

Formulazioni dei problemi di packing

Indice

Panoramica della famiglia

Un modello PLI per il problema del bin packing

Un primo rilassamento lineare

Un secondo rilassamento lineare

Alcune proprietà teoriche importanti

Un modello PLI per il problema del cutting stock

Errori tipici

In sintesi

Obiettivi

Al termine di questo capitolo saremo in grado di:

- ▶ scrivere il modello PLI del problema del bin packing e spiegare il legame fra le variabili di assegnamento e le variabili di attivazione;
- ▶ scrivere i due rilassamenti lineari e i loro duali, e dimostrare che il loro valore ottimo è $\sum_j w_j / c$;
- ▶ arrotondare per eccesso il bound del rilassamento per ottenere un lower bound sul numero di contenitori;
- ▶ dimostrare che il bound del rilassamento è almeno la metà del valore ottimo, e che il fattore è tight;
- ▶ scrivere il modello PLI del problema del cutting stock, con variabili intere per le copie degli oggetti.

Prerequisiti

- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare*, il capitolo «[Teoria della dualità](#)»: il duale di un problema LP, dualità debole e forte.
- ▶ Dal modulo *Programmazione lineare intera*, i capitoli «[Programmazione lineare intera](#)» e «[Bound primali e duali](#)»: problemi PLI, rilassamenti lineari e bound.
- ▶ Da questo modulo, il capitolo «[Problemi di packing](#)»: il problema e le sue ipotesi.

Panoramica della famiglia

Introduzione: Panoramica della famiglia

- ▶ In questo capitolo scriviamo i modelli PLI dei problemi di packing: il problema del bin packing (BPP) e il problema del cutting stock (CSP)
- ▶ Vediamo prima che cosa hanno in comune i modelli della famiglia: le stesse variabili, gli stessi vincoli, la stessa funzione obiettivo
- ▶ I modelli sono il punto di partenza dei rilassamenti lineari, e i rilassamenti danno lower bound sul numero di contenitori

Contenitori, variabili di assegnamento e variabili di attivazione

- ▶ I modelli PLI dei problemi di packing usano un upper bound m sul numero di contenitori e l'insieme $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, m\}$ dei contenitori che si possono usare.
- ▶ Le **variabili di assegnamento** x_{jb} mettono gli oggetti $j \in \mathcal{I}$ nei contenitori $b \in \mathcal{B}$, e le **variabili di attivazione** binarie y_b dicono se il contenitore b è usato.
- ▶ Ogni contenitore dà un vincolo di capacità, che collega anche i due tipi di variabili, e la funzione obiettivo minimizza il numero $\sum_{b \in \mathcal{B}} y_b$ di contenitori usati.

I modelli di packing sono modelli di assegnamento

I modelli di packing sono **modelli di assegnamento**: ogni oggetto, o ogni copia di un oggetto, è assegnato a un contenitore usato, e gli oggetti assegnati a un contenitore ne rispettano la capacità.

I membri della famiglia cambiano il dominio delle variabili di assegnamento.

I membri della famiglia

- La tabella elenca i membri della famiglia, con il nome del loro modello PLI e la sezione che lo scrive.

Problema	Modello	Variabili di assegnamento	Sezione
BPP	ILP_{BPP}	binarie x_{jb}	Un modello PLI per il problema del bin packing
CSP	ILP_{CSP}	intere x_{jb} , le copie dell'oggetto j nel contenitore b	Un modello PLI per il problema del cutting stock

La struttura comune:

- ▶ un upper bound m sul numero di contenitori, e l'insieme $\mathcal{B}$ dei contenitori
- ▶ variabili di assegnamento x_{jb} e variabili di attivazione binarie y_b
- ▶ un vincolo di capacità per contenitore, e il numero di contenitori usati come funzione obiettivo

I membri:

- ▶ BPP: variabili di assegnamento binarie
- ▶ CSP: variabili di assegnamento intere, che contano le copie

Un modello PLI per il problema del bin packing

Introduzione: Un modello PLI per il problema del bin packing

- ▶ Il problema di questa sezione è il problema del bin packing (BPP), definito nel capitolo «[Problemi di packing](#)»
- ▶ Introduciamo le variabili, scriviamo il modello ILP_{BPP} e ne descriviamo i vincoli
- ▶ Spieghiamo come i vincoli di capacità collegano i due tipi di variabili, e scriviamo il modello di una piccola istanza

Le variabili di assegnamento

- Dato un upper bound $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sul numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ottima del BPP, introduciamo le seguenti mn **variabili binarie**:

$$x_{jb} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nel contenitore } b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall j \in \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{=\mathcal{I}}, \quad \forall b \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{B}},$$

Le variabili di attivazione

- Introduciamo anche le seguenti m **variabili binarie**:

$$y_b = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } b \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall b \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{B}}.$$

- Il numero n di oggetti è un upper bound valido sul numero minimo di contenitori necessari per inserire tutti gli oggetti poiché, nel caso peggiore, ogni oggetto è inserito in un contenitore diverso.
- Anche il numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ammissibile del BPP è un upper bound valido.

Il modello ILP_{BPP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del bin packing (BPP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1, & \forall j \in \mathcal{I}, \\ & - \sum_{j \in \mathcal{I}} w_j x_{jb} + c y_b \geq 0, & \forall b \in \mathcal{B}, \\ & x_{jb} \in \{0, 1\}, & \forall j \in \mathcal{I}, \forall b \in \mathcal{B}, \\ & y_b \in \{0, 1\}, & \forall b \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{BPP} .

