

Colorazione dei vertici: limiti dell'approssimazione

Indice

Perché i limiti dell'approssimazione?

Notazione

Il VCP non è approssimabile

Nessun rapporto inferiore a quattro terzi

Risultati molto più forti

Casi particolari

Grafi bipartiti

Grafi di grado massimo limitato

Grafi planari

Grafi di intervalli

Esempi

Fonti

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Alla fine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ dimostrare che nessun algoritmo polinomiale ha un rapporto di prestazione inferiore a $\frac{4}{3}$ per il VCP, a meno che $P = NP$;
- ▶ enunciare il risultato di Zuckerman e spiegare perché il VCP non ha una garanzia costante;
- ▶ colorare all'ottimo i grafi bipartiti e i grafi di intervalli, e limitare i colori della colorazione greedy con $\Delta(G) + 1$;
- ▶ dimostrare che i grafi planari si possono colorare con 5 colori in tempo polinomiale, e ricavarne una garanzia additiva.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Principi degli algoritmi di approssimazione](#)»: rapporto di prestazione, algoritmo di α -approssimazione, garanzia di prestazione additiva
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di colorazione](#)»: la definizione del VCP, il numero cromatico $\chi(G)$, il bound di clique $\omega(G) \leq \chi(G)$ e il grafo di Petersen
- ▶ Dal modulo *Algoritmi* ([pagina principale del modulo](#)): visita in ampiezza, tempo polinomiale e NP-completezza

Perché i limiti dell'approssimazione?

Introduzione: Perché i limiti dell'approssimazione?

- ▶ Un algoritmo di approssimazione ha una garanzia: il suo valore non è mai troppo lontano da quello ottimo
- ▶ Per alcuni problemi una garanzia di questo tipo non esiste, a meno che $P = NP$
- ▶ Il problema della colorazione dei vertici è uno di questi: in questo capitolo vediamo perché, e che cosa si può ancora fare

Il problema di questo capitolo

- ▶ Il problema di questo capitolo è il **problema della colorazione dei vertici (VCP)**: la sua definizione e le sue ipotesi sono nella sua pagina
- ▶ Per il problema della colorazione dei vertici dimostriamo il contrario di una garanzia: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale può avere una buona garanzia
- ▶ I risultati negativi ci dicono quando dobbiamo smettere di chiedere

Garanzie e limiti:

- ▶ I risultati positivi limitano lo scarto di un algoritmo su ogni istanza
- ▶ I risultati negativi dimostrano che, a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una buona garanzia

Il problema della colorazione dei vertici:

- ▶ È il problema di questo capitolo, e sta dalla parte dei risultati negativi

Notazione

Introduzione: Notazione

- ▶ Fissiamo la notazione sui grafi usata in tutto il capitolo: vicini, gradi, grado massimo
- ▶ Richiamiamo come si misura la qualità di un algoritmo di colorazione
- ▶ Osserviamo che esiste un rapporto banale, e ci chiediamo quanto meglio possa fare un algoritmo polinomiale

Grafi e gradi

- ▶ Come nella pagina del problema, $G = (V, E)$ è un grafo semplice con n vertici e m spigoli
- ▶ $N(v)$ è l'insieme dei vicini di v , e $\deg(v) = |N(v)|$ il suo grado
- ▶ Il **grado massimo** è

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$$

- ▶ Il valore ottimo del VCP è il numero cromatico, $z(I) = \chi(G)$

Richiamo: il rapporto di prestazione

- ▶ Come nel capitolo «Principi degli algoritmi di approssimazione», $\mathcal{A}(I)$ è il numero di colori della colorazione restituita dall'algoritmo $\mathcal{A}$
- ▶ Il VCP è un problema di minimo, quindi

$$\mathcal{A}(I) \geq \chi(G) \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{A}(I)}{\chi(G)} \geq 1$$

per ogni istanza I

Il rapporto banale

- ▶ Dare a ogni vertice un colore diverso è sempre ammissibile, quindi

$$\chi(G) \leq n,$$

e il rapporto n è banale

- ▶ Questo capitolo mostra che un algoritmo polinomiale non può fare molto meglio su tutti i grafi
- ▶ E poi le classi di grafi su cui invece può

