

Formulazioni dei problemi di colorazione

Indice

Panoramica della famiglia

Un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici

Un primo rilassamento lineare

Un secondo rilassamento lineare

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere il modello PLI del problema della colorazione dei vertici e spiegare il ruolo delle variabili di attivazione y_c ;
- ▶ scrivere i due rilassamenti lineari e i loro duali, e calcolarne le soluzioni ottime;
- ▶ dimostrare che il valore ottimo dei rilassamenti lineari è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo;
- ▶ spiegare perché questo bound è molto debole, e perché il modello non basta per colorare un grafo.

Prerequisiti

- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare*, il capitolo «[Teoria della dualità](#)»: il duale di un problema PL, dualità debole e forte
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «[Programmazione lineare intera](#)» e «[Bound primali e duali](#)»: problemi PLI, rilassamenti lineari e bound
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di colorazione](#)»: il problema, le sue ipotesi e la notazione sui grafi

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ In questa sezione vediamo la struttura comune dei **modelli PLI** dei problemi di colorazione
- ▶ Tutti usano un upper bound k sul numero di colori, variabili di assegnamento e variabili di attivazione
- ▶ Riconoscere questa struttura aiuta a leggere ogni modello della famiglia, e a confrontarlo con i modelli dei problemi di packing

Gli ingredienti dei modelli di colorazione

- ▶ I modelli PLI dei problemi di colorazione usano un upper bound k sul numero di colori e l'insieme $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, k\}$ dei colori che si possono usare
- ▶ Le **variabili di assegnamento** binarie x_{vc} danno un colore $c \in \mathcal{C}$ a ogni vertice $v \in V$, e le **variabili di attivazione** binarie y_c dicono se il colore c è usato
- ▶ Ogni spigolo e ogni colore danno un vincolo, che vieta lo stesso colore sui due estremi dello spigolo, e la funzione obiettivo minimizza il numero $\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c$ di colori usati

I modelli di colorazione sono modelli di assegnamento

I modelli di colorazione sono **modelli di assegnamento**, come i modelli di packing: un vertice è assegnato a un colore come un oggetto è assegnato a un contenitore, e i vincoli sugli spigoli prendono il posto dei vincoli di capacità.

Modelli di colorazione	Modelli di packing
un vertice	un oggetto
un colore	un contenitore
i vincoli sugli spigoli	i vincoli di capacità

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive

Problema	Modello	Variabili	Sezione
VCP	ILP _{VCP}	binarie x_{vc} e y_c	Un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici

Gli ingredienti:

- ▶ Un upper bound k sul numero di colori e l'insieme $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, k\}$ dei colori
- ▶ Variabili di assegnamento x_{vc} e variabili di attivazione y_c , tutte binarie
- ▶ Un vincolo per ogni spigolo e ogni colore; la funzione obiettivo conta i colori usati

Modelli di assegnamento:

- ▶ Un vertice è assegnato a un colore come un oggetto è assegnato a un contenitore
- ▶ I vincoli sugli spigoli prendono il posto dei vincoli di capacità dei modelli di packing

Un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici

Introduzione: Un modello PLI per il VCP

- ▶ Il problema della colorazione dei vertici e le sue ipotesi sono definiti nel capitolo «[Problemi di colorazione](#)»
- ▶ In questa sezione introduciamo le variabili, scriviamo il modello ILP_{VCP} e descriviamo la sua funzione obiettivo e i suoi vincoli
- ▶ Spieghiamo il legame fra le variabili di assegnamento e le variabili di attivazione
- ▶ Scriviamo il modello per un piccolo grafo, un triangolo: è l'istanza usata in tutto il capitolo

Le variabili del modello (1/2)

- ▶ Dato un grafo $G = (V, E)$, per un vertice $v \in V$ indichiamo con $\delta(v)$ l'insieme degli spigoli incidenti in v
- ▶ Dato un upper bound $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sul numero di colori usati in una qualunque soluzione ottima del VCP, introduciamo le seguenti $k \underbrace{|V|}_{=n}$ variabili binarie:

$$x_{vc} = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ prende il colore } c, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall v \in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{=V}, \quad \forall c \in \underbrace{\{1, 2, \dots, k\}}_{=\mathcal{C}},$$

Le variabili del modello (2/2)

- ▶ e le seguenti k variabili binarie:

$$y_c = \begin{cases} 1 & \text{se il colore } c \text{ è usato,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall c \in \underbrace{\{1, 2, \dots, k\}}_{=\mathcal{C}}.$$