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il numero totale di contenitori usati.
- ▶ I vincoli $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$ garantiscono che ogni oggetto sia inserito in esattamente un contenitore, così che tutti gli oggetti siano inseriti (n vincoli lineari).
- ▶ I vincoli di capacità collegano le variabili di assegnamento alle variabili di attivazione e impongono i limiti di capacità: se il contenitore b è usato, il peso dei suoi oggetti è al più c ; se non è usato, non contiene oggetti (m vincoli lineari).
- ▶ Infine, i vincoli $x_{jb} \in \{0, 1\}$ e $y_b \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

I vincoli di capacità fanno due cose insieme:
limitano il peso in ogni contenitore e collegano x_{jb} a y_b .

Vediamo nel dettaglio il legame fra le variabili.

Spiegazione del legame fra le variabili (1/2)

- Se almeno un oggetto è inserito nel contenitore b , allora il contenitore è usato. L'implicazione logica è

$$(x_{1b} \text{ OR } x_{2b} \text{ OR } \dots \text{ OR } x_{nb}) \implies y_b.$$

Poiché $w_j > 0$, inserire un oggetto nel contenitore b dà $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} > 0$, e il vincolo $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} \leq c y_b$ impone $y_b = 1$.

- Se il contenitore b non è usato, allora è vuoto. È la contronominale dell'implicazione precedente. Per $y_b = 0$ il vincolo diventa $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} \leq 0$, e poiché $w_j > 0$ otteniamo $x_{jb} = 0$ per ogni oggetto j .

Spiegazione del legame fra le variabili (2/2)

- ▶ Se il contenitore b è usato, allora contiene almeno un oggetto, ma solo in una soluzione ottima.
- ▶ I vincoli non lo impongono.
- ▶ Tuttavia, se $x_{jb} = 0$ per ogni j e $y_b = 1$, porre $y_b = 0$ mantiene soddisfatti tutti i vincoli e diminuisce di uno il valore obiettivo.
- ▶ Quindi, in ogni soluzione ottima, i contenitori vuoti non sono contati come usati.

Scriviamo ora il modello ILP_{BPP} di una piccola istanza, con tre oggetti, e guardiamo le sue soluzioni ottime.

Esempio (1/4): il modello ILP_{BPP}

- Consideriamo un contenitore di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$ di 3 oggetti ($n = 3$), con i seguenti pesi degli oggetti:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
w_j	7	6	3

- Nel resto del capitolo chiamiamo questa istanza del BPP **istanza dell'esempio**.
- Scriviamo il modello ILP_{BPP} con $m = 3$.

Esempio (2/4): il modello ILP_{BPP}

Il modello ILP_{BPP} con $m = 3$ per questa istanza del BPP è:

$$\begin{array}{llllll} \min & y_1 & + y_2 & + y_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & & = 1 \\ & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & & = 1 \\ & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & & = 1 \\ & -7x_{11} & - 6x_{21} & - 3x_{31} & + 10y_1 & \geq 0 \\ & -7x_{12} & - 6x_{22} & - 3x_{32} & + 10y_2 & \geq 0 \\ & -7x_{13} & - 6x_{23} & - 3x_{33} & + 10y_3 & \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} & \in & \{0, 1\} \\ & y_1, y_2, y_3 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Esempio (3/4): il modello ILP_{BPP}

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(ILP_{BPP})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{31} = 1, \quad \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = 0, \quad \tilde{x}_{22} = 1,$$

$$\tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{32} = \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0$$

Un'altra soluzione ottima, ottenuta permutando gli indici dei contenitori 1 e 2, è:

$$\tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{32} = 1, \quad \tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{22} = 0, \quad \tilde{x}_{21} = 1,$$

$$\tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{33} = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1, \quad \tilde{y}_3 = 0.$$

Esempio (4/4): il modello ILP_{BPP}

Il valore ottimo è:

$$z(ILP_{BPP}) = 2$$

La soluzione ottima associata del BPP è data dagli schemi di riempimento

$$\tilde{P}_1 = \{1, 3\} \quad \text{e} \quad \tilde{P}_2 = \{2\}$$

La soluzione ottima non è unica: anche gli schemi di riempimento $\{1\}$ e $\{2, 3\}$ usano due contenitori.

Riepilogo (1/2)

Il modello ILP_{BPP} :

- ▶ mn variabili binarie di assegnamento x_{jb} e m variabili binarie di attivazione y_b
- ▶ ogni oggetto in esattamente un contenitore, un vincolo di capacità per contenitore
- ▶ minimizzare il numero di contenitori usati

Riepilogo (2/2)

Il legame fra le variabili:

- ▶ un contenitore non vuoto è usato, un contenitore non usato è vuoto
- ▶ un contenitore vuoto non è contato come usato, ma solo in una soluzione ottima

L'istanza dell'esempio: $z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = 2$, con gli schemi $\{1, 3\}$ e $\{2\}$

Un primo rilassamento lineare

Introduzione: Un primo rilassamento lineare

- ▶ Rilassiamo i domini binari del modello ILP_{BPP} e otteniamo un modello PL, il modello $LP-0_{BPP}$
- ▶ Il suo valore ottimo è un lower bound sul numero di contenitori: lo calcoliamo sull'istanza dell'esempio e poi per ogni istanza
- ▶ Scriviamo il modello duale e dimostriamo che il valore ottimo è $\sum_j w_j/c$, con due dimostrazioni diverse

Il modello $LP-0_{BPP}$

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{BPP} , rilassiamo i vincoli $x_{jb} \in \{0, 1\}$ e $y_b \in \{0, 1\}$ con i seguenti:

$$x_{jb} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Questo modello PL si chiama modello $LP-0_{BPP}$.