Notazione:

- ▶ $G = (V, E)$ con n vertici e m spigoli, grado $\deg(v)$, grado massimo $\Delta(G)$
- ▶ $z(I) = \chi(G)$, e $\mathcal{A}(I)$ è il numero di colori usati dall'algoritmo $\mathcal{A}$

Il rapporto di prestazione:

- ▶ $\frac{\mathcal{A}(I)}{\chi(G)} \geq 1$ per ogni istanza
- ▶ Il rapporto n è banale: un colore per vertice

Il VCP non è approssimabile

Introduzione: Il VCP non è approssimabile

- ▶ Dimostriamo che nessun algoritmo polinomiale può avere un rapporto di prestazione inferiore a $\frac{4}{3}$, a meno che $P = NP$
- ▶ Enunciamo poi risultati molto più forti: non è possibile nemmeno un rapporto della forma $n^{1-\varepsilon}$
- ▶ La conseguenza è che il VCP non ha una garanzia costante: per questo cercheremo classi particolari di grafi

Lo schema dei risultati negativi

- ▶ La dimostrazione segue lo schema di tutti i risultati negativi dell'approssimazione: un algoritmo con una garanzia troppo buona deciderebbe in tempo polinomiale un problema NP-completo
- ▶ Il problema NP-completo è la **3-colorabilità**: dato un grafo G , decidere se

$$\chi(G) \leq 3$$

- ▶ Resta NP-completo sui grafi planari di grado massimo 4 (Garey, Johnson e Stockmeyer, 1976)

Teorema 1

Sia $\mathcal{A}$ un algoritmo polinomiale per il VCP. Se $P \neq NP$, esiste un grafo G tale che

$$\frac{\mathcal{A}(I)}{\chi(G)} \geq \frac{4}{3}.$$

Dimostrazione (1/2)

Supponiamo che $\frac{\mathcal{A}(I)}{\chi(G)} < \frac{4}{3}$ per ogni grafo G , ed eseguiamo $\mathcal{A}$ su un grafo G .

1. Se $\chi(G) \leq 3$, allora

$$\mathcal{A}(I) < \frac{4}{3} \chi(G) \leq 4.$$

Il numero di colori è un intero, quindi $\mathcal{A}(I) \leq 3$

2. Se $\chi(G) \geq 4$, allora

$$\mathcal{A}(I) \geq \chi(G) \geq 4,$$

perché $\mathcal{A}$ restituisce una colorazione ammissibile

Dimostrazione (2/2)

- ▶ Quindi

$$\chi(G) \leq 3 \quad \text{se e solo se} \quad \mathcal{A}(I) \leq 3$$

- ▶ Eseguire $\mathcal{A}$ e contarne i colori richiede tempo polinomiale
- ▶ Quindi la 3-colorabilità sarebbe in P , e $P = NP$



Osservazioni sulla dimostrazione

- ▶ La dimostrazione usa solo l'interezza di $\chi(G)$: un rapporto inferiore a $\frac{4}{3}$ non può confondere 3 colori con 4
- ▶ Con 2 colori lo stesso argomento non dice nulla, perché decidere se $\chi(G) \leq 2$ è facile (lo vedremo con i grafi bipartiti)
- ▶ I grafi planari di grado massimo 4 sono un caso particolare del VCP: il teorema vale anche su di essi

Il teorema esclude solo i rapporti inferiori a $\frac{4}{3}$.