- ▶ Il numero n di vertici è un upper bound valido sul numero minimo di colori necessari per colorare tutti i vertici poiché, nel caso peggiore, ogni vertice prende un colore diverso
- ▶ Anche il numero di colori usati in una qualunque soluzione ammissibile del VCP è un upper bound valido

Il modello ILP_{VCP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della colorazione dei vertici (VCP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \min \quad \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \\ & \text{soggetto a} \quad \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1, & \forall v \in V, \\ & \quad -x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0, & \forall c \in \mathcal{C}, \forall \{u, v\} \in E, \\ & \quad x_{vc} \in \{0, 1\}, & \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \\ & \quad y_c \in \{0, 1\}, & \forall c \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{VCP} .

La funzione obiettivo e i vincoli

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

ILP_{VCP}:

- ▶ la funzione obiettivo lineare $\min \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c$ minimizza il numero totale di colori usati;
- ▶ i vincoli $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$ garantiscono che ogni vertice prenda esattamente un colore (n vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0$ garantiscono che, per ogni colore e ogni spigolo, i due vertici adiacenti non prendano entrambi quel colore, e che nessun vertice prenda un colore non usato ($k \underbrace{|E|}_{=m}$ vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli $x_{vc} \in \{0, 1\}$ e $y_c \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

I vincoli sugli spigoli legano
le variabili di assegnamento x_{vc} e le variabili di attivazione y_c .

Vediamo questo legame in dettaglio.

Il legame fra le variabili (1/2)

- Se il colore c è assegnato a un vertice, allora è usato.
L'implicazione logica è

$$(x_{1c} \text{ OR } x_{2c} \text{ OR } \dots \text{ OR } x_{nc}) \implies y_c.$$

Ogni vertice ha uno spigolo incidente $\{u, v\}$, e il vincolo $x_{uc} + x_{vc} \leq y_c$ impone $y_c = 1$ non appena $x_{vc} = 1$.

- Se il colore c non è usato, allora nessun vertice lo prende. È la contronominale dell'implicazione precedente. Per $y_c = 0$ il vincolo sullo spigolo dà $x_{uc} = x_{vc} = 0$ per ogni spigolo $\{u, v\} \in E$.

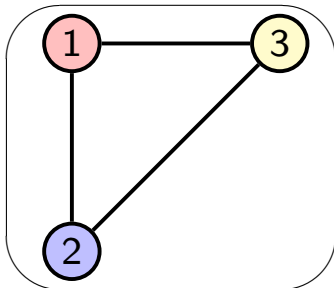
Il legame fra le variabili (2/2)

- ▶ Se il colore c è usato, allora qualche vertice lo prende, ma solo in una soluzione ottima.
- ▶ I vincoli non lo impongono
- ▶ Tuttavia, se $x_{vc} = 0$ per ogni v e $y_c = 1$, porre $y_c = 0$ mantiene soddisfatti tutti i vincoli e diminuisce di uno il valore obiettivo
- ▶ Quindi, in ogni soluzione ottima, i colori non usati non sono contati

Scriviamo ora il modello ILP_{VCP}
per una piccola istanza: un triangolo.

Esempio: il modello ILP_{VCP} (1/4)

Consideriamo il seguente grafo $G = (V, E)$ con 3 vertici ($n = 3$) e 3 spigoli ($m = 3$):



L'insieme dei vertici V e l'insieme degli spigoli E sono:

$$V = \{ 1, 2, 3 \}, \quad E = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}.$$

Chiamiamo questa istanza del VCP l'esempio del **triangolo**.

Esempio: il modello ILP_{VCP} (2/4)

Il modello ILP_{VCP} con $k = 3$ per questa istanza è:

$$\begin{array}{llllllllllllll}
 \min & & & & & & & & & & & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & \\
 \text{soggetto a} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & & = & 1 \\
 & -x_{11} & & & & & -x_{21} & & & & & & + & y_1 & & & & \geq & 0 \\
 & -x_{11} & & & & & & & & & -x_{31} & & + & y_1 & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & -x_{21} & & & & -x_{31} & & + & y_1 & & & & \geq & 0 \\
 & & & -x_{12} & & & & -x_{22} & & & & & & + & y_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & -x_{12} & & & & & & & -x_{32} & & + & y_2 & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & -x_{22} & & & & -x_{32} & & + & y_2 & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & -x_{13} & & & -x_{23} & & & & & + & y_3 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & -x_{13} & & & & & -x_{33} & & + & y_3 & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & -x_{23} & & -x_{33} & & + & y_3 & & & & \geq & 0 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 & \in & \{0, 1\}
 \end{array}$$

Esempio: il modello ILP_{VCP} (3/4)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = 1, \quad \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = 0,$$

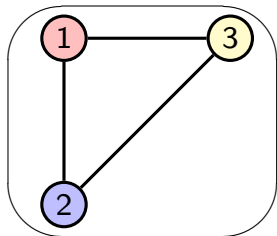
$$\tilde{x}_{22} = 1, \quad \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = 0,$$

$$\tilde{x}_{33} = 1,$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 1$$

Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ è 3.

