



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottimizzazione combinatoria

Esercizi 6 — Algoritmi ad hoc

Esercizi svolti sui capitoli del volume 6, algoritmi ad hoc: ogni esercizio è seguito dalla sua soluzione completa.

Fabio Furini

fabiofurini.github.io

Dipartimento di Ingegneria informatica, automatica e gestionale — Sapienza Università di Roma

Versione online e materiale scaricabile:
fabiofurini.github.io/ottimizzazione-combinatoria/
github.com/fabiofurini/ottimizzazione-combinatoria

Anno accademico 2026–2027

Indice

Problemi di zaino	2
41 Zaino: branch-and-bound sull'elemento critico	3
 Problemi di colorazione	 30
42 Colorazione dei vertici: il branch-and-bound DSATUR	31



Problemi di zaino



Zaino: branch-and-bound sull'elemento critico

Esercizio 41.1 — Algoritmo di branch-and-bound per il problema dello zaino 0/1 (P1)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 11$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di 5 oggetti ($n = 5$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
p_j	8	6	14	6	2
w_j	3	3	9	5	2

Domande

1. Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo. Scrivere il modello ILP_{KP} e il modello LP_{KP} per l'istanza del KP.
2. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} del problema dello zaino 0/1 (KP) usando:
 - (a) la regola dell'oggetto critico come strategia di scelta della variabile di branching;
 - (b) la regola LIFO come strategia di scelta del nodo di branching;
 - (c) risolvere prima il nodo di down-branching e poi il nodo di up-branching;
 - (d) porre la soluzione incumbent $\bar{x}(ILP_{KP})$ uguale alla seguente soluzione euristica:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 1, \quad \bar{x}_5 = 0$$

e porre di conseguenza il lower bound LB.

3. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound corrispondente, indicando il motivo per cui i nodi di branching si possono potare.

Soluzione

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{8}{3} \geq \frac{6}{3} \geq \frac{14}{9} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{2}{2}$$

Questo è il modello ILP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 2x_5 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 2x_5 \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Questo è il modello LP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 2x_5 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 2x_5 \leq 11 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_4 \leq 1 \\ & x_5 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP}.

• **Inizializzazione**

Per il problema LP_{KP}¹, l'oggetto critico è $s = 3$ e la capacità residua è $rc = 5$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{5}{9}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\text{LP}_{\text{KP}}^1) = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 14 \cdot \frac{5}{9} = \frac{196}{9}$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^1)$ è **frazionaria** e il problema LP_{KP}¹ è **ammissibile**, quindi il problema LP_{KP}¹ viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a 20 ($\text{LB}(\tilde{x}) = 20$).

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$20 \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{196}{9} \right\rfloor}_{=21}$$

• **Iterazione 1**

Il problema LP_{KP}^1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_3 . I problemi LP_{KP}^2 e LP_{KP}^3 vengono creati escludendo ($x_3 \leq 0$) e selezionando ($x_3 \geq 1$) l'oggetto 3.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^2

Abbiamo

$$\mathcal{J}^2 = \{1, 2, 4, 5\}, \quad \mathcal{J}_{out}^2 = \{3\}, \quad \mathcal{J}_{in}^2 = \emptyset$$

La capacità è $c(2) = 11$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(2) = 0$. L'oggetto critico è $s = 5$ e la capacità residua è $rc = 0$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 1, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^2) = 20$$

Il problema LP_{KP}^2 è **ammissibile** e la sua soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^2)$ è **intera**. Non migliora la soluzione incumbent, perché $z(LP_{KP}^2) = 20 \leq 20 = LB$, quindi il nodo di branching è potato per interezza (quando valgono entrambi i criteri, prevale l'interezza).

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^3

Abbiamo

$$\mathcal{J}^3 = \{1, 2, 4, 5\}, \quad \mathcal{J}_{out}^3 = \emptyset, \quad \mathcal{J}_{in}^3 = \{3\}$$

La capacità è $c(3) = 2$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(3) = 14$. L'oggetto critico è $s = 1$ e la capacità residua è $rc = 2$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^3)$ è:

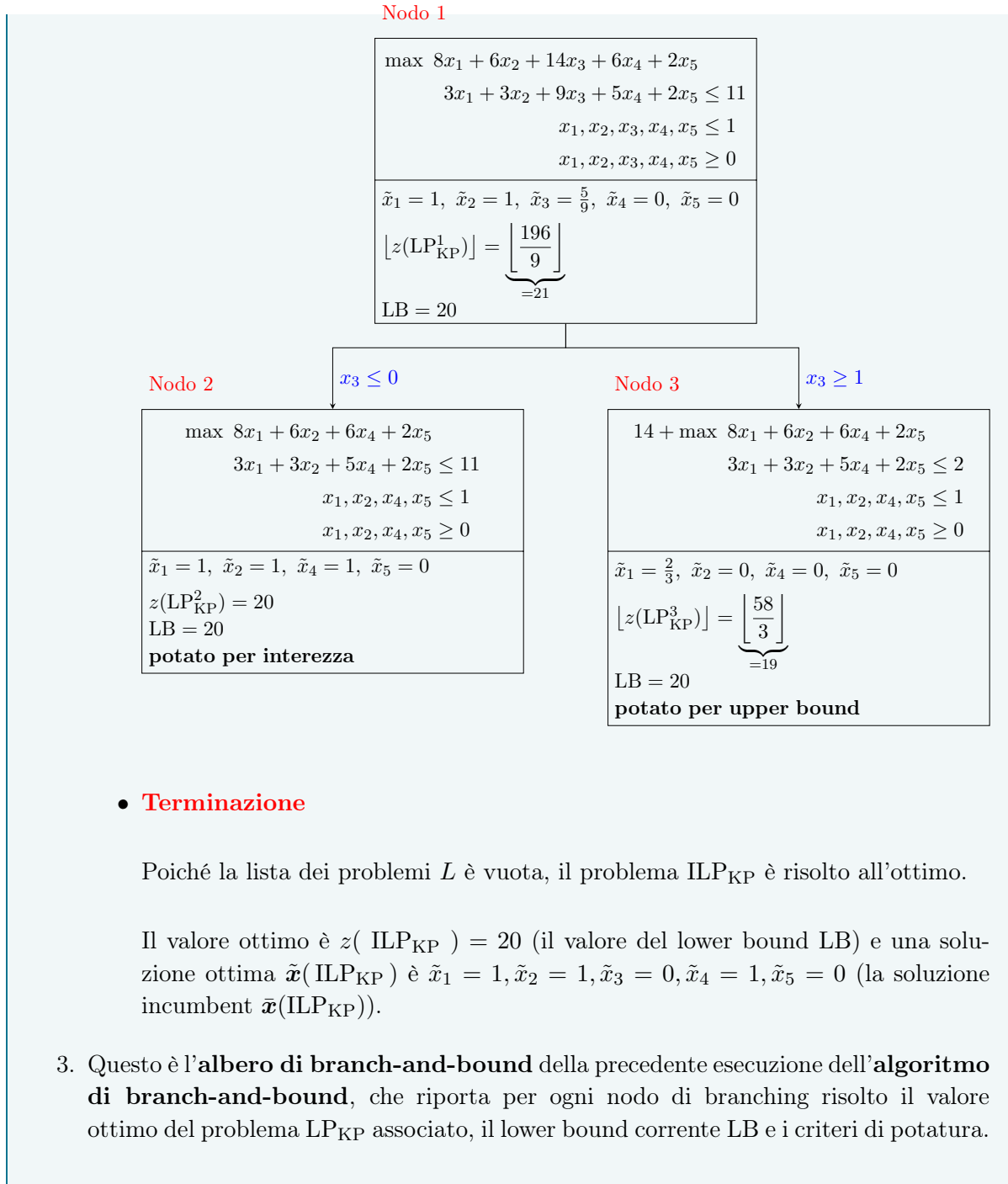
$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^3) = 14 + 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{58}{3}$$

Il problema LP_{KP}^3 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^3) \rfloor \leq LB \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{58}{3} \right\rfloor}_{=19} \leq 20$$

quindi il nodo di branching è potato per upper bound.

Alla fine della prima iterazione, il Nodo 2 è potato per interezza e il Nodo 3 è potato per upper bound. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

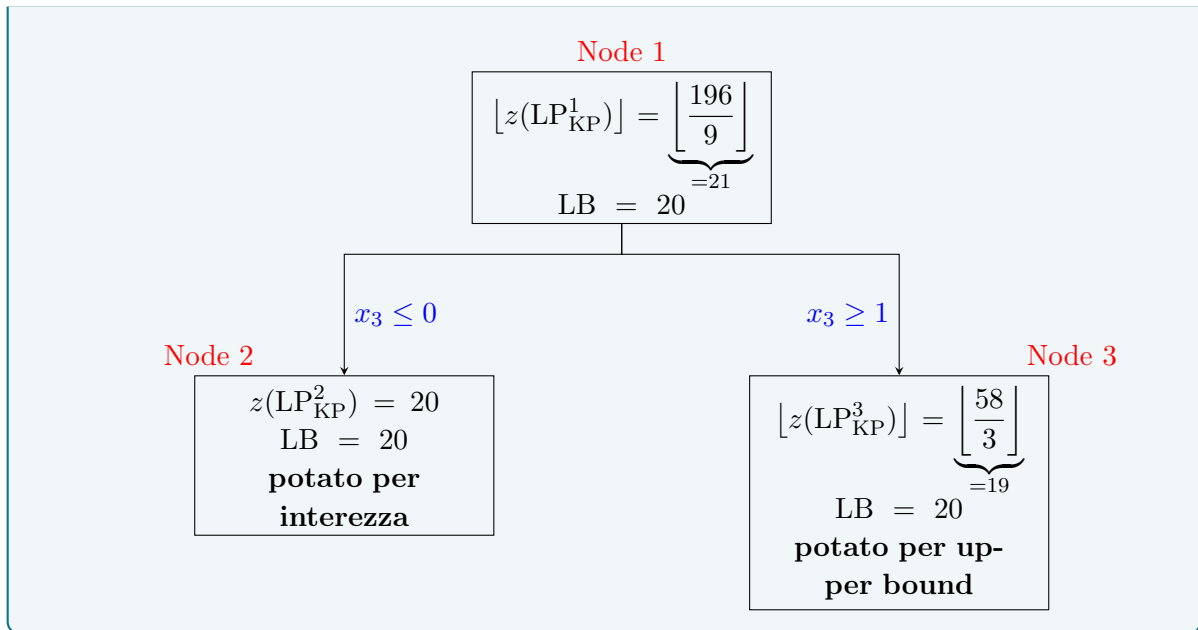


- **Terminazione**

Poiché la lista dei problemi L è vuota, il problema ILP_{KP} è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) = 20$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 1, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 1, \tilde{x}_5 = 0$ (la soluzione incumbent $\tilde{x}(\text{ILP}_{\text{KP}})$).

- Questo è l'**albero di branch-and-bound** della precedente esecuzione dell'**algoritmo di branch-and-bound**, che riporta per ogni nodo di branching risolto il valore ottimo del problema LP_{KP} associato, il lower bound corrente LB e i criteri di potatura.



Esercizio 41.2 — Algoritmo di branch-and-bound per il problema dello zaino 0/1 (P2)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 8$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	40	42	25	12
w_j	4	7	5	3

Domande

- Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo. Scrivere il modello ILP_{KP} e il modello LP_{KP} per l'istanza del KP.
- Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} del problema dello zaino 0/1 (KP) usando:
 - la regola dell'oggetto critico come strategia di scelta della variabile di branching;
 - la regola LIFO come strategia di scelta del nodo di branching;
 - risolvere prima il nodo di down-branching e poi il nodo di up-branching;
 - porre la soluzione incumbent $\bar{x}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ uguale alla seguente soluzione euristica:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 1$$

e porre di conseguenza il lower bound LB.

- Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound corrispondente, indicando il motivo per cui i nodi di branching si possono potare.

Soluzione

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{40}{4} \geq \frac{42}{7} \geq \frac{25}{5} \geq \frac{12}{3}$$

Questo è il modello ILP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 40 x_1 + 42 x_2 + 25 x_3 + 12 x_4 \\ & 4 x_1 + 7 x_2 + 5 x_3 + 3 x_4 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Questo è il modello LP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 40 x_1 + 42 x_2 + 25 x_3 + 12 x_4 \\ & 4 x_1 + 7 x_2 + 5 x_3 + 3 x_4 \leq 8 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} .

- **Inizializzazione**

Per il problema LP_{KP}^1 , l'oggetto critico è $s = 2$ e la capacità residua è $rc = 4$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(LP_{KP}^1) = 40 \cdot 1 + 42 \cdot \frac{4}{7} = 64$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^1)$ è **frazionaria** e il problema LP_{KP}^1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_{KP}^1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a 52 ($LB(\tilde{x}) = 52$).

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$52 \leq z(ILP_{KP}) \leq 64$$

• **Iterazione 1**

Il problema LP_{KP}^1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_2 . I problemi LP_{KP}^2 e LP_{KP}^3 vengono creati escludendo ($x_2 \leq 0$) e selezionando ($x_2 \geq 1$) l'oggetto 2.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^2

Abbiamo

$$\mathcal{J}^2 = \{1, 3, 4\}, \quad \mathcal{J}_{out}^2 = \{2\}, \quad \mathcal{J}_{in}^2 = \emptyset$$

La capacità è $c(2) = 8$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(2) = 0$. L'oggetto critico è $s = 3$ e la capacità residua è $rc = 4$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{4}{5}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^2) = 40 \cdot 1 + 25 \cdot \frac{4}{5} = 60$$

Il problema LP_{KP}^2 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^2) \rfloor > LB \quad \text{poiché} \quad 60 > 52$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^2)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^2 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^3

Abbiamo

$$\mathcal{J}^3 = \{1, 3, 4\}, \quad \mathcal{J}_{out}^3 = \emptyset, \quad \mathcal{J}_{in}^3 = \{2\}$$

La capacità è $c(3) = 1$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(3) = 42$. L'oggetto critico è $s = 1$ e la capacità residua è $rc = 1$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^3) = 42 + 40 \cdot \frac{1}{4} = 52$$

Il problema LP_{KP}^3 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^3) \rfloor \leq LB \quad \text{poiché} \quad 52 \leq 52$$

quindi il nodo di branching è potato per upper bound.

Alla fine della prima iterazione, il Nodo 2 è inserito nella lista dei problemi L , mentre il Nodo 3 è potato per upper bound. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 1

$$\begin{array}{ll}
 \max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
 & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
 \hline
 & \tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = \frac{4}{7}, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 0 \\
 & z(\text{LP}_{\text{KP}}^1) = 64 \\
 & \text{LB} = 52
 \end{array}$$

Nodo 2

$$x_2 \leq 0$$

$$\begin{array}{ll}
 \max & 40x_1 + 25x_3 + 12x_4 \\
 & 4x_1 + 5x_3 + 3x_4 \leq 8 \\
 & x_1, x_3, x_4 \leq 1 \\
 & x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\
 \hline
 & \tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_3 = \frac{4}{5}, \tilde{x}_4 = 0 \\
 & z(\text{LP}_{\text{KP}}^2) = 60 \\
 & \text{LB} = 52
 \end{array}$$

Nodo 3

$$x_2 \geq 1$$

$$\begin{array}{ll}
 42 + \max & 40x_1 + 25x_3 + 12x_4 \\
 & 4x_1 + 5x_3 + 3x_4 \leq 1 \\
 & x_1, x_3, x_4 \leq 1 \\
 & x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\
 \hline
 & \tilde{x}_1 = \frac{1}{4}, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 0 \\
 & z(\text{LP}_{\text{KP}}^3) = 52 \\
 & \text{LB} = 52 \\
 & \text{potato per upper bound}
 \end{array}$$

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$52 \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq 60$$

• Iterazione 2

Il problema LP_{KP}^2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_3 . I problemi LP_{KP}^4 e LP_{KP}^5 vengono creati escludendo ($x_3 \leq 0$) e selezionando ($x_3 \geq 1$) l'oggetto 3.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^4

Abbiamo

$$\mathcal{J}^4 = \{1, 4\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^4 = \{2, 3\}, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^4 = \emptyset$$

La capacità è $c(4) = 8$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(4) = 0$. Tutti gli oggetti entrano nello zaino. Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}}^4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 1 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^4) = 40 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 52$$

Il problema LP_{KP}^4 è **ammissibile** e la sua soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}}^4)$ è **intera**. Non migliora la soluzione incumbent, perché $z(\text{LP}_{\text{KP}}^4) = 52 \leq 52 = \text{LB}$, quindi il nodo di branching è potato per interezza (quando valgono entrambi i criteri, prevale l'interezza).

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^5

Abbiamo

$$\mathcal{J}^5 = \{1, 4\}, \quad \mathcal{J}_{out}^5 = \{2\}, \quad \mathcal{J}_{in}^5 = \{3\}$$

La capacità è $c(5) = 3$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(5) = 25$. L'oggetto critico è $s = 1$ e la capacità residua è $rc = 3$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^5)$ è:

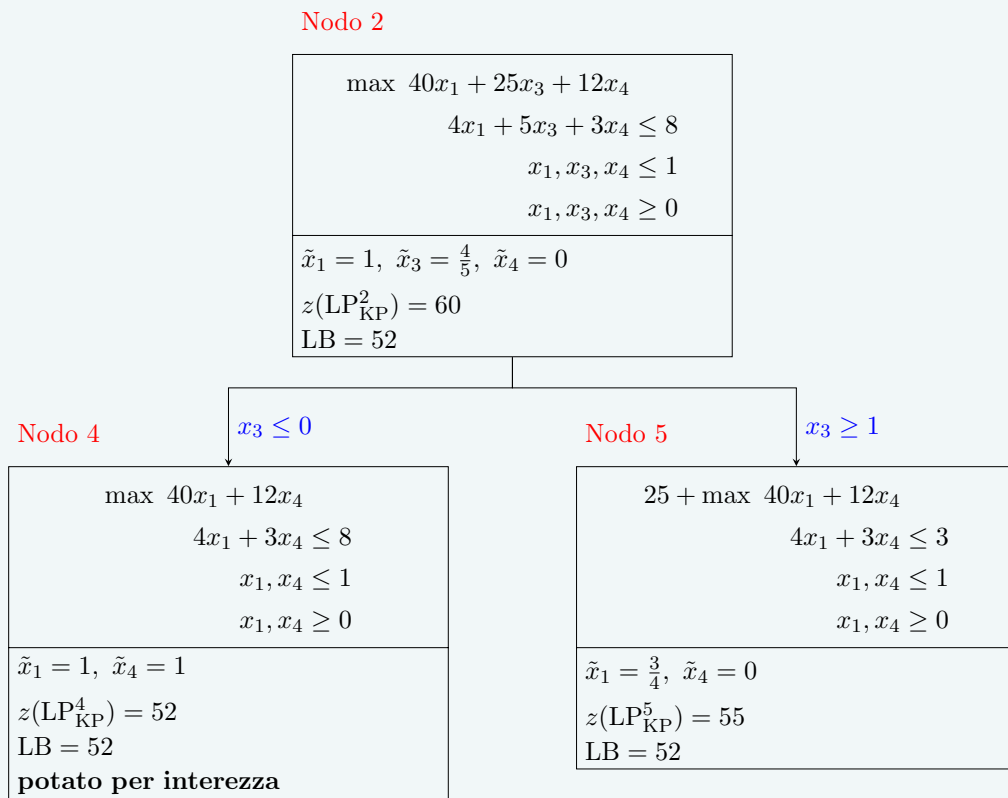
$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{4}, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^5) = 25 + 40 \cdot \frac{3}{4} = 55$$

Il problema LP_{KP}^5 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^5) \rfloor > LB \quad \text{poiché} \quad 55 > 52$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^5)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^5 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

Alla fine della seconda iterazione, il Nodo 5 è inserito nella lista dei problemi L , mentre il Nodo 4 è potato per interezza. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$52 \leq z(ILP_{KP}) \leq 55$$

- **Iterazione 3**

Il problema LP_{KP}^5 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_1 . I problemi LP_{KP}^6 e LP_{KP}^7 vengono creati escludendo ($x_1 \leq 0$) e selezionando ($x_1 \geq 1$) l'oggetto 1.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^6

Abbiamo

$$\mathcal{J}^6 = \{4\}, \quad \mathcal{J}_{out}^6 = \{1, 2\}, \quad \mathcal{J}_{in}^6 = \{3\}$$

La capacità è $c(6) = 3$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(6) = 25$. Tutti gli oggetti entrano nello zaino. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^6)$ è:

$$\tilde{x}_4 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^6) = 25 + 12 \cdot 1 = 37$$

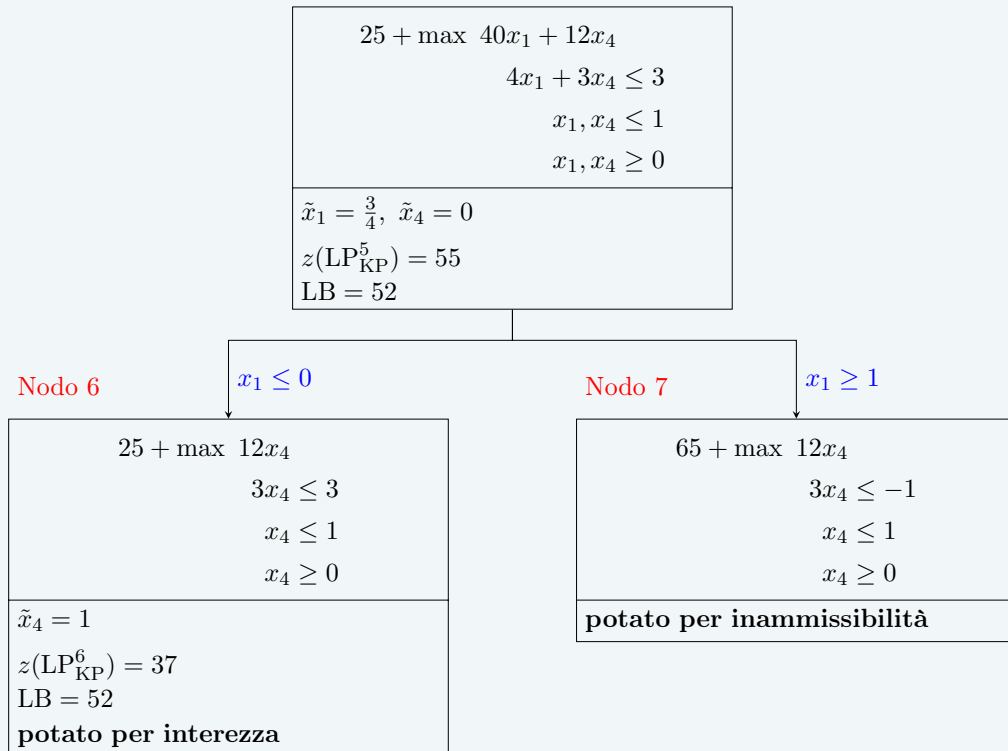
Il problema LP_{KP}^6 è **ammissibile** e la sua soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^6)$ è **intera**. Non migliora la soluzione incumbent, perché $z(LP_{KP}^6) = 37 < 52 = LB$, quindi il nodo di branching è potato per interezza (quando valgono entrambi i criteri, prevale l'interezza).

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^7

Il problema LP_{KP}^7 è **inammissibile**, quindi il nodo di branching è potato per inammissibilità.

