

Problemi di clique



Indice

Perché i problemi di clique?

Panoramica della famiglia

Il problema della clique massima

Contare le soluzioni, una prima soluzione e i bound

Complessità

Varianti pesate

Osservazioni

Errori tipici

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ enunciare il problema della clique massima e il problema dell'insieme stabile massimo, e passare dall'uno all'altro attraverso il grafo complementare;
- ▶ descrivere un'istanza e una soluzione ammissibile, e contare le soluzioni candidate di un piccolo grafo;
- ▶ trovare a mano una clique e calcolare quattro semplici upper bound sul numero di clique;
- ▶ enunciare le varianti pesate del problema e la sua complessità.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di ottimizzazione combinatoria](#)»: istanze, soluzioni ammissibili, bound primali e duali, e il gap.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di colorazione](#)»: grafi, intorni, gradi, il grafo complementare e il numero cromatico $\chi(G)$.

Perché i problemi di clique?

Introduzione: Perché i problemi di clique?

- ▶ Una **clique** è un insieme di vertici di un grafo **a due a due adiacenti**: ogni coppia di essi è unita da un lato
- ▶ Il suo opposto è un **insieme stabile**: un insieme di vertici a due a due non adiacenti
- ▶ Molte applicazioni cercano il **più grande** gruppo di oggetti a due a due connessi, o a due a due compatibili
- ▶ Partiamo da queste applicazioni; il resto del capitolo enuncia i problemi, ne limita il valore ottimo con dei bound e discute quanto sono difficili

Applicazioni delle clique e degli insiemi stabili

- ▶ **Reti sociali:** gruppi di membri a due a due connessi
- ▶ **Scheduling e pianificazione degli orari:** gruppi di attività o di esami a due a due compatibili
- ▶ **Chimica e biologia:** sottostrutture comuni a due molecole
- ▶ **Codici a correzione d'errore:** grandi insiemi di parole a due a due lontane

Riepilogo: Perché i problemi di clique?

- ▶ Clique e insiemi stabili descrivono gruppi di oggetti legati **coppia per coppia**
- ▶ Compaiono nelle reti sociali, nello scheduling e negli orari, in chimica e in biologia, e nei codici a correzione d'errore
- ▶ La domanda comune: quanto può essere **grande** (o pesante) un tale gruppo?

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ In questa sezione incontriamo la **famiglia** dei problemi di clique: hanno gli stessi dati e lo stesso tipo di soluzioni
- ▶ Definiamo i due oggetti di base di tutto il capitolo: la **clique** e il **numero di clique** $\omega(G)$
- ▶ Una tabella elenca i quattro membri della famiglia che studiamo in questo capitolo

Problemi di clique: dati, soluzioni, obiettivo

- ▶ I **problemi di clique** hanno gli stessi dati: un grafo semplice non orientato $G = (V, E)$, con

$$V = \{1, 2, \dots, n\}$$

e m lati, eventualmente con pesi sui vertici o sui lati.

- ▶ Una soluzione è una clique di G , ossia un sottoinsieme di vertici a due a due adiacenti.
- ▶ L'obiettivo è massimizzare la cardinalità della clique, o il suo peso totale.

Definizione 1: clique e numero di clique

Sia $G = (V, E)$ un grafo semplice non orientato con n vertici e m lati.

1. Una **clique** è un sottoinsieme $K \subseteq V$ di vertici a due a due adiacenti: $\{u, v\} \in E$ per ogni $u, v \in K$ con $u \neq v$. Equivalentemente, K induce un grafo completo.
2. Il **numero di clique** $\omega(G)$ è il massimo numero di vertici di una clique di G .

- Un problema di clique seleziona una clique di cardinalità massima o di peso massimo.
- Sul grafo complementare $\overline{G}$ gli stessi problemi selezionano insiemi stabili.

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con la sezione che definisce ciascuno di essi.