Si sa molto di più,
e lo enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 2: Zuckerman, 2007

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $P \neq NP$, nessun algoritmo polinomiale $\mathcal{A}$ per il VCP soddisfa, per ogni grafo G con n vertici,

$$\frac{\mathcal{A}(I)}{\chi(G)} \leq n^{1-\varepsilon}.$$

Che cosa dice il teorema

- ▶ Il rapporto n è banale, quindi il numero cromatico è sostanzialmente difficile da approssimare quanto più è possibile
- ▶ La dimostrazione usa le dimostrazioni verificabili in modo probabilistico (PCP) e gli estrattori
- ▶ In precedenza, Garey e Johnson (1976) avevano alzato il bound $\frac{4}{3}$ a 2
- ▶ Feige e Kilian (1998) avevano dimostrato il bound $n^{1-\varepsilon}$ sotto un'ipotesi più forte di $P \neq NP$

Corollario 1

Se $P \neq NP$, il VCP non ha alcun algoritmo di α -approssimazione, per nessuna costante $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione

- ▶ Sia $\mathcal{A}$ un algoritmo polinomiale di α -approssimazione, e prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

- ▶ I grafi con $n > \alpha^2$ vertici soddisfano

$$\frac{\mathcal{A}(I)}{\chi(G)} \leq \alpha < n^{1/2}$$

- ▶ I grafi con $n \leq \alpha^2$ vertici si risolvono esattamente per enumerazione, in un tempo limitato da una costante che dipende solo da α , con rapporto $1 \leq n^{1/2}$
- ▶ L'algoritmo che si ottiene è polinomiale e ha rapporto al più $n^{1/2}$ su ogni grafo, contro il teorema di Zuckerman



Il VCP non è approssimabile

- ▶ Il VCP non è approssimabile: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia di prestazione costante
- ▶ E nemmeno una garanzia della forma $n^{1-\varepsilon}$
- ▶ I risultati positivi esistono solo su classi particolari di grafi

Nessun rapporto inferiore a $\frac{4}{3}$:

- ▶ Altrimenti la 3-colorabilità si deciderebbe in tempo polinomiale
- ▶ La dimostrazione usa solo che il numero di colori è un intero

Risultati molto più forti:

- ▶ Zuckerman (2007): nemmeno il rapporto $n^{1-\epsilon}$, a meno che $P = NP$
- ▶ Quindi nessun algoritmo di α -approssimazione, per nessuna costante $\alpha \geq 1$

Casi particolari

Introduzione: Casi particolari

- ▶ Sulle quattro classi di questa sezione il VCP si risolve esattamente, o con una garanzia, in tempo polinomiale
- ▶ Le classi si riconoscono dal grafo, o sono date con esso (gli intervalli di un grafo di intervalli)
- ▶ Vediamo, nell'ordine: grafi bipartiti, grafi di grado massimo limitato, grafi planari e grafi di intervalli
- ▶ Dove il problema generale si arrende, la struttura del grafo permette di colorare bene

Definizione 1: grafo bipartito

*Un grafo $G = (V, E)$ è **bipartito** se $\chi(G) \leq 2$, cioè se V si può dividere in due insiemi stabili.*

Proposizione 1

Decidere se $\chi(G) \leq 2$, e trovare una colorazione con 2 colori quando esiste, richiede tempo $O(n + m)$.

- L'idea della dimostrazione: una visita in ampiezza, e la parità dei livelli

Dimostrazione (1/2)

- ▶ Eseguiamo una visita in ampiezza da un vertice di ogni componente connessa
 - ▶ Sia $\ell(v)$ il livello di v , la sua distanza dalla radice della sua componente
 - ▶ Coloriamo v con il colore 1 se $\ell(v)$ è pari e con il colore 2 altrimenti
1. Se nessuno spigolo unisce due vertici di livelli con la stessa parità, la colorazione è ammissibile

Dimostrazione (2/2)

2. Altrimenti, sia $\{u, v\}$ uno spigolo di questo tipo

- ▶ I cammini dell'albero di visita dalla radice a u e a v , con lo spigolo $\{u, v\}$, formano un cammino chiuso di lunghezza dispari

$$\ell(u) + \ell(v) + 1$$

- ▶ Un cammino chiuso di lunghezza dispari contiene un ciclo di lunghezza dispari, che richiede 3 colori: $\chi(G) \geq 3$

La visita e il controllo degli spigoli richiedono tempo $O(n + m)$.