Alla fine della terza iterazione, il Nodo 6 è potato per interezza e il Nodo 7 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 5

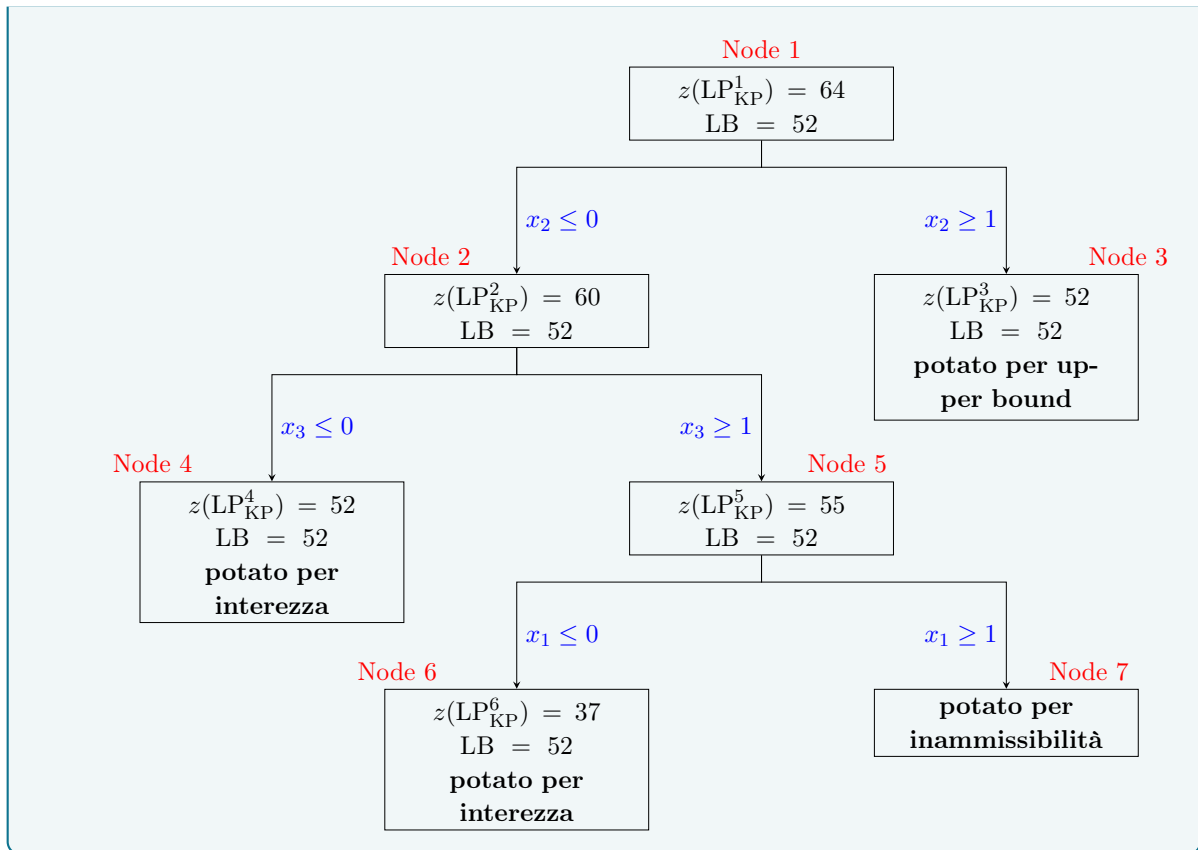


• **Terminazione**

Poiché la lista dei problemi L è vuota, il problema ILP_{KP} è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) = 52$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 1$ (la soluzione incumbent $\bar{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$).

3. Questo è l'**albero di branch-and-bound** della precedente esecuzione dell'**algoritmo di branch-and-bound**, che riporta per ogni nodo di branching risolto il valore ottimo del problema LP_{KP} associato, il lower bound corrente LB e i criteri di potatura.



Esercizio 41.3 — Algoritmo di branch-and-bound per il problema dello zaino 0/1 (P3)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 15$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\}$ di 4 oggetti ($n = 4$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
p_j	24	17	12	6
w_j	10	8	6	5

Domande

- Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo. Scrivere il modello ILP_{KP} e il modello LP_{KP} per l'istanza del KP.
- Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} del problema dello zaino 0/1 (KP) usando:
 - la regola dell'oggetto critico come strategia di scelta della variabile di branching;
 - la regola LIFO come strategia di scelta del nodo di branching;
 - risolvere prima il nodo di down-branching e poi il nodo di up-branching;

(d) porre la soluzione incumbent $\bar{x}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ uguale alla seguente soluzione euristica:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 1$$

e porre di conseguenza il lower bound LB.

3. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound corrispondente, indicando il motivo per cui i nodi di branching si possono potare.

Soluzione

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{24}{10} \geq \frac{17}{8} \geq \frac{12}{6} \geq \frac{6}{5}$$

Questo è il modello ILP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{array}{llllll} \max & 24 & x_1 & + & 17 & x_2 & + & 12 & x_3 & + & 6 & x_4 \\ & 10 & x_1 & & + & 8 & x_2 & & + & 6 & x_3 & + & 5 & x_4 & \leq & 15 \\ & & x_1, & & & x_2, & & & x_3, & & & x_4 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Questo è il modello LP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{array}{llllll} \max & 24 & x_1 & + & 17 & x_2 & + & 12 & x_3 & + & 6 & x_4 \\ & 10 & x_1 & & + & 8 & x_2 & & + & 6 & x_3 & + & 5 & x_4 & \leq & 15 \\ & & x_1 & & & & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & x_2 & & & & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & x_3 & & & & & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & & x_4 & & \leq & 1 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} .

- Inizializzazione**

Per il problema LP_{KP}^1 , l'oggetto critico è $s = 2$ e la capacità residua è $rc = 5$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{5}{8}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(\text{LP}_{\text{KP}}^1) = 24 \cdot 1 + 17 \cdot \frac{5}{8} = \frac{277}{8}$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^1)$ è **frazionaria** e il problema LP_{KP}^1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_{KP}^1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a 30 ($\text{LB}(\tilde{x}) = 30$).

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$30 \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{277}{8} \right\rfloor}_{=34}$$

• **Iterazione 1**

Il problema LP_{KP}^1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_2 . I problemi LP_{KP}^2 e LP_{KP}^3 vengono creati escludendo ($x_2 \leq 0$) e selezionando ($x_2 \geq 1$) l'oggetto 2.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^2

Abbiamo

$$\mathcal{J}^2 = \{1, 3, 4\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^2 = \{2\}, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^2 = \emptyset$$

La capacità è $c(2) = 15$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(2) = 0$. L'oggetto critico è $s = 3$ e la capacità residua è $rc = 5$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{5}{6}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^2) = 24 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{5}{6} = 34$$

Il problema LP_{KP}^2 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^2) \rfloor > \text{LB} \quad \text{poiché} \quad 34 > 30$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^2)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^2 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^3

Abbiamo

$$\mathcal{J}^3 = \{1, 3, 4\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^3 = \emptyset, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^3 = \{2\}$$

La capacità è $c(3) = 7$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(3) = 17$. L'oggetto critico è $s = 1$ e la capacità residua è $rc = 7$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^3)$ è:

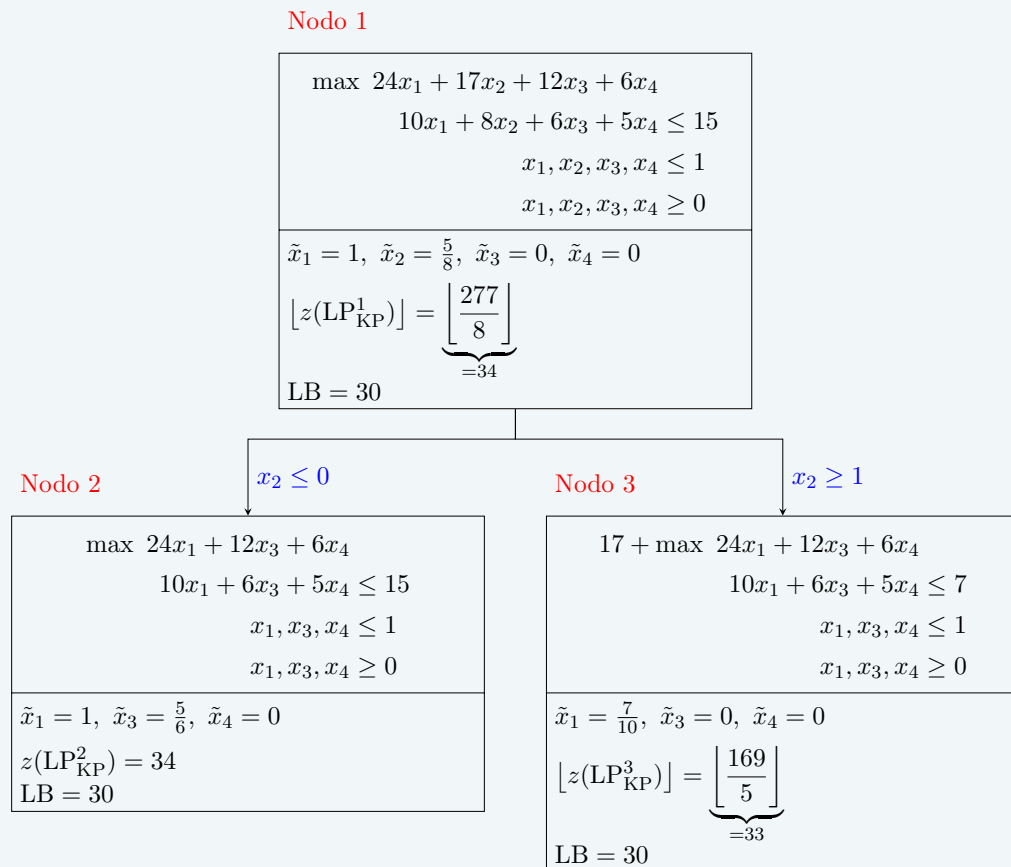
$$\tilde{x}_1 = \frac{7}{10}, \quad \tilde{x}_3 = 0, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^3) = 17 + 24 \cdot \frac{7}{10} = \frac{169}{5}$$

Il problema LP_{KP}^3 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^3) \rfloor > LB \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{169}{5} \right\rfloor}_{=33} > 30$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^3)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^3 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

Alla fine della prima iterazione, il Nodo 2 e il Nodo 3 sono entrambi inseriti nella lista dei problemi L . L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$30 \leq z(ILP_{KP}) \leq \underbrace{\max \left\{ 34, \underbrace{\left\lfloor \frac{169}{5} \right\rfloor}_{=33} \right\}}_{=34}$$

- Iterazione 2**

Il problema LP_{KP}^3 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_1 . I problemi LP_{KP}^4 e LP_{KP}^5 vengono creati escludendo ($x_1 \leq 0$) e selezionando ($x_1 \geq 1$) l'oggetto 1.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^4

Abbiamo

$$\mathcal{J}^4 = \{3, 4\}, \quad \mathcal{J}_{out}^4 = \{1\}, \quad \mathcal{J}_{in}^4 = \{2\}$$

La capacità è $c(4) = 7$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(4) = 17$. L'oggetto critico è $s = 4$ e la capacità residua è $rc = 1$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^4)$ è:

$$\tilde{x}_3 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^4) = 17 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{151}{5}$$

Il problema LP_{KP}^4 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^4) \rfloor \leq LB \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{151}{5} \right\rfloor}_{=30} \leq 30$$

quindi il nodo di branching è potato per upper bound.

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^5

Il problema LP_{KP}^5 è **inammissibile**, quindi il nodo di branching è potato per inammissibilità.

