

Formulazioni dei problemi di clique



Indice

Panoramica della famiglia

Un modello PLI per il problema della clique massima: la formulazione sugli spigoli

Un primo rilassamento lineare

Un secondo rilassamento lineare

Disuguaglianze di clique: una formulazione più forte

La relazione con la colorazione dei vertici

Insiemi stabili sul grafo complementare

Modelli PLI per le varianti pesate

Il problema della clique massima pesata sui vertici

Il problema della clique massima pesata sugli spigoli

Errori tipici

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere la formulazione sugli spigoli del problema della clique massima sui non-spigoli di G , cioè sugli spigoli di $\overline{G}$;
- ▶ spiegare perché il suo rilassamento lineare è debole: il punto $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile;
- ▶ scrivere la formulazione a clique e confrontare i due bound LP su un grafo piccolo;
- ▶ dimostrare $\omega(G) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi(G)$ con la dualità LP e una formulazione di colorazione;
- ▶ scrivere la formulazione sugli spigoli e la formulazione a clique del problema dell'insieme stabile massimo;
- ▶ scrivere i modelli PLI dei problemi della clique massima pesata sui vertici e pesata sugli spigoli, linearizzando il prodotto $x_u x_v$ con le variabili y_{uv} .

Prerequisiti

- ▶ Da questo modulo, il capitolo «**Problemi di clique**»: il problema, le sue ipotesi, clique, insiemi stabili, il grafo complementare e $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.
- ▶ Da questo modulo, i capitoli «**Problemi di colorazione**» e «**Formulazioni dei problemi di colorazione**»: il numero cromatico $\chi(G)$ e un modello PLI con i suoi rilassamenti lineari.
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «**Bound primali e duali**», «**Formulazioni ideali**» e «**Disuguaglianze valide**»: rilassamenti lineari, formulazioni più forti e disuguaglianze valide.
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare*, il capitolo «**Teoria della dualità**»: il duale di un problema LP, la dualità debole e la dualità forte.

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ In questo capitolo scriviamo i **modelli PLI** dei problemi di clique: il problema della clique massima, il problema dell'insieme stabile massimo e le due varianti pesate
- ▶ Tutti questi modelli si costruiscono con gli stessi due ingredienti: **variabili binarie di selezione** sui vertici e **vincoli di conflitto**
- ▶ In questa sezione vediamo questi ingredienti, e una tabella dei membri della famiglia con i loro modelli

Variabili, vincoli e obiettivo

- ▶ I modelli PLI dei problemi di clique usano una **variabile binaria di selezione** x_v per ogni vertice $v \in V$, pari a 1 se il vertice è nella clique.
- ▶ Due vertici non adiacenti non possono essere selezionati entrambi: i **vincoli di conflitto** si scrivono sui non-spigoli di G , cioè sugli spigoli del grafo complementare $\overline{G}$, oppure sulle sue clique.
- ▶ La funzione obiettivo massimizza il numero di vertici selezionati o il loro peso totale; il problema pesato sugli spigoli aggiunge una variabile per spigolo.

Modelli di clique e modelli di insieme stabile

I modelli di clique selezionano vertici con variabili binarie e vietano la selezione di due vertici non adiacenti.

Gli stessi modelli, scritti sugli spigoli di G invece che di $\overline{G}$, selezionano insiemi stabili.

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome dei loro modelli PLI e le sezioni che li scrivono.

Problema	Modelli	Vincoli di conflitto	Sezione
MCP	ILP_{MCP} (formulazione sugli spigoli)	sui non-spigoli di G	La formulazione sugli spigoli
MCP	ILP_{MCP}^{CL} (formulazione a clique)	sugli insiemi stabili massimali di G	Disuguaglianze di clique
MSSP	ILP_{MSSP} , ILP_{MSSP}^{CL}	sugli spigoli e sulle clique di G	Insiemi stabili sul grafo complementare
VWMCP	ILP_{MCP}^{VW}	sui non-spigoli di G	Varianti pesate
EWMCP	ILP_{MCP}^{EW}	sui non-spigoli di G	Varianti pesate

Riepilogo: Panoramica della famiglia

Gli ingredienti:

- ▶ Una variabile binaria di selezione x_v per vertice
- ▶ Vincoli di conflitto sui non-spigoli di G (gli spigoli di $\overline{G}$), oppure sulle clique di $\overline{G}$

L'obiettivo:

- ▶ Il numero di vertici selezionati o il loro peso totale; una variabile in più per spigolo nel problema pesato sugli spigoli

Clique e insiemi stabili:

- ▶ Gli stessi modelli sugli spigoli di G selezionano insiemi stabili

Un modello PLI per il problema della clique massima: la formulazione sugli spigoli

Introduzione: la formulazione sugli spigoli

- ▶ Scriviamo il primo modello PLI del problema della clique massima (MCP): la **formulazione sugli spigoli**
- ▶ Ha una variabile binaria per vertice e un vincolo per ogni **non-spigolo** di G
- ▶ È il punto di partenza di tutto il capitolo: da essa partono i suoi rilassamenti lineari, le disuguaglianze di clique e i modelli degli altri problemi della famiglia
- ▶ Alla fine la scriviamo su un'istanza piccola, il ciclo con una corda, e la risolviamo

I non-spigoli di G

- ▶ Il problema di questa sezione è il problema della clique massima (MCP), definito nel capitolo «[Problemi di clique](#)».
- ▶ Dato un grafo semplice $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e m spigoli, indichiamo con

$$\overline{E} = \{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E \}$$

l'insieme dei **non-spigoli** di G , cioè gli spigoli del grafo complementare $\overline{G} = (V, \overline{E})$.

Le variabili

- Introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ è selezionato nella clique} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall v \in V.$$

La formulazione sugli spigoli

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della clique massima (MCP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \\ & x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MCP} , o **formulazione sugli spigoli**.

Funzione obiettivo e vincoli del modello ILP_{MCP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

ILP_{MCP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza la cardinalità della clique selezionata;
- ▶ i vincoli $x_u + x_v \leq 1$ garantiscono che due vertici non adiacenti non siano selezionati entrambi ($|\overline{E}| = \binom{n}{2} - m$ vincoli lineari, uno per ogni spigolo di $\overline{G}$);
- ▶ infine, i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Leggere i vincoli sui non-spigoli

- ▶ Per ogni non-spigolo $\{u, v\}$, il vincolo $x_u + x_v \leq 1$ impone

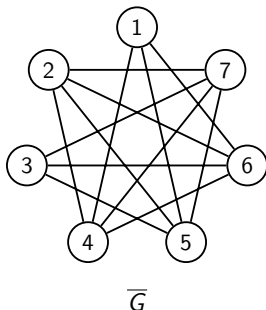
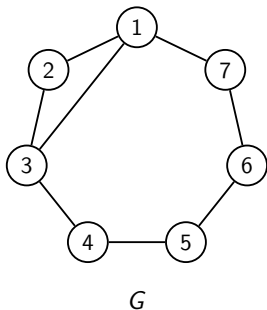
$$x_u = 1 \Rightarrow x_v = 0.$$

Il viceversa è falso: $x_u = x_v = 0$ è ammissibile.

- ▶ Letto su $\overline{G}$, lo stesso modello è la **formulazione sugli spigoli del MSSP**: di ogni spigolo di $\overline{G}$ si seleziona al più un estremo.