Problema	Sigla	Obiettivo	Sezione
clique massima	MCP	massimo numero di vertici di una clique	Il problema della clique massima
insieme stabile massimo	MSSP	massimo numero di vertici di un insieme stabile	Il problema della clique massima
clique massima pesata sui vertici	VWMCP	massimo peso totale dei vertici	Varianti pesate
clique massima pesata sui lati	EWMCP	massimo peso totale dei lati	Varianti pesate

Riepilogo: Panoramica della famiglia

Dati e soluzioni:

- ▶ Un grafo semplice non orientato $G = (V, E)$, eventualmente con pesi sui vertici o sui lati
- ▶ Una soluzione è una clique: un sottoinsieme di vertici a due a due adiacenti

Numero di clique:

- ▶ $\omega(G)$ è il massimo numero di vertici di una clique di G

La famiglia:

- ▶ MCP e MSSP (cardinalità), VWMCP e EWMCP (peso)

Il problema della clique massima

Introduzione: Il problema della clique massima

- ▶ In questa sezione enunciamo il **problema della clique massima** (MCP) e il suo gemello, il **problema dell'insieme stabile massimo** (MSSP)
- ▶ Il **grafo complementare** trasforma un problema nell'altro: tutto ciò che impariamo su uno dei due vale anche per l'altro
- ▶ Descriviamo un'istanza del MCP e le sue soluzioni ammissibili, e incontriamo le due **istanze di riferimento** del capitolo
- ▶ Infine, fissiamo le ipotesi sulle istanze

Definizione 2: problema della clique massima

Dato:

1. *un grafo semplice $G = (V, E)$, dove*

$$V = \{1, 2, \dots, n\}$$

è l'insieme degli n vertici e

$$E \subseteq \{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v \}$$

è l'insieme degli m lati,

*il **problema della clique massima** (MCP) chiede di trovare una clique $K \subseteq V$ di G il cui numero di vertici sia massimo. Il suo valore ottimo è il numero di clique $\omega(G)$.*

- Accanto alle clique, la nozione opposta: insiemi di vertici **senza** lati fra loro.

Definizione 3: insieme stabile e problema dell'insieme stabile massimo

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

1. Un **insieme stabile** (detto anche **insieme indipendente**) è un sottoinsieme $Q \subseteq V$ di vertici a due a due non adiacenti: $\{u, v\} \notin E$ per ogni $u, v \in Q$ con $u \neq v$.
2. Il **problema dell'insieme stabile massimo** (MSSP) chiede di trovare un insieme stabile di G il cui numero di vertici sia massimo. Il suo valore ottimo è il **numero di stabilità** $\alpha(G)$.

- Il ponte fra clique e insiemi stabili è il grafo complementare: scambia lati e non-lati.

Definizione 4: grafo complementare

Il grafo complementare di $G = (V, E)$ è il grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ con gli stessi vertici e l'insieme dei lati

$$\overline{E} = \{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E \}.$$

*Le coppie in $\overline{E}$ sono i **non-lati** di G , e $|\overline{E}| = \binom{n}{2} - m$.*

Proposizione 1: numero di clique e numero di stabilità

Un sottoinsieme $K \subseteq V$ è una clique di G se e solo se è un insieme stabile di $\overline{G}$. Quindi

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}) \quad e \quad \alpha(G) = \omega(\overline{G}).$$

Dimostrazione

- ▶ Due vertici distinti u, v sono adiacenti in G se e solo se non sono adiacenti in $\overline{G}$:

$$\{u, v\} \in E \iff \{u, v\} \notin \overline{E}.$$

- ▶ Quindi tutte le coppie di K sono lati di G esattamente quando nessuna coppia di K è un lato di $\overline{G}$.
- ▶ I due problemi hanno le stesse soluzioni ammissibili, quindi lo stesso valore ottimo:

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}).$$

- ▶ La seconda uguaglianza segue poiché $\overline{\overline{G}} = G$.



MCP e MSSP: lo stesso problema

Il MCP su G e il MSSP su $\overline{G}$ sono lo stesso problema:
una clique massima di G è un insieme stabile massimo di $\overline{G}$.

Tutto ciò che impariamo su uno dei due problemi
vale anche per l'altro.

Istanze e soluzioni ammissibili del MCP

- ▶ Un'istanza del MCP è specificata da:
 1. due numeri interi: il numero di vertici $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e il numero di lati $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$;
 2. due vettori di numeri interi di lunghezza m : $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$, con i due estremi dei lati.
- ▶ Una soluzione ammissibile del MCP è una clique $K \subseteq V$.
L'insieme vuoto e un singolo vertice sono clique, quindi ogni istanza ha soluzioni ammissibili.

Il MCP in formule

Data un'istanza del MCP, il MCP si può enunciare formalmente come:

$$\tilde{K} \in \arg \max_{K \subseteq V} \left\{ |K| : \{u, v\} \in E, \quad \forall u, v \in K \text{ con } u \neq v \right\},$$

$$|\tilde{K}| = \omega(G).$$

- ▶ L'obiettivo conta i vertici di K .
- ▶ La condizione chiede che ogni coppia di vertici distinti di K sia un lato di G .