Esempio (1/2): il modello LP-0_{BPP}

Il modello LP-0_{BPP} per l'istanza dell'esempio è:

$$\begin{array}{llllll} \min & y_1 & + y_2 & + y_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & & = 1 \\ & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & & = 1 \\ & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & & = 1 \\ & -7x_{11} & - 6x_{21} & - 3x_{31} & + 10y_1 & \geq 0 \\ & -7x_{12} & - 6x_{22} & - 3x_{32} & + 10y_2 & \geq 0 \\ & -7x_{13} & - 6x_{23} & - 3x_{33} & + 10y_3 & \geq 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} & & & & \geq 0 \\ & y_1, y_2, y_3 & & & & \geq 0 \end{array}$$

Esempio (2/2): il modello $LP-0_{BPP}$

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP-0_{BPP})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \tilde{x}_{33} = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \frac{8}{15}$$

Il valore ottimo $z(LP-0_{BPP})$ è $\frac{8}{5}$. Di conseguenza, abbiamo il lower bound:

$$\frac{8}{5} \leq z(ILP_{BPP})$$

e, poiché $z(ILP_{BPP})$ è intero, $z(ILP_{BPP}) \geq \lceil \frac{8}{5} \rceil = 2$.

Le variabili duali del modello $LP-0_{BPP}$

Con

- ▶ una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$ ($j \in \mathcal{I}$)
- ▶ una variabile duale non negativa π_b per ogni vincolo di capacità ($b \in \mathcal{B}$)

scriviamo il modello duale del modello $LP-0_{BPP}$.

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$

Il modello duale del modello LP-0_{BPP} è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{I}} \mu_j$$

$$\text{soggetto a } \mu_j - w_j \pi_b \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{I}, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$c \pi_b \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{I},$$

$$\pi_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Questo modello PL si chiama modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$.

Esempio (1/3): il modello $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$

Il modello duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$ per l'istanza dell'esempio è (obiettivo e primi vincoli):

$$\begin{array}{llllllll} \max & \mu_1 & + \mu_2 & + \mu_3 & & & & \\ \text{soggetto a} & \mu_1 & & & - 7\pi_1 & & & \leq 0 \\ & \mu_1 & & & & - 7\pi_2 & & \leq 0 \\ & \mu_1 & & & & & - 7\pi_3 & \leq 0 \\ & & \mu_2 & & - 6\pi_1 & & & \leq 0 \\ & & \mu_2 & & & - 6\pi_2 & & \leq 0 \\ & & \mu_2 & & & & - 6\pi_3 & \leq 0 \\ & & & \mu_3 & - 3\pi_1 & & & \leq 0 \\ & & & \mu_3 & & - 3\pi_2 & & \leq 0 \\ & & & \mu_3 & & & - 3\pi_3 & \leq 0 \end{array}$$

Esempio (2/3): il modello $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$

Il modello continua con i vincoli rimanenti e i domini:

$$\begin{array}{rccccccc} & & & & & & 10\pi_1 & \leq & 1 \\ & & & & & & & 10\pi_2 & \leq & 1 \\ & & & & & & & & 10\pi_3 & \leq & 1 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & & & & \geq & 0 \end{array}$$

Esempio (3/3): il modello $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi})$ di $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{7}{10}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{3}{5}, \quad \tilde{\mu}_3 = \frac{3}{10}, \quad \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{10}$$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP-0}_{\text{BPP}}))$ è $\frac{8}{5}$.

Sull'istanza dell'esempio il valore ottimo è $\frac{8}{5} = \frac{7+6+3}{10}$.

Diamo ora soluzioni ottime primale e duale per **ogni** istanza del BPP.

Soluzioni ottime di $LP-0_{BPP}$ e del suo duale

Proposizione 1

Una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{BPP}$ è:

$$\tilde{x}_{jb} = \frac{1}{m}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\tilde{y}_b = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c}, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP-0_{BPP})$ è:

$$\tilde{\mu}_j = \frac{w_j}{c}, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\tilde{\pi}_b = \frac{1}{c}, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Il valore ottimo di $LP-0_{BPP}$

Corollario 1

Il valore ottimo dei modelli primale $LP-0_{BPP}$ e duale $D(LP-0_{BPP})$ è:

$$z(LP-0_{BPP}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = z(D(LP-0_{BPP}))$$

Come procede la dimostrazione

- ▶ La dimostrazione procede in tre passi:
 1. mostriamo che la soluzione primale $\tilde{x}_{jb}, \tilde{y}_b$ della proposizione è una soluzione ammissibile del modello primale $LP-0_{BPP}$;
 2. mostriamo che la soluzione duale $\tilde{\mu}_j, \tilde{\pi}_b$ della proposizione è una soluzione ammissibile del modello duale $D(LP-0_{BPP})$;
 3. mostriamo che le due soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.
- ▶ Quindi, per la dualità debole della PL, le due soluzioni sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale.

Dimostrazione (1/4)

1. Per ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{x}_{jb} = \sum_{b \in \mathcal{B}} \frac{1}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

quindi i vincoli $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$ sono soddisfatti.

Per ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} + c \tilde{y}_b = -\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \frac{1}{m} + c \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} = 0$$

quindi i vincoli di capacità sono soddisfatti.

Dimostrazione (2/4)

1. Abbiamo $\tilde{x}_{jb} \geq 0$ e $\tilde{y}_b \geq 0$, per ogni $j \in \mathcal{J}$ e ogni $b \in \mathcal{B}$, quindi i vincoli di non negatività sono soddisfatti.

Quindi $\tilde{x}_{jb}$, $\tilde{y}_b$ forniscono una soluzione ammissibile del modello primale LP-0_{BPP}.