Esempio: un'istanza del MCP (1/2)

- Consideriamo il grafo G con 7 vertici formato dal ciclo $1, 2, \dots, 7, 1$ e dalla corda $\{1, 3\}$ (l'istanza di riferimento del capitolo «Problemi di clique»), e il suo complementare $\overline{G}$:



Esempio: un'istanza del MCP (2/2)

- ▶ G ha $m = 8$ spigoli, e $\overline{G}$ ha $i \binom{7}{2} - 8 = 13$ non-spigoli di G :
$$\overline{E} = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \\ \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}\}.$$
- ▶ Chiamiamo questa istanza del MCP **il ciclo con una corda**:
ci accompagna in tutto il capitolo.

Esempio: il modello ILP_{MCP} (1/2)

Il modello ILP_{MCP} per il ciclo con una corda ha 7 variabili binarie e un vincolo per ciascuno dei 13 spigoli di $\overline{G}$:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + x_4 & & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & + x_4 & & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & x_3 & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & & x_4 & & + x_6 & \leq 1 \\ & & & & x_4 & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & & & x_5 & & + x_7 \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Esempio: il modello ILP_{MCP} (2/2)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ è $3 = \omega(G)$.
- ▶ La soluzione ottima associata del MCP è la clique

$$\tilde{K} = \{1, 2, 3\},$$

ed è l'unica soluzione ottima.

Riepilogo: la formulazione sugli spigoli

Il modello ILP_{MCP} :

- ▶ Una variabile binaria x_v per vertice, l'obiettivo $\max \sum_{v \in V} x_v$
- ▶ Un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per non-spigolo di G : $\binom{n}{2} - m$ vincoli

Leggere il modello:

- ▶ $x_u = 1 \Rightarrow x_v = 0$ su ogni non-spigolo $\{u, v\}$
- ▶ Letto su $\overline{G}$, è la formulazione sugli spigoli del MSSP

Il ciclo con una corda:

- ▶ 13 vincoli, valore ottimo $3 = \omega(G)$, unica clique massima $\{1, 2, 3\}$

Un primo rilassamento lineare

Introduzione: Un primo rilassamento lineare

- ▶ Rilassiamo i vincoli binari della formulazione sugli spigoli in vincoli di non negatività: otteniamo un primo rilassamento lineare, il modello $LP-0_{MCP}$
- ▶ Il suo valore ottimo è un upper bound su $\omega(G)$, cioè un bound duale per il MCP
- ▶ Senza i bound $x_v \leq 1$ questo rilassamento può essere illimitato: vediamo quando
- ▶ Scriviamo anche il suo modello duale, che si legge come una **copertura frazionaria dei vertici con spigoli**

Il modello $LP-0_{MCP}$

Per ottenere un rilassamento lineare (LP) del modello ILP_{MCP} , rilassiamo i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ in vincoli di non negatività. Il modello PL ottenuto è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \\ & x_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello $LP-0_{MCP}$.

Gli upper bound non sono implicati

- ▶ Gli upper bound $x_v \leq 1$ non sono implicati in LP-0_{MCP} .
- ▶ Se un vertice è adiacente a tutti gli altri, non compare in nessun vincolo $x_u + x_v \leq 1$, e LP-0_{MCP} è illimitato.
- ▶ Nel ciclo con una corda ogni vertice ha un non-spigolo, e LP-0_{MCP} ha una soluzione ottima.

Esempio: il modello LP-0_{MCP} (1/2)

Il modello LP-0_{MCP} per il ciclo con una corda è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + x_4 & & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & + x_4 & & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & x_3 & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & & x_4 & & + x_6 & \leq 1 \\ & & & & x_4 & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & & & x_5 & & + x_7 \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \geq 0 \end{array}$$

Esempio: il modello LP-0_{MCP} (2/2)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = \frac{1}{2}$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ è $\frac{7}{2}$.
- ▶ Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(\text{ILP}_{\text{MCP}}) \leq \frac{7}{2}$$

Dal primale al duale

Ogni modello PL ha un modello duale.

Scriviamo ora il duale del modello $LP-0_{MCP}$:
ha una variabile per ogni vincolo sui non-spigoli
e un vincolo per ogni vertice.

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$

Con una variabile duale non negativa π_{uv} per ogni vincolo $x_u + x_v \leq 1$, il modello duale del modello LP-0_{MCP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{u: \{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} \geq 1, \quad \forall v \in V, \\ & \pi_{uv} \geq 0, \quad \forall \{u,v\} \in \bar{E}. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$.

Leggere il duale: una copertura frazionaria

- I vincoli

$$\sum_{u: \{u,v\} \in \overline{E}} \pi_{uv} \geq 1, \quad \forall v \in V,$$

chiedono che ogni vertice sia coperto da un peso totale almeno pari a uno sugli spigoli di $\overline{G}$ incidenti in esso.

- Il modello $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ è una **copertura frazionaria dei vertici con spigoli di $\overline{G}$** .

Esempio: il modello $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ (1/2)

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ per il ciclo con una corda ha una variabile per ogni spigolo di $\overline{G}$ e un vincolo per ogni vertice:

$$\begin{array}{lll} \min & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} + \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} \\ & + \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} + \pi_{46} + \pi_{47} + \pi_{57} \\ \\ \text{soggetto a} & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} & \geq 1 \\ & \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} & \geq 1 \\ & \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} & \geq 1 \\ & \pi_{14} + \pi_{24} + \pi_{46} + \pi_{47} & \geq 1 \\ & \pi_{15} + \pi_{25} + \pi_{35} + \pi_{57} & \geq 1 \\ & \pi_{16} + \pi_{26} + \pi_{36} + \pi_{46} & \geq 1 \\ & \pi_{27} + \pi_{37} + \pi_{47} + \pi_{57} & \geq 1 \\ & \pi_{14}, \pi_{15}, \pi_{16}, \dots, \pi_{57} & \geq 0 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(\text{LP-0}_{\text{MCP}})$ (2/2)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\pi}(D(\text{LP-0}_{\text{MCP}}))$ dà valore $\frac{1}{2}$ ai 7 spigoli del ciclo 1, 4, 7, 2, 5, 3, 6, 1 di $\overline{G}$:

$$\tilde{\pi}_{14} = \tilde{\pi}_{47} = \tilde{\pi}_{27} = \tilde{\pi}_{25} = \tilde{\pi}_{35} = \tilde{\pi}_{36} = \tilde{\pi}_{16} = \frac{1}{2},$$

$$\tilde{\pi}_{15} = \tilde{\pi}_{24} = \tilde{\pi}_{26} = \tilde{\pi}_{37} = \tilde{\pi}_{46} = \tilde{\pi}_{57} = 0$$

- ▶ Ogni vertice sta su due spigoli del ciclo e riceve $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
- ▶ Il valore ottimo $z(D(\text{LP-0}_{\text{MCP}}))$ è $\frac{7}{2}$.