I cicli dispari come certificati

- ▶ La dimostrazione mostra la caratterizzazione classica: un grafo è bipartito se e solo se non ha cicli di lunghezza dispari (Kőnig, 1936)
- ▶ Su un grafo con almeno uno spigolo, la visita dà $\chi(G) = 2$, oppure il certificato $\chi(G) \geq 3$ fornito da un ciclo dispari

La colorazione greedy

- ▶ La **colorazione greedy** GC esamina i vertici in un ordine dato
- ▶ Assegna a ogni vertice il colore minimo, fra $1, 2, 3, \dots$, non usato dai suoi vicini già colorati
- ▶ Richiede tempo $O(n + m)$

Proposizione 2

Per ogni grafo G e ogni ordine dei vertici,

$$GC(I) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dimostrazione

- ▶ Quando il vertice v viene colorato, i suoi vicini già colorati usano al più

$$\deg(v) \leq \Delta(G)$$

colori

- ▶ Uno dei colori $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$ è quindi libero
- ▶ Il colore libero minimo è al più $\Delta(G) + 1$



$\Delta(G) + 1$ è una garanzia di prestazione?

- ▶ Il bound confronta $GC(I)$ con $\Delta(G) + 1$, non con $\chi(G)$
- ▶ Su tutti i grafi non è una garanzia di prestazione, perché $\Delta(G)$ può valere $n - 1$ mentre $\chi(G) = 2$ (una stella)
- ▶ Sui grafi di grado massimo al più una costante *fissata* Δ , lo è
- ▶ Ogni grafo con uno spigolo ha $\chi(G) \geq 2$, quindi

$$\frac{GC(I)}{\chi(G)} \leq \frac{\Delta + 1}{2}.$$

Quando il bound è raggiunto

- ▶ Il bound $\Delta(G) + 1$ è raggiunto dai grafi completi e dai cicli di lunghezza dispari, qualunque sia l'ordine
- ▶ **Osservazione (Brooks, 1941).** Un grafo connesso che non è né completo né un ciclo di lunghezza dispari soddisfa

$$\chi(G) \leq \Delta(G),$$

e una colorazione di questo tipo si trova in tempo lineare

Grafi planari

- ▶ Un grafo è **planare** se si può disegnare nel piano senza spigoli che si incrociano
- ▶ Stabilire se un grafo è planare, e trovarne un disegno quando lo è, si fa in tempo lineare (Hopcroft e Tarjan, 1974)
- ▶ Mostriamo prima che un grafo planare ha sempre un vertice di grado piccolo, poi lo usiamo per colorare con 5 colori

Lemma 1

Ogni grafo planare con $n \geq 3$ vertici ha $m \leq 3n - 6$ spigoli, e un vertice di grado al più 5.

Dimostrazione (1/2)

- ▶ Aggiungere spigoli a un disegno senza creare incroci non diminuisce m
- ▶ Quindi possiamo supporre che non si possa aggiungere alcuno spigolo di questo tipo: il disegno è connesso e ogni faccia è un triangolo
- ▶ La formula di Eulero per un disegno planare connesso con f facce dà

$$n - m + f = 2$$

- ▶ Ogni faccia ha 3 spigoli e ogni spigolo delimita 2 facce, quindi

$$3f = 2m$$

Dimostrazione (2/2)

- Sostituendo $f = \frac{2m}{3}$ nella formula di Eulero:

$$2 = n - m + f = n - m + \frac{2m}{3} \implies m \leq 3n - 6$$

- I gradi sommano a

$$2m \leq 6n - 12 < 6n,$$

quindi qualche vertice ha grado al più 5



Teorema 3: Heawood, 1890

Ogni grafo planare si può colorare con 5 colori, e una colorazione di questo tipo si trova in tempo polinomiale.