Alla fine della seconda iterazione, il Nodo 4 è potato per upper bound e il Nodo 5 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 3

$$\begin{aligned}
 & 17 + \max \quad 24x_1 + 12x_3 + 6x_4 \\
 & \quad 10x_1 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7 \\
 & \quad x_1, x_3, x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\
 \\
 & \tilde{x}_1 = \frac{7}{10}, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 0 \\
 & \lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^3) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{169}{5} \right\rfloor}_{=33} \\
 & \text{LB} = 30
 \end{aligned}$$

Nodo 4

$$x_1 \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 & 41 + \max \quad 12x_3 + 6x_4 \\
 & \quad 6x_3 + 5x_4 \leq 7 \\
 & \quad x_3, x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_3, x_4 \geq 0 \\
 \\
 & \tilde{x}_3 = 1, \tilde{x}_4 = \frac{1}{5} \\
 & \lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^4) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{151}{5} \right\rfloor}_{=30} \\
 & \text{LB} = 30 \\
 & \text{potato per upper bound}
 \end{aligned}$$

Nodo 5

$$x_1 \geq 1$$

$$\begin{aligned}
 & 41 + \max \quad 12x_3 + 6x_4 \\
 & \quad 6x_3 + 5x_4 \leq -3 \\
 & \quad x_3, x_4 \leq 1 \\
 & \quad x_3, x_4 \geq 0 \\
 \\
 & \text{potato per inammissibilità}
 \end{aligned}$$

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$30 \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq 34$$

• Iterazione 3

Il problema LP_{KP}^2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_3 . I problemi LP_{KP}^6 e LP_{KP}^7 vengono creati escludendo ($x_3 \leq 0$) e selezionando ($x_3 \geq 1$) l'oggetto 3.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^6

Abbiamo

$$\mathcal{J}^6 = \{1, 4\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^6 = \{2, 3\}, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^6 = \emptyset$$

La capacità è $c(6) = 15$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(6) = 0$. Tutti gli oggetti entrano nello zaino. Una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}}^6)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_4 = 1 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^6) = 24 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 30$$

Il problema LP_{KP}^6 è **ammissibile** e la sua soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}}^6)$ è **intera**. Non migliora la soluzione incumbent, perché $z(\text{LP}_{\text{KP}}^6) = 30 \leq$

$30 = \text{LB}$, quindi il nodo di branching è potato per interezza (quando valgono entrambi i criteri, prevale l'interezza).

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^7

Abbiamo

$$\mathcal{J}^7 = \{1, 4\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^7 = \{2\}, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^7 = \{3\}$$

La capacità è $c(7) = 9$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(7) = 12$. L'oggetto critico è $s = 1$ e la capacità residua è $rc = 9$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^7)$ è:

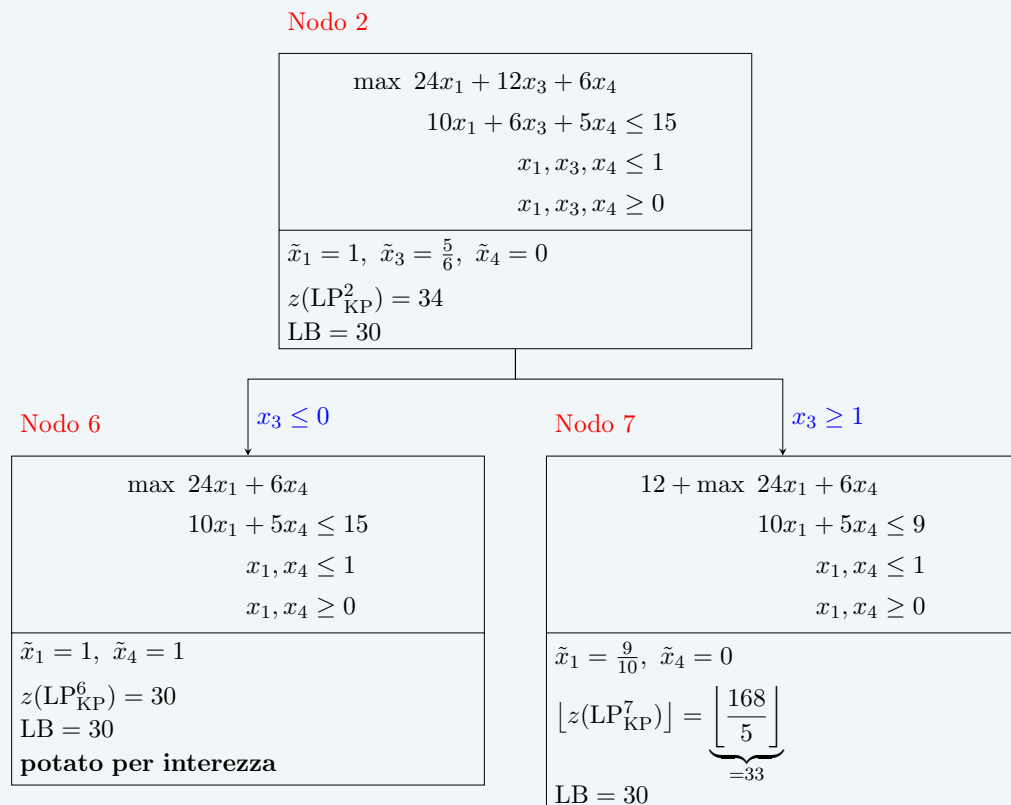
$$\tilde{x}_1 = \frac{9}{10}, \quad \tilde{x}_4 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^7) = 12 + 24 \cdot \frac{9}{10} = \frac{168}{5}$$

Il problema LP_{KP}^7 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^7) \rfloor > \text{LB} \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{168}{5} \right\rfloor}_{=33} > 30$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^7)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^7 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

Alla fine della terza iterazione, il Nodo 6 è potato per interezza e il Nodo 7 è inserito nella lista dei problemi L . L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



• **Iterazione 4**

Il problema LP_{KP}^7 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_1 . I problemi LP_{KP}^8 e LP_{KP}^9 vengono creati escludendo ($x_1 \leq 0$) e selezionando ($x_1 \geq 1$) l'oggetto 1.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^8

Abbiamo

$$\mathcal{J}^8 = \{4\}, \quad \mathcal{J}_{out}^8 = \{1, 2\}, \quad \mathcal{J}_{in}^8 = \{3\}$$

La capacità è $c(8) = 9$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(8) = 12$. Tutti gli oggetti entrano nello zaino. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^8)$ è:

$$\tilde{x}_4 = 1 \quad \text{e} \quad z(LP_{KP}^8) = 12 + 6 \cdot 1 = 18$$

Il problema LP_{KP}^8 è **ammissibile** e la sua soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^8)$ è **intera**. Non migliora la soluzione incumbent, perché $z(LP_{KP}^8) = 18 < 30 = LB$, quindi il nodo di branching è potato per interezza (quando valgono entrambi i criteri, prevale l'interezza).

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^9

Il problema LP_{KP}^9 è **inammissibile**, quindi il nodo di branching è potato per inammissibilità.

Alla fine della quarta iterazione, il Nodo 8 è potato per interezza e il Nodo 9 è potato per inammissibilità. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

Nodo 7

$$\begin{array}{l}
 12 + \max \quad 24x_1 + 6x_4 \\
 10x_1 + 5x_4 \leq 9 \\
 x_1, x_4 \leq 1 \\
 x_1, x_4 \geq 0 \\
 \hline
 \tilde{x}_1 = \frac{9}{10}, \tilde{x}_4 = 0 \\
 \lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^7) \rfloor = \underbrace{\left\lfloor \frac{168}{5} \right\rfloor}_{=33} \\
 \text{LB} = 30
 \end{array}$$

Nodo 8

$$x_1 \leq 0$$

$$\begin{array}{l}
 36 + \max \quad 6x_4 \\
 5x_4 \leq 9 \\
 x_4 \leq 1 \\
 x_4 \geq 0 \\
 \hline
 \tilde{x}_4 = 1 \\
 z(\text{LP}_{\text{KP}}^8) = 18 \\
 \text{LB} = 30 \\
 \text{potato per interezza}
 \end{array}$$

Nodo 9

$$x_1 \geq 1$$

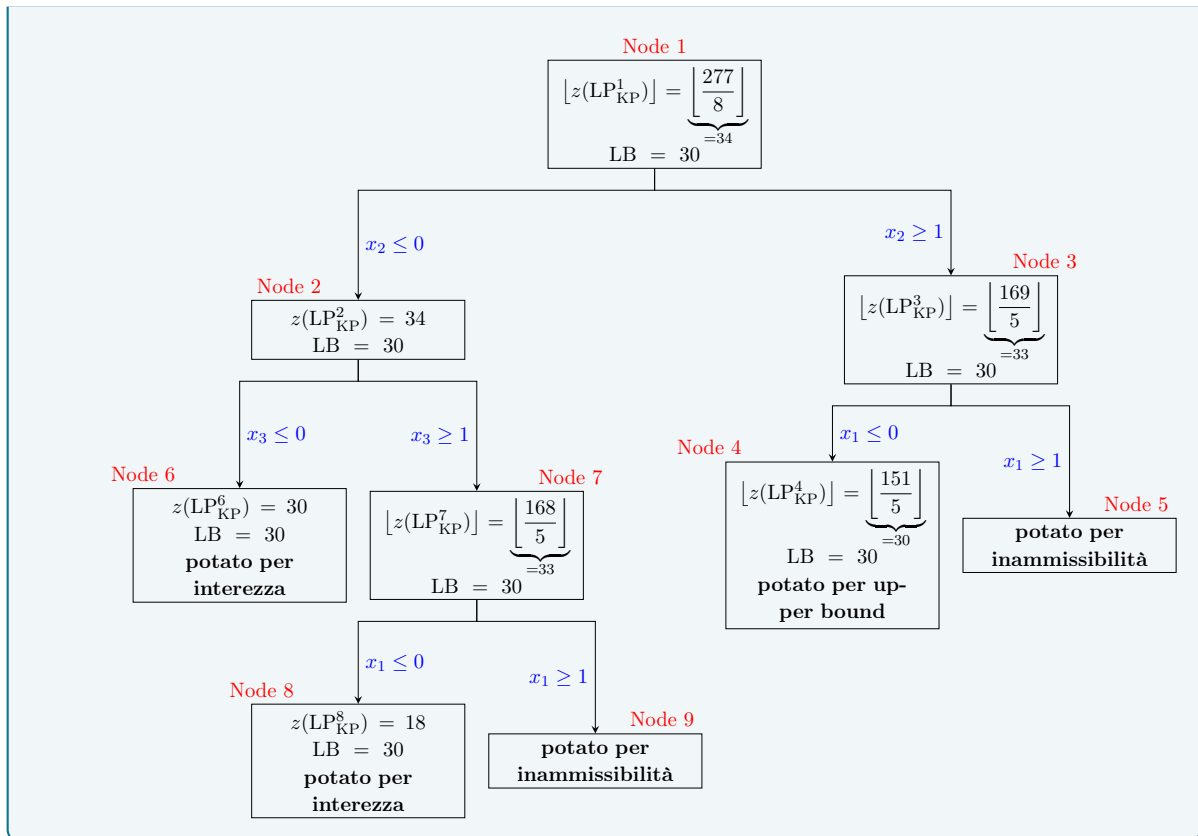
$$\begin{array}{l}
 36 + \max \quad 6x_4 \\
 5x_4 \leq -1 \\
 x_4 \leq 1 \\
 x_4 \geq 0 \\
 \hline
 \text{potato per inammissibilità}
 \end{array}$$

• Terminazione

Poiché la lista dei problemi L è vuota, il problema ILP_{KP} è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(\text{ILP}_{\text{KP}}) = 30$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 1$ (la soluzione incumbent $\bar{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$).

- Questo è l'albero di **branch-and-bound** della precedente esecuzione dell'**algoritmo di branch-and-bound**, che riporta per ogni nodo di branching risolto il valore ottimo del problema LP_{KP} associato, il lower bound corrente LB e i criteri di potatura.