Riepilogo: Un primo rilassamento lineare

Il modello $LP-0_{MCP}$:

- ▶ I vincoli binari diventano $x_v \geq 0$; i bound $x_v \leq 1$ non sono implicati
- ▶ Un vertice adiacente a tutti gli altri lo rende illimitato

Il suo duale:

- ▶ Una variabile π_{uv} per spigolo di $\overline{G}$: una copertura frazionaria dei vertici con spigoli

Il ciclo con una corda:

- ▶ $x_v = \frac{1}{2}$ è ottimo, con valore $\frac{7}{2}$, come il duale: $z(ILP_{MCP}) \leq \frac{7}{2}$

Un secondo rilassamento lineare

Introduzione: Un secondo rilassamento lineare

- ▶ Rilassiamo i vincoli binari nei bound $0 \leq x_v \leq 1$: otteniamo il modello LP_{MCP} , che non può mai essere illimitato
- ▶ Lo scriviamo, insieme al suo duale, sul ciclo con una corda
- ▶ Poi dimostriamo che il suo bound può essere **arbitrariamente debole**: il punto $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile
- ▶ Questa debolezza è il motivo della formulazione più forte della prossima sezione

Il modello LP_{MCP}

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{MCP} , rilassiamo i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ nei bound $0 \leq x_v \leq 1$. Il modello PL ottenuto è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \\ & x_v \leq 1, \quad \forall v \in V, \\ & x_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{MCP} .

Esempio: il modello LP_{MCP} (1/3)

Il modello LP_{MCP} per il ciclo con una corda è (obiettivo e vincoli sui non-spigoli):

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + x_4 & & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & + x_4 & & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & x_3 & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & + x_6 & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & & x_4 & & + x_6 & \leq 1 \\ & & & & x_4 & & & + x_7 \leq 1 \\ & & & & & x_5 & & + x_7 \leq 1 \end{array}$$

Esempio: il modello LP_{MCP} (2/3)

Il modello continua con gli upper bound e con i vincoli di non negatività:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & \leq 1 \\ & x_2 & \leq 1 \\ & & x_3 \leq 1 \\ & & & x_4 \leq 1 \\ & & & & x_5 \leq 1 \\ & & & & & x_6 \leq 1 \\ & & & & & & x_7 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Esempio: il modello LP_{MCP} (3/3)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP_{MCP})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = \frac{1}{2}$$

- ▶ Il valore ottimo $z(LP_{MCP})$ è $\frac{7}{2}$.
- ▶ Di conseguenza, abbiamo l'upper bound:

$$z(ILP_{MCP}) \leq \frac{7}{2}$$

Il modello duale $D(\text{LP}_{\text{MCP}})$

Con una variabile duale non negativa π_{uv} per ogni vincolo $x_u + x_v \leq 1$ e una variabile duale non negativa λ_v per ogni vincolo $x_v \leq 1$, il modello duale del modello LP_{MCP} è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} + \sum_{v \in V} \lambda_v \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{u: \{u,v\} \in \bar{E}} \pi_{uv} + \lambda_v \geq 1, \quad \forall v \in V, \\ & \pi_{uv} \geq 0, \quad \forall \{u,v\} \in \bar{E}, \\ & \lambda_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello $D(\text{LP}_{\text{MCP}})$.

Esempio: il modello $D(LP_{MCP})$ (1/2)

Il modello duale $D(LP_{MCP})$ per il ciclo con una corda è:

$$\begin{array}{llll} \min & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} + \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} \\ & + \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} + \pi_{46} + \pi_{47} + \pi_{57} + \lambda_1 \\ & + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 \\ \\ \text{soggetto a} & \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} + \lambda_1 & \geq & 1 \\ & \pi_{24} + \pi_{25} + \pi_{26} + \pi_{27} + \lambda_2 & \geq & 1 \\ & \pi_{35} + \pi_{36} + \pi_{37} + \lambda_3 & \geq & 1 \\ & \pi_{14} + \pi_{24} + \pi_{46} + \pi_{47} + \lambda_4 & \geq & 1 \\ & \pi_{15} + \pi_{25} + \pi_{35} + \pi_{57} + \lambda_5 & \geq & 1 \\ & \pi_{16} + \pi_{26} + \pi_{36} + \pi_{46} + \lambda_6 & \geq & 1 \\ & \pi_{27} + \pi_{37} + \pi_{47} + \pi_{57} + \lambda_7 & \geq & 1 \\ \\ & \pi_{14}, \pi_{15}, \pi_{16}, \dots, \pi_{57} & \geq & 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(LP_{MCP})$ (2/2)

- ▶ Una soluzione ottima $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})(D(LP_{MCP}))$ è la soluzione dell'esempio del modello $D(LP-0_{MCP})$ con $\tilde{\lambda}_v = 0$ per ogni $v \in V$:

$$\tilde{\pi}_{14} = \tilde{\pi}_{47} = \tilde{\pi}_{27} = \tilde{\pi}_{25} = \tilde{\pi}_{35} = \tilde{\pi}_{36} = \tilde{\pi}_{16} = \frac{1}{2},$$

tutti gli altri $\tilde{\pi}_{uv} = 0$, $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \dots = \tilde{\lambda}_7 = 0$

- ▶ Il valore ottimo $z(D(LP_{MCP}))$ è $\frac{7}{2}$.

Quanto è debole questo bound?

Sul ciclo con una corda il bound LP è $\frac{7}{2}$, contro $\omega(G) = 3$.

La prossima proposizione mostra che, su altri grafi,
il gap può essere grande quanto si vuole.

Proposizione 1: Il bound LP può essere arbitrariamente debole

Per ogni grafo G con n vertici, $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \geq n/2$. Di conseguenza, il rapporto $z(\text{LP}_{\text{MCP}})/z(\text{ILP}_{\text{MCP}})$ non è limitato al variare dei grafi.

Dimostrazione

- Poniamo $x_v = \frac{1}{2}$ per ogni vertice. Ogni vincolo $x_u + x_v \leq 1$ diventa

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

e i bound $x_v \leq 1$ e $x_v \geq 0$ sono soddisfatti.

- È quindi una soluzione ammissibile di LP_{MCP} di valore $n/2$.
- I grafi senza triangoli e con almeno uno spigolo hanno $\omega(G) = 2$ per ogni n , e per essi il rapporto è almeno

$$\frac{n/2}{2} = \frac{n}{4}.$$



Arrotondare il bound per difetto

- ▶ I dati sono interi e il valore ottimo del PLI è intero, quindi anche $\lfloor z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \rfloor$ è un bound duale.
- ▶ Sul ciclo con una corda dà $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3 = \omega(G)$ per caso; su un grafo senza triangoli dà $\lfloor n/2 \rfloor$, contro $\omega(G) = 2$.
- ▶ Sul ciclo con 5 vertici C_5 , dove $\omega(C_5) = 2$, il punto $x_v = \frac{1}{2}$ dà

$$z(\text{LP}_{\text{MCP}}) = \frac{5}{2}.$$

Riepilogo: Un secondo rilassamento lineare

Il modello LP_{MCP} :

- ▶ I vincoli binari diventano $0 \leq x_v \leq 1$; il suo duale ha le variabili π_{uv} e λ_v
- ▶ Sul ciclo con una corda: $x_v = \frac{1}{2}$, valore $\frac{7}{2}$, come il duale

Un bound debole:

- ▶ $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile, quindi $z(LP_{MCP}) \geq n/2$
- ▶ Sui grafi senza triangoli $\omega(G) = 2$: il rapporto è almeno $n/4$
- ▶ Su C_5 : $z(LP_{MCP}) = \frac{5}{2}$ contro $\omega(C_5) = 2$

Disuguaglianze di clique: una formulazione più forte

Introduzione: Disuguaglianze di clique

- ▶ La formulazione sugli spigoli è debole perché il punto $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile
- ▶ Troviamo **disuguaglianze valide** che lo tagliano: le **disuguaglianze di clique**, una per ogni clique di $\overline{G}$
- ▶ Con esse scriviamo un secondo modello PLI, la **formulazione a clique**, con un rilassamento lineare più forte
- ▶ Sul ciclo con una corda il nuovo bound LP chiude il gap; su C_5 no