- L'idea della dimostrazione: togliere un vertice di grado al più 5, colorare il resto, e liberare un colore per esso scambiando due colori

Dimostrazione (1/3)

- ▶ Per induzione su n ; i grafi con $n \leq 5$ sono banali
 - ▶ Sia v un vertice di grado al più 5 (per il lemma precedente)
 - ▶ Coloriamo $G - v$, che è planare, con 5 colori
1. Se i vicini di v usano al più 4 colori, v prende il quinto
 2. Altrimenti v ha 5 vicini $v_1, \dots, v_5$, in quest'ordine intorno a v nel disegno, con colori $1, \dots, 5$. Sia H_{13} il grafo indotto dai vertici di colore 1 e 3

Dimostrazione (2/3)

3. Se v_1 e v_3 stanno in componenti diverse di H_{13} , scambiamo i colori 1 e 3 nella componente di v_1 : la colorazione resta ammissibile, e il colore 1 diventa libero per v
4. Altrimenti un cammino di colori 1 e 3 unisce v_1 a v_3
 - ▶ Con v , chiude un ciclo che separa v_2 da v_4 nel disegno
 - ▶ Un cammino da v_2 a v_4 deve attraversare quel ciclo, quindi v_2 e v_4 stanno in componenti diverse di H_{24}
 - ▶ Scambiando 2 e 4 nella componente di v_2 si libera il colore 2 per v

Dimostrazione (3/3)

- ▶ Ogni passo usa una visita in tempo

$$O(n + m) = O(n)$$

- ▶ I passi sono n : in totale tempo $O(n^2)$



Il teorema dei quattro colori

- ▶ **Osservazione (il teorema dei quattro colori).** Ogni grafo planare si può colorare con 4 colori (Appel e Haken, 1977)
- ▶ La dimostrazione usa un calcolatore
- ▶ Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1997) l'hanno semplificata e hanno dato un algoritmo che trova una colorazione di questo tipo in tempo $O(n^2)$

L'algoritmo *PL* per i grafi planari

L'algoritmo *PL* per i grafi planari combina i risultati precedenti:

- ▶ se G non ha spigoli, usa 1 colore;
- ▶ se G è bipartito, usa 2 colori (con la visita in ampiezza dei grafi bipartiti);
- ▶ altrimenti usa i 5 colori del teorema di Heawood.

Corollario 2

PL è un algoritmo polinomiale di approssimazione 2-additivo per il VCP sui grafi planari:

$$PL(I) - \chi(G) \leq 2.$$

Con l'algoritmo dei quattro colori al posto di quello dei cinque colori, l'errore additivo è al più 1.

Dimostrazione

- ▶ Nei primi due casi PL è esatto
- ▶ Nel terzo caso G ha un ciclo di lunghezza dispari, quindi $\chi(G) \geq 3$, mentre $PL(I) \leq 5$: l'errore additivo è al più

$$5 - 3 = 2$$

- ▶ Con 4 colori è al più

$$4 - 3 = 1$$



Il migliore possibile sui grafi planari

- ▶ L'errore additivo 1 non si può ridurre a 0: decidere se un grafo planare ha $\chi(G) \leq 3$ è NP-completo
- ▶ Per lo stesso motivo, il rapporto $\frac{4}{3}$ della versione con quattro colori è il migliore possibile sui grafi planari (per il teorema del $\frac{4}{3}$)

Definizione 2: grafo di intervalli

*Un grafo $G = (V, E)$ è un **grafo di intervalli** se a ogni vertice v è associato un intervallo chiuso $[a_v, b_v]$ della retta reale, e $\{u, v\} \in E$ se e solo se i due intervalli si intersecano.*

- I grafi di intervalli descrivono richieste nel tempo che sono in conflitto quando si sovrappongono: lezioni che richiedono un'aula, prenotazioni che richiedono una risorsa. Un colore è un'aula.

Proposizione 3

Su un grafo di intervalli, la colorazione greedy con i vertici in ordine di estremo sinistro a_v non decrescente usa $\omega(G)$ colori. È quindi ottima: $GC(I) = \omega(G) = \chi(G)$.

