

Clique massima: limiti dell'approssimazione

Indice

Notazione

Il MCP non è approssimabile

Casi particolari

Esempio

Fonti

Errori tipici

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ costruire il prodotto forte di due grafi e dimostrare $\omega(G \boxtimes H) = \omega(G) \omega(H)$;
- ▶ dimostrare che un algoritmo a rapporto costante per il MCP ne darebbe uno per ogni rapporto costante;
- ▶ enunciare i risultati di Håstad e Zuckerman, e concludere che il MCP e il MSSP non sono approssimabili;
- ▶ risolvere il MCP all'ottimo sui grafi planari e sui grafi di grado limitato, e approssimare il MSSP sui grafi di grado limitato.

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Principi degli algoritmi di approssimazione](#)»: rapporto di prestazione per un problema di massimo, algoritmo di α -approssimazione, PTAS.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di clique](#)»: le definizioni del MCP e del MSSP, il numero di clique $\omega(G)$, il grafo complementare e $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Colorazione dei vertici: limiti dell'approssimazione](#)»: i grafi planari e il bound $m \leq 3n - 6$.

Il problema di questo capitolo

- ▶ Il problema di questo capitolo è il **problema della clique massima (MCP)**
- ▶ La sua definizione e le sue ipotesi sono nella sua pagina
- ▶ La domanda del capitolo: quanto bene può un algoritmo **polinomiale** approssimare il numero di clique $\omega(G)$?

Notazione

Introduzione: Notazione

- ▶ In questa sezione fissiamo la notazione sui grafi e sui valori ottimi del MCP e del MSSP
- ▶ Richiamiamo come si misura il rapporto di prestazione per un problema di massimo
- ▶ Vediamo quale rapporto è banale: il resto del capitolo confronta tutto con esso

Grafi e valori ottimi

- ▶ Come nella pagina del problema, $G = (V, E)$ è un grafo semplice con n vertici e m spigoli
- ▶ $N(v)$ è l'insieme dei vicini di v , e $\Delta(G)$ il grado massimo
- ▶ Il valore ottimo del MCP è il **numero di clique**:

$$z(I) = \omega(G)$$

- ▶ Il valore ottimo del MSSP è il **numero di stabilità** $\alpha(G)$

Richiamo: il rapporto di prestazione

- ▶ Come nel capitolo «[Principi degli algoritmi di approssimazione](#)», $\mathcal{A}(I)$ è il numero di vertici della clique restituita dall'algoritmo $\mathcal{A}$
- ▶ Il MCP è un problema di massimo, quindi

$$\mathcal{A}(I) \leq \omega(G) \quad \text{e} \quad \frac{\omega(G)}{\mathcal{A}(I)} \geq 1$$

per ogni istanza I

Il rapporto banale

- ▶ Un singolo vertice è una clique, quindi il rapporto n è banale
- ▶ Questo capitolo mostra che un algoritmo polinomiale **non può fare molto meglio** su tutti i grafi
- ▶ e poi le **classi di grafi** su cui può

Riepilogo: Notazione

- ▶ $G = (V, E)$ con n vertici, m spigoli, vicini $N(v)$ e grado massimo $\Delta(G)$
- ▶ $z(I) = \omega(G)$ per il MCP, $\alpha(G)$ per il MSSP
- ▶ Per un problema di massimo il rapporto è $\frac{\omega(G)}{\mathcal{A}(I)} \geq 1$
- ▶ Un solo vertice dà già il rapporto n

Il MCP non è approssimabile

Introduzione: Il MCP non è approssimabile

- ▶ Definiamo il **prodotto forte** di due grafi: moltiplica i numeri di clique
- ▶ Con esso, un algoritmo a rapporto costante per il MCP darebbe **ogni** rapporto costante
- ▶ Poi enunciamo i risultati di Håstad e Zuckerman: a meno che $P = NP$, non è possibile nemmeno il rapporto $n^{1-\varepsilon}$
- ▶ Insieme dicono che il MCP **non è approssimabile**

Partiamo da una costruzione sui grafi:
il prodotto forte, che trasforma due grafi in uno.