Proposizione 2: disuguaglianze di clique

Sia $Q \subseteq V$ una clique di $\overline{G}$, cioè un insieme stabile di G . Allora

$$\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$$

*è una **disuguaglianza valida** per ILP_{MCP} .*

Dimostrazione

- ▶ Una clique di G e un insieme stabile Q di G hanno al più un vertice in comune: due vertici comuni sarebbero insieme adiacenti e non adiacenti.
- ▶ Quindi ogni soluzione ammissibile di ILP_{MCP} seleziona al più un vertice di Q :

$$\sum_{v \in Q} x_v \leq 1.$$



Disuguaglianze di clique e clique massimali

- ▶ Le disuguaglianze $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$ si chiamano **disuguaglianze di clique**, dalla clique Q di $\overline{G}$; lette su G , sono **disuguaglianze di insieme stabile**.
- ▶ I vincoli sui non-spigoli sono il caso $|Q| = 2$.
- ▶ Se $Q \subseteq Q'$, la disuguaglianza di Q' implica quella di Q , perché tutte le variabili sono non negative.
- ▶ Basta scrivere le disuguaglianze delle clique **massimali** di $\overline{G}$, la cui famiglia indichiamo con $\mathcal{Q}$.

La formulazione a clique

Con le variabili x_v della formulazione sugli spigoli, un secondo modello PLI per il problema della clique massima (MCP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{v \in Q} x_v \leq 1, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \\ & x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$, o **formulazione a clique**.

Funzione obiettivo e vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

$\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$:

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza la cardinalità della clique selezionata;
- ▶ i vincoli $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$ garantiscono che di ogni clique massimale di $\overline{G}$ sia selezionato al più un vertice ($|Q|$ vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Stesse soluzioni ammissibili, molti più vincoli

- ▶ Ogni spigolo di $\overline{G}$ sta in una clique massimale, quindi ogni vincolo $x_u + x_v \leq 1$ della formulazione sugli spigoli è implicato da un vincolo $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$: i due modelli hanno le stesse soluzioni ammissibili.
- ▶ La famiglia $\mathcal{Q}$ può essere molto grande: Moon e Moser (1965) hanno mostrato grafi con $3^{n/3}$ clique massimali.
- ▶ In pratica le disuguaglianze si aggiungono solo quando sono violate, come nel capitolo «Disuguaglianze valide» del modulo *Programmazione lineare intera*.

Esempio: il modello ILP_{MCP}^{CL} (1/2)

Le clique massimali di $\overline{G}$ nel ciclo con una corda sono i 5 triangoli e i 2 spigoli

$$\mathcal{Q} = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\},$$

e danno 7 vincoli invece di 13. Il modello ILP_{MCP}^{CL} per questa istanza del MCP è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & + x_4 & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & + x_4 & & + x_6 & \leq 1 \\ & & x_2 & & + x_4 & & & + x_7 \leq 1 \\ & & x_2 & & & + x_5 & & + x_7 \leq 1 \\ & & & x_3 & & + x_5 & & + x_7 \leq 1 \\ & x_1 & & & & + x_5 & & \leq 1 \\ & & & x_3 & & & + x_6 & \leq 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ (2/2)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

- ▶ Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$ è $3 = \omega(G)$.
- ▶ I due modelli hanno le stesse soluzioni ottime, perché hanno le stesse soluzioni ammissibili: la differenza si vede nei loro rilassamenti lineari.

Il modello LP_{MCP}^{CL}

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{MCP}^{CL} , rilassiamo i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ in vincoli di non negatività. Il modello PL ottenuto è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{v \in Q} x_v \leq 1, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \\ & x_v \geq 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{MCP}^{CL} .

Un rilassamento lineare più forte

- ▶ Ogni vertice sta in qualche clique massimale di $\overline{G}$, quindi i vincoli $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$ implicano $x_v \leq 1$: i bound $x_v \leq 1$ non servono.
- ▶ Ogni vincolo $x_u + x_v \leq 1$ di LP_{MCP} è implicato da un vincolo $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$. Quindi la regione ammissibile di LP_{MCP}^{CL} è contenuta in quella di LP_{MCP} , e

$$\omega(G) \leq z(LP_{MCP}^{CL}) \leq z(LP_{MCP}).$$

Esempio: il modello LP_{MCP}^{CL} (1/3)

Il modello LP_{MCP}^{CL} per il ciclo con una corda è:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & & & & + & x_4 & & & + & x_6 & & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & + & x_6 & & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & & + & x_7 & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & & + & x_5 & & & + & x_7 & \leq & 1 \\ & & & x_3 & & & + & x_5 & & & + & x_7 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & & & + & x_5 & & & & \leq & 1 \\ & & & x_3 & & & & & + & x_6 & & \leq & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Esempio: il modello LP_{MCP}^{CL} (2/3)

- Il punto $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ non è più ammissibile:

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = \frac{3}{2} > 1.$$

- Sommando i tre vincoli di $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$ e $\{3, 5, 7\}$ otteniamo

$$\sum_{v=1}^7 x_v + x_5 + x_7 \leq 3 \quad \implies \quad \sum_{v=1}^7 x_v \leq 3.$$

Esempio: il modello LP_{MCP}^{CL} (3/3)

- ▶ Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP_{MCP}^{CL})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

- ▶ Il valore ottimo $z(LP_{MCP}^{CL})$ è $3 = \omega(G)$.
- ▶ Il bound LP scende da $\frac{7}{2}$ a 3 e chiude il gap.

Le disuguaglianze di clique non chiudono ogni gap

- Le disuguaglianze di clique non chiudono sempre il gap. Su C_5 il complementare è ancora un ciclo con 5 vertici, le cui clique massimali sono i suoi spigoli: le due formulazioni coincidono e

$$z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = \frac{5}{2} > 2 = \omega(C_5).$$

- Se C è un ciclo di $\overline{G}$ con un numero dispari di vertici e senza corde, allora

$$\sum_{v \in C} x_v \leq \frac{|C| - 1}{2}$$

è una disuguaglianza valida (una **disuguaglianza di ciclo dispari**): un insieme stabile di $\overline{G}$ prende al più $(|C| - 1)/2$ vertici di C .

- Per C_5 si scrive $x_1 + \dots + x_5 \leq 2$ e chiude il gap.

Riepilogo: Disuguaglianze di clique

Disuguaglianze di clique:

- ▶ $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$ per ogni clique Q di $\overline{G}$; bastano le clique massimali Q

La formulazione a clique:

- ▶ Stesse soluzioni ammissibili della formulazione sugli spigoli, ma $\omega(G) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}})$
- ▶ Q può essere enorme: le disuguaglianze si aggiungono solo quando sono violate

Sulle istanze:

- ▶ Ciclo con una corda: il bound scende da $\frac{7}{2}$ a $3 = \omega(G)$
- ▶ C_5 : il bound resta $\frac{5}{2}$; la disuguaglianza di ciclo dispari chiude il gap

La relazione con la colorazione dei vertici

Introduzione: La relazione con la colorazione dei vertici

- ▶ Il numero di clique e il numero cromatico sono legati:
 $\omega(G) \leq \chi(G)$
- ▶ In questa sezione collochiamo il bound LP della formulazione a clique fra i due numeri
- ▶ Lo strumento è la **dualità LP**: il duale di LP_{MCP}^{CL} è il rilassamento lineare di una formulazione di colorazione, scritta sugli insiemi stabili massimali di G
- ▶ Verifichiamo la catena di bound sul ciclo con una corda e su C_5

Clique e colorazioni

- ▶ In una colorazione di G i vertici di una clique hanno colori a due a due diversi, quindi (capitolo «Problemi di colorazione»)

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

- ▶ Qui collochiamo il bound LP della formulazione a clique fra i due numeri.