Due istanze di riferimento

Due istanze ci accompagneranno in tutto il capitolo:

una sparsa, **il ciclo con corda**,
e **un grafo denso** con 8 vertici.

Su di esse conteremo le soluzioni, troveremo una clique a mano
e calcoleremo i bound su $\omega(G)$.

Esempio: un ciclo con una corda (1/2)

- Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con 7 vertici ($n = 7$) e 8 lati ($m = 8$): il ciclo $1, 2, \dots, 7, 1$ e la corda $\{1, 3\}$.

- L'insieme dei vertici e l'insieme dei lati sono:

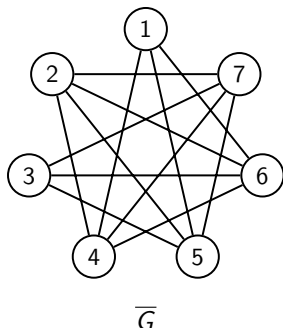
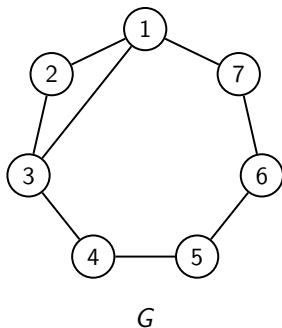
$$V = \{1, \dots, 7\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}.$$

- Chiamiamo questa istanza del MCP **il ciclo con corda**: è l'istanza di riferimento del capitolo.

Esempio: un ciclo con una corda (2/2)

- A destra, il grafo complementare $\overline{G}$, con $i \binom{7}{2} - 8 = 13$ non-lati di G .



Esempio: un grafo denso con 8 vertici (1/2)

- Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ con 8 vertici disposti su una circonferenza, in cui ogni vertice è adiacente a tutti gli altri tranne quello opposto.

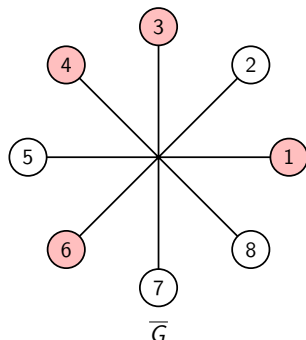
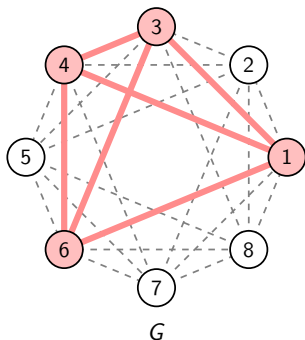
- Ha

$$m = \binom{8}{2} - 4 = 24$$

lati, e il suo complementare ha solo i 4 lati $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$.

- Una clique massima $\tilde{K} = \{1, 3, 4, 6\}$ è in rosso nella prossima figura.
- Chiamiamo questa istanza del MCP il **grafo denso**.

Esempio: un grafo denso con 8 vertici (2/2)



- In $\overline{G}$ i vertici rossi formano un insieme stabile: prendono un vertice da ciascuno dei 4 lati.

Un terzo grafo: il grafo di Petersen

Il grafo di Petersen del capitolo «[Problemi di colorazione](#)» non ha triangoli.

Quindi le sue clique più grandi sono i suoi lati, e

$$\omega(G) = 2.$$

Ipotesi

- Consideriamo istanze non banali: il grafo ha almeno un lato e almeno un non-lato. Formalmente:

$$1 \leq m < \binom{n}{2}.$$

- L'ipotesi si può fare senza perdita di generalità:
 - se il grafo non ha lati, ogni singolo vertice è una clique massima e $\omega(G) = 1$;
 - se il grafo è completo, V stesso è una clique e $\omega(G) = n$.

Riepilogo: Il problema della clique massima (1/2)

Due problemi gemelli:

- ▶ MCP: una clique con il massimo numero di vertici, valore ottimo $\omega(G)$
- ▶ MSSP: un insieme stabile con il massimo numero di vertici, valore ottimo $\alpha(G)$

Grafo complementare:

- ▶ $\overline{G}$ ha come lati i non-lati di G : $|\overline{E}| = \binom{n}{2} - m$
- ▶ Una clique di G è un insieme stabile di $\overline{G}$: $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ e $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$

Riepilogo: Il problema della clique massima (2/2)

Istanze e soluzioni:

- ▶ Un'istanza: n , m e gli estremi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dei lati
- ▶ Una soluzione ammissibile: una clique (l'insieme vuoto e un singolo vertice sono clique)