Esercizio 41.4 — Algoritmo di branch-and-bound per il problema dello zaino 0/1 (P4)

Consideriamo uno zaino di capacità $c = 9$ e un insieme $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ di 6 oggetti ($n = 6$) con i seguenti profitti e pesi:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
p_j	6	5	8	9	6	7
w_j	2	3	6	7	5	9

Domande

- Verificare se gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, altrimenti ordinarli in questo modo. Scrivere il modello ILP_{KP} e il modello LP_{KP} per l'istanza del KP.
- Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} del problema dello zaino 0/1 (KP) usando:
 - la regola dell'oggetto critico come strategia di scelta della variabile di branching;
 - la regola FIFO come strategia di scelta del nodo di branching;
 - risolvere prima il nodo di down-branching e poi il nodo di up-branching;

(d) porre la soluzione incumbent $\bar{x}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ uguale alla seguente soluzione euristica:

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{x}_4 = 0, \quad \bar{x}_5 = 0, \quad \bar{x}_6 = 0$$

e porre di conseguenza il lower bound LB.

3. Determinare e commentare l'albero di branch-and-bound corrispondente, indicando il motivo per cui i nodi di branching si possono potare.

Soluzione

1. Gli oggetti sono ordinati per efficienza non crescente, poiché abbiamo:

$$\frac{6}{2} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{8}{6} \geq \frac{9}{7} \geq \frac{6}{5} \geq \frac{7}{9}$$

Questo è il modello ILP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Questo è il modello LP_{KP} per l'istanza del KP:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 6x_5 + 7x_6 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 9x_6 \leq 9 \\ & x_1 \leq 1 \\ & \quad x_2 \leq 1 \\ & \quad \quad x_3 \leq 1 \\ & \quad \quad \quad x_4 \leq 1 \\ & \quad \quad \quad \quad x_5 \leq 1 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad x_6 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Esecuzione dell'algoritmo di branch-and-bound per risolvere il modello ILP_{KP} .

- **Inizializzazione**

Per il problema LP_{KP}^1 , l'oggetto critico è $s = 3$ e la capacità residua è $rc = 4$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^1)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_3 = \frac{2}{3}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0$$

il valore ottimo è:

$$z(LP_{KP}^1) = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{49}{3}$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^1)$ è **frazionaria** e il problema LP_{KP}^1 è **ammissibile**, quindi il problema LP_{KP}^1 viene inserito nella lista dei problemi L e il lower bound LB viene posto a 11 ($LB(\tilde{x}) = 11$).

Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$11 \leq z(ILP_{KP}) \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{49}{3} \right\rfloor}_{=16}$$

- **Iterazione 1**

Il problema LP_{KP}^1 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_3 . I problemi LP_{KP}^2 e LP_{KP}^3 vengono creati escludendo ($x_3 \leq 0$) e selezionando ($x_3 \geq 1$) l'oggetto 3.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^2

Abbiamo

$$\mathcal{J}^2 = \{1, 2, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{J}_{out}^2 = \{3\}, \quad \mathcal{J}_{in}^2 = \emptyset$$

La capacità è $c(2) = 9$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(2) = 0$. L'oggetto critico è $s = 4$ e la capacità residua è $rc = 4$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^2)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_4 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{e}$$

$$z(LP_{KP}^2) = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{4}{7} = \frac{113}{7}$$

Il problema LP_{KP}^2 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^2) \rfloor > LB \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{113}{7} \right\rfloor}_{=16} > 11$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^2)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^2 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^3

Abbiamo

$$\mathcal{J}^3 = \{1, 2, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{J}_{out}^3 = \emptyset, \quad \mathcal{J}_{in}^3 = \{3\}$$

La capacità è $c(3) = 3$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(3) = 8$. L'oggetto critico è $s = 2$ e la capacità residua è $rc = 1$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^3)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{x}_4 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad e$$

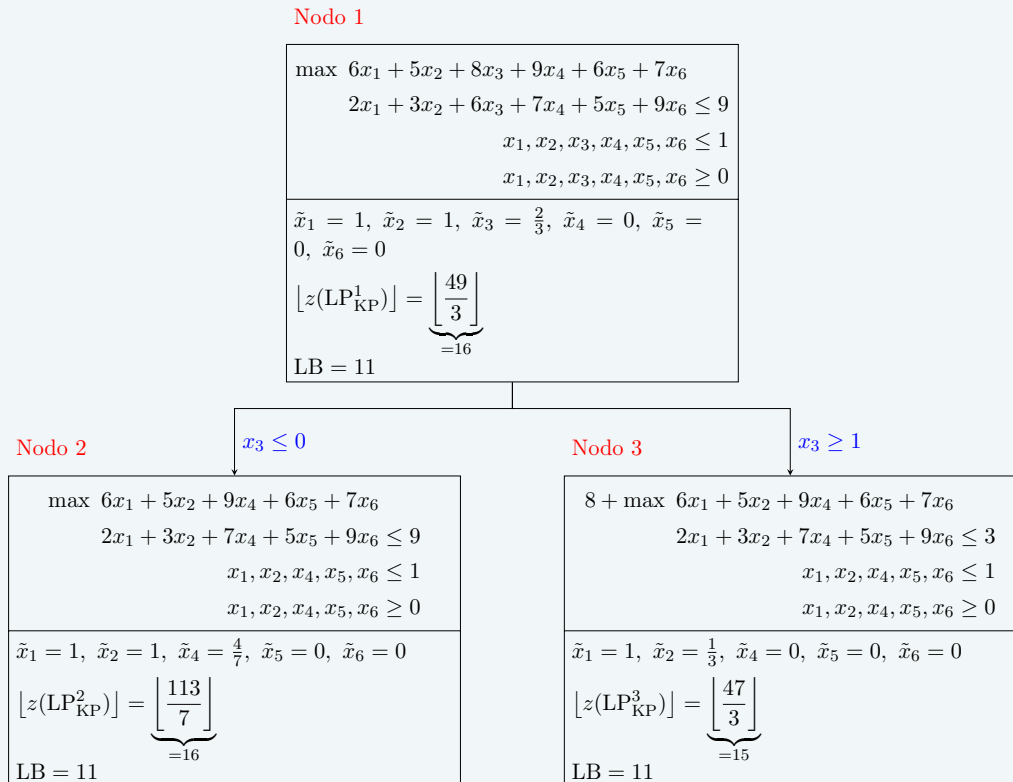
$$z(LP_{KP}^3) = 8 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{47}{3}$$

Il problema LP_{KP}^3 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(LP_{KP}^3) \rfloor > LB \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{47}{3} \right\rfloor}_{=15} > 11$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(LP_{KP}^3)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^3 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

Alla fine della prima iterazione, il Nodo 2 e il Nodo 3 sono entrambi inseriti nella lista dei problemi L . L'albero di branch-and-bound corrispondente è:



Dati il lower bound LB e l'upper bound UB correnti, abbiamo:

$$11 \leq z(\text{ILP}_{\text{KP}}) \leq \underbrace{\max \left\{ \underbrace{\left\lfloor \frac{113}{7} \right\rfloor}_{=16}, \underbrace{\left\lfloor \frac{47}{3} \right\rfloor}_{=15} \right\}}_{=16}$$

• **Iterazione 2**

Il problema LP_{KP}^2 viene estratto e cancellato dalla lista dei problemi L .

La variabile di branching è x_4 . I problemi LP_{KP}^4 e LP_{KP}^5 vengono creati escludendo ($x_4 \leq 0$) e selezionando ($x_4 \geq 1$) l'oggetto 4.

(a) Soluzione del problema LP_{KP}^4

Abbiamo

$$\mathcal{J}^4 = \{1, 2, 5, 6\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^4 = \{3, 4\}, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^4 = \emptyset$$

La capacità è $c(4) = 9$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(4) = 0$. L'oggetto critico è $s = 5$ e la capacità residua è $rc = 4$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^4)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 1, \quad \tilde{x}_5 = \frac{4}{5}, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^4) = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{79}{5}$$

Il problema LP_{KP}^4 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^4) \rfloor > \text{LB} \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{79}{5} \right\rfloor}_{=15} > 11$$

La soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^4)$ è **frazionaria**, quindi il problema LP_{KP}^4 viene **inserito nella lista dei problemi L** .

(b) Soluzione del problema LP_{KP}^5

Abbiamo

$$\mathcal{J}^5 = \{1, 2, 5, 6\}, \quad \mathcal{J}_{\text{out}}^5 = \{3\}, \quad \mathcal{J}_{\text{in}}^5 = \{4\}$$

La capacità è $c(5) = 2$ e la costante nella funzione obiettivo è $p(5) = 9$. L'oggetto critico è $s = 2$ e la capacità residua è $rc = 0$. Una soluzione ottima $\tilde{x}(\text{LP}_{\text{KP}}^5)$ è:

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{x}_5 = 0, \quad \tilde{x}_6 = 0 \quad \text{e} \quad z(\text{LP}_{\text{KP}}^5) = 9 + 6 \cdot 1 = 15$$

Il problema LP_{KP}^5 è **ammissibile** e abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^5) \rfloor > \text{LB} \quad \text{poiché} \quad 15 > 11$$

La soluzione ottima $\tilde{\mathbf{x}}(\text{LP}_{\text{KP}}^5)$ è **intera**, quindi il lower bound LB diventa 15 e la soluzione incumbent $\tilde{\mathbf{x}}(\text{ILP}_{\text{KP}})$ diventa $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 1, \tilde{x}_5 = 0, \tilde{x}_6 = 0$.

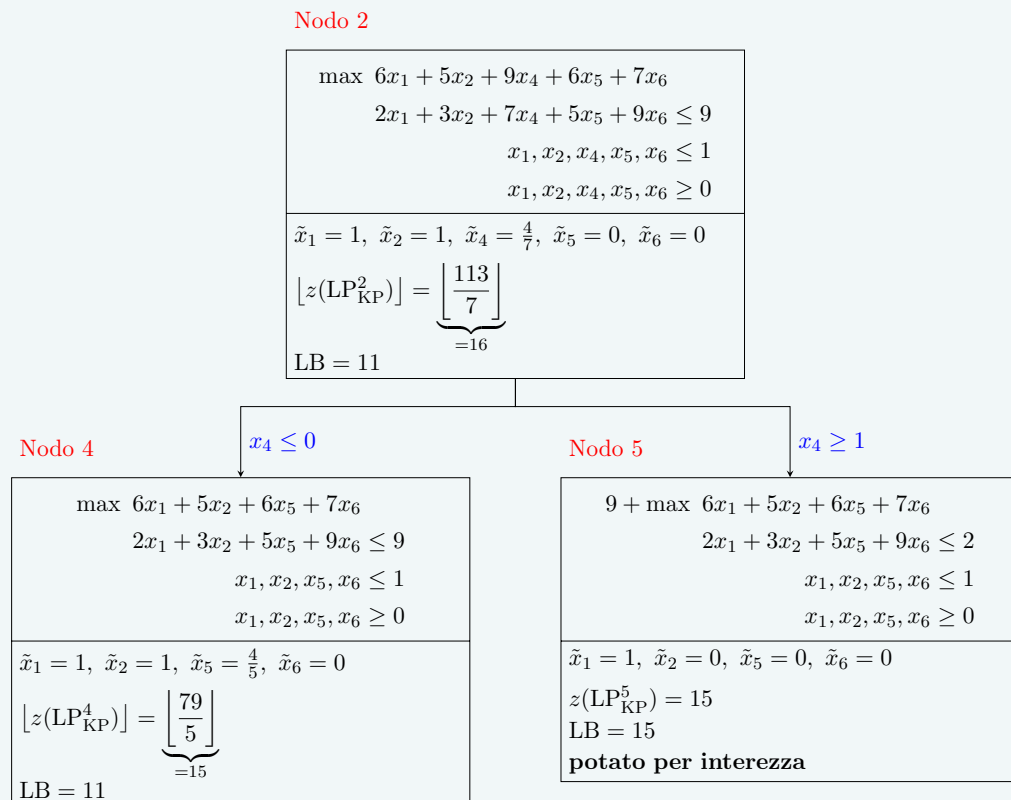
Di conseguenza, il nodo di branching è potato per interezza.