2. Per ogni $b \in \mathcal{B}$ e ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo:

$$\tilde{\mu}_j - w_j \tilde{\pi}_b = \frac{w_j}{c} - \frac{w_j}{c} = 0$$

quindi i vincoli $\mu_j - w_j \pi_b \leq 0$ sono soddisfatti.

Dimostrazione (3/4)

2. Per ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo:

$$c \tilde{\pi}_b = \frac{c}{c} = 1$$

quindi i vincoli $c \pi_b \leq 1$ sono soddisfatti.

Abbiamo $\tilde{\mu}_j \geq 0$ e $\tilde{\pi}_b \geq 0$, per ogni $b \in \mathcal{B}$ e ogni $j \in \mathcal{I}$,
quindi i domini delle variabili duali sono rispettati.

Quindi $\tilde{\mu}_j, \tilde{\pi}_b$ forniscono una soluzione ammissibile del modello
duale $D(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$.

Dimostrazione (4/4)

3. Per le funzioni obiettivo abbiamo:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{y}_b = \sum_{b \in \mathcal{B}} \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m \, c} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{\mu}_j$$

quindi i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono.

Quindi, per la dualità debole della PL, le due soluzioni sono una coppia di soluzioni ottime primale e duale. □

Una dimostrazione alternativa

- ▶ Riportiamo una dimostrazione alternativa, che non usa la formulazione duale ma ragiona direttamente sul valore minimo della funzione obiettivo imposto dai vincoli.
- ▶ L'idea: sommando i vincoli di capacità si ottiene un lower bound su $\sum_{b \in \mathcal{B}} y_b$ che vale per ogni soluzione ammissibile; poi troviamo una soluzione ammissibile che lo raggiunge.

Il valore ottimo di $LP-0_{BPP}$, senza il duale

Proposizione 2

Una soluzione ottima del modello primale $LP-0_{BPP}$ è:

$$\tilde{x}_{jb} = \frac{1}{m}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\tilde{y}_b = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c}, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

e il valore ottimo è

$$z(LP-0_{BPP}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c}.$$

Dimostrazione (1/3)

Sommando i vincoli di capacità su tutti i $b \in \mathcal{B}$ otteniamo

$$c \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \geq \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \underbrace{\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb}}_{=1} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j,$$

quindi

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \geq \frac{1}{c} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j.$$

Quindi ogni soluzione ammissibile di LP-0_{BPP} soddisfa questo lower bound.

Dimostrazione (2/3)

Consideriamo ora il punto della proposizione. Per ogni $j \in \mathcal{J}$, abbiamo

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{x}_{jb} = m \frac{1}{m} = 1,$$

quindi i vincoli $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$ valgono.

Inoltre, per ogni $b \in \mathcal{B}$, abbiamo

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j = c \tilde{y}_b,$$

quindi i vincoli di capacità valgono all'uguaglianza.

Dimostrazione (3/3)

Infine, i vincoli di non negatività sono soddisfatti per costruzione. Quindi il punto della proposizione è una soluzione ammissibile di $LP-0_{BPP}$.

Il valore obiettivo di questo punto è

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \tilde{y}_b = m \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} = \frac{1}{c} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j,$$

che coincide con il lower bound trovato sopra.

Quindi il punto è una soluzione ottima con valore obiettivo $\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j / c$. □

Il modello $LP-0_{BPP}$:

- ▶ i domini binari sono sostituiti da $x_{jb} \geq 0$ e $y_b \geq 0$
- ▶ sull'istanza dell'esempio: $z(LP-0_{BPP}) = \frac{8}{5}$, quindi $z(ILP_{BPP}) \geq \lceil \frac{8}{5} \rceil = 2$

Il valore ottimo:

- ▶ soluzione primale $\tilde{x}_{jb} = 1/m$, soluzione duale $\tilde{\mu}_j = w_j/c$ e $\tilde{\pi}_b = 1/c$
- ▶ $z(LP-0_{BPP}) = \sum_j w_j/c$, per la dualità debole o sommando i vincoli di capacità

Un secondo rilassamento lineare

Introduzione: Un secondo rilassamento lineare

- ▶ Rilassiamo i domini binari del modello ILP_{BPP} tenendo i limiti superiori $y_b \leq 1$: è il modello LP_{BPP}
- ▶ Lo scriviamo sull'istanza dell'esempio, ne scriviamo il duale, e mostriamo che il suo valore ottimo è ancora $\sum_j w_j/c$
- ▶ Poi misuriamo la qualità di questo bound: è almeno la metà del numero ottimo di contenitori, e il fattore un mezzo non si può migliorare

Il modello LP_{BPP}

Per ottenere un rilassamento lineare del modello ILP_{BPP} , rilassiamo i vincoli $x_{jb} \in \{0, 1\}$ e $y_b \in \{0, 1\}$ con i seguenti:

$$x_{jb} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$y_b \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$y_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Questo modello PL si chiama modello LP_{BPP} .

Esempio (1/3): il modello LP_{BPP}

Il modello LP_{BPP} per l'istanza dell'esempio è (obiettivo, vincoli di assegnamento e di capacità):

$$\begin{array}{llllll} \min & y_1 & + y_2 & + y_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & = & 1 \\ & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & = & 1 \\ & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & = & 1 \\ & -7x_{11} & - 6x_{21} & - 3x_{31} & + 10y_1 & \geq 0 \\ & -7x_{12} & - 6x_{22} & - 3x_{32} & + 10y_2 & \geq 0 \\ & -7x_{13} & - 6x_{23} & - 3x_{33} & + 10y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Esempio (2/3): il modello LP_{BPP}

Il modello continua con i limiti superiori $y_b \leq 1$ e i vincoli di non negatività:

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 1$$

$$y_3 \leq 1$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Esempio (3/3): il modello LP_{BPP}

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(LP_{BPP})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{22} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} = \tilde{x}_{33} = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \frac{8}{15}$$

Il valore ottimo $z(LP_{BPP})$ è $\frac{8}{5}$.