Istanze di riferimento:

- ▶ Il ciclo con corda ($n = 7$, $m = 8$) e il grafo denso ($n = 8$, $m = 24$)

Ipotesi:

- ▶ Istanze non banali: $1 \leq m < \binom{n}{2}$

Contare le soluzioni, una prima soluzione e i bound

Introduzione: Contare le soluzioni, una prima soluzione e i bound

- ▶ In questa sezione lavoriamo a mano sulle due istanze di riferimento
- ▶ Contiamo le soluzioni candidate e le clique, e vediamo quanto pochi sottoinsiemi sono clique
- ▶ Costruiamo a mano una prima clique: un **bound primale** su $\omega(G)$
- ▶ Dimostriamo quattro semplici **upper bound** su $\omega(G)$: insieme al bound primale, certificano quanto siamo lontani dall'ottimo

Soluzioni candidate: il ciclo con corda

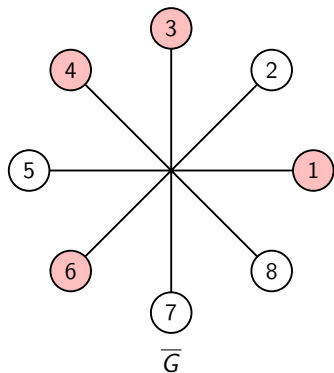
- ▶ Le soluzioni candidate sono tutti i sottoinsiemi di V , in numero di 2^n .
- ▶ Per il ciclo con corda abbiamo $2^7 = 128$ sottoinsiemi, e solo 17 di essi sono clique:

numero di vertici	0	1	2	3	totale
clique	1	7	8	1	17

- ▶ L'unica clique con 3 vertici è $\{1, 2, 3\}$, quindi la soluzione ottima è unica e

$$\omega(G) = 3.$$

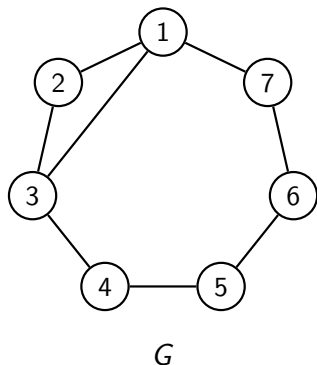
Soluzioni candidate: il grafo denso



- ▶ Per il grafo denso abbiamo $2^8 = 256$ sottoinsiemi e 81 clique.
- ▶ Una clique prende al più un vertice da ciascuna coppia $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$.
- ▶ Le clique massime ne prendono esattamente uno, quindi sono $2^4 = 16$ e

$$\omega(G) = 4.$$

Una prima soluzione, a mano



- ▶ Partiamo da un vertice di grado massimo e aggiungiamo, uno alla volta, un vertice adiacente a tutti i vertici già scelti.
- ▶ Nel ciclo con corda, il vertice 1 ha grado 3; aggiungiamo il suo vicino 2, e poi 3, che è adiacente a entrambi.
- ▶ Nessun altro vertice è adiacente a 1, 2 e 3, quindi ci fermiamo con $K = \{1, 2, 3\}$.

▶ K è un **bound primale**: $LB = 3 \leq \omega(G)$.

Upper bound semplici

- ▶ Il MCP è un problema di massimo: un bound duale è un **upper bound** su $\omega(G)$.
- ▶ Indichiamo con $\deg(v)$ il grado di un vertice e con Δ il grado massimo del grafo.
- ▶ Vediamo ora quattro semplici upper bound: il **bound sul grado**, il **bound sui lati**, il **bound sul conteggio dei gradi** e il **bound di colorazione**.

- Il primo bound guarda il grado massimo del grafo.

Osservazione 1: bound sul grado

Per ogni grafo $G = (V, E)$ abbiamo $\omega(G) \leq \Delta + 1$.

Dimostrazione

- ▶ In una clique K , ogni vertice è adiacente agli altri $|K| - 1$ vertici di K , quindi il suo grado è almeno $|K| - 1$:

$$|K| - 1 \leq \deg(v) \leq \Delta \quad \forall v \in K.$$

- ▶ Quindi $|K| - 1 \leq \Delta$ per ogni clique, e in particolare per una clique massima:

$$\omega(G) \leq \Delta + 1.$$



- Il secondo bound guarda il numero di lati del grafo.

Osservazione 2: bound sui lati

Per ogni grafo $G = (V, E)$ abbiamo $\omega(G)(\omega(G) - 1)/2 \leq m$.