Esempio: il modello ILP_{VCP} (4/4)



- ▶ La soluzione ottima associata del VCP è data dalle classi di colore

$$\tilde{Q}_1 = \{1\}, \quad \tilde{Q}_2 = \{2\}, \quad \tilde{Q}_3 = \{3\}$$

- ▶ La partizione ottima è unica, ma le $3!$ permutazioni dei colori danno 6 soluzioni ottime diverse

Il modello ILP_{VCP} :

- ▶ k n variabili binarie x_{vc} (il vertice v prende il colore c) e k variabili binarie y_c (il colore c è usato)
- ▶ n vincoli danno un colore a ogni vertice; k m vincoli sugli spigoli vietano colori uguali su vertici adiacenti

Il legame fra le variabili:

- ▶ Un colore preso da un vertice è usato; un colore non usato non è preso da nessun vertice
- ▶ Un colore che nessun vertice prende è spento dalla funzione obiettivo, in ogni soluzione ottima

Il triangolo: $z(\text{ILP}_{\text{VCP}}) = 3$, con 6 soluzioni ottime che differiscono per una permutazione dei colori

Un primo rilassamento lineare

Introduzione: Un primo rilassamento lineare

- ▶ In questa sezione rilassiamo le variabili binarie del modello ILP_{VCP} in variabili non negative: otteniamo il modello $LP-0_{VCP}$
- ▶ Il suo valore ottimo è un lower bound su $z(ILP_{VCP})$: lo calcoliamo sul triangolo
- ▶ Scriviamo il modello duale $D(LP-0_{VCP})$ e lo risolviamo sul triangolo
- ▶ Infine dimostriamo, in due modi, che il valore ottimo è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo

Il modello $LP-0_{VCP}$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{VCP} , rilassiamo i vincoli $x_{vc} \in \{0, 1\}$ e $y_c \in \{0, 1\}$ con i seguenti:

$$x_{vc} \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

$$y_c \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Questo modello PL si chiama modello $LP-0_{VCP}$.

Esempio: il modello LP-0_{VCP} (1/2)

Il modello LP-0_{VCP} per l'esempio del triangolo è:

$$\begin{array}{llllllllllllll}
 \min & & & & & & & & & & & & & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\
 \text{soggetto a} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & & & = & 1 \\
 & -x_{11} & & & & & -x_{21} & & & & & & & & + & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & -x_{11} & & & & & & & & & -x_{31} & & & & + & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & -x_{21} & & & & -x_{31} & & & & + & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & -x_{12} & & & & & -x_{22} & & & & & & & & + & y_2 & & \geq & 0 \\
 & & -x_{12} & & & & & & & & -x_{32} & & & & + & y_2 & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & -x_{22} & & & -x_{32} & & & & + & y_2 & & \geq & 0 \\
 & & & & -x_{13} & & & & -x_{23} & & & & & & & & + & y_3 & \geq & 0 \\
 & & & -x_{13} & & & & & & & & -x_{33} & & & & + & y_3 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & -x_{23} & & & & -x_{33} & & & & + & y_3 & \geq & 0 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

Esempio: il modello LP-0_{VCP} (2/2)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \frac{1}{2},$$

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{33} = 0,$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0$$

Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è 2.

Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$2 \leq z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$$

Il duale del modello LP-0_{VCP}: le variabili duali

Con

- ▶ una variabile duale libera μ_v per ogni vincolo $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$ ($v \in V$)
- ▶ una variabile duale non negativa π_{ce} per ogni vincolo $-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0$ ($c \in \mathcal{C}$, $e = \{u, v\} \in E$)

il modello duale del modello LP-0_{VCP} è quello della prossima slide.

Il modello $D(LP-0_{VCP})$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} \mu_v \\ \text{soggetto a} \quad & \mu_v - \sum_{e \in \delta(v)} \pi_{ce} \leq 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C}, \\ & \sum_{e \in E} \pi_{ce} \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \\ & \mu_v \geq 0, \quad \forall v \in V, \\ & \pi_{ce} \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall e \in E. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello $D(LP-0_{VCP})$.