Le variabili di una formulazione di colorazione

- ▶ Le clique massimali di $\overline{G}$ sono gli **insiemi stabili massimali** di G , e una classe di colore è un insieme stabile.
- ▶ Introduciamo le seguenti $|Q|$ **variabili binarie**:

$$y_Q = \begin{cases} 1 & \text{se l'insieme stabile } Q \\ & \text{è una classe di colore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall Q \in Q.$$

La formulazione a insiemi stabili del VCP

Con queste variabili, un modello PLI per il problema della colorazione dei vertici (VCP) è il seguente:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{Q \in \mathcal{Q}} y_Q \\ & \text{soggetto a} \quad \sum_{Q \in \mathcal{Q}: v \in Q} y_Q \geq 1, \quad \forall v \in V, \\ & \quad y_Q \in \{0, 1\}, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$, o **formulazione a insiemi stabili** del VCP.

Funzione obiettivo e vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

$\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$:

- ▶ la funzione obiettivo lineare minimizza il numero di classi di colore;
- ▶ i vincoli $\sum_{Q \in \mathcal{Q}: v \in Q} y_Q \geq 1$ garantiscono che ogni vertice appartenga ad almeno un insieme stabile scelto (n vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli $y_Q \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Il suo valore ottimo è $\chi(G)$: un vertice coperto da due insiemi scelti si tiene in uno solo dei due, e ogni sottoinsieme di un insieme stabile è stabile, quindi gli insiemi scelti danno una colorazione con lo stesso numero di colori.

Il modello duale $D(LP_{MCP}^{CL})$

Con una variabile duale non negativa π_Q per ogni vincolo $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$ del modello LP_{MCP}^{CL} , il suo modello duale è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \pi_Q \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{Q \in \mathcal{Q}: v \in Q} \pi_Q \geq 1, \quad \forall v \in V, \\ & \pi_Q \geq 0, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Questo modello PL si chiama modello $D(LP_{MCP}^{CL})$.

Due modelli che si somigliano

Confrontiamo il duale $D(LP_{MCP}^{CL})$ con la formulazione a
insiemi stabili del VCP:

lo stesso obiettivo, gli stessi vincoli,
cambiano solo i domini delle variabili.

La prossima proposizione trasforma questa osservazione in una
catena di bound.

Proposizione 3: bound di clique dalla dualità LP

Il modello duale $D(LP_{MCP}^{CL})$ è il rilassamento lineare del modello ILP_{VCP}^{ST} , con le variabili π_Q al posto di y_Q . Quindi

$$\omega(G) \leq z(LP_{MCP}^{CL}) \leq \chi(G).$$

Dimostrazione

- ▶ Rilassando i vincoli $y_Q \in \{0, 1\}$ in $y_Q \geq 0$ si ottiene esattamente il modello $D(LP_{MCP}^{CL})$, con y_Q al posto di π_Q .
- ▶ Per la dualità forte

$$z(LP_{MCP}^{CL}) = z(D(LP_{MCP}^{CL})).$$

- ▶ La prima disuguaglianza vale perché LP_{MCP}^{CL} è un rilassamento del MCP.
- ▶ La seconda vale perché $D(LP_{MCP}^{CL})$ è un rilassamento del modello ILP_{VCP}^{ST} , un problema di minimo con valore ottimo $\chi(G)$.



Il numero cromatico frazionario

- ▶ Il valore comune $z(LP_{MCP}^{CL})$ si chiama **numero cromatico frazionario** di G .
- ▶ La formulazione a clique del MCP e la formulazione a insiemi stabili del VCP sono due facce dello stesso problema LP.

Esempio: il modello $D(LP_{MCP}^{CL})$ (1/2)

Il modello duale $D(LP_{MCP}^{CL})$ per il ciclo con una corda ha una variabile per ogni insieme stabile massimale di G (π_{146} per $Q = \{1, 4, 6\}$, e così via):

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & \pi_{146} & + \pi_{246} & + \pi_{247} & + \pi_{257} & + \pi_{357} & + \pi_{15} & + \pi_{36} \\
 \text{soggetto a} & \pi_{146} & & & & & + \pi_{15} & \geq 1 \\
 & & \pi_{246} & + \pi_{247} & + \pi_{257} & & & \geq 1 \\
 & & & & & \pi_{357} & + \pi_{36} & \geq 1 \\
 & \pi_{146} & + \pi_{246} & + \pi_{247} & & & & \geq 1 \\
 & & & & \pi_{257} & + \pi_{357} & + \pi_{15} & \geq 1 \\
 & \pi_{146} & + \pi_{246} & & & & + \pi_{36} & \geq 1 \\
 & & & \pi_{247} & + \pi_{257} & + \pi_{357} & & \geq 1 \\
 \pi_{146}, & \pi_{246}, & \pi_{247}, & \pi_{257}, & \pi_{357}, & \pi_{15}, & \pi_{36} & \geq 0
 \end{array}$$

Esempio: il modello $D(LP_{MCP}^{CL})$ (2/2)

- Una soluzione ottima $\tilde{\pi}(D(LP_{MCP}^{CL}))$ dà valore 1 ai moltiplicatori usati nell'esempio del modello LP_{MCP}^{CL} (i vincoli di $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$ e $\{3, 5, 7\}$):

$$\tilde{\pi}_{146} = \tilde{\pi}_{257} = \tilde{\pi}_{357} = 1, \quad \tilde{\pi}_{246} = \tilde{\pi}_{247} = \tilde{\pi}_{15} = \tilde{\pi}_{36} = 0$$

- Il valore ottimo $z(D(LP_{MCP}^{CL}))$ è 3.

Esempio: la catena $\omega \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi(1/3)$

Sul ciclo con una corda, il modello $\text{ILP}_{\text{VCP}}^{\text{ST}}$ è:

$$\begin{array}{ll}
 \min & y_{146} + y_{246} + y_{247} + y_{257} + y_{357} + y_{15} + y_{36} \\
 \text{soggetto a} & y_{146} + y_{15} \geq 1 \\
 & y_{246} + y_{247} + y_{257} \geq 1 \\
 & y_{357} + y_{36} \geq 1 \\
 & y_{146} + y_{246} + y_{247} \geq 1 \\
 & y_{257} + y_{357} + y_{15} \geq 1 \\
 & y_{146} + y_{246} + y_{36} \geq 1 \\
 & y_{247} + y_{257} + y_{357} \geq 1 \\
 & y_{146}, y_{246}, y_{247}, y_{257}, y_{357}, y_{15}, y_{36} \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

Esempio: la catena $\omega \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi$ (2/3)

- Il punto intero

$$\tilde{y}_{146} = \tilde{y}_{257} = \tilde{y}_{357} = 1,$$

con tutte le altre variabili pari a 0, è la soluzione dell'esempio del modello $D(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$.