Dimostrazione (1/2)

- ▶ Sia v un vertice che riceve il colore k
- ▶ I colori $1, \dots, k - 1$ sono usati da vicini u di v colorati prima di v , quindi con

$$a_u \leq a_v$$

1. Poiché $[a_u, b_u]$ interseca $[a_v, b_v]$ e $a_u \leq a_v$, abbiamo

$$b_u \geq a_v :$$

il punto a_v sta nell'intervallo di ciascuno di questi vicini, e nell'intervallo di v

Dimostrazione (2/2)

2. I k intervalli che contengono a_v si intersecano a due a due, quindi i loro vertici formano una clique e

$$k \leq \omega(G)$$

Quindi, per il bound di clique,

$$GC(I) \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq GC(I).$$



L'ordine conta

- ▶ Ordinare gli intervalli richiede tempo $O(n \log n)$, e la colorazione $O(n + m)$
- ▶ L'ordine conta: con un altro ordine la colorazione greedy può usare più di $\omega(G)$ colori su un grafo di intervalli (si veda l'esempio con sei intervalli nella prossima sezione)

Riepilogo (1/2)

Grafi bipartiti:

- ▶ Una visita in ampiezza decide se $\chi(G) \leq 2$ in tempo $O(n + m)$
- ▶ Un conflitto dà un ciclo dispari, il certificato di $\chi(G) \geq 3$

Grafi di grado massimo limitato:

- ▶ La colorazione greedy usa al più $\Delta(G) + 1$ colori, in qualunque ordine
- ▶ Con Δ fissato, il rapporto è al più $\frac{\Delta+1}{2}$

Riepilogo (2/2)

Grafi planari:

- ▶ Esiste sempre un vertice di grado al più 5, e bastano 5 colori (Heawood)
- ▶ PL ha errore additivo al più 2, o 1 con il teorema dei quattro colori

Grafi di intervalli:

- ▶ La colorazione greedy per estremo sinistro usa $\omega(G)$ colori, quindi è ottima
- ▶ L'ordine conta

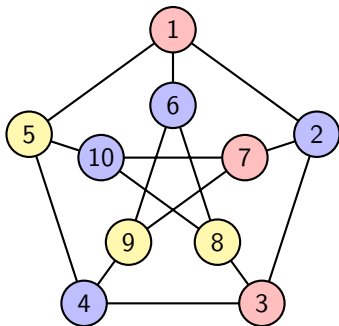
Esempi

Introduzione: Esempi

- ▶ Applichiamo i casi particolari a due grafi piccoli
- ▶ Prima il grafo di Petersen, l'istanza di riferimento del VCP: è bipartito, e quanto è buona la colorazione greedy?
- ▶ Poi un grafo di intervalli con sei intervalli, per vedere che l'ordine della colorazione greedy conta

Esempio: i casi particolari sul grafo di Petersen (1/3)

L'istanza di riferimento del VCP è il grafo di Petersen, con $n = 10$, $m = 15$ e $\Delta(G) = 3$.



Esempio: i casi particolari sul grafo di Petersen (2/3)

È bipartito?

- ▶ La visita dal vertice 1 dà il livello 0 al vertice 1, 1 ai vertici 2, 5, 6, e 2 agli altri sei
- ▶ Lo spigolo $\{3, 4\}$ unisce due vertici di livello 2
- ▶ Con i cammini 1, 2, 3 e 1, 5, 4 chiude il ciclo dispari 1, 2, 3, 4, 5, quindi

$$\chi(G) \geq 3$$

Esempio: i casi particolari sul grafo di Petersen (3/3)

Colorazione greedy.