Di conseguenza, abbiamo lo stesso lower bound di prima.

Le variabili duali del modello LP_{BPP}

Con

- ▶ una variabile duale libera μ_j per ogni vincolo $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$ ($j \in \mathcal{I}$)
- ▶ una variabile duale non negativa π_b per ogni vincolo di capacità ($b \in \mathcal{B}$)
- ▶ una variabile duale non positiva λ_b per ogni vincolo $y_b \leq 1$ ($b \in \mathcal{B}$)

scriviamo il modello duale del modello LP_{BPP} .

Il modello duale $D(\text{LP}_{\text{BPP}})$

Il modello duale del modello LP_{BPP} è il seguente:

$$\max \sum_{j \in \mathcal{I}} \mu_j + \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b$$

$$\text{soggetto a } \mu_j - w_j \pi_b \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{I}, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$c \pi_b + \lambda_b \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{I},$$

$$\pi_b \geq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\lambda_b \leq 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Questo modello PL si chiama modello duale $D(\text{LP}_{\text{BPP}})$.

Esempio (1/3): il modello $D(LP_{BPP})$

Il modello $D(LP_{BPP})$ dell'istanza dell'esempio è (obiettivo e primi vincoli):

$$\begin{array}{llll} \max & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & & + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \text{soggetto a} & \mu_1 & - 7\pi_1 & \leq 0 \\ & \mu_1 & - 7\pi_2 & \leq 0 \\ & \mu_1 & - 7\pi_3 & \leq 0 \\ & \mu_2 & - 6\pi_1 & \leq 0 \\ & \mu_2 & - 6\pi_2 & \leq 0 \\ & \mu_2 & - 6\pi_3 & \leq 0 \\ & \mu_3 - 3\pi_1 & & \leq 0 \\ & \mu_3 & - 3\pi_2 & \leq 0 \\ & \mu_3 & - 3\pi_3 & \leq 0 \end{array}$$

Esempio (2/3): il modello $D(LP_{BPP})$

Il modello continua con i vincoli rimanenti e i domini:

$$\begin{array}{rccccccc} 10\pi_1 & & & + \lambda_1 & & & \leq 1 \\ & 10\pi_2 & & & + \lambda_2 & & \leq 1 \\ & & 10\pi_3 & & & + \lambda_3 & \leq 1 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 & & & & & & \geq 0 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & & & \geq 0 \\ & & & & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \leq 0 \end{array}$$

Esempio (3/3): il modello $D(\text{LP}_{\text{BPP}})$

Il valore ottimo $z(D(\text{LP}_{\text{BPP}}))$ è $\frac{8}{5}$.

Una soluzione ottima $(\tilde{\mu}, \tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ di $D(\text{LP}_{\text{BPP}})$ è:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{7}{10}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{3}{5}, \quad \tilde{\mu}_3 = \frac{3}{10},$$

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = \frac{1}{10}, \quad \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = 0$$

Vincoli validi implicati dal modello

► I vincoli:

$$x_{jb} \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B},$$

sono anch'essi validi poiché, per ogni $j \in \mathcal{J}$ e ogni $b \in \mathcal{B}$,
abbiamo:

$$x_{jb} \in \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad x_{jb} \leq 1$$

ma sono implicati dai vincoli $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$.

Soluzioni ottime di LP_{BPP} e del suo duale

Proposizione 3

Una soluzione ottima del modello primale LP_{BPP} è:

$$\tilde{x}_{jb} = \frac{1}{m}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\tilde{y}_b = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c}, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

e una soluzione ottima del modello duale $D(LP_{BPP})$ è:

$$\tilde{\mu}_j = \frac{w_j}{c}, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\tilde{\pi}_b = \frac{1}{c}, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\tilde{\lambda}_b = 0, \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

Il valore ottimo di LP_{BPP}

Corollario 2

Il valore ottimo dei modelli primale LP_{BPP} e duale $D(LP_{BPP})$ è:

$$z(LP_{BPP}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = z(D(LP_{BPP}))$$

Dimostrazione

La dimostrazione è simile alla precedente. In più, occorre osservare che

$$\tilde{y}_b = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{m c} \leq 1, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

poiché

$$\frac{\sum_j w_j}{c} \leq z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) \leq m,$$

dove l'ultima disuguaglianza vale perché m è un upper bound sul numero di contenitori in una qualunque soluzione ottima del BPP.

Di conseguenza, anche i vincoli $y_b \leq 1$ sono soddisfatti. □

Alcune proprietà teoriche importanti

- ▶ Le due proposizioni seguenti mostrano che il rapporto fra $z(LP_{BPP})$ e $z(ILP_{BPP})$ è almeno un mezzo per ogni istanza del BPP.
- ▶ **Per ipotesi** $z(ILP_{BPP}) > 1$, poiché gli oggetti non entrano tutti in un solo contenitore.
- ▶ Inoltre, esistono istanze per cui il valore un mezzo si raggiunge asintoticamente quando la capacità $c \rightarrow +\infty$.

Il bound del rilassamento è almeno un mezzo

Proposizione 4

Per ogni istanza del BPP abbiamo:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}$$

Dimostrazione (1/4)

- ▶ Consideriamo una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ di valore $z = z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ (numero di contenitori usati).
- ▶ Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che i contenitori $1, 2, \dots, z$ siano quelli non vuoti.
- ▶ In una soluzione ottima, due contenitori non possono avere entrambi peso totale degli oggetti al più $c/2$, altrimenti il loro contenuto si potrebbe unire in un solo contenitore senza superare la capacità c (contro l'ottimalità).