- È una colorazione con 3 colori, le classi $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$ e $\{3\}$.
- Quindi $\chi(G) = 3$, e la catena diventa

$$3 \leq 3 \leq 3.$$

Esempio: la catena $\omega \leq z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) \leq \chi$ (3/3)

- ▶ Su C_5 , con vertici $1, \dots, 5$, gli insiemi stabili massimali sono i 5 non-spigoli.
- ▶ Ponendo $\pi_Q = \frac{1}{2}$ su ciascuno di essi ogni vertice riceve in totale 1, quindi il duale ha valore $\frac{5}{2}$, come il primale.
- ▶ La catena diventa

$$\omega(C_5) = 2 < z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}) = \frac{5}{2} < \chi(C_5) = 3.$$

Riepilogo: La relazione con la colorazione dei vertici

La formulazione a insiemi stabili del VCP:

- ▶ Una variabile binaria y_Q per insieme stabile massimale di G ,
valore ottimo $\chi(G)$

La dualità LP:

- ▶ Il duale di LP_{MCP}^{CL} è il rilassamento lineare di ILP_{VCP}^{ST} , quindi

$$\omega(G) \leq z(LP_{MCP}^{CL}) \leq \chi(G)$$

- ▶ Il valore comune è il numero cromatico frazionario di G

Sulle istanze:

- ▶ Ciclo con una corda: $3 \leq 3 \leq 3$; C_5 : $2 < \frac{5}{2} < 3$

Insiemi stabili sul grafo complementare



Introduzione: Insiemi stabili sul grafo complementare

- ▶ Il problema dell'insieme stabile massimo (MSSP) cerca un insieme più grande possibile di vertici a due a due non adiacenti
- ▶ I suoi modelli PLI sono i modelli di clique letti sul grafo complementare: è l'identità $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ scritta come modello
- ▶ Scriviamo la **formulazione sugli spigoli** e la **formulazione a clique** del MSSP, e le confrontiamo sul ciclo con una corda

Il MSSP e le sue variabili

- ▶ Il problema di questa sezione è il problema dell'insieme stabile massimo (MSSP), definito nel capitolo «[Problemi di clique](#)».
- ▶ Dato un grafo semplice $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e m spigoli, introduciamo le seguenti n **variabili binarie**:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ è selezionato} \\ & \text{nell'insieme stabile} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in V.$$

La formulazione sugli spigoli del MSSP

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema dell'insieme stabile massimo (MSSP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in E, \\ & x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{MSSP} , o **formulazione sugli spigoli del MSSP**.

Funzione obiettivo e vincoli del modello ILP_{MSSP}

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello ILP_{MSSP} :

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza la cardinalità dell'insieme stabile selezionato;
- ▶ i vincoli $x_u + x_v \leq 1$ garantiscono che due vertici adiacenti non siano selezionati entrambi (m vincoli lineari, uno per ogni spigolo di G);
- ▶ infine, i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Il modello ILP_{MSSP} su G è il modello ILP_{MCP} su $\overline{G}$: i non-spigoli di $\overline{G}$ sono gli spigoli di G . È l'identità $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ scritta come modello.

Esempio: il modello ILP_{MSSP} (1/2)

Cerchiamo un insieme stabile massimo del ciclo con una corda. Il modello ILP_{MSSP} ha 7 variabili binarie e un vincolo per ciascuno degli 8 spigoli di G :

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + x_2 & & & & & \leq 1 \\ & x_1 & & + x_3 & & & & \leq 1 \\ & x_1 & & & & & + x_7 & \leq 1 \\ & & x_2 & + x_3 & & & & \leq 1 \\ & & & x_3 & + x_4 & & & \leq 1 \\ & & & & x_4 & + x_5 & & \leq 1 \\ & & & & & x_5 & + x_6 & \leq 1 \\ & & & & & & x_6 & + x_7 \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Esempio: il modello ILP_{MSSP} (2/2)

- Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MSSP}})$ è:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_7 = 0$$

- Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MSSP}})$ è $3 = \alpha(G)$.
- La soluzione ottima non è unica: gli insiemi stabili massimi di G sono

$$\{1, 4, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\},$$

i cinque triangoli di $\overline{G}$.

Disuguaglianze di clique per il MSSP

- Un insieme stabile e una clique di G hanno al più un vertice in comune, quindi per ogni clique K di G la **disuguaglianza di clique**

$$\sum_{v \in K} x_v \leq 1$$

è valida, e implica i vincoli $x_u + x_v \leq 1$ degli spigoli di K .

- Come per il MCP, basta scrivere le disuguaglianze della famiglia $\mathcal{K}$ delle clique **massimali** di G .

La formulazione a clique del MSSP

Con le variabili x_v della formulazione sugli spigoli del MSSP, un secondo modello PLI per il problema dell'insieme stabile massimo (MSSP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{v \in K} x_v \leq 1, \quad \forall K \in \mathcal{K}, \\ & x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$, o **formulazione a clique del MSSP**.

Funzione obiettivo e vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

$\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$:

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza la cardinalità dell'insieme stabile selezionato;
- ▶ i vincoli $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ garantiscono che di ogni clique massimale di G sia selezionato al più un vertice ($|\mathcal{K}|$ vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Il modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$ su G è il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}}$ su $\overline{G}$, e il suo rilassamento lineare è forte almeno quanto quello del modello ILP_{MSSP} .

Esempio: il modello ILP_{MSSP}^{CL} (1/2)

Le clique massimali del ciclo con una corda sono il triangolo $\{1, 2, 3\}$ e i cinque spigoli $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$, $\{6, 7\}$, $\{1, 7\}$. Il modello ILP_{MSSP}^{CL} sostituisce i tre vincoli del triangolo con un solo vincolo, e ha 6 vincoli:

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 \\ \text{soggetto a} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_4 & + & x_5 & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & & x_6 & + & x_7 & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & & & x_1 & + & x_7 & \leq & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}$ (2/2)

- ▶ La soluzione ottima $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = 1$ dell'esempio del modello ILP_{MSSP} è ottima anche qui, con valore

$$z(\text{ILP}_{\text{MSSP}}^{\text{CL}}) = 3.$$

- ▶ I rilassamenti lineari sono diversi (Gurobi):
 - ▶ la formulazione sugli spigoli, con $0 \leq x_v \leq 1$, ha valore ottimo $\frac{7}{2}$ in $x_v = \frac{1}{2}$;
 - ▶ la formulazione a clique ha valore ottimo 3, raggiunto da $x_2 = x_5 = x_7 = 1$.

Riepilogo: Insiemi stabili sul grafo complementare

Formulazione sugli spigoli del MSSP:

- ▶ Un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per spigolo di G : è il modello ILP_{MCP} su $\overline{G}$

Formulazione a clique del MSSP:

- ▶ Un vincolo $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ per clique massimale K di G : un rilassamento lineare più forte

Il ciclo con una corda:

- ▶ $\alpha(G) = 3$, con cinque insiemi stabili massimi
- ▶ Bound LP: $\frac{7}{2}$ con la formulazione sugli spigoli, 3 con la formulazione a clique

Modelli PLI per le varianti pesate

Introduzione: Modelli PLI per le varianti pesate

- ▶ I problemi di questa sezione sono i problemi della clique massima pesata sui vertici (VWMCP) e pesata sugli spigoli (EWMCP), definiti nel capitolo «[Problemi di clique](#)», con le loro istanze di riferimento
- ▶ Con i pesi sui vertici cambia solo la funzione obiettivo
- ▶ Con i pesi sugli spigoli, il peso di uno spigolo si raccoglie solo se entrambi i suoi estremi sono selezionati: dobbiamo **linearizzare** il prodotto $x_u x_v$ con nuove variabili y_{uv}

Il problema della clique massima pesata sui vertici

- Dato un grafo semplice $G = (V, E)$ e un vettore dei pesi dei vertici $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$, usiamo le n **variabili binarie** della formulazione sugli spigoli:

$$x_v = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } v \text{ è selezionato nella clique} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall v \in V.$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della clique massima pesata sui vertici (VWMCP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} w_v x_v \\ \text{soggetto a} \quad & x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \overline{E}, \\ & x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$.