Dimostrazione

- ▶ Una clique con k vertici contiene come lati tutte le coppie dei suoi vertici:

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

- ▶ Questi sono lati di G , quindi $k(k-1)/2 \leq m$; con $k = \omega(G)$ otteniamo

$$\omega(G)(\omega(G) - 1)/2 \leq m.$$



- Il terzo bound conta i vertici di grado elevato.

Osservazione 3: bound sul conteggio dei gradi

Sia $k^{\max}$ il massimo intero k tale che almeno k vertici di G abbiano grado almeno $k - 1$. Allora $\omega(G) \leq k^{\max}$.

Dimostrazione

- ▶ Una clique con k vertici ha k vertici, ciascuno di grado almeno $k - 1$ (dimostrazione del bound sul grado).
- ▶ Quindi $k = \omega(G)$ soddisfa la condizione, e

$$\omega(G) \leq k^{\max}.$$



- Il quarto bound viene dalle colorazioni del grafo.

Osservazione 4: bound di colorazione

Per ogni grafo $G = (V, E)$ abbiamo $\omega(G) \leq \chi(G)$. In particolare, il numero di colori di una qualunque colorazione ammissibile di G è un upper bound su $\omega(G)$.

Dimostrazione

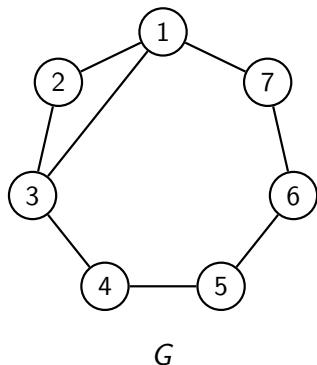
- ▶ I vertici di una clique sono a due a due adiacenti, quindi ricevono colori a due a due diversi.
- ▶ Una colorazione con k colori ha

$$k \geq |K| \quad \text{per ogni clique } K.$$

- ▶ È il bound di clique del capitolo «Problemi di colorazione», letto dal lato della clique.



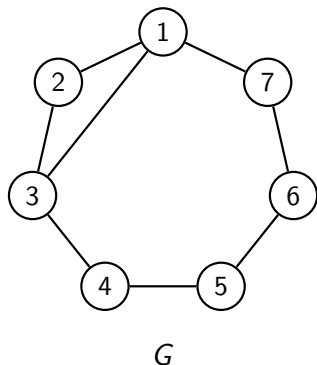
Bound sul ciclo con corda (1/2)



- ▶ I vertici 1 e 3 hanno grado 3, gli altri cinque hanno grado 2.
- ▶ Il bound sul grado dà $\Delta + 1 = 4$.
- ▶ Anche il bound sui lati dà 4, poiché

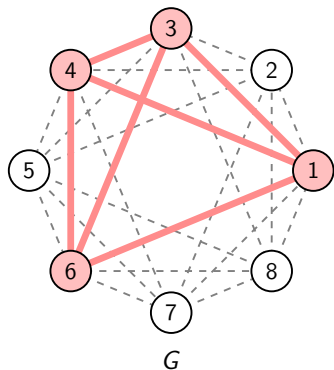
$$4 \cdot 3/2 = 6 \leq 8 < 10 = 5 \cdot 4/2.$$

Bound sul ciclo con corda (2/2)



- ▶ Solo 2 vertici hanno grado almeno 3, quindi $k = 4$ non soddisfa la condizione del bound sul conteggio dei gradi, mentre $k = 3$ la soddisfa: $k^{\max} = 3$.
- ▶ La colorazione $\{1, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3\}$ dà anch'essa 3.
- ▶ Il gap con $LB = 3$ è nullo.

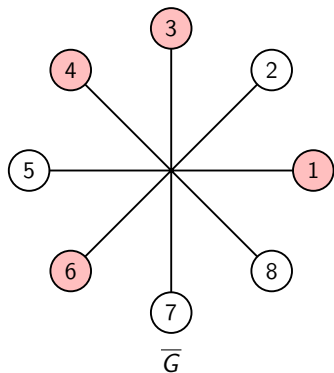
Bound sul grafo denso (1/2)



- ▶ Ogni vertice ha grado 6: il bound sul grado e il bound sul conteggio dei gradi danno 7.
- ▶ Il bound sui lati dà 7, poiché

$$7 \cdot 6/2 = 21 \leq 24 < 28.$$

Bound sul grafo denso (2/2)



- ▶ Le quattro coppie $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$ sono insiemi stabili, quindi colorano il grafo con 4 colori: il bound di colorazione dà $4 = \omega(G)$.
- ▶ Sui grafi densi i bound basati sui gradi sono deboli, e una buona colorazione è molto migliore.

