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- ▶ Raccogliamo in pochi punti le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con il quadro riassuntivo delle istanze di riferimento: i migliori lower e upper bound trovati finora

Riepilogo (1/2)

- ▶ Il VCP partiziona i vertici di un grafo nel numero minimo di insiemi stabili; il valore ottimo è il numero cromatico $\chi(G)$
- ▶ Una clique richiede colori diversi e un insieme stabile può dividerne uno; le clique di G sono gli insiemi stabili del grafo complementare
- ▶ Una colorazione trovata a occhio è un bound primale; il bound di clique $\omega(G)$ e il bound degli insiemi stabili $\lceil n/\alpha(G) \rceil$ sono bound duali
- ▶ I bound non sempre si incontrano: sul grafo di Petersen il bound di clique lascia un gap, il bound degli insiemi stabili lo chiude

Quadro riassuntivo delle istanze di riferimento.

istanza (min)	lower bound	upper bound	da
triangolo	3 (bound di clique)	3 (a occhio)	questo capitolo
grafo di Petersen	3 (bound degli insiemi stabili)	3 (a occhio)	questo capitolo