Poiché il lower bound è migliorato, il problema LP_{KP}^3 e il problema LP_{KP}^4 sono potati per upper bound e rimossi dalla lista dei problemi L . Abbiamo:

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^3) \rfloor \leq \text{LB} \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{47}{3} \right\rfloor}_{=15} \leq 15$$

$$\lfloor z(\text{LP}_{\text{KP}}^4) \rfloor \leq \text{LB} \quad \text{poiché} \quad \underbrace{\left\lfloor \frac{79}{5} \right\rfloor}_{=15} \leq 15$$

Alla fine della seconda iterazione, il Nodo 5 migliora il lower bound a $\text{LB} = 15$ ed è potato per interezza; il Nodo 3 e il Nodo 4 sono poi potati per upper bound. L'albero di branch-and-bound corrispondente è:

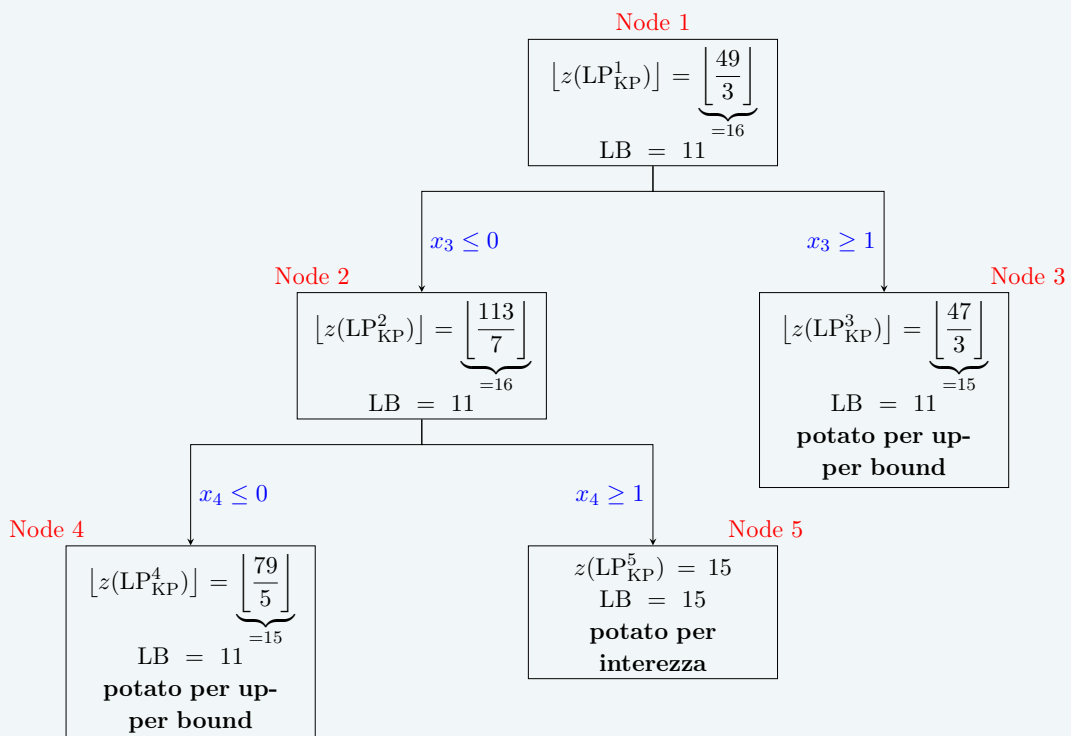


- **Terminazione**

Poiché la lista dei problemi L è vuota, il problema ILP_{KP} è risolto all'ottimo.

Il valore ottimo è $z(ILP_{KP}) = 15$ (il valore del lower bound LB) e una soluzione ottima $\tilde{x}(ILP_{KP})$ è $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 1, \tilde{x}_5 = 0, \tilde{x}_6 = 0$ (la soluzione incumbent $\bar{x}(ILP_{KP})$).

3. Questo è l'**albero di branch-and-bound** della precedente esecuzione dell'**algoritmo di branch-and-bound**, che riporta per ogni nodo di branching risolto il valore ottimo del problema LP_{KP} associato, il lower bound corrente LB e i criteri di potatura.



Problemi di colorazione



Colorazione dei vertici: il branch-and-bound DSATUR

Regole usate in questi esercizi

L'algoritmo di branch-and-bound DSATUR del capitolo «Colorazione dei vertici: il branch-and-bound DSATUR». In un nodo k , con $q(k)$ colori usati, vertici colorati V^k e vertici non colorati U^k :

$$\begin{aligned} sat_k(v) &= |\{col^k(u) : u \in N(v) \cap V^k\}|, & du_k(v) &= |N(v) \cap U^k|, \\ F_k(v) &= \{c \leq q(k) : \text{nessun vicino di } v \text{ ha colore } c\}. \end{aligned} \quad (D1)$$

- (D2) **Bound.** UB = colori dell'euristica DSATUR; K = clique greedy (vertici per grado non crescente, pareggi con l'indice minimo; un vertice entra se è adiacente a tutti i vertici di K), $LB = |K|$, e il vertice di K in posizione i è pre-colorato con il colore i .
- (D3) **Branching.** Il vertice $v \in U^k$ con $sat_k(v)$ massimo, poi $du_k(v)$ massimo, poi indice minimo; un figlio per ogni $c \in F_k(v)$ e uno per il colore nuovo $q(k) + 1$, in ordine crescente di colore.
- (D4) **Potatura.** Un nodo con $q \geq UB$ è potato per bound. Una colorazione completa con $q < UB$ è una nuova soluzione incumbent: $UB \leftarrow q$, i nodi della lista con $q \geq UB$ vengono rimossi, e l'algoritmo si ferma se $UB = LB$.
- (D5) **Visita.** In profondità: la lista è una pila e il figlio con il colore minimo si estrae per primo; i nodi sono numerati nell'ordine di valutazione.

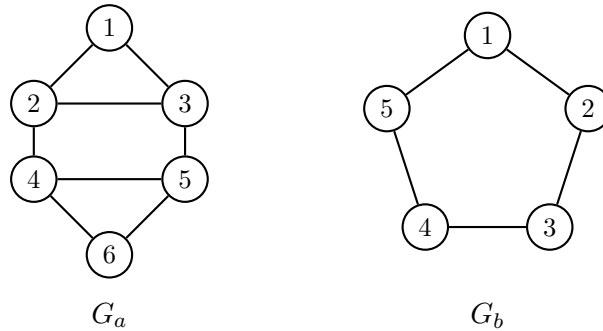
Esercizio 42.1 — Il nodo radice del branch-and-bound DSATUR (P1)

Consideriamo due grafi. Il grafo G_a di un calendario d'esami, con $V = \{1, \dots, 6\}$ e gli spigoli

$$E_a = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\},$$

e il ciclo $G_b = C_5$, con $V = \{1, \dots, 5\}$ e gli spigoli

$$E_b = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$



Domande

1. Eseguire l'euristica *DSATUR* su G_a e dare l'upper bound UB.
2. Trovare la clique greedy di G_a e il lower bound LB, e stabilire se l'algoritmo di branch-and-bound *DSATUR* fa branching.
3. Rispondere alle stesse due domande per G_b .
4. Per G_b , scrivere il nodo radice ed eseguire la prima iterazione dell'algoritmo: il vertice di branching, i suoi colori ammissibili e i figli.

Soluzione

Usiamo le regole (D1)–(D5) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. I passi di *DSATUR* su G_a sono:

passo	1	2	3	4	5	6
v	2	3	1	4	5	6
$sat(v)$	0	1	2	1	1	2
$du(v)$	3	2	0	2	1	0
$col(v)$	1	2	3	2	1	3

Al passo 3 il vertice 1 vede i colori 1 e 2, quindi è scelto prima dei vertici con $sat = 1$. *DSATUR* dà $\{\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 6\}\}$, quindi UB = 3.

2. I gradi sono $\deg(1) = 2$, $\deg(2) = 3$, $\deg(3) = 3$, $\deg(4) = 3$, $\deg(5) = 3$, $\deg(6) = 2$, quindi i vertici si scorrono nell'ordine 2, 3, 4, 5, 1, 6. Entrano i vertici 2, 3, 1, in quest'ordine; a ogni altro vertice manca uno spigolo verso un vertice già in K . Quindi $K = \{1, 2, 3\}$ (nell'ordine di ingresso: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$) e LB = 3. Poiché LB = UB = 3, la colorazione di *DSATUR* è ottima e l'algoritmo si ferma al Passo 0, senza branching: $\chi(G_a) = 3$.

3. I passi di *DSATUR* su G_b sono:

passo	1	2	3	4	5
v	1	2	3	4	5
$sat(v)$	0	1	1	1	2
$du(v)$	2	1	1	1	0
$col(v)$	1	2	1	2	3

$DSATUR$ dà $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, quindi $UB = 3$. Tutti i gradi sono uguali, quindi i vertici si scorrono nell'ordine 1, 2, 3, 4, 5. Entrano i vertici 1, 2, in quest'ordine; a ogni altro vertice manca uno spigolo verso un vertice già in K . Quindi $K = \{1, 2\}$ (nell'ordine di ingresso: $k_1 = 1, k_2 = 2$) e $LB = 2$. Ora $LB = 2 < 3 = UB$: l'algoritmo fa branching.

4. Il nodo 1 colora $col^1(1) = 1, col^1(2) = 2$, con $q(1) = 2$. I vertici 3, 5 hanno $sat = 1$ e lo stesso $du = 1$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 3. Il suo vicino 2 ha colore 2, quindi $F_1(3) = \{1\}$.

- Nodo 2: $col(3) = 1$, con $q(2) = 2 < UB = 3$: il nodo sopravvive.
- Nodo 3: $col(3) = 3$, il colore nuovo, con $q(3) = 3 \geq UB = 3$: potato per bound.

La ricerca continua dal nodo 2: è la stessa ricerca fatta sul ciclo esterno del grafo di Petersen, e termina con 6 nodi e $\chi(G_b) = 3$.

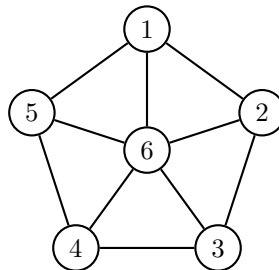
Su G_a la clique $\{2, 3, 1\}$ raggiunge il bound di $DSATUR$: niente branching. Su G_b il bound della clique è 2 e l'albero serve per dimostrare $\chi(C_5) = 3$.

Esercizio 42.2 — Dimostrare un lower bound: la ruota W_5 (P2)

Consideriamo la ruota W_5 (un ciclo su 1, ..., 5 e il mozzo 6), il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 6\}$ e gli spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\},$$

disegnato qui sotto:



Domande

1. Eseguire l'euristica $DSATUR$: dare l'ordine dei vertici, la colorazione e l'upper bound UB .

2. Trovare la clique greedy K , il lower bound LB e il nodo radice dell'algoritmo di branch-and-bound DSATUR.
3. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound DSATUR, iterazione per iterazione.
4. Disegnare l'albero di branch-and-bound e dare il numero cromatico di G con una colorazione ottima.