Definizione 1: prodotto forte

*Il **prodotto forte** di due grafi $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ è il grafo $G \boxtimes H$ con insieme dei vertici $V \times W$, in cui due vertici distinti (u, x) e (v, y) sono adiacenti se e solo se*

$$\begin{aligned} & (u = v \text{ oppure } \{u, v\} \in E) \\ \text{e } & (x = y \text{ oppure } \{x, y\} \in F). \end{aligned}$$

Dimensione del prodotto

- ▶ $G \boxtimes H$ ha $|V| |W|$ vertici
- ▶ Si costruisce in tempo polinomiale nella dimensione di G e H
- ▶ In particolare $G \boxtimes G$ ha n^2 vertici

Proiezione e fibre

Per un insieme $K \subseteq V \times W$:

- ▶ la **proiezione** è

$$p(K) = \{u \in V : (u, x) \in K \text{ per qualche } x\}$$

- ▶ la **fibra** di $u \in p(K)$ è

$$K_u = \{x \in W : (u, x) \in K\}$$

- ▶ Proiezione e fibre scompongono un insieme del prodotto, una coordinata alla volta
- ▶ Vediamo ora che scompongono una clique del prodotto in clique dei due grafi
- ▶ È il fatto chiave di tutto il capitolo

Proposizione 1

Per ogni coppia di grafi G e H :

- 1. se $K \subseteq V \times W$ è una clique di $G \boxtimes H$, allora $p(K)$ è una clique di G , ogni fibra K_u è una clique di H , e $|K| \leq |p(K)| \cdot \max_u |K_u|$;*
- 2. $\omega(G \boxtimes H) = \omega(G) \omega(H)$.*

Dimostrazione (1/3)

Parte 1: la proiezione è una clique.

- ▶ Siano $u \neq v$ in $p(K)$, con $(u, x), (v, y) \in K$
- ▶ Questi due vertici sono adiacenti e $u \neq v$, quindi $\{u, v\} \in E$
- ▶ Quindi $p(K)$ è una clique

Parte 1: ogni fibra è una clique.

- ▶ Siano $x \neq y$ in K_u : (u, x) e (u, y) sono adiacenti, quindi $\{x, y\} \in F$
- ▶ Quindi K_u è una clique

Dimostrazione (2/3)

Parte 1: il bound su $|K|$.

► Le fibre partizionano K , quindi

$$|K| = \sum_{u \in p(K)} |K_u| \leq |p(K)| \cdot \max_u |K_u|.$$

Dimostrazione (3/3)

Parte 2.

- ▶ Se K_G e K_H sono clique massime di G e H , ogni coppia di vertici distinti di $K_G \times K_H$ soddisfa la definizione, quindi

$$\omega(G \boxtimes H) \geq \omega(G) \omega(H)$$

- ▶ Viceversa, per la Parte 1 ogni clique K di $G \boxtimes H$ ha

$$|K| \leq |p(K)| \cdot \max_u |K_u| \leq \omega(G) \omega(H)$$



Prodotto forte o lessicografico

- ▶ Anche il prodotto *lessicografico* soddisfa

$$\omega(G[H]) = \omega(G)\omega(H)$$

- ▶ Usiamo il prodotto forte, la cui definizione è **simmetrica** nei due grafi

Ora usiamo il prodotto forte di G con sé stesso
per migliorare il rapporto di un algoritmo di approssimazione.

Da una clique di $G \boxtimes G$ di nuovo a G

- ▶ La Parte 1 della Proposizione 1 è **costruttiva**
- ▶ Da una clique K di $G \boxtimes G$, $p(K)$ oppure la fibra più grande è una clique di G con almeno $\sqrt{|K|}$ vertici
- ▶ Infatti, il prodotto delle loro dimensioni è almeno $|K|$
- ▶ Entrambe si calcolano in tempo polinomiale

Teorema 1

Se il MCP ha un algoritmo polinomiale di α -approssimazione per qualche costante $\alpha \geq 1$, allora ha un algoritmo polinomiale di β -approssimazione per ogni costante $\beta > 1$.