Esempio: il modello $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ (1/3)

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ per l'esempio del triangolo è:

$$\begin{array}{llll}
 \max & \mu_1 & + & \mu_2 & + & \mu_3 \\
 \text{soggetto a} & \mu_1 & & & & -\pi_{112} & -\pi_{113} \\
 & \mu_1 & & & & & \\
 & \mu_1 & & & & & \\
 & & \mu_2 & & & -\pi_{112} & & -\pi_{123} \\
 & & \mu_2 & & & & & \\
 & & \mu_2 & & & & & \\
 & & & \mu_3 & & & -\pi_{113} & -\pi_{123} \\
 & & & \mu_3 & & & & \\
 & & & \mu_3 & & & & \\
 & & & & \pi_{112} & +\pi_{113} & +\pi_{123} & \\
 & & & & & & & \\
 & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & \\
 & & & & \pi_{112}, & \pi_{113}, & \pi_{123}, &
 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(LP-0_{VCP})$ (2/3)

Continua: le colonne rimanenti e i termini noti.

$$\begin{array}{rcll}
 \max & & & \\
 \text{soggetto a} & & & \leq 0 \\
 & -\pi_{212} & -\pi_{213} & \leq 0 \\
 & & -\pi_{312} & -\pi_{313} & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 & -\pi_{212} & & -\pi_{223} & \leq 0 \\
 & & -\pi_{312} & & -\pi_{323} & \leq 0 \\
 & & & & & \leq 0 \\
 & & -\pi_{213} & -\pi_{223} & & \leq 0 \\
 & & & & -\pi_{313} & -\pi_{323} & \leq 0 \\
 & & & & & \leq 1 \\
 & \pi_{212} & +\pi_{213} & +\pi_{223} & & \leq 1 \\
 & & & \pi_{312} & +\pi_{313} & +\pi_{323} & \leq 1 \\
 & & & & & \geq 0 \\
 & & & & & \geq 0 \\
 & \pi_{212}, & \pi_{213}, & \pi_{223}, & \pi_{312}, & \pi_{313}, & \pi_{323} & \geq 0
 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ (3/3)

Il valore ottimo $z(D(\text{LP-0}_{\text{VCP}}))$ è 2.

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi})$ di $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = 0,$$

$$\tilde{\pi}_{112} = \tilde{\pi}_{212} = \tilde{\pi}_{312} = 1,$$

$$\text{tutti gli altri } \tilde{\pi}_{ce} = 0$$

- I valori ottimi primale e duale coincidono:
 $z(\text{LP-0}_{\text{VCP}}) = 2 = z(D(\text{LP-0}_{\text{VCP}}))$

Sul triangolo, entrambi i valori ottimi sono 2.

Mostriamo ora che le stesse soluzioni primale e duale sono ottime per **ogni** grafo con almeno uno spigolo.

Proposizione 1: soluzioni ottime (1/2)

Una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{VCP}$ è:

$$\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}, \quad \forall v \in V,$$

$$\tilde{x}_{vc} = 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\},$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1,$$

$$\tilde{y}_c = 0, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\},$$

Proposizione: soluzioni ottime (2/2)

e una soluzione ottima del modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_u = \tilde{\mu}_v = 1,$$

$$\tilde{\mu}_w = 0, \quad \forall w \in V \setminus \{u, v\},$$

$$\tilde{\pi}_{c\{u,v\}} = 1, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

$$\tilde{\pi}_{ce} = 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, e \in E \setminus \{\{u, v\}\},$$

dove $\{u, v\}$ è uno spigolo qualunque di E .

Corollario 1

Il valore ottimo dei modelli primale $LP-0_{VCP}$ e duale $D(LP-0_{VCP})$ è:

$$z(LP-0_{VCP}) = 2 = z(D(LP-0_{VCP}))$$

Come procede la dimostrazione

La dimostrazione procede in tre passi:

1. mostriamo che la soluzione primale della proposizione è una soluzione ammissibile del modello primale $LP-0_{VCP}$;
2. mostriamo che la soluzione duale della proposizione è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP-0_{VCP})$;
3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Quindi, per la dualità debole della PL, le due soluzioni sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione (1/4)

1. Per ogni $v \in V$, abbiamo:

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{x}_{vc} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Quindi i vincoli $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$ sono soddisfatti.

Per $c \in \{1, 2\}$ e ogni $\{u, v\} \in E$, abbiamo:

$$\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

e per $c \in \{3, 4, \dots, k\}$ abbiamo $\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 0 - 0 - 0 = 0$.