Funzione obiettivo e vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

$\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$:

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il peso totale $w(K)$ della clique selezionata;
- ▶ i vincoli $x_u + x_v \leq 1$ garantiscono che due vertici non adiacenti non siano selezionati entrambi ($|\overline{E}| = \binom{n}{2} - m$ vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Cambia solo la funzione obiettivo: le soluzioni ammissibili sono le clique di G , come nel modello ILP_{MCP} , e con $w_v = 1$ per ogni vertice i due modelli coincidono. Anche qui sono valide le disuguaglianze di clique di $\overline{G}$.

Esempio: il modello ILP_{MCP}^{VW} (1/3)

- ▶ Consideriamo il grafo G con 8 vertici su una circonferenza, in cui ogni vertice è adiacente a tutti gli altri tranne quello opposto.
- ▶ G ha 24 spigoli, e $\overline{G}$ ha i 4 spigoli $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$.
- ▶ I pesi dei vertici sono:

	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$	$v = 4$	$v = 5$	$v = 6$	$v = 7$	$v = 8$
w_v	5	8	9	5	6	5	5	9

- ▶ È l'istanza del VWMCP del capitolo «Problemi di clique».

Esempio: il modello ILP_{MCP}^{VW} (2/3)

Il modello ILP_{MCP}^{VW} ha 8 variabili binarie e un vincolo per ciascuno dei 4 spigoli di $\bar{G}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 5x_7 + 9x_8 \\ \text{soggetto a} \quad & x_1 + x_5 \leq 1 \\ & x_2 + x_6 \leq 1 \\ & x_3 + x_7 \leq 1 \\ & x_4 + x_8 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$ (3/3)

- Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}})$ è:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_8 = 1, \quad \tilde{x}_1 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = \tilde{x}_7 = 0$$

- Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}})$ è

$$8 + 9 + 6 + 9 = 32,$$

come indicato nel capitolo «Problemi di clique».

- La soluzione ottima associata è la clique $\tilde{K} = \{2, 3, 5, 8\}$, ed è l'unica soluzione ottima: ogni vincolo tiene il vertice più pesante della sua coppia.

Il problema della clique massima pesata sugli spigoli

- ▶ Dato un grafo semplice $G = (V, E)$ e un vettore dei pesi degli spigoli $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^m$, il peso di uno spigolo si raccoglie solo se entrambi i suoi estremi sono selezionati: il prodotto $x_u x_v$ non è lineare.
- ▶ Introduciamo le n **variabili binarie** x_v della formulazione sugli spigoli e le seguenti m **variabili binarie**:

$$y_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{se gli estremi di } \{u, v\} \text{ sono} \\ & \text{entrambi nella clique} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall \{u, v\} \in E.$$

Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema della clique massima pesata sugli spigoli (EWMCP) è il seguente:

$$\max \sum_{\{u,v\} \in E} r_{uv} y_{uv}$$

$$\text{soggetto a } y_{uv} \leq x_u, \quad \forall \{u, v\} \in E,$$

$$y_{uv} \leq x_v, \quad \forall \{u, v\} \in E,$$

$$x_u + x_v \leq 1, \quad \forall \{u, v\} \in \bar{E},$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V,$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\}, \quad \forall \{u, v\} \in E.$$

Questo modello PLI si chiama modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$.

Funzione obiettivo e vincoli del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli del modello

$\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$:

- ▶ la funzione obiettivo lineare massimizza il peso totale $r(K)$ degli spigoli con entrambi gli estremi nella clique selezionata;
- ▶ i vincoli $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$ permettono $y_{uv} = 1$ solo se entrambi gli estremi sono selezionati ($2m$ vincoli lineari);
- ▶ i vincoli $x_u + x_v \leq 1$ garantiscono che i vertici selezionati formino una clique ($\binom{n}{2} - m$ vincoli lineari);
- ▶ infine, i vincoli $x_v \in \{0, 1\}$ e $y_{uv} \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Linearizzare il prodotto $x_u x_v$

- ▶ I vincoli $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$ modellano l'implicazione

$$y_{uv} = 1 \Rightarrow x_u = x_v = 1.$$

- ▶ L'implicazione inversa $x_u = x_v = 1 \Rightarrow y_{uv} = 1$, cioè

$$y_{uv} \geq x_u + x_v - 1,$$

non serve: poiché $r_{uv} > 0$, in ogni soluzione ottima y_{uv} prende il valore massimo consentito, $\min\{x_u, x_v\}$.

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ (1/4)

- Consideriamo il grafo G con 8 vertici dell'esempio del modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$, con i pesi degli spigoli dell'istanza dell'EWMCP del capitolo «Problemi di clique»; sono i coefficienti della funzione obiettivo qui sotto.
- Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ ha $8 + 24 = 32$ variabili binarie, 48 vincoli $y_{uv} \leq x_u$, $y_{uv} \leq x_v$ e 4 vincoli sui non-spigoli.

La funzione obiettivo è:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_{12} + 4 y_{13} + 5 y_{14} + 4 y_{16} + 3 y_{17} + 3 y_{18} \\ & + 2 y_{23} + 5 y_{24} + 6 y_{25} + 9 y_{27} + 4 y_{28} + 3 y_{34} \\ & + 6 y_{35} + y_{36} + 6 y_{38} + 4 y_{45} + 7 y_{46} + 2 y_{47} \\ & + 5 y_{56} + 7 y_{57} + 3 y_{58} + y_{67} + 2 y_{68} + 8 y_{78} \end{aligned}$$

Esempio: il modello ILP^{EW}_{MCP} (2/4)

Il modello continua con i vincoli $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$:

soggetto a

$$\begin{array}{llll} y_{12} \leq x_1 & y_{12} \leq x_2 & y_{13} \leq x_1 & y_{13} \leq x_3 \\ y_{14} \leq x_1 & y_{14} \leq x_4 & y_{16} \leq x_1 & y_{16} \leq x_6 \\ y_{17} \leq x_1 & y_{17} \leq x_7 & y_{18} \leq x_1 & y_{18} \leq x_8 \\ y_{23} \leq x_2 & y_{23} \leq x_3 & y_{24} \leq x_2 & y_{24} \leq x_4 \\ y_{25} \leq x_2 & y_{25} \leq x_5 & y_{27} \leq x_2 & y_{27} \leq x_7 \\ y_{28} \leq x_2 & y_{28} \leq x_8 & y_{34} \leq x_3 & y_{34} \leq x_4 \\ y_{35} \leq x_3 & y_{35} \leq x_5 & y_{36} \leq x_3 & y_{36} \leq x_6 \end{array}$$

Esempio: il modello ILP^{EW}_{MCP} (3/4)