Dimostrazione (2/4)

Se tutti i contenitori non vuoti hanno peso totale degli oggetti maggiore di $c/2$, allora

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j = \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > z \frac{c}{2}$$

$$\implies \frac{\frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c}}{z} > \frac{1}{2} \implies \frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione (3/4)

Altrimenti, supponiamo che esista un contenitore con peso totale degli oggetti al più $c/2$. Rinumerando i contenitori se necessario, sia il contenitore z , così che

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jz} \leq \frac{c}{2}.$$

Poiché $z > 1$, esiste un altro contenitore, diciamo il contenitore 1; per l'ottimalità, deve valere

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{j1} + \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jz} > c,$$

e, per l'ottimalità, ogni contenitore in $\{2, 3, \dots, z-1\}$ ha peso totale degli oggetti $> c/2$.

Dimostrazione (4/4)

Quindi,

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j &= \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} = \underbrace{\sum_{b=2}^{z-1} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb}}_{\geq \frac{c}{2}(z-2)} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{j1} + \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jz}}_{> c} \\ &> \frac{c}{2}(z-2) + c = z \frac{c}{2} \\ \Rightarrow \quad \frac{\frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c}}{z} &> \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Il fattore un mezzo non si può migliorare:
costruiamo ora istanze il cui rapporto tende a $\frac{1}{2}$.

Il fattore un mezzo è tight per $c \rightarrow +\infty$

Proposizione 5

Esistono istanze del BPP tali che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione (1/2)

Dato $\vartheta \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, consideriamo l'istanza del BPP con capacità dei contenitori $c = 2\vartheta$ e n oggetti con i seguenti pesi:

$$w_j = \vartheta + 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Nessun contenitore può contenere più di un oggetto, quindi ogni oggetto va inserito da solo nel proprio contenitore. Quindi il valore ottimo del BPP è

$$z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = n.$$

Per il rilassamento lineare abbiamo:

$$z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{n(\vartheta + 1)}{2\vartheta}.$$

Dimostrazione (2/2)

Ne segue che:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(\vartheta+1)}{2^\vartheta}}{n} = \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^\vartheta}}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$\frac{z(\text{LP}_{\text{BPP}})}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad c \rightarrow +\infty.$$



Il bound del rilassamento arrotondato

- ▶ Le due proposizioni seguenti mostrano che il rapporto fra $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ è almeno un mezzo per ogni istanza del BPP.
- ▶ Inoltre, esistono istanze per cui il valore un mezzo si raggiunge asintoticamente quando il numero di oggetti $n \rightarrow +\infty$.

Il bound arrotondato è almeno un mezzo

Proposizione 6

Per ogni istanza del BPP abbiamo:

$$\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}$$

Dimostrazione (1/4)

- ▶ Consideriamo una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ di valore $z = z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ (numero di contenitori usati).
- ▶ Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che i contenitori $1, 2, \dots, z$ siano quelli non vuoti.
- ▶ In una soluzione ottima, due contenitori non possono avere entrambi peso totale degli oggetti al più $c/2$, altrimenti il loro contenuto si potrebbe unire in un solo contenitore senza superare la capacità c (contro l'ottimalità).

Dimostrazione (2/4)

Se tutti i contenitori non vuoti hanno peso totale degli oggetti maggiore di $c/2$, allora

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j = \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > \frac{z c}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} > \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{z}{2} \right\rceil \geq \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left\lceil \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} \right\rceil}{z} \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione (3/4)

Altrimenti, supponiamo che esista un contenitore con peso totale degli oggetti al più $c/2$. Rinumerando i contenitori se necessario, sia il contenitore z . Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j &= \sum_{b=1}^z \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > \sum_{b=1}^{z-1} \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j \tilde{x}_{jb} > (z-1) \frac{c}{2} \\ \implies z &< 2 \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} + 1.\end{aligned}$$

Dimostrazione (4/4)

Poiché z è intero, questo implica:

$$z \leq \left\lceil 2 \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} \right\rceil \leq 2 \left\lceil \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} \right\rceil.$$

Quindi:

$$\frac{\left\lceil \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{w_j}{c} \right\rceil}{z} \geq \frac{1}{2} \quad \implies \quad \frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \geq \frac{1}{2}.$$



Il fattore un mezzo è tight per $n \rightarrow +\infty$

Proposizione 7

Esistono istanze del BPP tali che:

$$\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione (1/2)

Dato $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ (con n pari), consideriamo l'istanza del BPP con capacità dei contenitori $c = n$ e n oggetti con i seguenti pesi:

$$w_j = \frac{c}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Nessun contenitore può contenere più di un oggetto, poiché $w_j > c/2$ per ogni j . Quindi ogni oggetto va inserito da solo nel proprio contenitore, e il valore ottimo del BPP è

$$z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) = n.$$

Dimostrazione (2/2)

Per il rilassamento lineare abbiamo:

$$z(\text{LP}_{\text{BPP}}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}{c} = \frac{n \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{n} = \frac{n}{2} + 1,$$

quindi $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil = \frac{n}{2} + 1$ (poiché n è pari). Ne segue che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{2} + 1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, concludiamo che:

$$\frac{\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil}{z(\text{ILP}_{\text{BPP}})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty.$$



Riepilogo (1/2)

Il modello LP_{BPP} :