Quindi i vincoli $-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0$ sono soddisfatti.

Dimostrazione (2/4)

Abbiamo $\tilde{x}_{vc} \geq 0$ e $\tilde{y}_c \geq 0$, per ogni $v \in V$ e ogni $c \in \mathcal{C}$, quindi i vincoli $x_{vc} \geq 0$ e $y_c \geq 0$ sono soddisfatti.

Quindi la soluzione primale fornisce una soluzione ammissibile del modello primale $LP-0_{VCP}$.

2. Per ogni $c \in \mathcal{C}$, abbiamo:

$$\sum_{e \in E} \tilde{\pi}_{ce} = 1$$

Quindi i vincoli $\sum_{e \in E} \pi_{ce} \leq 1$ sono soddisfatti.

Dimostrazione (3/4)

Per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $w \in \{u, v\}$, abbiamo:

$$\tilde{\mu}_w - \sum_{e \in \delta(w)} \tilde{\pi}_{ce} = 1 - 1 = 0$$

Per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $w \in V \setminus \{u, v\}$, abbiamo $\tilde{\mu}_w = 0$ e $\tilde{\pi}_{ce} = 0$ per ogni $e \in \delta(w)$ (poiché $\tilde{\pi}_{ce}$ è diverso da zero solo per $e = \{u, v\}$, che non è incidente in w), quindi

$$\tilde{\mu}_w - \sum_{e \in \delta(w)} \tilde{\pi}_{ce} = 0 - 0 = 0.$$

Quindi i vincoli $\mu_v - \sum_{e \in \delta(v)} \pi_{ce} \leq 0$ sono soddisfatti.

Dimostrazione (4/4)

Abbiamo $\tilde{\mu}_v \geq 0$, $\forall v \in V$ e $\tilde{\pi}_{ce} \geq 0$ per ogni $c \in \mathcal{C}$ e ogni $e \in E$.
Quindi i vincoli $\mu_v \geq 0$ e $\pi_{ce} \geq 0$ sono soddisfatti.

Quindi la soluzione duale fornisce una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP-0_{VCP})$.

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{y}_c = 1 + 1 = \sum_{v \in V} \tilde{\mu}_v$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità debole della PL, le due soluzioni sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale. □

Una dimostrazione alternativa

- Riportiamo una dimostrazione alternativa, che non usa la formulazione duale ma ragiona direttamente sul valore minimo della funzione obiettivo imposto dai vincoli

Proposizione 2

Una soluzione ottima del modello primale LP-0_{VCP} è:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{v1} &= \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}, & \forall v \in V, \\ \tilde{x}_{vc} &= 0, & \forall v \in V, \forall c \in \{3, 4, \dots, k\}, \\ \tilde{y}_1 &= \tilde{y}_2 = 1, \\ \tilde{y}_c &= 0, & \forall c \in \{3, 4, \dots, k\},\end{aligned}$$

e il valore ottimo è $z(\text{LP-0}_{\text{VCP}}) = 2$.

Dimostrazione (1/4)

Sommando i vincoli sugli spigoli $-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0$ su tutti i $c \in \mathcal{C}$, per uno spigolo qualunque $\{u, v\} \in E$, otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c - \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{uc} - \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} &\geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c &\geq \underbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{uc}}_{=1} + \underbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc}}_{=1} = 2, \end{aligned}$$

dove le due somme valgono 1 per i vincoli $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{uc} = 1$.

Dimostrazione (2/4)

Quindi

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \geq 2.$$

Quindi ogni soluzione ammissibile di $LP-0_{VCP}$ soddisfa $\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \geq 2$.

Consideriamo ora il punto definito nella proposizione. Per ogni $v \in V$, abbiamo

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{x}_{vc} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

quindi i vincoli $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$ valgono.

Dimostrazione (3/4)

Inoltre, per ogni $\{u, v\} \in E$ e $c \in \{1, 2\}$,

$$\tilde{y}_c - \tilde{x}_{uc} - \tilde{x}_{vc} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

quindi i vincoli $-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0$ valgono all'uguaglianza, mentre per ogni $c \geq 3$ entrambi i membri sono nulli.

Infine, i vincoli $x_{vc} \geq 0$ e $y_c \geq 0$ sono soddisfatti per costruzione.

Quindi il punto definito nella proposizione è una soluzione ammissibile di $LP-0_{VCP}$.

Dimostrazione (4/4)

Il valore obiettivo di questo punto è

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{y}_c = 1 + 1 = 2,$$

che coincide con il lower bound $\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \geq 2$.