Riepilogo: Contare le soluzioni, una prima soluzione e i bound (1/2)

Soluzioni candidate:

- ▶ I 2^n sottoinsiemi di V ; pochi di essi sono clique
- ▶ Ciclo con corda: 17 clique su 128 sottoinsiemi, ottimo unico $\{1, 2, 3\}$
- ▶ Grafo denso: 81 clique su 256 sottoinsiemi, 16 clique massime

Una prima soluzione, a mano:

- ▶ Si parte da un vertice di grado massimo, si aggiungono vertici adiacenti a tutti quelli scelti
- ▶ La clique trovata è un bound primale: $LB \leq \omega(G)$

Riepilogo: Contare le soluzioni, una prima soluzione e i bound (2/2)

Quattro upper bound:

- ▶ Bound sul grado $\Delta + 1$ e bound sui lati
 $\omega(G)(\omega(G) - 1)/2 \leq m$
- ▶ Bound sul conteggio dei gradi $k^{\max}$ e bound di colorazione:
una colorazione qualunque

Sulle istanze di riferimento:

- ▶ Ciclo con corda: $LB = 3$ e $k^{\max} = 3$, una colorazione con 3 colori: gap nullo
- ▶ Grafo denso: i bound sui gradi danno 7, una colorazione dà $4 = \omega(G)$

Complessità

Introduzione: Complessità

- ▶ Quanto è difficile il MCP? Guardiamo la sua **versione decisionale**, l'**enumerazione** dei sottoinsiemi e l'**approssimazione**
- ▶ La risposta è negativa su tutti e tre i fronti: il problema è NP-difficile, l'enumerazione è esponenziale, e anche approssimarlo è difficile
- ▶ Questo motiva i bound di questo capitolo, e le formulazioni e gli algoritmi che vedremo più avanti nel corso

Versione decisionale e NP-difficoltà

- ▶ La **versione decisionale** del MCP chiede, dati un grafo G e un intero k , se G abbia una clique con k vertici.
- ▶ Karp (1972) la incluse fra i suoi 21 problemi NP-completi, quindi il MCP è NP-difficile.
- ▶ Per la proposizione sul numero di clique e sul numero di stabilità, lo stesso vale per il MSSP.

Enumerazione

- ▶ Elencare tutti i sottoinsiemi di V e controllare le coppie di ciascuno richiede

$$O(2^n n^2) \text{ passi.}$$

- ▶ Per un k fissato, i $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi con k vertici si controllano in

$$O(n^k k^2) \text{ passi.}$$

- ▶ È un polinomio per ogni k fissato, ma l'esponente cresce con la cardinalità della clique.

Difficile da approssimare

- ▶ Il MCP è anche difficile da approssimare.
- ▶ Håstad (1999) dimostrò che, per ogni $\varepsilon > 0$, nessun algoritmo polinomiale garantisce una clique con almeno

$$\frac{\omega(G)}{n^{1-\varepsilon}}$$

vertici, a meno che ogni problema in NP si possa risolvere in tempo polinomiale randomizzato.

Riepilogo: Complessità

NP-difficoltà:

- ▶ La versione decisionale del MCP è uno dei 21 problemi NP-completi di Karp (1972)
- ▶ Il MCP e il MSSP sono NP-difficili

Enumerazione:

- ▶ $O(2^n n^2)$ passi in generale, $O(n^k k^2)$ per una cardinalità k fissata

Approssimazione:

- ▶ Nessun algoritmo polinomiale garantisce $\omega(G)/n^{1-\varepsilon}$ vertici (Håstad, 1999), a meno che i problemi in NP si risolvano in tempo polinomiale randomizzato

Varianti pesate

Introduzione: Varianti pesate

- ▶ Spesso i vertici o i lati del grafo hanno un **peso**: cerchiamo la clique più pesante, non la più grande
- ▶ Due varianti: pesi sui vertici (VWMCP) e pesi sui lati (EWMCP)
- ▶ Con pesi unitari entrambe le varianti restituiscono il MCP; con pesi generali la clique ottima può cambiare, come mostra il grafo denso

Pesi dei vertici e pesi dei lati

- ▶ Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ un **vettore dei pesi dei vertici**, con un peso w_v per ogni vertice $v \in V$.
- ▶ Sia $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$ un **vettore dei pesi dei lati**, con un peso r_{uv} per ogni lato $\{u, v\} \in E$.
- ▶ Per una clique K definiamo

$$w(K) = \sum_{v \in K} w_v \quad \text{e} \quad r(K) = \sum_{\{u,v\} \in E[K]} r_{uv},$$

dove $E[K]$ è l'insieme dei lati con entrambi gli estremi in K .