- Nell'ordine $1, 2, \dots, 10$, GC assegna i colori

1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 3, 2

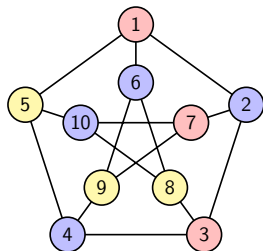
(rosso, blu, giallo nella figura)

- $GC(I) = 3 \leq \Delta(G) + 1 = 4$

- Insieme,

$$3 \leq \chi(G) \leq GC(I) = 3 :$$

la colorazione greedy è ottima su questa istanza

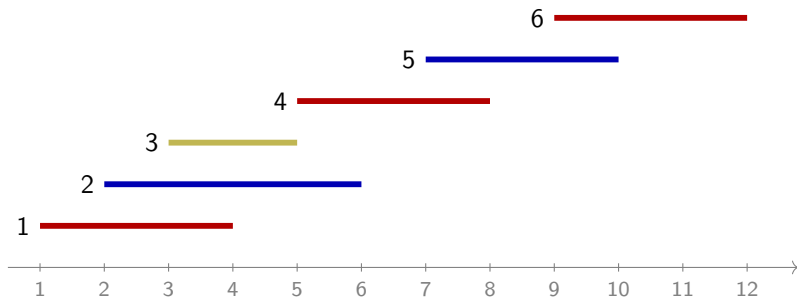


Sul grafo di Petersen ogni ordine andrebbe bene.

Su un grafo di intervalli, invece,
l'ordine della colorazione greedy conta:
vediamolo su sei intervalli.

Esempio: la colorazione greedy su un grafo di intervalli (1/3)

Sei intervalli, con gli spigoli fra intervalli che si intersecano:



$$[a_v, b_v] : [1, 4], [2, 6], [3, 5], [5, 8], [7, 10], [9, 12],$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$

Esempio: la colorazione greedy su un grafo di intervalli (2/3)

- ▶ Gli estremi sinistri sono già in ordine crescente
- ▶ GC assegna i colori

1, 2, 3, 1, 2, 1

(rosso, blu, giallo nella figura): $GC(I) = 3$

- ▶ Gli intervalli 1, 2, 3 contengono il punto 3, quindi $\{1, 2, 3\}$ è una clique e $\omega(G) = 3$
- ▶ La colorazione è ottima, come garantisce la proposizione sui grafi di intervalli

Esempio: la colorazione greedy su un grafo di intervalli (3/3)

Un altro ordine.

- ▶ Con l'ordine 1, 2, 3, 5, 4, 6 i colori sono 1, 2, 3, poi 1 al vertice 5
- ▶ Il vertice 4 riceve il colore 4: i suoi vicini 2, 3, 5 usano i colori 1, 2, 3
- ▶ 4 colori, uno in più di $\chi(G)$

Il grafo di Petersen:

- ▶ La visita in ampiezza trova il ciclo dispari 1, 2, 3, 4, 5:
 $\chi(G) \geq 3$
- ▶ La colorazione greedy nell'ordine 1, 2, ..., 10 usa 3 colori: è ottima

Il grafo di intervalli:

- ▶ Per estremo sinistro, la colorazione greedy usa $\omega(G) = 3$ colori
- ▶ Con l'ordine 1, 2, 3, 5, 4, 6 ne usa 4

Fonti

Introduzione: Fonti

- ▶ Elenchiamo gli articoli in cui sono stati dimostrati i risultati di questo capitolo
- ▶ Prima i risultati negativi sull'approssimazione del numero cromatico
- ▶ Poi i risultati positivi sulle classi particolari di grafi

- ▶ M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, *Theoretical Computer Science* 1(3):237–267, 1976.
- ▶ M.R. Garey, D.S. Johnson, The complexity of near-optimal graph coloring, *Journal of the ACM* 23(1):43–49, 1976.
- ▶ U. Feige, J. Kilian, Zero knowledge and the chromatic number, *Journal of Computer and System Sciences* 57(2):187–199, 1998.
- ▶ D. Zuckerman, Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number, *Theory of Computing* 3:103–128, 2007.

Fonti (2/2)

- ▶ R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 37(2):194–197, 1941.
- ▶ P.J. Heawood, Map-colour theorem, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 24, 1890.
- ▶ J. Hopcroft, R. Tarjan, Efficient planarity testing, *Journal of the ACM* 21(4):549–568, 1974.
- ▶ K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, *Illinois Journal of Mathematics* 21, 1977.
- ▶ N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, The four-colour theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70(1):2–44, 1997.