Soluzione

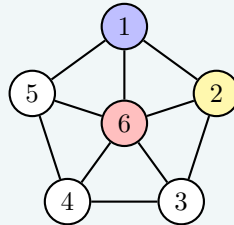
Usiamo le regole (D1)–(D5) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Il vertice scelto a ogni passo, il suo grado di saturazione, il suo grado fra i vertici non colorati e il suo colore sono:

passo	1	2	3	4	5	6
v	6	1	2	3	4	5
$sat(v)$	0	1	2	2	2	3
$du(v)$	5	2	1	1	1	0
$col(v)$	1	2	3	2	3	4

DSATUR dà $\{\{6\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$, quindi $UB = 4$.

2. I gradi sono $\deg(1) = 3$, $\deg(2) = 3$, $\deg(3) = 3$, $\deg(4) = 3$, $\deg(5) = 3$, $\deg(6) = 5$, quindi i vertici si scorrono nell'ordine 6, 1, 2, 3, 4, 5. Entrano i vertici 6, 1, 2, in quest'ordine; a ogni altro vertice manca uno spigolo verso un vertice già in K . Quindi $K = \{1, 2, 6\}$ (nell'ordine di ingresso: $k_1 = 6$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$) e $LB = 3$. Poiché $LB = 3 < 4 = UB$, l'algoritmo fa branching. Il nodo 1 colora $col^1(6) = 1$, $col^1(1) = 2$, $col^1(2) = 3$, con $q(1) = 3$:



3. Iterazione 1

Il nodo 1 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{6\}$, $Q_2 = \{1\}$, $Q_3 = \{2\}$ e $q(1) = 3$. I vertici 3, 5 hanno $sat = 2$ e lo stesso $du = 1$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 3. I suoi colori ammissibili sono $F_1(3) = \{2\}$.

- Nodo 2: $col(3) = 2$, con $q(2) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 3: $col(3) = 4$, il colore nuovo, con $q(3) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 2

Il nodo 2 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{6\}$, $Q_2 = \{1, 3\}$, $Q_3 = \{2\}$ e $q(2) = 3$. I vertici 4, 5 hanno $sat = 2$ e lo stesso $du = 1$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 4. I suoi colori ammissibili sono $F_2(4) = \{3\}$.

- Nodo 4: $col(4) = 3$, con $q(4) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 5: $col(4) = 4$, il colore nuovo, con $q(5) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 3

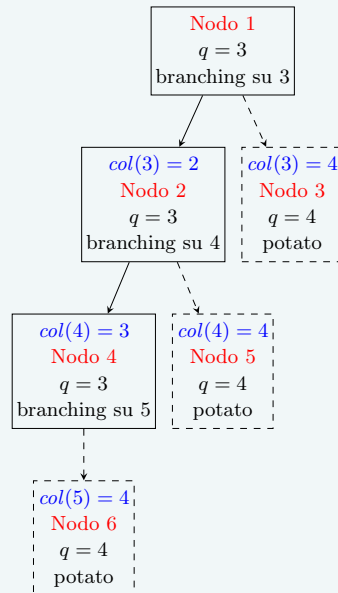
Il nodo 4 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{6\}$, $Q_2 = \{1, 3\}$, $Q_3 = \{2, 4\}$ e $q(4) = 3$. Il vertice 5 è l'unico con $sat = 3$: è il vertice di branching. I suoi colori ammissibili sono $F_4(5) = \emptyset$.

- Nodo 6: $col(5) = 4$, il colore nuovo, con $q(6) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Terminazione

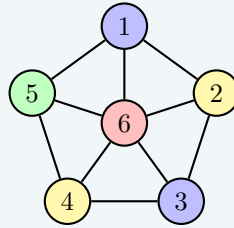
La lista è vuota: la soluzione incumbent di *DSATUR* è ottima.

4. L'albero ha 6 nodi; i nodi potati sono tratteggiati.



Nodo	Padre	Figlio	q	UB	Vertice di branching	Esito
1	–	radice	3	4	3	branching
2	1	$col(3) = 2$	3	4	4	branching
3	1	$col(3) = 4$	4	4	–	potato per bound
4	2	$col(4) = 3$	3	4	5	branching
5	2	$col(4) = 4$	4	4	–	potato per bound
6	4	$col(5) = 4$	4	4	–	potato per bound

Quindi $\chi(G) = 4$, con la colorazione ottima $\{\{6\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$:



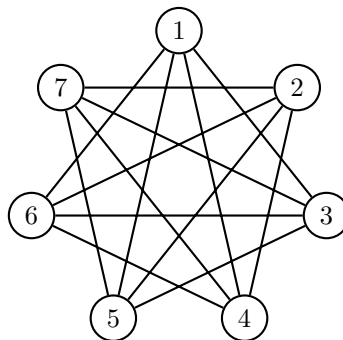
Il bound della clique dà solo 3: l'albero dimostra che il ciclo dispari e il mozzo richiedono un quarto colore.

Esercizio 42.3 — Il complemento del ciclo C_7 (P3)

Consideriamo il complemento del ciclo C_7 (due vertici sono adiacenti se non sono consecutivi sul ciclo $1, 2, \dots, 7$), il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 7\}$ e gli spigoli

$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \\ \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}\},$$

disegnato qui sotto:



Domande

1. Eseguire l'euristica *DSATUR*: dare l'ordine dei vertici, la colorazione e l'upper bound UB.
2. Trovare la clique greedy K , il lower bound LB e il nodo radice dell'algoritmo di branch-and-bound DSATUR.
3. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound DSATUR, iterazione per iterazione.
4. Disegnare l'albero di branch-and-bound e dare il numero cromatico di G con una colorazione ottima.

Soluzione

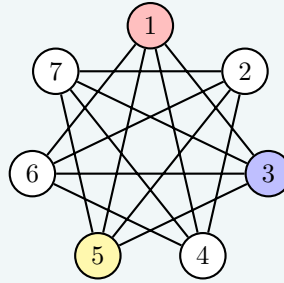
Usiamo le regole (D1)–(D5) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Il vertice scelto a ogni passo, il suo grado di saturazione, il suo grado fra i vertici non colorati e il suo colore sono:

passo	1	2	3	4	5	6	7
v	1	3	5	6	4	2	7
$sat(v)$	0	1	2	2	2	2	3
$du(v)$	4	3	2	2	2	1	0
$col(v)$	1	2	3	3	2	1	4

$DSATUR$ dà $\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{7\}\}$, quindi $UB = 4$.

2. Tutti i gradi sono uguali, quindi i vertici si scorrono nell'ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Entrano i vertici 1, 3, 5, in quest'ordine; a ogni altro vertice manca uno spigolo verso un vertice già in K . Quindi $K = \{1, 3, 5\}$ (nell'ordine di ingresso: $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$) e $LB = 3$. Poiché $LB = 3 < 4 = UB$, l'algoritmo fa branching. Il nodo 1 colora $col^1(1) = 1$, $col^1(3) = 2$, $col^1(5) = 3$, con $q(1) = 3$:



3. Iterazione 1

Il nodo 1 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}$, $Q_2 = \{3\}$, $Q_3 = \{5\}$ e $q(1) = 3$. I vertici 6, 7 hanno $sat = 2$ e lo stesso $du = 2$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 6. I suoi colori ammissibili sono $F_1(6) = \{3\}$.

- Nodo 2: $col(6) = 3$, con $q(2) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 3: $col(6) = 4$, il colore nuovo, con $q(3) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 2

Il nodo 2 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}$, $Q_2 = \{3\}$, $Q_3 = \{5, 6\}$ e $q(2) = 3$. I vertici 4, 7 hanno $sat = 2$ e lo stesso $du = 2$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 4. I suoi colori ammissibili sono $F_2(4) = \{2\}$.

- Nodo 4: $col(4) = 2$, con $q(4) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 5: $col(4) = 4$, il colore nuovo, con $q(5) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 3

Il nodo 4 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}$, $Q_2 = \{3, 4\}$, $Q_3 = \{5, 6\}$ e $q(4) = 3$. I vertici 2, 7 hanno $sat = 2$ e lo stesso $du = 1$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 2. I suoi colori ammissibili sono $F_4(2) = \{1\}$.

- Nodo 6: $col(2) = 1$, con $q(6) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.

- Nodo 7: $col(2) = 4$, il colore nuovo, con $q(7) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 4

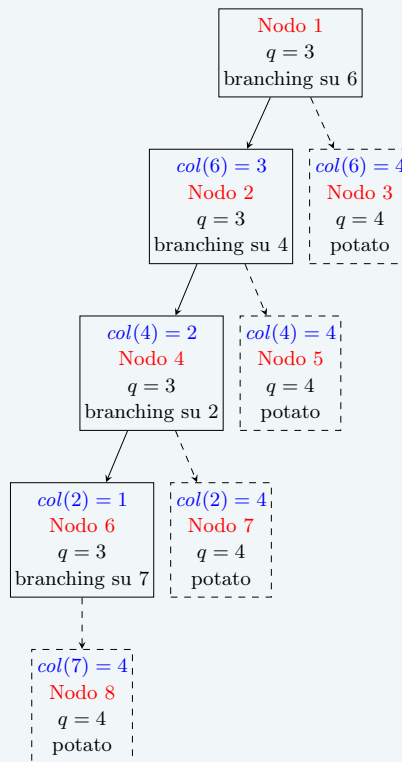
Il nodo 6 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1, 2\}$, $Q_2 = \{3, 4\}$, $Q_3 = \{5, 6\}$ e $q(6) = 3$. Il vertice 7 è l'unico con $sat = 3$: è il vertice di branching. I suoi colori ammissibili sono $F_6(7) = \emptyset$.

- Nodo 8: $col(7) = 4$, il colore nuovo, con $q(8) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Terminazione

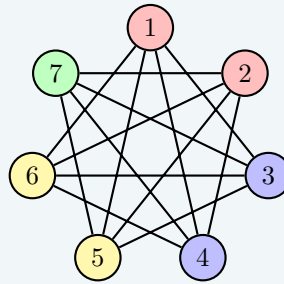
La lista è vuota: la soluzione incumbent di *DSATUR* è ottima.

4. L'albero ha 8 nodi; i nodi potati sono tratteggiati.



Nodo	Padre	Figlio	q	UB	Vertice di branching	Esito
1	—	radice	3	4	6	branching
2	1	$col(6) = 3$	3	4	4	branching
3	1	$col(6) = 4$	4	4	—	potato per bound
4	2	$col(4) = 2$	3	4	2	branching
5	2	$col(4) = 4$	4	4	—	potato per bound
6	4	$col(2) = 1$	3	4	7	branching
7	4	$col(2) = 4$	4	4	—	potato per bound
8	6	$col(7) = 4$	4	4	—	potato per bound

Quindi $\chi(G) = 4$, con la colorazione ottima $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\}$:



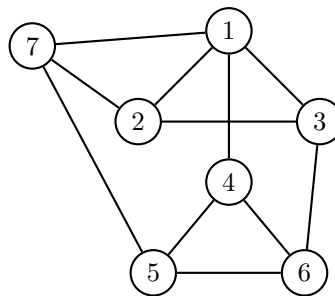
Ogni insieme stabile di G ha al più 2 vertici, quindi il bound degli insiemi stabili $\lceil 7/2 \rceil = 4$ del [Capitolo 4](#) conferma il risultato.

Esercizio 42.4 — Migliorare la soluzione incumbent (P4)

Consideriamo un grafo con 7 vertici e 11 spigoli, il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, 7\}$ e gli spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 7\}, \\ \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}\},$$

disegnato qui sotto:



Domande

1. Eseguire l'euristica *DSATUR*: dare l'ordine dei vertici, la colorazione e l'upper bound UB.
2. Trovare la clique greedy K , il lower bound LB e il nodo radice dell'algoritmo di branch-and-bound DSATUR.
3. Eseguire l'algoritmo di branch-and-bound DSATUR, iterazione per iterazione.
4. Disegnare l'albero di branch-and-bound e dare il numero cromatico di G con una colorazione ottima.

Soluzione

Usiamo le regole (D1)–(D5) del riquadro all'inizio del capitolo.