Definizione 5: problemi della clique massima pesata

1. *Dati un grafo G e un vettore dei pesi dei vertici $\mathbf{w}$, il **problema della clique massima pesata sui vertici** (VWMCP) chiede di trovare una clique K di G con peso totale dei vertici $w(K)$ massimo.*
2. *Dati un grafo G e un vettore dei pesi dei lati $\mathbf{r}$, il **problema della clique massima pesata sui lati** (EWMCP) chiede di trovare una clique K di G con peso totale dei lati $r(K)$ massimo.*

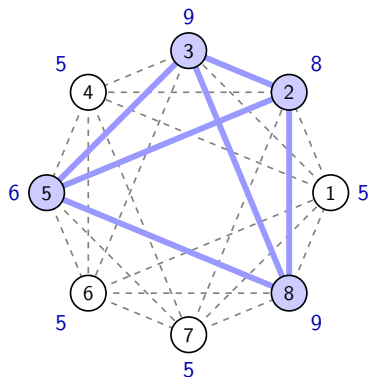
Pesi unitari: si ritrova il MCP

- ▶ Con tutti i pesi $w_v = 1$ il primo problema è il MCP.
- ▶ Il problema pesato sui lati premia le clique con molti lati pesanti.
- ▶ Con $r_{uv} = 1$ è di nuovo il MCP, poiché

$$r(K) = \binom{|K|}{2}$$

cresce con $|K|$.

Esempio: pesi sui vertici (1/2)



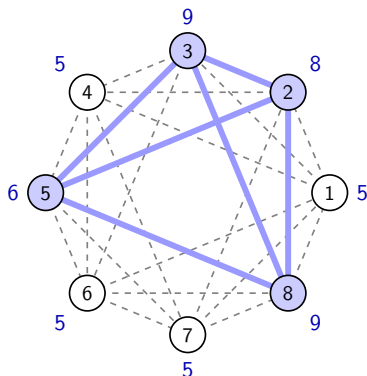
- Aggiungiamo al grafo denso i pesi dei vertici in blu.
- La clique massima pesata sui vertici è $\{2, 3, 5, 8\}$, con peso

$$8 + 9 + 6 + 9 = 32 :$$

è unica.

- Non è la clique massima in rosso del grafo denso, il cui peso è $5 + 9 + 5 + 5 = 24$.

Esempio: pesi sui vertici (2/2)



- ▶ Una clique prende al più un vertice da ciascuna coppia $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$.
- ▶ Prendere il più pesante di ciascuna coppia dà

$$6 + 8 + 9 + 9 = 32,$$

e questi quattro vertici formano una clique.

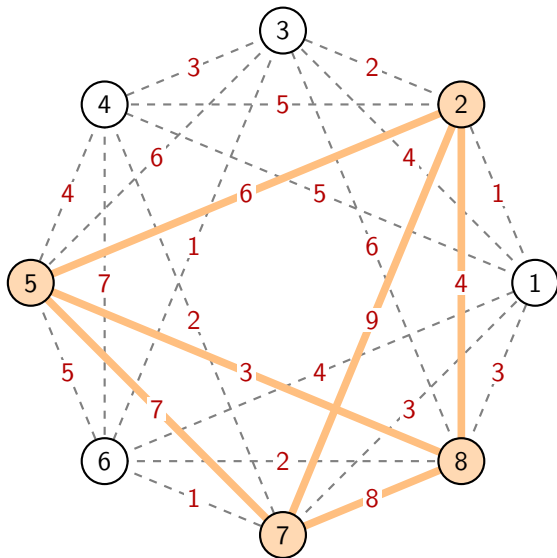
Esempio: pesi sui lati (1/2)

- ▶ Aggiungiamo al grafo denso i pesi dei lati in rosso.
- ▶ La clique massima pesata sui lati è $\{2, 5, 7, 8\}$, in arancione nella prossima figura: i suoi sei lati pesano

$$6 + 4 + 9 + 7 + 3 + 8 = 37.$$

- ▶ L'enumerazione delle 16 clique massime mostra che è l'unica soluzione ottima.