Il modello termina con gli altri vincoli $y_{uv} \leq x_u$, $y_{uv} \leq x_v$, i 4 vincoli sui non-spigoli e i domini delle variabili:

$$y_{38} \leq x_3 \quad y_{38} \leq x_8 \quad y_{45} \leq x_4 \quad y_{45} \leq x_5$$

$$y_{46} \leq x_4 \quad y_{46} \leq x_6 \quad y_{47} \leq x_4 \quad y_{47} \leq x_7$$

$$y_{56} \leq x_5 \quad y_{56} \leq x_6 \quad y_{57} \leq x_5 \quad y_{57} \leq x_7$$

$$y_{58} \leq x_5 \quad y_{58} \leq x_8 \quad y_{67} \leq x_6 \quad y_{67} \leq x_7$$

$$y_{68} \leq x_6 \quad y_{68} \leq x_8 \quad y_{78} \leq x_7 \quad y_{78} \leq x_8$$

$$x_1 + x_5 \leq 1 \quad x_2 + x_6 \leq 1 \quad x_3 + x_7 \leq 1 \quad x_4 + x_8 \leq 1$$

$$x_1, x_2, \dots, x_8 \in \{0, 1\}$$

$$y_{12}, y_{13}, \dots, y_{78} \in \{0, 1\}$$

Esempio: il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ (4/4)

- Una soluzione ottima $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}})$ è:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_5 = \tilde{x}_7 = \tilde{x}_8 = 1, \quad \tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_4 = \tilde{x}_6 = 0,$$

$$\tilde{y}_{25} = \tilde{y}_{27} = \tilde{y}_{28} = \tilde{y}_{57} = \tilde{y}_{58} = \tilde{y}_{78} = 1, \quad \text{tutte le altre } \tilde{y}_{uv} = 0$$

- Il valore ottimo $z(\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}})$ è

$$6 + 9 + 4 + 7 + 3 + 8 = 37,$$

come indicato nel capitolo «Problemi di clique».

- La soluzione ottima associata è la clique $\tilde{K} = \{2, 5, 7, 8\}$, ed è l'unica soluzione ottima.

Riepilogo: Modelli PLI per le varianti pesate

Pesi sui vertici:

- ▶ Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{VW}}$ cambia solo la funzione obiettivo:
$$\max \sum_{v \in V} w_v x_v$$
- ▶ Sull'istanza del capitolo «Problemi di clique»:
 $\tilde{K} = \{2, 3, 5, 8\}$, valore 32

Pesi sugli spigoli:

- ▶ Il modello $\text{ILP}_{\text{MCP}}^{\text{EW}}$ aggiunge una variabile y_{uv} per spigolo, con
 $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$
- ▶ Il vincolo inverso $y_{uv} \geq x_u + x_v - 1$ non serve, perché $r_{uv} > 0$
- ▶ Sull'istanza del capitolo «Problemi di clique»:
 $\tilde{K} = \{2, 5, 7, 8\}$, valore 37

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Sette errori frequenti nello scrivere e nell'usare i modelli di clique
- ▶ Riguardano il grafo su cui si scrivono i vincoli, la forza dei bound LP e la linearizzazione del modello pesato sugli spigoli
- ▶ Controllarli è un modo rapido per evitare modelli sbagliati

Osservazione 1: errori tipici (1/3)

- ▶ *Scrivere i vincoli sugli spigoli di G . La formulazione sugli spigoli del MCP ha un vincolo per ogni non-spigolo di G ; sugli spigoli di G gli stessi vincoli descrivono gli insiemi stabili di G .*
- ▶ *Fidarsi del bound LP della formulazione sugli spigoli. Il punto $x_v = \frac{1}{2}$ è sempre ammissibile, quindi $z(\text{LP}_{\text{MCP}}) \geq n/2$ anche quando $\omega(G) = 2$.*
- ▶ *Dimenticare i bound $x_v \leq 1$ nella formulazione sugli spigoli. Un vertice adiacente a tutti gli altri non compare in nessun vincolo, e LP-0_{MCP} diventa illimitato. Nella formulazione a clique i bound sono implicati.*

Osservazione: errori tipici (2/3)

- ▶ *Credere che le disuguaglianze di clique chiudano ogni gap. Su C_5 coincidono con i vincoli sui non-spigoli, e serve la disuguaglianza di ciclo dispari.*
- ▶ *Usare clique non massimali di $\overline{G}$. Le loro disuguaglianze sono valide ma dominate: le clique massimali danno i vincoli più forti di questa famiglia.*

Osservazione: errori tipici (3/3)

- ▶ **Confondere i grafi del MCP e del MSSP.** Il modello ILP_{MSSP} ha un vincolo per ogni spigolo di G , il modello ILP_{MCP} uno per ogni spigolo di $\overline{G}$.
- ▶ **Scrivere $y_{uv} = x_u x_v$ nel modello pesato sugli spigoli.** Il prodotto non è lineare: i vincoli $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$ lo sostituiscono, e i pesi positivi rendono $y_{uv} = 1$ ogni volta che entrambi gli estremi sono selezionati.

Riepilogo: Errori tipici

- ▶ MCP: vincoli sugli spigoli di $\overline{G}$; MSSP: vincoli sugli spigoli di G
- ▶ Il bound LP della formulazione sugli spigoli è debole, e senza $x_v \leq 1$ può essere illimitato
- ▶ Le disuguaglianze di clique non chiudono ogni gap, e solo le clique massimali danno le più forti
- ▶ Il prodotto $x_u x_v$ si sostituisce con $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$

Riepilogo (1/3)

- ▶ La formulazione sugli spigoli ILP_{MCP} ha una variabile binaria per vertice e un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per spigolo di $\overline{G}$: è la formulazione sugli spigoli del MSSP su $\overline{G}$.
- ▶ Il suo rilassamento lineare è debole: $x_v = \frac{1}{2}$ è ammissibile e $z(LP_{MCP}) \geq n/2$.
- ▶ Le disuguaglianze di clique $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$, per le clique massimali Q di $\overline{G}$, danno una formulazione più forte con $\omega(G) \leq z(LP_{MCP}^{CL}) \leq z(LP_{MCP})$.

Riepilogo (2/3)

- ▶ Il duale di LP_{MCP}^{CL} è il rilassamento lineare di una formulazione di colorazione, quindi $\omega(G) \leq z(LP_{MCP}^{CL}) \leq \chi(G)$.
- ▶ Il modello ILP_{MSSP} ha un vincolo $x_u + x_v \leq 1$ per spigolo di G ; con le clique massimali di G diventa la formulazione a clique. Sul ciclo con una corda il valore ottimo è $\alpha(G) = 3$.
- ▶ Il modello pesato sui vertici cambia solo la funzione obiettivo; il modello pesato sugli spigoli aggiunge una variabile y_{uv} per spigolo, con $y_{uv} \leq x_u$ e $y_{uv} \leq x_v$. Sulle istanze del capitolo «Problemi di clique» i loro valori ottimi sono 32 e 37.

Riepilogo (3/3)

Cruscotto (massimizzazione). Bound su $\omega(G)$ calcolati in questo capitolo:

istanza	$z(\text{LP}_{\text{MCP}})$	$z(\text{LP}_{\text{MCP}}^{\text{CL}})$	$\omega(G)$
ciclo con una corda	$\frac{7}{2}$	3	3
C_5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	2 (disuguaglianza di ciclo dispari)