- ▶ i domini binari sono sostituiti da $x_{jb} \geq 0$, $y_b \leq 1$ e $y_b \geq 0$
- ▶ i vincoli $x_{jb} \leq 1$ sono validi ma implicati da $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = 1$
- ▶ sull'istanza dell'esempio: $z(LP_{BPP}) = \frac{8}{5}$, lo stesso lower bound di prima

Il valore ottimo:

- ▶ le stesse soluzioni di $LP-0_{BPP}$, con $\tilde{\lambda}_b = 0$
- ▶ $z(LP_{BPP}) = \sum_j w_j / c$

Riepilogo (2/2)

La qualità del bound:

- ▶ $z(\text{LP}_{\text{BPP}})/z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) \geq \frac{1}{2}$ per ogni istanza
- ▶ il valore $\frac{1}{2}$ si raggiunge asintoticamente per $c \rightarrow +\infty$

Il bound arrotondato:

- ▶ $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil / z(\text{ILP}_{\text{BPP}}) \geq \frac{1}{2}$ per ogni istanza
- ▶ il valore $\frac{1}{2}$ si raggiunge asintoticamente per $n \rightarrow +\infty$

Un modello PLI per il problema del cutting stock

Introduzione: Un modello PLI per il problema del cutting stock

- ▶ Il problema di questa sezione è il problema del cutting stock (CSP), definito nel capitolo «[Problemi di packing](#)», con la sua istanza di riferimento
- ▶ Ogni oggetto j va inserito in d_j copie identiche
- ▶ Scriviamo il modello ILP_{CSP} : la stessa struttura del modello ILP_{BPP} , con variabili intere che contano le copie

Le variabili intere

- Dato un upper bound $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sul numero di contenitori usati in una qualunque soluzione ottima del CSP, introduciamo le seguenti mn **variabili intere**:

x_{jb} = numero di copie dell'oggetto j inserite nel contenitore b

$$\forall j \in \mathcal{J}, \quad \forall b \in \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{=\mathcal{B}},$$

Le variabili di attivazione

- Introduciamo anche le seguenti m **variabili binarie**:

$$y_b = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } b \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall b \in \mathcal{B}.$$

- Il numero totale $\sum_{j \in \mathcal{J}} d_j$ di copie è un valore valido di m , e lo è anche il numero di contenitori di una qualunque soluzione ammissibile del CSP.

Il modello ILP_{CSP}

Con queste variabili, un modello di programmazione lineare intera (PLI) per il problema del cutting stock (CSP) è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b \\ \text{soggetto a} \quad & \sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = d_j, & \forall j \in \mathcal{J}, \\ & - \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j x_{jb} + c y_b \geq 0, & \forall b \in \mathcal{B}, \\ & x_{jb} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, & \forall j \in \mathcal{J}, \forall b \in \mathcal{B}, \\ & y_b \in \{0, 1\}, & \forall b \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Questo modello PLI si chiama modello ILP_{CSP} .

Descrizione della funzione obiettivo e dei vincoli

- ▶ La funzione obiettivo lineare minimizza il numero totale di contenitori usati.
- ▶ I vincoli $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = d_j$ garantiscono che siano inserite esattamente d_j copie di ogni oggetto j (n vincoli lineari).
- ▶ I vincoli di capacità collegano le variabili intere alle variabili di attivazione e impongono i limiti di capacità, come i vincoli di capacità del modello ILP_{BPP} (m vincoli lineari).
- ▶ Infine, i vincoli $x_{jb} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $y_b \in \{0, 1\}$ definiscono le variabili del modello PLI.

Il modello ILP_{CSP} e il modello ILP_{BPP}

- ▶ Con $d_j = 1$ per ogni oggetto, i vincoli $\sum_{b \in \mathcal{B}} x_{jb} = d_j$ danno $x_{jb} \in \{0, 1\}$, e il modello ILP_{CSP} è il modello ILP_{BPP} .
- ▶ Le copie di un oggetto sono identiche: una sola variabile intera le conta in ogni contenitore.
- ▶ Il modello ILP_{BPP} sull'insieme esteso degli oggetti userebbe $m \sum_j d_j$ variabili binarie invece di mn variabili intere.

Esempio (1/3): il modello ILP_{CSP}

- Consideriamo contenitori di capacità $c = 10$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$), con i seguenti pesi e copie richieste:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
w_j	4	5	3	6
d_j	2	1	3	1

- Questa è l'istanza del CSP del capitolo «[Problemi di packing](#)», dove si trova a occhio una soluzione con 3 contenitori: quindi $m = 3$ è un upper bound valido.

Esempio (2/3): il modello ILP_{CSP}

Il modello ILP_{CSP} con $m = 3$ per questa istanza del CSP è:

$$\begin{array}{llll} \min & y_1 + y_2 + y_3 & & \\ \text{soggetto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 2 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 3 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} & = & 1 \\ & -4x_{11} - 5x_{21} - 3x_{31} - 6x_{41} + 10y_1 & \geq & 0 \\ & -4x_{12} - 5x_{22} - 3x_{32} - 6x_{42} + 10y_2 & \geq & 0 \\ & -4x_{13} - 5x_{23} - 3x_{33} - 6x_{43} + 10y_3 & \geq & 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{43} & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ & y_1, y_2, y_3 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Esempio (3/3): il modello ILP_{CSP}

Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(ILP_{CSP})$ è:

$$\tilde{x}_{11} = \tilde{x}_{41} = 1, \quad \tilde{x}_{32} = 3, \quad \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{23} = 1, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = 1,$$

con tutte le altre variabili pari a 0.