Esempio: pesi sui lati (2/2)



Riepilogo: Varianti pesate

Pesi:

- ▶ Pesi dei vertici $\mathbf{w}$, con $w(K) = \sum_{v \in K} w_v$
- ▶ Pesi dei lati $\mathbf{r}$, con $r(K)$ il peso totale dei lati di $E[K]$

Due problemi:

- ▶ VWMCP: $w(K)$ massimo; EWMCP: $r(K)$ massimo
- ▶ Con pesi unitari sono entrambi il MCP

Sul grafo denso:

- ▶ VWMCP: $\{2, 3, 5, 8\}$ con 32; EWMCP: $\{2, 5, 7, 8\}$ con 37; entrambe uniche

Osservazioni

Introduzione: Osservazioni

- ▶ Due osservazioni chiudono il capitolo
- ▶ La prima lega clique e insiemi stabili alle **colorazioni** del capitolo precedente
- ▶ La seconda torna alle **applicazioni** che hanno aperto il capitolo

Clique, insiemi stabili e colorazioni

- ▶ In una colorazione, ogni classe di colore è un insieme stabile.
- ▶ Il MSSP è il problema della classe di colore più grande.
- ▶ Il numero di clique è il bound duale del capitolo «Problemi di colorazione»:

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Applicazioni delle clique e degli insiemi stabili, di nuovo

- ▶ Gruppi di membri a due a due connessi nelle **reti sociali**.
- ▶ Gruppi di attività o di esami a due a due compatibili, nello **scheduling** e nella **pianificazione degli orari**.
- ▶ Sottostrutture comuni a due molecole, in **chimica** e in **biologia**.
- ▶ **Codici a correzione d'errore**, come grandi insiemi di parole a due a due lontane.

Riepilogo: Osservazioni

Colorazioni:

- ▶ Ogni classe di colore è un insieme stabile; il MSSP cerca la più grande
- ▶ Il numero di clique è un bound duale per il problema di colorazione

Applicazioni:

- ▶ Reti sociali, scheduling e orari, chimica e biologia, codici a correzione d'errore

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Quattro errori frequenti negli esercizi sulle clique
- ▶ Riguardano le parole (massimale o massima), il grafo complementare e il verso dei bound
- ▶ Controllarli è un modo rapido per non perdere punti

Osservazione 5: errori tipici (1/2)

- ▶ **Confondere una clique massimale con una clique massima.** Una clique è massimale quando non le si può aggiungere alcun vertice; è massima quando nessuna clique è più grande. Nel ciclo con corda, $\{4, 5\}$ è massimale ma non massima.
- ▶ **Costruire il grafo complementare con i lati di G .** I lati di $\overline{G}$ sono esattamente le coppie che non sono lati di G : sono $\binom{n}{2} - m$.

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ▶ *Usare un lower bound come upper bound. Una clique trovata a mano dà $LB \leq \omega(G)$; i bound sui gradi e una colorazione danno $UB \geq \omega(G)$. In questo capitolo il problema è di massimo.*
- ▶ *Credere che il bound di colorazione sia stretto. Sul ciclo con 5 vertici $\omega(G) = 2$ e $\chi(G) = 3$.*

Riepilogo: Errori tipici

- ▶ Massimale (non si può aggiungere alcun vertice) non vuol dire massima (nessuna clique più grande)
- ▶ I lati di $\overline{G}$ sono i non-lati di G
- ▶ Una clique dà un lower bound, i gradi e le colorazioni danno upper bound
- ▶ Il bound di colorazione non è sempre stretto: $\omega(G) < \chi(G)$ sul ciclo con 5 vertici

Riepilogo (1/2)

- ▶ Il MCP cerca il più grande insieme di vertici a due a due adiacenti; il suo valore ottimo è il numero di clique $\omega(G)$.
- ▶ Una clique di G è un insieme stabile di $\overline{G}$: il MCP su G è il MSSP su $\overline{G}$, e $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.
- ▶ Una clique trovata a mano è un bound primale; il bound sul grado, il bound sui lati, il bound sul conteggio dei gradi e il numero di colori di una colorazione sono bound duali.
- ▶ Il MCP è NP-difficile e difficile da approssimare; le sue varianti pesate pesano i vertici o i lati.

Riepilogo (2/2)

Quadro riassuntivo delle istanze di riferimento.

istanza (max)	lower bound	upper bound	da
il ciclo con corda	3 (a mano)	3 (conteggio dei gradi, colorazione)	questo capitolo
il grafo denso	4 (a mano)	4 (colorazione)	questo capitolo