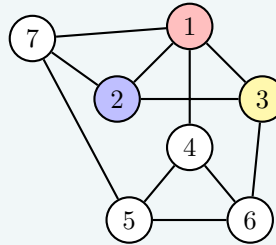
1. Il vertice scelto a ogni passo, il suo grado di saturazione, il suo grado fra i vertici non

colorati e il suo colore sono:

passo	1	2	3	4	5	6	7
v	1	2	3	7	4	5	6
$sat(v)$	0	1	2	2	1	2	3
$du(v)$	4	2	1	1	2	1	0
$col(v)$	1	2	3	3	2	1	4

$DSATUR$ dà $\{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 7\}, \{6\}\}$, quindi $UB = 4$.

2. I gradi sono $\deg(1) = 4, \deg(2) = 3, \deg(3) = 3, \deg(4) = 3, \deg(5) = 3, \deg(6) = 3, \deg(7) = 3$, quindi i vertici si scorrono nell'ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Entrano i vertici 1, 2, 3, in quest'ordine; a ogni altro vertice manca uno spigolo verso un vertice già in K . Quindi $K = \{1, 2, 3\}$ (nell'ordine di ingresso: $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$) e $LB = 3$. Poiché $LB = 3 < 4 = UB$, l'algoritmo fa branching. Il nodo 1 colora $col^1(1) = 1, col^1(2) = 2, col^1(3) = 3$, con $q(1) = 3$:



3. Iterazione 1

Il nodo 1 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}, Q_2 = \{2\}, Q_3 = \{3\}$ e $q(1) = 3$. Il vertice 7 è l'unico con $sat = 2$: è il vertice di branching. I suoi colori ammissibili sono $F_1(7) = \{3\}$.

- Nodo 2: $col(7) = 3$, con $q(2) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 3: $col(7) = 4$, il colore nuovo, con $q(3) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 2

Il nodo 2 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}, Q_2 = \{2\}, Q_3 = \{3, 7\}$ e $q(2) = 3$. I vertici 4, 5, 6 hanno $sat = 1$ e lo stesso $du = 2$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 4. I suoi colori ammissibili sono $F_2(4) = \{2, 3\}$.

- Nodo 4: $col(4) = 2$, con $q(4) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 5: $col(4) = 3$, con $q(5) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 6: $col(4) = 4$, il colore nuovo, con $q(6) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 3

Il nodo 4 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}, Q_2 = \{2, 4\}, Q_3 = \{3, 7\}$ e $q(4) = 3$. I vertici 5, 6 hanno $sat = 2$ e lo stesso $du = 1$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 5. I suoi colori ammissibili sono $F_4(5) = \{1\}$.

- Nodo 7: $col(5) = 1$, con $q(7) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 8: $col(5) = 4$, il colore nuovo, con $q(8) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 4

Il nodo 7 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1, 5\}$, $Q_2 = \{2, 4\}$, $Q_3 = \{3, 7\}$ e $q(7) = 3$. Il vertice 6 è l'unico con $sat = 3$: è il vertice di branching. I suoi colori ammissibili sono $F_7(6) = \emptyset$.

- Nodo 9: $col(6) = 4$, il colore nuovo, con $q(9) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 5

Il nodo 5 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1\}$, $Q_2 = \{2\}$, $Q_3 = \{3, 4, 7\}$ e $q(5) = 3$. I vertici 5, 6 hanno $sat = 1$ e lo stesso $du = 1$: vince l'indice minimo, e il vertice di branching è 5. I suoi colori ammissibili sono $F_5(5) = \{1, 2\}$.

- Nodo 10: $col(5) = 1$, con $q(10) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 11: $col(5) = 2$, con $q(11) = 3 < UB = 4$: il nodo sopravvive.
- Nodo 12: $col(5) = 4$, il colore nuovo, con $q(12) = 4 \geq UB = 4$: potato per bound.

Iterazione 6

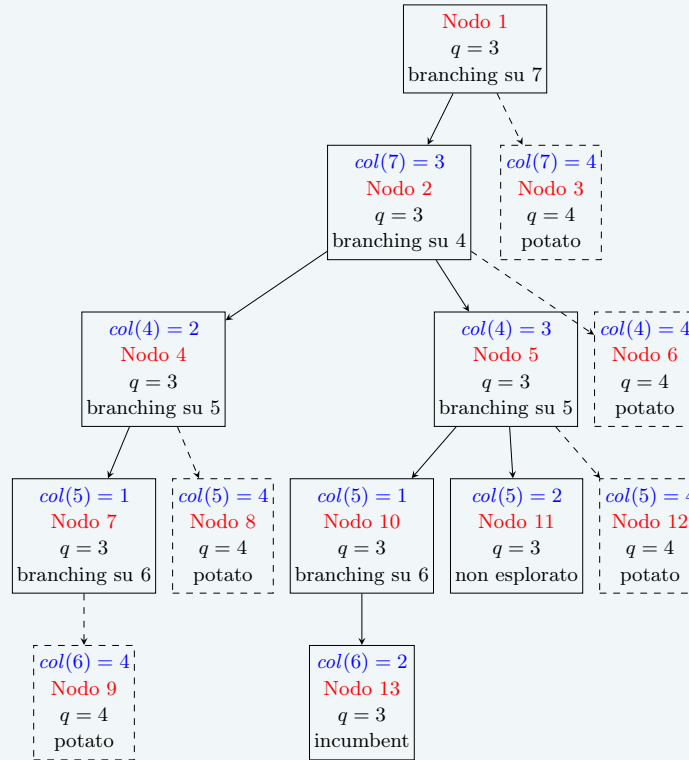
Il nodo 10 viene estratto dalla lista, con $Q_1 = \{1, 5\}$, $Q_2 = \{2\}$, $Q_3 = \{3, 4, 7\}$ e $q(10) = 3$. Il vertice 6 è l'unico con $sat = 2$: è il vertice di branching. I suoi colori ammissibili sono $F_{10}(6) = \{2\}$.

- Nodo 13: $col(6) = 2$, con $q(13) = 3 < UB = 4$: una colorazione completa con meno colori: nuova soluzione incumbent, con $\{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$ e $UB = 3$.

Terminazione

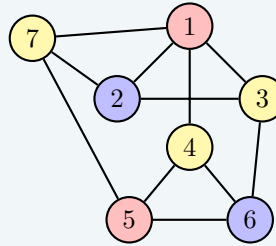
La nuova soluzione incumbent dà $UB = 3$. I nodi della lista con $q \geq UB$ vengono rimossi: il nodo 11. Poiché $UB = LB = 3$, la soluzione incumbent è ottima: **STOP**.

4. L'albero ha 13 nodi; i nodi potati sono tratteggiati.



Nodo	Padre	Figlio	q	UB	Vertice di branching	Esito
1	—	radice	3	4	7	branching
2	1	$col(7) = 3$	3	4	4	branching
3	1	$col(7) = 4$	4	4	—	potato per bound
4	2	$col(4) = 2$	3	4	5	branching
5	2	$col(4) = 3$	3	4	5	branching
6	2	$col(4) = 4$	4	4	—	potato per bound
7	4	$col(5) = 1$	3	4	6	branching
8	4	$col(5) = 4$	4	4	—	potato per bound
9	7	$col(6) = 4$	4	4	—	potato per bound
10	5	$col(5) = 1$	3	4	6	branching
11	5	$col(5) = 2$	3	4	—	non esplorato
12	5	$col(5) = 4$	4	4	—	potato per bound
13	10	$col(6) = 2$	3	3	—	nuova incumbent

Quindi $\chi(G) = 3$, con la colorazione ottima $\{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$:



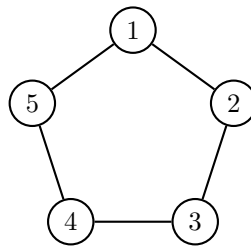
Qui *DSATUR* non è ottima: l'algoritmo di branch-and-bound migliora la soluzione incumbent da 4 a 3 colori e si ferma appena UB raggiunge il bound della clique.

Esercizio 42.5 — Il branching senza simmetrie (P5)

Consideriamo il ciclo C_5 , con $V = \{1, \dots, 5\}$ e gli spigoli

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\},$$

disegnato qui sotto. La sua clique greedy è $K = \{1, 2\}$, quindi il nodo radice colora $col^1(1) = 1$ e $col^1(2) = 2$.



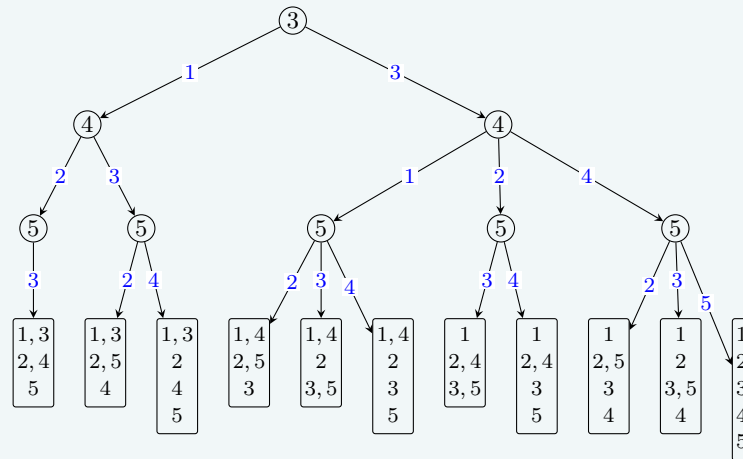
Domande

1. Disegnare l'albero dell'algoritmo di branch-and-bound *DSATUR* *senza potatura* (nessun upper bound): in ogni nodo, il vertice di branching e un figlio per ogni colore ammissibile e per il colore nuovo. Contarne i nodi e le foglie.
2. Elencare le partizioni di V date dalle foglie, per numero di colori, e stabilire se sono tutte le partizioni di V in insiemi stabili.
3. Contare gli assegnamenti dei cinque colori $1, \dots, 5$ ai vertici senza spigoli con colori uguali, e spiegare la differenza con il numero di foglie.
4. Con l'upper bound $UB = 3$ di *DSATUR* e la regola di potatura, contare i nodi dell'albero.

Soluzione

Usiamo le regole (D1)–(D5) del riquadro all'inizio del capitolo.

1. Ogni nodo interno mostra il suo vertice di branching, ogni arco il colore assegnato a quel vertice (in blu), ogni foglia le sue classi di colore, una per riga:



L'albero ha 19 nodi e 11 foglie.

2. Le foglie, per numero di colori:

colori	foglie	partizioni
3	5	$\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$ $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$ $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$ $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5\}\}$ $\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$
4	5	$\{\{1\}, \{2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$ $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{5\}\}$ $\{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}$ $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$ $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\}$
5	1	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

Le 11 foglie danno 11 partizioni diverse, e l'enumerazione di tutte le partizioni di V in insiemi stabili dà le stesse 11: ogni soluzione ammissibile compare esattamente una volta, come afferma la proposizione sul branching senza simmetrie.

3. Per enumerazione, 1020 assegnamenti. Una partizione con q classi si può etichettare con $5 \cdot 4 \cdots (5 - q + 1)$ scelte ordinate di colori, quindi

$$5 \cdot 60 + 5 \cdot 120 + 1 \cdot 120 = 1020.$$

Le colorazioni etichettate contengono ogni partizione molte volte, con i colori rinominati; l'albero contiene ciascuna una volta sola.

4. Con la potatura restano 6 nodi invece di 19: ogni nodo con $q = 3$ è potato, e la ricerca dimostra $\chi(C_5) = 3$ lungo un solo cammino, come nel primo esercizio di questo capitolo.

Senza potatura, l'albero di C_5 ha 11 foglie, una per ogni partizione in insiemi stabili, contro 1020 colorazioni etichettate; con $UB = 3$ restano solo 6 nodi.