- ▶ L'idea della dimostrazione: eseguire l'algoritmo su $G \boxtimes G$, dove l'ottimo è $\omega(G)^2$
- ▶ Tornare a G con la radice quadrata: il rapporto diventa $\sqrt{\alpha}$
- ▶ Ripetere un numero costante di volte

Dimostrazione (1/3)

Sia $\mathcal{A}$ un algoritmo polinomiale di α -approssimazione, e definiamo l'algoritmo $\mathcal{B}$:

1. costruire $G \boxtimes G$ ed eseguire $\mathcal{A}$ su di esso, ottenendo una clique K ;
2. restituire la più grande fra $p(K)$ e la fibra più grande di K , una clique di G con almeno $\sqrt{|K|}$ vertici.

Dimostrazione (2/3)

- Per la Proposizione 1, $\omega(G \boxtimes G) = \omega(G)^2$, quindi

$$|K| \geq \frac{\omega(G)^2}{\alpha}$$

- e

$$\mathcal{B}(I) \geq \sqrt{|K|} \geq \frac{\omega(G)}{\sqrt{\alpha}}$$

- $\mathcal{B}$ è un algoritmo polinomiale di $\sqrt{\alpha}$ -approssimazione

Dimostrazione (3/3)

- ▶ Applicando la costruzione t volte si ottiene il rapporto $\alpha^{1/2^t}$
- ▶ $\mathcal{A}$ è eseguito su un grafo con n^{2^t} vertici
- ▶ Scegliamo la costante t con

$$2^t \geq \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$$

- ▶ Allora $\alpha^{1/2^t} \leq \beta$, e n^{2^t} è un polinomio



Il prodotto amplifica il rapporto

- ▶ In altre parole, il MCP ha un algoritmo a rapporto costante **se e solo se** ha un PTAS
- ▶ Il prodotto forte *amplifica* qualunque rapporto costante
- ▶ Il tempo di esecuzione cresce come una potenza n^{2^t} , che è polinomiale solo perché t è una costante

Questo è il lato positivo dell'amplificazione.
Il lato negativo viene dalla teoria della complessità.

I risultati di Håstad e Zuckerman

- ▶ Il lato negativo è noto, e lo enunciamo **senza dimostrazione**
- ▶ Usa le dimostrazioni verificabili probabilisticamente

Teorema 2: Håstad, 1999; Zuckerman, 2007

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $P \neq NP$, nessun algoritmo polinomiale $\mathcal{A}$ per il MCP soddisfa, per ogni grafo G con n vertici,

$$\frac{\omega(G)}{\mathcal{A}(I)} \leq n^{1-\varepsilon}.$$

Due ipotesi

- ▶ **Håstad (1999)** ha dimostrato il teorema nell'ipotesi che i problemi NP non si possano risolvere in tempo polinomiale randomizzato ($NP \neq ZPP$)
- ▶ **Zuckerman (2007)** lo ha dimostrato nell'ipotesi $P \neq NP$

Nessun rapporto costante e nessun PTAS

- ▶ Come per il VCP, il teorema esclude ogni rapporto costante
- ▶ Un algoritmo di α -approssimazione ha rapporto al più $\alpha < n^{1/2}$ sui grafi con $n > \alpha^2$ vertici
- ▶ I grafi più piccoli si risolvono per enumerazione in tempo costante
- ▶ Insieme al Teorema 1: a meno che $P = NP$, il MCP non ha né un rapporto costante né un PTAS

Il MCP non è approssimabile

- ▶ Il MCP non è approssimabile: a meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha una garanzia di prestazione costante
- ▶ e nemmeno una garanzia della forma $n^{1-\varepsilon}$
- ▶ Esistono risultati positivi solo su **classi particolari di grafi**

Riepilogo: Il MCP non è approssimabile (1/2)

Prodotto forte:

- ▶ $G \boxtimes H$ ha $|V| |W|$ vertici e $\omega(G \boxtimes H) = \omega(G) \omega(H)$
- ▶ Una clique del prodotto si scompone nella sua proiezione e nelle sue fibre, clique dei due grafi

Amplificazione:

- ▶ Da una clique K di $G \boxtimes G$ otteniamo una clique di G con almeno $\sqrt{|K|}$ vertici
- ▶ Un rapporto costante α dà $\sqrt{\alpha}$, poi ogni costante $\beta > 1$

Riepilogo: Il MCP non è approssimabile (2/2)

Håstad e Zuckerman:

- ▶ A meno che $P = NP$, nessun algoritmo polinomiale ha rapporto $n^{1-\epsilon}$ su ogni grafo
- ▶ Quindi il MCP non ha né un rapporto costante né un PTAS

Prossimo passo:

- ▶ Risultati positivi solo su classi particolari di grafi

Casi particolari

Introduzione: Casi particolari

- ▶ Su tutti i grafi il MCP non è approssimabile, ma alcune classi di grafi sono facili
- ▶ Sui **grafi planari** e sui grafi di **grado massimo limitato** il MCP si risolve all'ottimo per enumerazione
- ▶ Attraverso il grafo complementare, il risultato negativo passa al **MSSP**, ma i casi particolari no
- ▶ Sui grafi di grado limitato il MSSP ha un rapporto costante

Prima classe: i grafi planari,
che non hanno clique grandi.

Proposizione 2

Ogni grafo planare ha $\omega(G) \leq 4$, e sui grafi planari il MCP si risolve all'ottimo in tempo $O(n^4)$.

Dimostrazione

- ▶ Un sottografo di un grafo planare è planare
- ▶ Il grafo completo con 5 vertici ha 10 spigoli, più di $3 \cdot 5 - 6 = 9$, quindi non è planare
- ▶ Quindi un grafo planare non ha clique con 5 vertici
- ▶ I sottoinsiemi di al più 4 vertici sono $O(n^4)$, e ciascuno si verifica in tempo costante



Seconda classe: i grafi di grado massimo limitato,
dove ogni clique sta dentro un solo vicinato.

Proposizione 3

Ogni grafo ha $\omega(G) \leq \Delta(G)+1$, e il MCP si risolve all'ottimo in tempo $O(n 2^{\Delta} \Delta^2)$, con $\Delta = \Delta(G)$.

Dimostrazione

- ▶ Una clique che contiene il vertice v è contenuta in $\{v\} \cup N(v)$, che ha al più $\Delta + 1$ vertici
- ▶ Per ogni vertice v , enumeriamo i $2^{\deg(v)} \leq 2^\Delta$ sottoinsiemi $S \subseteq N(v)$
- ▶ Teniamo il più grande $\{v\} \cup S$ che sia una clique
- ▶ Verificare le coppie di S richiede tempo $O(\Delta^2)$
- ▶ Ogni clique massima si trova a partire da uno qualsiasi dei suoi vertici



Quando il tempo è polinomiale?

- ▶ Il tempo $O(n 2^\Delta \Delta^2)$ è polinomiale per ogni Δ fissato
- ▶ e anche quando $\Delta \leq \log_2 n$, perché allora

$$2^\Delta \leq n$$

Che cosa succede agli insiemi stabili?
Il grafo complementare trasforma un problema nell'altro.

Il problema dell'insieme stabile massimo

- ▶ Per $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ (capitolo «Problemi di clique»), un insieme stabile di G è una clique di $\overline{G}$
- ▶ $\overline{G}$ si costruisce in tempo $O(n^2)$ e ha lo stesso n
- ▶ Un algoritmo con rapporto $\rho(n)$ per uno dei due problemi, applicato al grafo complementare, ha lo stesso rapporto $\rho(n)$ per l'altro

Corollario 1

Per ogni $\varepsilon > 0$, se $P \neq NP$, nessun algoritmo polinomiale per il MSSP ha rapporto $\frac{\alpha(G)}{\mathcal{A}(I)} \leq n^{1-\varepsilon}$ su ogni grafo. In particolare, il MSSP non ha un rapporto costante.

I casi particolari non si trasferiscono

- ▶ I casi particolari *non* si trasferiscono al MSSP
- ▶ Il complementare di un grafo planare, o di un grafo di grado limitato, è **denso**
- ▶ Su quelle classi il MSSP resta NP-difficile, ma è **approssimabile**

Proposizione 4

*Su ogni grafo, un insieme stabile **massimale** S (a cui non si può aggiungere nessun vertice) ha $|S| \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$. Quindi l'algoritmo greedy che aggiunge vertici finché è possibile soddisfa*

$$\frac{\alpha(G)}{|S|} \leq \Delta(G) + 1.$$

Dimostrazione

- ▶ Ogni vertice fuori da S ha un vicino in S , altrimenti si potrebbe aggiungere
- ▶ Quindi

$$V = \bigcup_{v \in S} (\{v\} \cup N(v)) \quad \text{e} \quad n \leq |S| (\Delta(G) + 1)$$