Risultati negativi:

- ▶ Garey, Johnson e Stockmeyer; Garey e Johnson; Feige e Kilian; Zuckerman

Risultati positivi:

- ▶ Brooks; Heawood; Hopcroft e Tarjan; Appel e Haken; Robertson, Sanders, Seymour e Thomas

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ In questa sezione elenchiamo gli errori più comuni sull'approssimazione del VCP
- ▶ Riguardano il significato dei bound, il teorema dei quattro colori, l'ordine degli intervalli e il ciclo dispari
- ▶ Riconoscerli aiuta a enunciare correttamente i risultati

Osservazione 1: errori tipici (1/2)

- ▶ **Chiamare il bound $\Delta(G) + 1$ una garanzia di prestazione.** Confronta la colorazione greedy con $\Delta(G) + 1$, non con $\chi(G)$; diventa un rapporto costante solo sui grafi di grado massimo limitato.
- ▶ **Leggere il teorema del $\frac{4}{3}$ come un upper bound.** Afferma che i rapporti inferiori a $\frac{4}{3}$ sono impossibili, non che un rapporto di $\frac{4}{3}$ sia raggiungibile: per il risultato di Zuckerman, nessun rapporto costante lo è.
- ▶ **Usare il teorema dei quattro colori come algoritmo esatto.** Colora ogni grafo planare con al più 4 colori, ma decidere se bastano 3 colori resta NP-completo sui grafi planari.

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ▶ *Ordinare gli intervalli per estremo destro, o per lunghezza. La proposizione sui grafi di intervalli usa l'ordine degli estremi sinistri: gli intervalli dei colori usati prima di v contengono tutti il punto a_v .*
- ▶ *Dimenticare il ciclo dispari. Una visita in ampiezza che trova un conflitto dimostra $\chi(G) \geq 3$ solo attraverso il ciclo dispari che chiude; il ciclo è il certificato.*

Il significato dei risultati:

- ▶ $\Delta(G) + 1$ non è un rapporto con $\chi(G)$, tranne che sui grafi di grado limitato
- ▶ Il teorema del $\frac{4}{3}$ è un lower bound sul rapporto, non un rapporto raggiungibile
- ▶ Sui grafi planari bastano sempre quattro colori, ma decidere se ne bastano tre è difficile

I dettagli degli algoritmi:

- ▶ Grafi di intervalli: ordinare per estremo sinistro
- ▶ Test di bipartizione: il ciclo dispari è il certificato

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- ▶ Raccogliamo in pochi punti le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con una tabella dei risultati sulle classi di grafi, e con il quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento

Riepilogo (1/3)

- ▶ A meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale colora ogni grafo con meno di $\frac{4}{3}\chi(G)$ colori: deciderebbe la 3-colorabilità
- ▶ Per il risultato di Zuckerman, non è possibile nemmeno il rapporto $n^{1-\epsilon}$: il VCP non è approssimabile
- ▶ I grafi bipartiti e i grafi di intervalli si colorano all'ottimo in tempo polinomiale
- ▶ Sui grafi di grado limitato la colorazione greedy ha rapporto $\frac{\Delta+1}{2}$
- ▶ Sui grafi planari l'errore additivo è al più 2, o 1 con il teorema dei quattro colori

Riepilogo (2/3)

grafi	algoritmo	risultato
tutti i grafi	polinomiale	nessun rapporto costante, salvo $P = NP$
bipartiti	visita in ampiezza	esatto, $O(n + m)$
grado massimo $\leq \Delta$	colorazione greedy	al più $\Delta + 1$ colori
planari	PL	errore additivo ≤ 2 (o ≤ 1)
di intervalli	greedy per estremo sinistro	esatto, $\omega(G)$ colori

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza di riferimento.

Istanza	Lower bound	Valore euristico	Valore ottimo
grafo di Petersen	3, ciclo dispari	<i>GC</i> 3	3