Quindi il punto è una soluzione ottima con valore obiettivo $z(\text{LP-0}_{\text{VCP}}) = 2$. □

Il modello $LP-0_{VCP}$:

- ▶ I domini binari sono sostituiti da $x_{vc} \geq 0$ e $y_c \geq 0$
- ▶ Il suo duale $D(LP-0_{VCP})$ ha una variabile libera μ_v per ogni vertice e una variabile non negativa π_{ce} per ogni colore e ogni spigolo

Il valore ottimo è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo:

- ▶ Primale: $\frac{1}{2}$ sui colori 1 e 2 per tutti i vertici, $y_1 = y_2 = 1$
- ▶ Duale: uno spigolo $\{u, v\}$, con $\mu_u = \mu_v = 1$ e $\pi_{c\{u,v\}} = 1$ per ogni colore
- ▶ Dimostrazione alternativa: sommando i vincoli di uno spigolo si ottiene $\sum_{c \in \mathcal{C}} y_c \geq 2$

Un secondo rilassamento lineare

Introduzione: Un secondo rilassamento lineare

- ▶ In questa sezione scriviamo un secondo rilassamento lineare, il modello LP_{VCP} , che mantiene gli upper bound $y_c \leq 1$
- ▶ Risolviamo sul triangolo il modello e il suo duale $D(LP_{VCP})$
- ▶ Dimostriamo che, anche per questo rilassamento, il valore ottimo è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo: aggiungere vincoli non migliora il bound

Il modello LP_{VCP}

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{VCP} , rilassiamo i vincoli $x_{vc} \in \{0, 1\}$ e $y_c \in \{0, 1\}$ con i seguenti:

$$x_{vc} \geq 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

$$y_c \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

$$y_c \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{VCP} .

Esempio: il modello LP_{VCP} (1/2)

Il modello LP_{VCP} per l'esempio del triangolo è:

min										$y_1 + y_2 + y_3$	$= 1$		
soggetto a	$x_{11} + x_{12} + x_{13}$									$= 1$			
				$x_{21} + x_{22} + x_{23}$						$= 1$			
					$x_{31} + x_{32} + x_{33}$				$= 1$				
	$-x_{11}$				$-x_{21}$				$+ y_1$	≥ 0			
	$-x_{11}$					$-x_{31}$			$+ y_1$	≥ 0			
					$-x_{21}$	$-x_{31}$			$+ y_1$	≥ 0			
		$-x_{12}$			$-x_{22}$				$+ y_2$	≥ 0			
		$-x_{12}$					$-x_{32}$		$+ y_2$	≥ 0			
					$-x_{22}$		$-x_{32}$		$+ y_2$	≥ 0			
			$-x_{13}$			$-x_{23}$				$+ y_3$	≥ 0		
			$-x_{13}$					$-x_{33}$		$+ y_3$	≥ 0		
						$-x_{23}$		$-x_{33}$		$+ y_3$	≥ 0		
								y_1		≤ 1			
									y_2	≤ 1			
										y_3	≤ 1		
	$x_{11},$	$x_{12},$	$x_{13},$	$x_{21},$	$x_{22},$	$x_{23},$	$x_{31},$	$x_{32},$	$x_{33},$	$y_1,$	$y_2,$	y_3	≥ 0

Esempio: il modello LP_{VCP} (2/2)

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP_{VCP})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \frac{1}{2},$$

$$\tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{33} = 0,$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0$$

Il valore ottimo $z(LP_{VCP})$ è 2. Di conseguenza, abbiamo lo stesso lower bound:

$$2 \leq z(ILP_{VCP})$$

Il duale del modello LP_{VCP} : le variabili duali

Con

- ▶ una variabile duale libera μ_v per ogni vincolo $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$ ($v \in V$)
- ▶ una variabile duale non negativa π_{ce} per ogni vincolo $-x_{uc} - x_{vc} + y_c \geq 0$ ($c \in \mathcal{C}$, $e = \{u, v\} \in E$)
- ▶ una variabile duale non positiva λ_c per ogni vincolo $y_c \leq 1$ ($\forall c \in \mathcal{C}$)

il modello duale del modello LP_{VCP} è quello della prossima slide.

Il modello $D(\text{LP}_{\text{VCP}})$

$$\max \sum_{v \in V} \mu_v + \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c$$

$$\text{soggetto a } \mu_v - \sum_{e \in \delta(v)} \pi_{ce} \leq 0, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C},$$

$$\sum_{e \in E} \pi_{ce} + \lambda_c \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

$$\mu_v \geq 0, \quad \forall v \in V,$$

$$\pi_{ce} \geq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall e \in E,$$

$$\lambda_c \leq 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP}_{\text{VCP}})$.