- ▶ Poiché $\alpha(G) \leq n$, il rapporto è al più

$$\frac{\alpha(G)}{|S|} \leq \frac{n}{|S|} \leq \Delta(G) + 1$$



Grado limitato e grafi planari per il MSSP

- ▶ Sui grafi di grado massimo al più un Δ fissato questo è un **rapporto costante**
- ▶ Sui grafi planari il MSSP ha addirittura un **PTAS** (Baker, 1994)

Riepilogo: Casi particolari (1/2)

Grafi planari:

- ▶ K_5 non è planare, quindi $\omega(G) \leq 4$, e il MCP si risolve all'ottimo in tempo $O(n^4)$

Grado massimo limitato:

- ▶ $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$: ogni clique sta in $\{v\} \cup N(v)$
- ▶ Enumerazione in tempo $O(n 2^\Delta \Delta^2)$, polinomiale per Δ fissato o $\Delta \leq \log_2 n$

Riepilogo: Casi particolari (2/2)

II MSSP:

- ▶ Attraverso $\overline{G}$, il MSSP non ha rapporto $n^{1-\varepsilon}$, a meno che $P = NP$
- ▶ I casi particolari non si trasferiscono: i complementari sono densi
- ▶ Un insieme stabile massimale ha rapporto al più $\Delta(G) + 1$; sui grafi planari esiste un PTAS

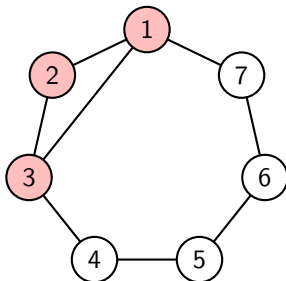
Esempio

Introduzione: Esempio

- ▶ Applichiamo i risultati del capitolo all'istanza di riferimento del MCP
- ▶ Vediamo il prodotto forte, una clique del prodotto scomposta, l'enumerazione per il grado limitato e il bound per i grafi planari
- ▶ Tutti i numeri sono abbastanza piccoli da verificarli a mano

Esempio (1/4)

- ▶ L'istanza di riferimento del MCP è il ciclo $1, 2, \dots, 7, 1$ con la corda $\{1, 3\}$
- ▶ $n = 7$, $m = 8$, $\Delta(G) = 3$ e $\omega(G) = 3$, con l'unica clique massima $\{1, 2, 3\}$ (in rosso)



Esempio (2/4)

Prodotto forte.

- ▶ $G \boxtimes G$ ha $7^2 = 49$ vertici e 240 spigoli
- ▶ Il suo numero di clique è

$$\omega(G \boxtimes G) = 3^2 = 9$$

raggiunto da $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

Esempio (3/4)

- Supponiamo che un algoritmo restituisca su $G \boxtimes G$ la clique

$$K = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}, \quad |K| = 6$$

- La sua proiezione $p(K) = \{1, 2, 3\}$ e le sue fibre $K_u = \{4, 5\}$ sono clique di G
- La più grande ha $3 \geq \sqrt{6}$ vertici

Esempio (4/4)

Grado limitato.

- L'enumerazione della Proposizione 3 esamina

$$\sum_v 2^{\deg(v)} = 2^3 + 2^2 + 2^3 + 4 \cdot 2^2 = 36$$

sottoinsiemi

- Trova $\{1, 2, 3\}$ dai vertici 1, 2 e 3

Planarità.

- Il grafo è planare, come mostra la figura, e $\omega(G) = 3 \leq 4$

Riepilogo: Esempio

- ▶ Sul ciclo con una corda, $\omega(G) = 3$ e $\omega(G \boxtimes G) = 9$
- ▶ Una clique di 6 vertici del prodotto restituisce una clique di G con $3 \geq \sqrt{6}$ vertici
- ▶ L'enumerazione per il grado limitato esamina 36 sottoinsiemi e trova $\{1, 2, 3\}$
- ▶ Il grafo è planare, e $\omega(G) = 3 \leq 4$

Fonti

Introduzione: Fonti

- ▶ I risultati di questo capitolo vengono da un libro di testo e da tre articoli di ricerca
- ▶ Sono i luoghi dove leggere le dimostrazioni complete, in particolare quella del teorema di Håstad e Zuckerman

Fonti (1/2)

- ▶ M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, 1979 (l'auto-miglioramento del MCP con i prodotti di grafi).
- ▶ J. Håstad, Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$, *Acta Mathematica* 182(1):105–142, 1999.