- ▶ Il valore ottimo è $z(ILP_{CSP}) = 3$, come trovato nel capitolo «Problemi di packing».
- ▶ I contenitori contengono una copia degli oggetti 1 e 4 (peso 10), tre copie dell'oggetto 3 (peso 9), e una copia degli oggetti 1 e 2 (peso 9).
- ▶ La soluzione ottima non è unica: anche la soluzione del capitolo «Problemi di packing», con i contenitori $\{4, 1\}$, $\{1, 3, 3\}$ e $\{2, 3\}$, usa 3 contenitori.

Il modello ILP_{CSP} :

- ▶ mn variabili intere x_{jb} , le copie dell'oggetto j nel contenitore b , e m variabili binarie y_b
- ▶ le domande d_j come termini noti dei vincoli $\sum_b x_{jb} = d_j$, gli stessi vincoli di capacità del modello ILP_{BPP}
- ▶ con $d_j = 1$ per ogni oggetto è il modello ILP_{BPP}

L'istanza di riferimento del CSP:

- ▶ $z(\text{ILP}_{\text{CSP}}) = 3$, con più di una soluzione ottima

Errori tipici

Introduzione: Errori tipici

- ▶ Raccogliamo gli errori più frequenti sui modelli di packing
- ▶ Riguardano la scelta di m , l'uso del bound del rilassamento, il significato delle variabili e la simmetria delle soluzioni
- ▶ Riconoscerli aiuta a scrivere modelli corretti e bound corretti

Osservazione 1: Errori tipici

- ▶ **Scegliere m troppo piccolo.** Il numero m di contenitori deve essere un upper bound sul numero di contenitori di una soluzione ottima: con $m < z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ il modello non ha soluzioni ammissibili. Il valore $m = n$ è sempre valido.
- ▶ **Dimenticare di arrotondare per eccesso.** Il valore ottimo del modello ILP_{BPP} è intero, quindi il lower bound dei rilassamenti è $\lceil \sum_j w_j / c \rceil$; nell'istanza dell'esempio è $\lceil \frac{8}{5} \rceil = 2$, non $\frac{8}{5}$.

Osservazione: Errori tipici

- ▶ *Credere che il modello conti solo i contenitori non vuoti.* I vincoli permettono $y_b = 1$ per un contenitore vuoto: è la funzione obiettivo che spegne questi contenitori, in ogni soluzione ottima.
- ▶ *Ignorare la simmetria.* Permutando gli indici dei contenitori si ottiene un'altra soluzione ottima con lo stesso riempimento: il modello ILP_{BPP} ha molte soluzioni ottime equivalenti.

Osservazione: Errori tipici

- ▶ *Aspettarsi un rilassamento migliore da $y_b \leq 1$. Il secondo rilassamento ha lo stesso valore ottimo del primo: i limiti superiori $y_b \leq 1$ non tagliano la soluzione ottima del primo rilassamento.*
- ▶ *Dichiarare binarie le variabili del modello di cutting stock. Nel modello ILP_{CSP} x_{jb} conta le copie dell'oggetto j nel contenitore b : con $x_{jb} \in \{0, 1\}$ le tre copie dell'oggetto 3 dell'esempio non potrebbero stare nello stesso contenitore.*

Il modello:

- ▶ m deve essere un upper bound sul numero ottimo di contenitori: $m = n$ è sempre valido
- ▶ i contenitori vuoti li spegne la funzione obiettivo, non i vincoli
- ▶ gli indici dei contenitori si possono permutare: molte soluzioni ottime equivalenti

I bound e il CSP:

- ▶ il bound del rilassamento si arrotonda per eccesso; $y_b \leq 1$ non lo migliora
- ▶ nel modello ILP_{CSP} le variabili x_{jb} sono intere, non binarie

In sintesi

Introduzione: In sintesi

- ▶ Raccogliamo le idee chiave del capitolo
- ▶ I due modelli PLI, i due rilassamenti lineari e la qualità del loro bound
- ▶ Un quadro riassuntivo con i bound calcolati sull'istanza dell'esempio

Riepilogo (1/3)

- ▶ Il modello ILP_{BPP} ha $m \cdot n$ variabili di assegnamento x_{jb} e m variabili di attivazione y_b ; i vincoli di capacità le collegano.
- ▶ Entrambi i rilassamenti lineari hanno valore ottimo $z(LP_{BPP}) = \sum_j w_j/c$, con soluzione duale $\tilde{\mu}_j = w_j/c$ e $\tilde{\pi}_b = 1/c$.
- ▶ Poiché il valore ottimo è intero, $\lceil z(LP_{BPP}) \rceil$ è un lower bound sul numero di contenitori.

Riepilogo (2/3)

- ▶ Il rapporto fra $z(\text{LP}_{\text{BPP}})$ e $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ è almeno $\frac{1}{2}$, e il valore $\frac{1}{2}$ si raggiunge asintoticamente; lo stesso vale per $\lceil z(\text{LP}_{\text{BPP}}) \rceil$.
- ▶ Il modello ILP_{CSP} ha la struttura del modello ILP_{BPP} , con mn variabili intere x_{jb} che contano le copie e le domande d_j come termini noti; sull'istanza del CSP del capitolo «Problemi di packing» il suo valore ottimo è 3.

Riepilogo (3/3)

Quadro riassuntivo dell'istanza dell'esempio. Bound su $z(\text{ILP}_{\text{BPP}})$ calcolati in questo capitolo:

Bound	Valore	Da
Primo rilassamento	$\frac{8}{5}$	$z(\text{LP-0}_{\text{BPP}})$
Secondo rilassamento	$\frac{8}{5}$	$z(\text{LP}_{\text{BPP}})$
Lower bound	2	$\lceil \frac{8}{5} \rceil$
Valore ottimo	2	schemi $\{1, 3\}$ e $\{2\}$

Qui il bound arrotondato coincide già con il valore ottimo.