Esempio: il modello $D(\text{LP}_{\text{VCP}})$ (1/3)

Il modello duale $D(\text{LP}_{\text{VCP}})$ per l'esempio del triangolo è:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\max & \mu_1 & +\mu_2 & +\mu_3 & & & & & \\
\text{soggetto a} & \mu_1 & & & -\pi_{112} & -\pi_{113} & & & \\
& \mu_1 & & & & & -\pi_{212} & -\pi_{213} & \\
& \mu_1 & & & & & & & \\
& & \mu_2 & & -\pi_{112} & & -\pi_{123} & & \\
& & \mu_2 & & & & -\pi_{212} & & -\pi_{223} \\
& & \mu_2 & & & & & & \\
& & & \mu_3 & & -\pi_{113} & -\pi_{123} & & \\
& & & \mu_3 & & & & -\pi_{213} & -\pi_{223} \\
& & & \mu_3 & & & & & \\
& & & & \pi_{112} & +\pi_{113} & +\pi_{123} & & \\
& & & & & & & \pi_{212} & +\pi_{213} & +\pi_{223} \\
& \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & & & \\
& & & & \pi_{112}, & \pi_{113}, & \pi_{123}, & \pi_{212}, & \pi_{213}, & \pi_{223},
\end{array}$$

Esempio: il modello $D(LP_{VCP})$ (2/3)

Continua: le colonne rimanenti e i termini noti.

$$\begin{array}{rcll}
 \max & & +\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \\
 \text{soggetto a} & & & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 -\pi_{312} & -\pi_{313} & & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 -\pi_{312} & & -\pi_{323} & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 & & -\pi_{313} & -\pi_{323} & \leq 0 \\
 & & +\lambda_1 & & \leq 1 \\
 & & & +\lambda_2 & \leq 1 \\
 \pi_{312} & +\pi_{313} & +\pi_{323} & & +\lambda_3 \leq 1 \\
 & & & & \leq 0 \\
 & & & & \leq 0 \\
 \pi_{312}, & \pi_{313}, & \pi_{323} & & \geq 0 \\
 & & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \leq 0
 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(LP_{VCP})$ (3/3)

Il valore ottimo $z(D(LP_{VCP}))$ è 2.

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ di $D(LP_{VCP})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1, \quad \tilde{\mu}_3 = 0,$$

$$\tilde{\pi}_{112} = \tilde{\pi}_{212} = \tilde{\pi}_{312} = 1,$$

$$\text{tutti gli altri } \tilde{\pi}_{ce} = 0,$$

$$\tilde{\lambda}_1 = 0, \quad \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad \tilde{\lambda}_3 = 0$$

Vincoli validi ma non necessari

- I vincoli:

$$x_{vc} \leq 1, \quad \forall v \in V, \forall c \in \mathcal{C},$$

sono anch'essi validi poiché, per ogni $v \in V$ e ogni $c \in \mathcal{C}$,
abbiamo:

$$x_{vc} \in \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad x_{vc} \leq 1$$

- Ma sono implicati dai vincoli $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$

Proposizione 3: soluzioni ottime (1/2)

Una soluzione ottima del modello primale LP_{VCP} è:

$$\tilde{x}_{v1} = \tilde{x}_{v2} = \frac{1}{2}, \quad \forall v \in V,$$

$$\tilde{x}_{vc} = 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\},$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1,$$

$$\tilde{y}_c = 0, \quad \forall c \in \{3, 4, \dots, k\},$$

Proposizione: soluzioni ottime (2/2)

e una soluzione ottima del modello duale $D(\text{LP}_{\text{VCP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_u = \tilde{\mu}_v = 1,$$

$$\tilde{\mu}_w = 0, \quad \forall w \in V \setminus \{u, v\},$$

$$\tilde{\pi}_{c\{u,v\}} = 1, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

$$\tilde{\pi}_{ce} = 0, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad e \in E \setminus \{\{u, v\}\},$$

$$\tilde{\lambda}_c = 0, \quad \forall c \in \mathcal{C},$$

dove $\{u, v\}$ è uno spigolo qualunque di E .

Dimostrazione

La dimostrazione è simile alla precedente.

In più, occorre osservare che:

$$\tilde{y}_c \leq 1, \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Di conseguenza, anche i vincoli $y_c \leq 1$ sono soddisfatti.