- ▶ D. Zuckerman, Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number, *Theory of Computing* 3:103–128, 2007.
- ▶ B.S. Baker, Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs, *Journal of the ACM* 41(1):153–180, 1994.

Riepilogo: Fonti

- ▶ Garey e Johnson (1979): l'auto-miglioramento del MCP con i prodotti di grafi
- ▶ Håstad (1999) e Zuckerman (2007): il rapporto $n^{1-\epsilon}$ è impossibile
- ▶ Baker (1994): un PTAS per il MSSP sui grafi planari

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Quattro errori frequenti sull'approssimazione di clique e insiemi stabili
- ▶ Riguardano il verso del rapporto, il numero di prodotti e il passaggio dal MCP al MSSP
- ▶ Controllarli è un modo rapido per non perdere punti

Osservazione 1: errori tipici (1/2)

- ▶ *Invertire il rapporto. Il MCP è un problema di massimo: il rapporto è $\frac{\omega(G)}{\mathcal{A}(I)}$, almeno 1.*
- ▶ *Iterare il prodotto un numero di volte che cresce con n . Il grafo dopo t prodotti ha n^{2^t} vertici: è polinomiale solo per t costante, quindi l'amplificazione dà ogni rapporto costante, non il rapporto 1.*

Osservazione: errori tipici (2/2)

- ▶ *Trasferire i casi particolari al MSSP. Il complementare di un grafo planare non è planare: il MCP è facile sui grafi planari, il MSSP lì è NP-difficile.*
- ▶ *Confondere il bound $\Delta(G) + 1$ del MCP con quello del MSSP. Per il MCP, $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$ limita l'ottimo e rende veloce l'enumerazione; per il MSSP, $\Delta(G) + 1$ limita il rapporto di un insieme stabile massimale.*

Riepilogo: Errori tipici

- ▶ Il rapporto del MCP è $\frac{\omega(G)}{\mathcal{A}(I)} \geq 1$
- ▶ Il numero t di prodotti deve essere una costante
- ▶ I grafi planari sono facili per il MCP, non per il MSSP
- ▶ $\Delta(G) + 1$ limita l'ottimo del MCP, e il rapporto di un insieme stabile massimale per il MSSP

Riepilogo (1/3)

- ▶ Il prodotto forte eleva al quadrato il numero di clique, e una clique del prodotto restituisce una clique di G di dimensione almeno pari alla radice quadrata della sua: un rapporto costante per il MCP darebbe ogni rapporto costante.
- ▶ Per i risultati di Håstad e Zuckerman, a meno che $P = NP$ non è possibile nemmeno il rapporto $n^{1-\varepsilon}$: il MCP non è approssimabile, e nemmeno il MSSP, attraverso il grafo complementare.
- ▶ Sui grafi planari e sui grafi di grado limitato il MCP si risolve all'ottimo per enumerazione; sui grafi di grado limitato un insieme stabile massimale ha rapporto al più $\Delta(G) + 1$ per il MSSP.

Riepilogo (2/3)

problema e grafi	algoritmo	risultato
MCP, tutti i grafi	polinomiale	nessun rapporto costante, salvo $P = NP$
MCP, planari	enumerazione	esatto, $\omega(G) \leq 4$
MCP, grado $\leq \Delta$	enumerazione	esatto, $O(n 2^\Delta \Delta^2)$
MSSP, tutti i grafi	polinomiale	nessun rapporto costante, salvo $P = NP$
MSSP, grado $\leq \Delta$	stabile massimale	rapporto $\leq \Delta + 1$

Cruscotto dell'istanza di riferimento.

Istanza	Upper bound	Valore trovato	Valore ottimo
ciclo con una corda	$\Delta(G) + 1 = 4$	3, enumerazione	3