Corollario 2

Il valore ottimo dei modelli primale LP_{VCP} e duale $D(LP_{VCP})$ è:

$$z(LP_{VCP}) = 2 = z(D(LP_{VCP}))$$

Il modello LP_{VCP} :

- ▶ I domini binari sono sostituiti da $x_{vc} \geq 0$, $y_c \leq 1$ e $y_c \geq 0$
- ▶ Il suo duale $D(LP_{VCP})$ ha, in più, una variabile non positiva λ_c per ogni colore
- ▶ I vincoli $x_{vc} \leq 1$ sono validi, ma implicati da $\sum_{c \in \mathcal{C}} x_{vc} = 1$

Lo stesso bound:

- ▶ La stessa soluzione primale, e la stessa soluzione duale con $\lambda_c = 0$, sono ottime
- ▶ $z(LP_{VCP}) = 2 = z(D(LP_{VCP}))$ per ogni grafo con almeno uno spigolo

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ In questa sezione elenchiamo gli errori più comuni sul modello ILP_{VCP} e sui suoi rilassamenti
- ▶ Riguardano la scelta di k , il bound del rilassamento, le variabili di attivazione, la simmetria e la soluzione duale
- ▶ Riconoscerli aiuta a scrivere e a usare correttamente il modello

Osservazione 1: errori tipici (1/2)

- ▶ **Scegliere k troppo piccolo.** Il numero k di colori deve essere almeno il numero cromatico del grafo: con meno colori il modello non ha soluzioni ammissibili. Il valore $k = n$ è sempre valido.
- ▶ **Fidarsi del bound del rilassamento.** Il valore ottimo di entrambi i rilassamenti è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo, anche per il grafo completo su n vertici, il cui valore ottimo è n .

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ▶ ***Credere che il modello conti solo i colori davvero usati.*** I vincoli permettono $y_c = 1$ per un colore che nessun vertice prende: è la funzione obiettivo che spegne questi colori.
- ▶ ***Ignorare la simmetria.*** Permutando i colori di una soluzione ottima si ottiene un'altra soluzione ottima: una colorazione che usa q dei k colori ha $k!/(k - q)!$ copie equivalenti ($k!$ quando usa tutti i colori).
- ▶ ***Scrivere la soluzione duale con uno spigolo sbagliato.*** I valori duali $\tilde{\pi}_{ce}$ sono diversi da zero solo per uno spigolo $e = \{u, v\}$, e per ogni colore c : tutti gli altri spigoli hanno valore zero.

Quando si scrive il modello:

- ▶ Scegliere k almeno uguale al numero cromatico: $k = n$ è sempre valido
- ▶ È la funzione obiettivo, non i vincoli, che spegne i colori non usati
- ▶ Permutando i colori si ottengono copie equivalenti della stessa colorazione

Quando si usano i rilassamenti:

- ▶ Il bound del rilassamento è 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo, anche per il grafo completo
- ▶ Nella soluzione duale, un solo spigolo ha valori $\tilde{\pi}_{ce}$ diversi da zero

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- ▶ Raccogliamo in pochi punti le idee chiave del capitolo
- ▶ Chiudiamo con il quadro riassuntivo dell'esempio del triangolo: i bound su $z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ calcolati in questo capitolo

Riepilogo (1/2)

- ▶ Il modello ILP_{VCP} ha $k \cdot n$ variabili x_{vc} (il vertice v prende il colore c) e k variabili y_c (il colore c è usato); i vincoli sugli spigoli vietano colori uguali su vertici adiacenti
- ▶ I due rilassamenti lineari hanno lo stesso valore ottimo 2 per ogni grafo con almeno uno spigolo: basta mettere $\frac{1}{2}$ su due colori per tutti i vertici
- ▶ La soluzione duale sceglie uno spigolo $\{u, v\}$ e dà valore 1 a μ_u , μ_v e $\pi_{c\{u,v\}}$ per ogni colore
- ▶ Il bound 2 è molto debole: una formulazione che deve colorare grafi ha bisogno di ulteriori disuguaglianze valide

Riepilogo (2/2)

Quadro riassuntivo dell'esempio del triangolo. Bound su $z(\text{ILP}_{\text{VCP}})$ calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Primo rilassamento	2	$z(\text{LP-0}_{\text{VCP}})$
Secondo rilassamento	2	$z(\text{LP}_{\text{VCP}})$
Valore ottimo	3	classi di colore $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

Qui il gap fra 2 e 3 è piccolo, ma cresce con la dimensione del grafo completo: 2 contro n .